ЛИТЕРАТУРА

1. **Mason G.** Two theorems on groups of characteristic 2-type.— Pacific J. Math., 1975, v. 57, N 1, p. 233—253.
2. **Подуфалов Н. Д.** О конечных простых группах с 3-скованными 3-локальными подгруппами.— Алгебра и логика, 1981, т. 20, № 2, с. 183—206.
3. **Glauberman G.** Factorizations in local subgroups of finite groups.— Regional conference series in mathematics, N 33, AMS, Providence, 1977.
4. **Gorenstein D.** Finite groups. New York: Harper and Row, 1968.
5. **Белоногов В. А.** Нормальные дополнения и сопряженность инволюций в конечной группе.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 1, с. 22—38.
6. **Higman G.** Odd characterizations of finite simple groups.— Michigan Univ., 1968.
7. **Подуфалов Н. Д.** О конечных простых группах, содержащих сильно изолированные подгруппы.— Мат. сб., 1976, т. 100, № 3, с. 447—454.
8. **Сыскин С. А.** О действии группы $L_2(q)$ на 2-группе.— Алгебра и логика, 1979, т. 18, № 2, с. 224—231.
9. **Stellmacher B.** Über endliche Gruppen mit einer 2-lokalen Untergruppe, die kein element der ordnung 6 enthält.— J. Algebra, 1978, v. 50, N 1, p. 175—189.
10. **Gaschütz W.** Zur Erweiterungstheorie der endlichen Gruppen.— J. reine angew. Math., 1952, v. 190, p. 93—107.
11. **Gorenstein D., Lyons R.** Nonsolvable finite groups with solvable 2-local subgroups.— J. Algebra, 1976, v. 38, N 2, p. 453—522.
12. **Кабанов В. В., Мазуров В. Д., Сыскин С. А.** Конечные простые группы, силовские 2-подгруппы которых обладают экстраспециальной подгруппой индекса 2.— Мат. заметки, 1973, т. 14, № 1, с. 127—132.
13. **Ситников В. М.** Конечные группы с силовской 2-подгруппой, содержащей самоцентрализующуюся элементарную абелеву подгруппу порядка 8.— Мат. заметки, 1974, т. 16, № 6, с. 899—906.
14. **Baumann B.** Endliche Gruppen mit einer 2-zentralen Involution deren Zentralizator 2-abgeschlossen ist.— Ill. J. Math., 1978, v. 23, N 1, p. 97—131.
15. **Подуфалов Н. Д.** Конечные простые группы без элементов порядка 6 и 10.— Алгебра и логика, 1975, т. 14, № 1, с. 79—85.
16. **Махнёв А. А.** О конечных группах с централизатором порядка 6.— Алгебра и логика, 1977, т. 16, № 4, с. 432—442.
17. **Мазуров В. Д.** О централизаторах инволюций в простых группах.— Мат. сб., 1974, т. 93, № 4, с. 529—539.
18. **Подуфалов Н. Д.** Конечные простые группы без элементов порядка 6.— Алгебра и логика, 1977, т. 16, № 2, с. 200—203.
19. **Gilman R., Gorenstein D.** Finite groups with Sylow 2-subgroups of class two.— Trans. Amer. Math. Soc., 1975, v. 207, p. 1—101; 103—126.
20. **Goldschmidt D. M.** 2-fusion in finite simple groups.— Ann. Math., 1974, v. 99, N 1, p. 70—117.
21. **Goldschmidt D. M.** A conjugation family for finite groups.— J. Algebra, 1970, v. 16, N 1, p. 138—142.
22. **Дураков Б. К.** Конечные группы с заданными централизаторами элементов порядка 3. I, II.— Новосибирск, Редкол. Сиб. мат. журн., 1975, ч. I. 35 с.; Библиогр. 26 назв., ч. II. 34 с. Библиогр. 27 назв. (Рукописи деп. в ВИНИТИ 30.20.75; ч. I. № 3140—75 Деп., ч. II. № 3141—75 Деп.).
23. **Baumann B.** Endliche nichtauflösbare Gruppen mit einer nilpotenten maximalen Untergruppen.— J. Algebra, 1976, v. 38, N 1, p. 119—135.

Поступила в редколлегию 20 мая 1981 г.

РАЗРЕШИМОСТЬ И НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР И АЛГЕБР ТИПА (—1,1)

С. В. ПЧЕЛИНЦЕВ

В теории колец важное место отводится изучению связи между понятиями разрешимости и нильпотентности. В случае конечномерных алгебр Ли над полем характеристики 0 ситуация полностью выясняется следующей хорошо известной теоремой: если идеал R алгебры L разрешим, то идеал RL нильпотентен, в частности, идеал R^2 нильпотентен. Интерес к изучению разрешимых альтернативных алгебр определяется, прежде всего, следующими классическими результатами: а) существует разрешимая, но не нильпотентная альтернативная алгебра (Дорофеев, 1960); б) всякая альтернативная ниль-алгебра ограниченного индекса с естественными ограничениями на характеристику разрешима (Жевлаков, 1962).

До сих пор изучение разрешимости и нильпотентности в альтернативных алгебрах проходило в рамках тех или иных условий конечности. Поскольку результаты такого сорта довольно хорошо известны (см., например, [1]), отметим лишь один из них, полученный сравнительно недавно: всякая разрешимая подалгебра конечно порожденной альтернативной алгебры над полем характеристики 0 нильпотентна (Шестаков, 1977).

Всюду в дальнейшем под «алгеброй» мы понимаем алгебру над ассоциативным и коммутативным кольцом Φ с единицей 1. Кроме того, будем считать, что кольцо Φ содержит элемент 1/6, хотя легко понять, что все результаты остаются справедливыми и для алгебр, аддитивные группы которых не содержат элементов порядка 2 и 3.

Разд. 1 посвящен изучению разрешимых альтернативных алгебр. Прежде всего отметим теорему, выясняющую степень отклонения разрешимости от нильпотентности.

Теорема А. *Пусть A — альтернативная алгебра, I — ее разрешимый идеал. Тогда существует нильпотентный идеал $\mathcal{J}$ алгебры A такой, что $I/\mathcal{J}$ является тривиальным идеалом, содержащимся в полном центре фактор-алгебры $A/\mathcal{J}$.*

Другим результатом о разрешимых алгебрах, имеющим непосредственное отношение к строению ниль-алгебр ограниченного индекса, является

Теорема В. *Пусть A — альтернативная алгебра, разрешимая индекса n. Тогда существуют числа $f(n)$ и $g(n)$ такие, что*

$$(A^2)^{f(n)} = 0, \quad (A^{g(n)})^3 = 0.$$

В связи с этой теоремой заметим, что существует альтернативная алгебра, удовлетворяющая тождествам

$$x^3 = 0, \ (xy)(zt) \cdot u = u \cdot (xy)(zt) = 0,$$

любая степень которой имеет ненулевое умножение (соответствующий пример построен в § 3).

В разд. 2 изучаются разрешимые и ниль-алгебры типа $(-1,1)$. Основным результатом в разделе является теорема, позволяющая сводить вопросы о нильпотентности алгебр типа $(-1,1)$ непосредственно к теории ассоциативных алгебр, а именно, справедлива

Теорема С. *Пусть A — алгебра типа $(-1,1)$. Если всякий ассоциативный фактор алгебры A нильпотентен, то алгебра A разрешима; более того, ее квадрат нильпотентен.*

Отсюда, в частности, для алгебр типа $(-1,1)$ получается аналог теоремы Нагата — Хигмана, причем при тех же ограничениях на характеристику, и в ассоциативном случае (для сравнения см. [2]). Кроме того, из теоремы С вытекает нильпотентность квадрата любой разрешимой алгебры типа $(-1,1)$.

Хотя разрешимые алгебры в многообразиях альтернативных алгебр и алгебр типа $(-1,1)$ имеют много общего, существуют и некоторые принципиальные различия в их строении. Так, пример алгебры A типа $(-1,1)$, построение которой приведено в разд. 3, показывает, что для любого n в A существует разрешимая индекса n подалгебра B такая, что индексы разрешимости любой ее степени $B^k (k > 1)$ совпадают и равны $n-1$.

В заключение отметим, что ассоциаторный идеал указанной алгебры A не нильпотентен, даже не разрешим. Таким образом, теорема из работы [3] о нильпотентности ассоциаторного идеала всякой конечно порожденной алгебры типа $(-1,1)$ не может быть обобщена на произвольные алгебры типа $(-1,1)$.

1. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

Всюду в этом разделе, если не оговорено противное, A — альтернативная алгебра, $\mathfrak{A}$ — свободная альтернативная алгебра от счетного множества свободных порождающих $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$.

Пусть $X \subseteq A$, $I \lhd A$. Тогда $\widehat{X}$ — идеал алгебры A, порожденный множеством X;

$$A' = [\widehat{A, A}];\ D(A) = (\widehat{A, A, A});$$

$$[X]_1 = X_{\langle 1\rangle} = X_{[1]} = X;\ [X]_{n+1} = [[X]_n, X];$$

$$X_{\langle n+1\rangle} = X_{\langle n\rangle} \cdot X;\ X_{[n+1]} = X_{[n]} \cdot X + X \cdot X_{[n]};$$

$$\mathrm{Ann}_0 I = 0;\ \mathrm{Ann}_{n+1} I = \{x \in A \,|\, x \cdot I + I \cdot x \subseteq \mathrm{Ann}_n I\}.$$

Легко проверить, что множества $I_{\langle n\rangle}$, $I_{[n]}$, $\mathrm{Ann}_n I$ являются идеалами алгебры A.

Лемма 1. (см. [5]). *Во всякой алгебре Мальцева $\mathscr{M}$ функция*

$$g_x(y, z, t, v) = \mathscr{J}(\mathscr{J}(yz, t, x) + 3(xt)(yz), x, v) -$$
$$- \mathscr{J}(\mathscr{J}(xy, z, x) + 3(xz)(xy), t, v),$$

где $\mathscr{J}(a, b, c) = (ab)c + (bc)a + (ca)b$, кососимметрична относительно y, z, t, v. Далее, для любых $y, z, t, v \in \mathscr{M}^2$

$$g_x(y, z, t, v) = 0.$$

Кроме того, если $G(\mathscr{M})$ — T-идеал алгебры $\mathscr{M}$, порожденный функцией g_x, то $(G(\mathscr{M}))^3 = 0$.

Лемма 2. *Для любого n существует $N = N(n)$ такое, что*

$$[A]_N \subseteq G(A^{(-)}) + (A^2)^n.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что на основании тождества

$$[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 6(x, y, z) \tag{1}$$

функция Филиппова g_x алгебры $A^{(-)}$ может быть записана в алгебре A следующим образом:

$$g_x(y, z, t, v) = 36 \cdot \{(([y, z], t, x) + 1/2 \cdot [[x, t], [y, z]], x, v) -$$
$$- (([x, y], z, x) + 1/2 \cdot [[x, z], [x, y]], t, v)\}.$$

Используя запись $x \equiv 0$, если $x \in G(A^{(-)}) + A_{(2)}$, получаем

$$[x, y]xR_zR_tR_v \equiv 0.$$

Поэтому для любого $w \in A^2$ имеем

$$[w, y]R_xR_zR_tR_v \equiv 0.$$

Полагая последовательно $w = [a, b]$, $w = [ab, c]$, ввиду тождества (1) получаем

$$(ab, c, d)R_xR_yR_zR_t \equiv 0,$$

т. е.

$$A_{\langle 8\rangle} \subseteq G(A^{(-)}) + A_{(2)}.$$

Так как всякая правонильпотентная индекса n альтернативная алгебра нильпотентна индекса $\leqslant n^2$, то для любого $k \geqslant 64$ $A_{[k]} \subseteq A_{\langle 8\rangle}$, следовательно,

$$A_{[k]} \subseteq G(A^{(-)}) + A_{(2)}.$$

Это соотношение в свободной алгебре $\mathfrak{A}$ может быть записано в виде

$$x_1T_{x_2} \ldots T_{x_k} = g(x_1, \ldots, x_k) + \sum_i x_1\xi_iT_{v_iw_i}, \tag{2}$$

где $g(x_1, \ldots, x_k) \in G(\mathfrak{A}^{(-)})$, ξ_i — операторные слова, $v_i, w_i \in \mathfrak{A}$. Отсюда индукцией по n легко показать, что $N(n) \leqslant k \cdot (n - 1)$. Действительно, $N(2) \leqslant k$. Далее, полагая $S_x = R_x - L_x$, имеем в силу (2)

$$[A]_{N(n)+k} = [A]_{N(n)} \cdot S_A^k \subseteq \left(G\left(A^{(-)}\right) + (A^2)^n\right) \cdot S_A^k \subseteq G\left(A^{(-)}\right) + (A^2)^n \cdot S_A^k \subseteq$$
$$\subseteq G\left(A^{(-)}\right) + (A^2)^{n+1},$$

следовательно, $N(n+1) \leqslant N(n) + k \leqslant k(n-1) + k \leqslant kn$. Лемма доказана.

Следствие. *Всякая разрешимая альтернативная алгебра, удовлетворяющая тождеству* $g_x(y, z, t, v) = 0$, *нильпотентна.*

Справедливость этого утверждения немедленно вытекает из доказательства леммы 2 и упражнения 2 на с. 200 [1].

Для дальнейшего нам потребуется ряд тождеств, справедливых в любой правоальтернативной алгебре [6, 8]:

$$(vx, y, z) + (v, x, [y, z]) = v(x, y, z) + (v, y, z)x, \tag{3}$$

$$(v, x^2, y) = 2(v, x, y)x + (v, x, [y, x]), \tag{4}$$

$$((v, x, y), x, y) + (v, x, y)[x, y] = 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}((v, x, y), z, t) = ((v, z, t), x, y) + (v, (x, z, t), y) + (v, x, (y, z, t)) + \\ + (v, x, y[z, t]) - (v, x, y)[z, t] - (v, x, [z, t])y.\end{aligned} \tag{6}$$

Лемма 3. *Если* $B \lhd A^{(-)}$, *то* $(\widehat{B})_{[2n-1]} \subseteq \widehat{(B_{[n]})}$.

Доказательство проведем индукцией по n. Основание индукции при $n = 1$ верно. Положим $C = B_{[n]}$, $I = \widehat{B}$. Сделав индуктивное предположение, заметим, что достаточно доказать следующее утверждение: если $BC = CB = 0$, то имеет место включение $C \subseteq \mathrm{Ann}_2 I$.

Доказательство этого факта разобьем на ряд пунктов.

(i) $\widehat{B} = B + BA$.

В силу тождества (1) $(B, A, A) \subseteq B$, откуда и следует указанное соотношение

(ii) $(C, B, A) \subseteq C$.

Докажем индукцией по k более общий факт:

$$(B_{[k]}, B, A) \subseteq B_{[k]} + B_{[k+1]}.$$

Основание индукции очевидно. Сделав индуктивное предположение, воспользуемся тождеством (3):

$$\begin{aligned}(B_{[k]} \cdot B, B, A) \subseteq B_{[k]} \cdot (B, B, A) + (B_{[k]}, B, A) \cdot B + (B_{[k]}, B, B) \subseteq \\ \subseteq B_{[k]} \cdot B + B_{[k+1]} \cdot B + (B, B_{[k]}, B) \subseteq B_{[k+1]} + B_{[k+2]}.\end{aligned}$$

Аналогично проверяется включение

$$(B \cdot B_{[k]}, B, A) \subseteq B_{[k+1]} + B_{[k+2]},$$

из которого и следует (ii).

(iii) $(C, I, I) = 0$.

Прежде всего, $(C, B, B) = (B, C, B) = 0$. Далее на основании тождества (3)

$$\begin{aligned}(C, B, BA) = (BA, C, B) \subseteq B(A, C, B) + (B, C, B)A + \\ + (B, A, [C, B]) \subseteq B(C, B, A) \subseteq BC = 0,\end{aligned}$$

поэтому в силу (i)

$$(C, B, I) = 0.$$

Применяя теперь левое тождество Муфанг, имеем

$$(C, BA, I) \subseteq (A, BC, I) + A(C, B, I) + C(A, B, I) \subseteq CB = 0,$$

откуда и вытекает (iii).

(iv) $(CI)I = 0$, $I(IC) = 0$.

Прежде всего, в силу (iii)

$$(CI)B = C(IB) = C(BI) = (CB)I = 0,$$

следовательно,

$$\begin{aligned}(CI)(BA) = C(I \cdot BA) = C(B \cdot BA) + C(BA \cdot BA) \subseteq \\ \subseteq C(BI) + C(BA \cdot I) \subseteq C(BA \cdot I) \subseteq \\ \subseteq C(B \cdot AI) \subseteq C(BI) = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, $(CI)I = 0$. Аналогично $I(IC) = 0$.

(v) $(IC)I = 0$, $I(CI) = 0$.

Ясно, что в силу (iii) $(IC)B = 0$. Учитывая левое тождество Муфанг, преобразуем выражение $(IC)(BA)$:

$$(IC)(BA) \subseteq (IC)B \cdot A + (IC, B, A) \subseteq (IC, B, A) \subseteq (IA, B, C) +$$
$$+ C(I, B, A) + A(I, B, C) \subseteq (I, B, C) + A(I, B, C) + CB = 0$$

в силу (iii). Тем самым $(IC)I = 0$. Наконец, на основании (iii) имеем $I(CI) \subseteq (IC)I + (I, C, I) = 0$.

(vi) $C \subseteq \mathrm{Ann}_2 I$.

Это утверждение вытекает из (iv) и (v), что и завершает доказательство леммы.

Теорема 1. *Пусть A — альтернативная алгебра, I — ее разрешимый идеал. Тогда идеал $\widehat{[I, A]}$ нильпотентен.*

Доказательство. Положим $I_0 = [I, A]$, $\bar{I}_0$ — подалгебра алгебры A, порожденная множеством I_0. Покажем теперь, что алгебра $\bar{I}_0$ нильпотентна. В силу следствия из леммы 2 достаточно доказать, что алгебра $\bar{I}_0$ удовлетворяет тождеству $g_x = 0$.

Так как $(a^2, b, c) = a \circ (a, b, c)$, то функция g_x в алгебре A обладает свойством

$$g_x(y, z, t, v^2) = g_x(y, z, t, v) \circ v.$$

Отсюда ввиду включений $[\bar{I}_0, \bar{I}_0] \subseteq I_0 \subseteq [A, A]$ и леммы 1 имеем

$$g_x(\bar{I}_0, \bar{I}_0, \bar{I}_0, \bar{I}_0) \subseteq \widehat{[g_x(I_0, I_0, I_0, I_0)]} = 0.$$

Итак, доказано, что алгебра $\bar{I}_0$ нильпотентна, следовательно, существует число n такое, что $(I_0)_{[n]} = 0$. Поскольку I_0 — идеал в алгебре $A^{(-)}$, то на основании леммы 3 идеал $\widehat{I}_0$ нильпотентен. Теорема доказана.

Для дальнейшего нам потребуется еще одно вспомогательное утверждение. Рассуждения удобно проводить в рамках правоальтернативных алгебр, поскольку нас интересует также случай алгебр типа $(-1,1)$.

Пусть A — правоальтернативная алгебра. Будем писать $x \underset{n}{\equiv} y$, если

$$(((x - y)\underbrace{A^2) \ldots)A^2}_{n} = 0.$$

Если $x \underset{n}{\equiv} y$, то для любого $z \in A$ $xz \underset{n}{\equiv} yz$. Далее, если $X \subseteq A$, то запись $X \underset{n}{\equiv} 0$ означает, что для любого $x \in X : x \underset{n}{\equiv} 0$.

Пусть $v, x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m \in A$. Положим

$$f_v^{(0)} = v, \ \Delta_0 = 1$$

и определим по индукции

$$f_v^{(m+1)}(x_1, y_1, \ldots, x_{m+1}, y_{m+1}) = \left(f_v^{(m)}(x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m), x_{m+1}, y_{m+1}\right),$$
$$\Delta_{m+1}(x_1, y_1, \ldots, x_{m+1}, y_{m+1}) = \Delta_m(x_1, y_1, \ldots, x_m, y_m) \cdot (x_{m+1}y_{m+1}).$$

Лемма 4. *Если $\mathscr{J}$ — идеал правоальтернативной алгебры A такой, что $\mathscr{J} \cdot A' + A' \cdot \mathscr{J} \underset{n}{\equiv} 0$, то для любых $v \in \mathscr{J}$; $x_i, y_i \in A$*

$$f_v^{(m)}(x_1^2, y_1^2, \ldots, x_m^2, y_m^2) \underset{n}{\equiv} 4^m f_v^{(m)} \cdot \Delta_m.$$

Доказательство. Тождества (3)—(6) в наших обозначениях можно переписать следующим образом:

$$(vx, y, z) \underset{n}{\equiv} (v, y, z)x, \quad (v, x^2, y) \underset{n}{\equiv} 2(v, x, y)x,$$
$$((v, x, y), x, y) \underset{n}{\equiv} 0, \quad ((v, x, y), z, t) \underset{n}{\equiv} ((v, z, t), x, y).$$

Из этих соотношений вытекает $((v, x, y), x, z) \underset{n}{\equiv} 0$. Используя указанные соотношения, доказательство леммы проведем индукцией по числу m. Имеем

$$f_v^{(m+1)}\left(x_1^2, y_1^2, \ldots, x_{m+1}^2, y_{m+1}^2\right) \underset{n}{\equiv} 4^m\left(f_v^{(m)} \cdot \Delta_m, x_{m+1}^2, y_{m+1}^2\right) \underset{n}{\equiv}$$

$$\underset{n}{\equiv} 4^{m+1}\left(\left(\left(f_v^{(m+1)} \cdot \Delta_m\right) x_{m+1}\right) y_{m+1} \underset{n}{\equiv} 4^{m+1}\left(f_v^{(m+1)} \cdot \Delta_m\right)\left(x_{m+1} y_{m+1}\right) +\right.$$

$$+ 4^{m+1}\left(f_v^{(m+1)} \cdot \Delta_m, x_{m+1}, y_{m+1}\right) \underset{n}{\equiv} 4^{m+1}\left\{f_v^{(m+1)} \cdot \Delta_{m+1} + \left(f_v^{(m+1)}, \Delta_m, x_{m+1} y_{m+1}\right) +\right.$$

$$\left.+ \left(f_v^{(m+1)} \cdot \Delta_m, x_{m+1}, y_{m+1}\right)\right\} \underset{n}{\equiv} 4^{m+1}\left\{f_v^{(m+1)} \cdot \Delta_{m+1} + \left(f_v^{(m+1)}, \Delta_m, x_{m+1}\right) y_{m+1} +\right.$$

$$\left.+ \left(f_v^{(m+1)}, \Delta_m, y_{m+1}\right) x_{m+1} + \left(f_v^{(m+1)}, x_{m+1}, y_{m+1}\right) \cdot \Delta_m\right\} \underset{n}{\equiv} 4^{m+1} f_v^{(m+1)} \cdot \Delta_{m+1},$$

что и требовалось.

Теорема 2. *Пусть A — разрешимая альтернативная алгебра. Тогда идеал A^2 нильпотентен.*

Доказательство. В силу теоремы 1 коммутант A' нильпотентен. Пусть $A'_{[N+1]} = 0$. Докажем индукцией по n следующее утверждение: для любого n, не превосходящего N, существует число $h(n)$ такое, что

$$A'_{[N+1-n]} \underset{h(n)}{\equiv} 0.$$

Положим $h(0) = 1$. Допустим, что число $h(n)$ уже определено, и рассмотрим идеал $\mathcal{J} = A'_{[N-n]}$. Так как $\mathcal{J} \cdot A' + A' \cdot \mathcal{J} \underset{h(n)}{\equiv} 0$, то в силу леммы 4

$$f_{\mathcal{J}}^{(m)}\left(x_1^2, y_1^2, \ldots\right) \underset{h(n)}{\equiv} 0,$$

где $r+1$ — индекс разрешимости алгебры A, $m = 2^r$. В самом деле, $f_{\mathcal{J}}^{(m)}\left(x_1^2, y_1^2, \ldots\right) \underset{h(n)}{\equiv} f_{\mathcal{J}}^{(m)}\left(x_1, y_1, \ldots\right) \cdot \Delta_m \subseteq \mathcal{J} \cdot (A^2)^m \subseteq \mathcal{J} \cdot D(A) \subseteq \mathcal{J} \cdot A' \underset{h(n)}{\equiv} 0.$

Пусть $\bar{A} = A^2$. Тогда $\mathcal{J} R_{\bar{A},\bar{A}}^m \underset{h(n)}{\equiv} 0$, где $R_{x,y} = R_x R_y - R_{xy}$. Далее, из доказательства леммы 4 имеем $\mathcal{J}\left[R_x, R_{y,z}\right] \underset{h(n)}{\equiv} 0$, следовательно,

$$\mathcal{J} R_*^{k_1} R_{\bar{A},\bar{A}} R_*^{k_2} \ldots R_*^{k_m} R_{\bar{A},\bar{A}} R_*^{k_{m+1}} \underset{h(n)}{\equiv} 0.$$

Пусть s — индекс нильпотентности алгебры $\bar{A}^2$ (индукция по индексу разрешимости: $(\bar{A})_{(r)} = (A^2)_{(r)} = A_{(r+1)} = 0$). Положим $M = m + s - 1$. Тогда

$$\mathcal{J} R_{\bar{A}}^{2M} = \mathcal{J}\left(R_{\bar{A}}^2\right)^M \subseteq \mathcal{J}\left(R_{\bar{A}^2} + R_{\bar{A},\bar{A}}\right)^M \subseteq \sum_i \mathcal{J} \cdot \xi_i\left(R_{\bar{A}^2}, R_{\bar{A},\bar{A}}\right),$$

где ξ_i — слова длины M. Ясно, что слово ξ_i либо содержит s операторов $R_{\bar{A}^2}$, либо m операторов $R_{\bar{A},\bar{A}}$. Если выполняется первое условие, то $\mathcal{J} \cdot \xi_i \subseteq (\bar{A}^2)^s = 0$; если же имеет место второе условие, то $\mathcal{J} \cdot \xi_i \underset{h(n)}{\equiv} 0$, следовательно, $\mathcal{J} \cdot R_{\bar{A}}^{2M} \underset{h(n)}{\equiv} 0$. Это означает, что можно положить

$$h(n+1) = h(n) + 2M = h(n) + 2^{r+1} + 2s - 2,$$

что и завершает доказательство вспомогательного утверждения. Итак, $A' \underset{h(N)}{\equiv} 0$. Отсюда вытекает, что алгебра $\bar{A}$ правонильпотентна индекса $\leqslant h(N) + 2^r$, а потому $\bar{A}$ нильпотентна индекса $\leqslant (h(N) + 2^r)^2$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 немедленно вытекает

Теорема А. *Пусть A — альтернативная алгебра, I — ее разрешимый идеал. Тогда существует нильпотентный идеал $\mathcal{J}$ алгебры A такой, что $I/\mathcal{J}$ является тривиальным идеалом, содержащимся в полном центре фактор-алгебры $A/\mathcal{J}$.*

В самом деле, достаточно положить $\mathcal{J} = \widehat{[I, A]} + I^2$.

Известно, что всякая конечно порожденная разрешимая альтернативная алгебра нильпотентна. Этот факт допускает следующее обобщение.

Теорема 3. *Всякий конечно порожденный разрешимый идеал альтернативной алгебры нильпотентен.*

Доказательство. В свободной алгебре $\mathfrak{A}$ рассмотрим $I = \widehat{x_1}$. Покажем, что всякое операторное слово ξ алгебры умножений $T(I)$ вида $T_xT_yT_z$ представимо в виде линейной комбинации операторных слов $T_{v_1}T_{v_2}\ldots T_{v_n}$ алгебры $T(\mathfrak{A})$, для каждого из которых существует число i со свойством $v_i \in I^2$. В самом деле, в силу леммы Шестакова [4, лемма 1] слово ξ представимо в виде линейной комбинации слов:

$$T_u;\ T_uT_v;\ T_{x_{i_1}}R_{x_{i_2}}\ldots R_{x_{i_n}}R_w, \tag{7}$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$, u, v, $w \in \mathfrak{A}$. Поскольку элементы x, y, z можно считать одночленами от свободных порождающих, то слова вида (7) имеют тот же состав, что и ξ, следовательно, в каждом из них найдется оператор T_w такой, что $\deg_{x_1}(w) \geqslant 2$, но это и означает, что $w \in I^2$. Отсюда получаем $I_{[3N+1]} \subseteq (I^2)_{[N]}$.

Рассмотрим произвольную альтернативную алгебру A. Пусть $\mathcal{J} = \widehat{x}$ — разрешимый идеал. Тогда ввиду теоремы 2 существует N такое, что $(\mathcal{J}^2)_{[N]} = 0$, следовательно, $\mathcal{J}_{[3N+1]} = 0$, т. е. $\mathcal{J}$ нильпотентен. Поскольку сумма конечного числа нильпотентных идеалов альтернативной алгебры является нильпотентным идеалом, то теорема доказана.

В дальнейшем нам потребуются еще две леммы.

Лемма 5. $[A]_{3n} \circ A \subseteq [A]_n + [A]_n \circ [A]_n$.

Доказательство. Пусть $S_x = R_x - L_x$, $U_x = R_x + L_x$. Так как отображение S_y является дифференцированием алгебры $A^{(+)}$, то

$$[U_x, S_y] = U_{[x,y]}.$$

Индукцией по m теперь легко показать, что

$$S_{y_1}\ldots S_{y_m}U_x = \sum_{k=0}^{m}\sum_{\sigma\in S_m}\alpha_\sigma U_{[[[x,y_{1\sigma}],\ldots],y_{k\sigma}]}S_{y_{(k+1)\sigma}}\ldots S_{y_{m\sigma}}.$$

Отсюда имеем

$$[A]_{3n}\circ A \subseteq [A]_n S_A^{2n} U_A \subseteq \sum_{k=0}^{2n}[A]_n U_{[A]_k} S_A^{2n-k} \subseteq$$

$$\subseteq \begin{cases}[A]_n, & \text{если } k \leqslant n,\\ [A]_n\circ[A]_n, & \text{если } k > n.\end{cases}$$

Лемма 6. $A_{\langle 4n^2+1\rangle} \subseteq (A^2)_{\langle n\rangle} + [\widehat{A}]_n$.

Доказательство. Ясно, что

$$A_{\langle 4n^2+1\rangle} = A\cdot R_A^{4n^2} = A\left(R_A^2\right)^{2n^2} \subseteq A\left(R_{A^2} + R_{A,A}\right)^{2n^2} \subseteq$$

$$\subseteq \sum_i A\cdot\xi_i\left(R_{A^2}, R_{A,A}\right),$$

где ξ_i — операторные слова длины $2n^2$, т. е. $d(\xi_i) = 2n^2$. Покажем, что в слове ξ_i либо имеется n операторов R_{A^2}, либо есть подслово вида $R_{A,A}^{2n}$. В самом деле, пусть

$$\xi_i = \eta_1 R_{A^2}\eta_2\ldots\eta_k R_{A^2}\eta_{k+1},\ \text{где } \eta_j = R_{A,A}^{m_j}.$$

Допустим, что число операторов вида R_{A^2} в слове ξ_i меньше n, т. е. $k \leqslant n-1$. Если $m_j \leqslant 2n-1$, то

$$d(\xi_i) = k + \sum_{j=1}^{k+1} m_j \leqslant k + (k+1)(2n-1) \leqslant n-1 + n(2n-1) < 2n^2.$$

Итак, если слово ξ_i содержит n операторов R_{A^2}, то $A\xi_i \subseteq (A^2)_{\langle n \rangle}$. Если же слово ξ_i содержит подслово вида $R^{2n}_{A,A}$, то $A\xi_i \subseteq \widehat{A \cdot R^{2n}_{A,A}}$. Используя тождество (1), индукцией по n легко проверить, что $A \cdot R^{2n}_{A,A} \subseteq [A]_n$, следовательно, $A\xi_i \subseteq [A]_n$.

Теорема 4. *Пусть A — разрешимая индекса n альтернативная алгебра. Тогда существует число $f(n)$ такое, что*

$$(A^{f(n)})^3 = 0.$$

Доказательство. Из леммы 2 и теоремы 2 следует, что существует число $N = N(n)$ такое, что $[A]_N \subseteq G(A^{(-)})$. Ввиду леммы 1

$$[[G(A^{(-)}), G(A^{(-)})], G(A^{(-)})] = 0.$$

Положим $I = [A]_N$, $\mathcal{J} = [A]_{3n} + [A]_{3n} \circ A$. Легко понять, что $\mathcal{J} \lhd A$ (лемма 3(i)). Поскольку $I \lhd A^{(-)}$, то из предыдущего на основании тождества Сейгла получаем

$$[[I, I], I] = 0, \ [[[I, I], A], I] = 0.$$

Отсюда в силу тождества (1) имеем

$$(I, I, I) = 0, \ ([I, I], A, I) = 0,$$

следовательно,

$$(I, I, I \circ I) = 0, \ ([I, I], A, I \circ I) = 0.$$

Ввиду леммы 5

$$(I, I, \mathcal{J}) = 0, \ ([I, I], A, \mathcal{J}) = 0.$$

На основании тождества (3) имеем

$$(A\mathcal{J}, I, I) + (A, \mathcal{J}, [I, I]) = A(\mathcal{J}, I, I) + (A, I, I)\mathcal{J},$$

т. е. $(I, I, A)\mathcal{J} = 0$. Аналогично $\mathcal{J}(I, I, A) = 0$, значит,

$$(I, I, A) \subseteq \operatorname{Ann} \mathcal{J}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, легко понять, что

$$(\mathcal{J}, A, A) \subseteq \operatorname{Ann}_2 \mathcal{J}, \ D(A) \subseteq \operatorname{Ann}_3 \mathcal{J}.$$

Далее,

$$\mathcal{J} \cdot R_A^{2^n} \subseteq \operatorname{Ann}_2 \mathcal{J},$$

так как $A^{2^n} \subseteq D(A)$. В силу леммы 6 и теоремы 2 существует число $M = M(n)$ такое, что $A_{\langle M \rangle} \subseteq \mathcal{J}$, значит,

$$A_{\langle M+2^n \rangle} \subseteq \operatorname{Ann}_2 \mathcal{J}.$$

Положим $f(n) = (M + 2^n)^2$. Тогда $A^{f(n)} \subseteq \mathcal{J} \cap \operatorname{Ann}_2 \mathcal{J}$, следовательно, $(A^{f(n)})^3 = 0$, что и требовалось доказать.

Теоремы 2 и 4 объединим в виде следующей теоремы.

Теорема B. *Пусть A — альтернативная алгебра, разрешимая индекса n. Тогда существуют числа $f(n)$ и $g(n)$ такие, что*

$$(A^2)^{f(n)} = 0, \ (A^{g(n)})^3 = 0.$$

2. АЛГЕБРЫ ТИПА (—1, 1)

Всюду в этом разделе A — алгебра типа $(-1,1)$. Обозначения, введенные в разд. 1, остаются в силе. Кроме того, если $I \lhd A$, то положим

$$Z_n(I) = \{z \in A \mid [z, A] \subseteq \operatorname{Ann}_n I\},$$

$$V_n(I) = \{v \in Z_n(I) | v \cdot [A, A] \subseteq \mathrm{Ann}_n I\},$$
$$W_n(I) = \{w \in Z_n(I) | w \cdot [[A, A], A] \subseteq \mathrm{Ann}_n I\}.$$

Так как $\mathrm{Ann}_n I \lhd A$, то рассмотрим $\bar{A} = A/\mathrm{Ann}_n I$; $A \to \bar{A}$ — канонический гомоморфизм. Легко понять, что $\overline{Z_n(I)}$ совпадает с коммутативным центром $Z(\bar{A})$ алгебры $\bar{A}$.

Известно [7], что во всякой алгебре типа $(-1, 1)$ выполняются тождества:

$$[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y + (x, y, z) + (y, x, z), \tag{1}$$
$$([x, y], z, t) = ([z, t], x, y) + [x, (y, z, t)] + [(x, z, t), y], \tag{2}$$
$$[(x, y, [z, t]), w] = 0. \tag{3}$$

Лемма 1. а) $(Z_n(I), A, A) \subseteq Z_n(I)$,
б) $(Z_n(I), A, [A, A]) \subseteq \mathrm{Ann}_n I$,
в) $V_n(I) = \{v \in Z_n(I) | \hat{v} \cdot A' + A' \cdot \hat{v} \subseteq \mathrm{Ann}_n I\}$,
г) $W_n(I) \cdot [A, A] \subseteq W_n(I)$.

Доказательство. Поскольку $\overline{Z_n(I)} = Z(\bar{A})$, то достаточно установить справедливость указанных соотношений при $n = 0$. Пункты а) и б) доказаны в [7].

в) Пусть $v \in Z_n(I)$ и $v \cdot [A, A] = 0$. Тогда на основании б) имеем

$$v \cdot [x, y]z = v[x, y] \cdot z - (v, [x, y], z) = 0,$$
$$v \cdot z[x, y] = v \cdot [x, y]z + v \cdot [z, [x, y]] = 0.$$

Далее, в силу тождества (1)

$$2v(x, x, y) = v \cdot \{[x^2, y] - x \circ [x, y]\} = 0.$$

Поскольку ассоциаторный идеал $D(A)$ линейно порождается элементами вида (x, x, y), то $v \cdot [A, A]A = v \cdot D(A) = 0$. Ясно, что во всякой алгебре справедливо равенство

$$A' = [A, A] + [A, A]A + A' \cap D(A),$$

следовательно, $v \cdot A' + A' \cdot v = 0$. Так как двусторонний аннулятор идеала в алгебре типа $(-1, 1)$ является идеалом, то

$$\hat{v} \cdot A' + A' \cdot \hat{v} = 0.$$

г) Пусть $w \in Z(A)$ и $w \cdot [[A, A], A] = 0$. Тогда для любых $x \in A$, $r \in [A, A]$, $s \in [[A, A], A]$ ввиду тождества (1) и пункта б) имеем

$$[wr, x] = w[r, x] + [w, x]r + (w, r, x) + (r, w, x) = 0,$$

так как $[r, x] \in [[A, A], A]$, $w \in Z(A)$; далее,

$$(wr)s = w(rs) = w(sr) = (ws)r = 0.$$

Лемма доказана.

Пусть I — фиксированный идеал алгебры A. Будем писать $x \underset{n}{\equiv} y$, если $x - y \in \mathrm{Ann}_n I$.

Лемма 2. *Пусть $\mathcal{J} \lhd A$ такой, что $\mathcal{J} \cdot A' + A' \cdot \mathcal{J} \underset{n}{\equiv} 0$. Тогда для любых $v \in \mathcal{J}$, $x_i, y_i \in A$*

$$f_v^{(m)}(x_1^2, y_1^2, \ldots, x_m^2, y_m^2) \underset{n}{\equiv} 4^m f_v^{(m)} \cdot \Delta_m.$$

Доказательство немедленно получается из леммы 4 разд. 1 при $n = 0$.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{A}$ — свободная алгебра типа $(-1, 1)$, порожденная множеством $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$. Всякое операторное слово ξ алгебры умножений $T(\mathfrak{A})$ представимо в виде линейной комбинации операторных слов вида*

$$R_{u_1} \ldots R_{u_r} L_v L_w$$

того же состава, что и ξ, длина которых не превосходит $d(\xi)$.

Доказательство. Если ξ_i — операторные слова одинаковой длины и одного состава, то $\sum_i \alpha_i \xi_i \doteq 0$ означает, что элемент $\sum_i \alpha_i \xi_i$ представим в виде линейной комбинации операторных слов того же состава, что и слова ξ_i, но меньшей длины. Запишем в этих обозначениях следующие тождества, выполняющиеся в алгебре $\mathfrak{A}$:

$$(x, y, t) + (x, t, y) = 0,$$
$$z((xt)y) + z((yt)x) = ((zx)t)y + ((zy)t)x,$$
$$z\{2(x, y, t) + (y, t, x) + (x, t, y) + (t, x, y)\} = 0;$$

в операторной форме относительно t:

$$L_y L_x \equiv [L_x, R_y], \; (L_x R_y + L_y R_x) L_z \equiv 0,$$
$$-2L_y L_x L_z + (L_y R_x + L_x R_y) L_z - (R_x L_y + R_y L_x) L_z + R_x R_y L_z \equiv 0.$$

Из первого соотношения следует

$$\xi \equiv \sum \alpha R_{u_1} \ldots R_{u_r} L_{v_1} \ldots L_{v_s}. \tag{4}$$

Из остальных двух соотношений вытекает

$$-2L_y L_x L_z \equiv R_x L_y L_z + R_y L_x L_z - R_x R_y L_z,$$

следовательно, выполняя преобразования такого сорта, можно уменьшать число s в (4), если $s \geqslant 3$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если* $U \cdot I^n + I^n \cdot U \underset{N}{\equiv} 0$; $(U, I, I) \underset{N}{\equiv} 0$, *то*

$$U \underset{N+3n-2}{\equiv} 0.$$

Доказательство. Рассмотрим операторное слово

$$\xi = T_{x_1} T_{x_2} \ldots T_{x_{3n-2}}.$$

В силу леммы 3 слово ξ линейно выражается через операторные слова

$$R_{w_1} L_{w_2} L_{w_3}, R_{x,y} R_{z_1} \ldots R_{z_m} L_t L_v$$

того же состава, что и ξ. Значит, существует такое число i, что $\deg_X (w_i) \geqslant n$. Пусть $u \in U$, $a_1, \ldots, a_{3n-2} \in I$. Тогда

$$u T_{a_1} \ldots T_{a_{3n-2}} \underset{N}{\equiv} \sum_i u R_{w_1^{(i)}} L_{w_2^{(i)}} L_{w_3^{(i)}},$$

где для любого i найдется j такое, что $w_j^{(i)} \in I^n$.

Докажем, что $u R_x L_y L_z \underset{N}{\equiv} 0$, если хотя бы один из элементов x, y, z лежит в I^n. Если $x \in I^n$, то указанное соотношение тривиально. Если $y \in I^n$, то преобразуем $u R_x L_y$:

$$y(ux) \underset{N}{=} (yu)x - (y, u, x) \underset{N}{\equiv} (u, x, y) + (x, y, u) \underset{N}{\equiv}$$
$$\underset{N}{\equiv} (x, y, u) \underset{N}{\equiv} (xy)u - x(yu) \underset{N}{\equiv} 0.$$

Если же $z \in I^n$, то в силу предыдущего

$$z(y(ux)) = (zy)(ux) - (z, y, ux) \underset{N}{\equiv} -(z, y, ux) \underset{N}{\equiv} (y, ux, z) +$$
$$+ (ux, z, y) \underset{N}{\equiv} -(y, z, ux) \underset{N}{\equiv} -(yz)(ux) + y(z(ux)) \underset{N}{\equiv} 0.$$

Следовательно, $U \underset{N+3n-2}{\equiv} 0$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть* $I = A^2$, $I^n \subseteq D(A)$. *Тогда*

$$V_N(I) \underset{N+(3n-2)n}{\equiv} 0.$$

Доказательство. Пусть $v \in V_N(I)$, $\mathcal{J} = \widehat{v}$. Тогда в силу леммы 1 в) $\mathcal{J} \cdot A' + A' \cdot \mathcal{J} \equiv 0$. Если $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n \in A$, то, применяя лемму 2, получаем

$$f_v^{(n)}\left(x_1^2, y_1^2, \ldots, x_n^2, y_n^2\right) \underset{N}{\equiv} 4^n f_v^{(n)} \cdot \Delta_n \underset{N}{\equiv} 0,$$

так как $\Delta_n \in I^n + D(A) \subseteq D(A) \subseteq A'$. Отсюда, очевидно, имеем

$$f_v^{(n)}(I, \ldots, I) \underset{N}{\equiv} 0.$$

Положив $U = f_v^{(n-1)}(I, \ldots, I)$, заметим, что U находится в условиях леммы 4, следовательно,

$$f_v^{(n-1)}(I, \ldots, I) \underset{N+3n-2}{\equiv} 0.$$

Рассуждая аналогичным образом, получаем

$$v = f_v^{(0)} \underset{N+(3n-2)n}{\equiv} 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть A — алгебра типа $(-1, 1)$. Если всякий ассоциативный фактор алгебры A нильпотентен, то алгебра A разрешима; более того, ее квадрат нильпотентен.*

Доказательство. Обозначим через A_k — подалгебру в A, порожденную множеством $[A]_k$. Пусть $I = A^2$, $I^n \subseteq D(A)$, так как алгебра $A/D(A)$ нильпотентна. Докажем, что идеал I нильпотентен. Доказательство этого факта разобьем на ряд шагов.

(i) $[A]_4 \underset{9n-6}{\equiv} 0.$

Известно [3], что

$$[A]_3 \subseteq \operatorname{Ann} D(A),$$

$$((([A]_4, A, A), A, A), A, A) = 0.$$

Из этих соотношений в силу леммы 4 и вытекает требуемое утверждение.

(ii) Пусть $\bar{A} = A/\operatorname{Ann}_{9n-6} I$. Тогда алгебра $\bar{A}_2$ ассоциативна и коммутативна.

Поскольку присоединенная алгебра $\bar{A}^{(-)}$ является алгеброй Ли, то в силу тождества Якоби и пункта (i) имеем

$$[[\bar{A}]_2, [\bar{A}]_2] \subseteq [[\bar{A}]_3, \bar{A}] \subseteq [\bar{A}]_4 = 0.$$

Далее, учитывая тождества (2) и (3), получаем

$$([\bar{A}]_2, [\bar{A}]_2, [\bar{A}]_2) = 0.$$

Заметим теперь, что во всякой правоальтернативной алгебре множество E такое, что для любых его элементов x, y, z: $[x, y] = 0$, $(x, y, z) = 0$, порождает ассоциативную и коммутативную подалгебру; следовательно, $\bar{A}_2$ ассоциативна и коммутативна.

Поскольку

$$\bar{A}_2 = A_2 + \operatorname{Ann}_{9n-6} I/\operatorname{Ann}_{9n-6} I,$$

то $\bar{A}_2$ нильпотентна. Без ограничения общности можно считать, что

$$(A_2)^n \subseteq \operatorname{Ann}_{9n-6} I.$$

(iii) Если $(A_3)^{k+1} + (A_3)^k (A_2)^{l+1} \underset{N}{\equiv} 0$, где $N \geqslant 9n-6$, то

$$(A_3)^{k+1} + (A_3)^k (A_2)^l \underset{N+(3n-2)n}{\equiv} 0.$$

В силу (i) имеем $[A]_3 \subseteq Z_N(I)$. Поскольку $Z_N(I)$ является подалгеброй в A, то $A_3 \subseteq Z_N(I)$, значит, $(A_3)^k \subseteq W_N(I)$. Далее, ввиду (ii)

$$(A_3)^k (A_2)^l \underset{N}{\equiv} \Big(\big((A_3)^k \cdot \underbrace{[A, A]\big) \ldots \big) \cdot [A, A]}_{l}.$$

Отсюда и из леммы 1 г) следует

$$(A_3)^k (A_2)^l \subseteq V_N(I),$$

ссылка на лемму 5 и завершает доказательство (iii).

(*iv*) $A_3 \underset{M}{\equiv} 0$, где $M = 1/2 \cdot (n^3 - n^2 + 6)(3n-2)$.

В условиях пункта (*iii*) индукцией по l имеем

$$(A_3)^k \underset{M_1}{\equiv} 0, \text{ где } M_1 = N + (3n-2)\,n\,(l+1).$$

Так как

$$(A_3)^k (A_2)^{n-k} \subseteq (A_2)^n \subseteq \mathrm{Ann}_{9n-6}\, I,$$

то если $(A_3)^{k+1} \underset{N}{\equiv} 0$, где $N \geqslant 9n-6$, тогда

$$(A_3)^k \underset{M_2}{\equiv} 0, \text{ где } M_2 = N + (3n-2)\,n\,(n-k).$$

Отсюда индукцией по k получается (*iv*).

(*v*) $A_2 \underset{K}{\equiv} 0$, где $K = M + (3n-2)n(n-1)$.

Доказательство аналогично пункту (*iv*).

(*vi*) Идеал I нильпотентен индекса $\leqslant 2^{(2n)^4}$.

В силу (*v*) имеем $A' \underset{K}{\equiv} 0$. Поскольку $I^n \subseteq D(A) \subseteq A'$, то идеал I нильпотентен индекса $\leqslant 2^{n+K}$. Теорема доказана.

Следствие. *Если всякий ассоциативный фактор алгебры A типа $(-1, 1)$ нильпотентен индекса $\leqslant n$, то идеал A^2 нильпотентен индекса $\leqslant 2^{(2n)^4}$.*

Теорема 2. *Пусть A — ниль-алгебра индекса n типа $(-1, 1)$ без элементов порядка $\leqslant n$ в аддитивной группе. Тогда идеал A^2 нильпотентен индекса, не превосходящего $2^{2^{4(n+1)}}$.*

Доказательство для алгебр над полем немедленно получается из теоремы Нагата — Хигмана и следствия из теоремы 1. В общем случае необходимо провести довольно понятные модификации, следуя, например, монографии [1].

Теорема 3. *Если I — разрешимый идеал алгебры A типа $(-1, 1)$, то идеал $\widehat{[I, A]}$ нильпотентен.*

Доказательство. Введем сначала обозначения:

$$I_0 = [I, A];\; I_{n+1} = I_n \circ A;\; \mathscr{J} = \widehat{I}_0.$$

Легко проверить, что $\mathscr{J} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} I_n$.

Докажем теперь индукцией по n, что

$$R_{I_n} R_{\mathscr{J}} \subseteq R_{I_0} R_{\mathscr{J}} + R_{I^2} \overline{R},$$

где $\overline{R}$ — подалгебра алгебры $\mathrm{End}_\Phi (A)$, порожденная операторами правого умножения R_x, $x \in A$, и тождественным отображением. Основание индукции при $n = 0$ очевидно. Сделав индуктивное предположение, рассмотрим

$$(tI_{n+1})\mathscr{J} \subseteq (t, I_{n+1}, \mathscr{J}) + t \cdot I^2 \subseteq (t, I_n \circ A, \mathscr{J}) + t \cdot I^2 \subseteq$$
$$\subseteq (t, I_n, A \circ \mathscr{J}) + (t, A, I_n \circ \mathscr{J}) + t \cdot I^2,$$

откуда имеем

$$R_{I_{n+1}} R_{\mathscr{J}} \subseteq R_{I_n} R_{\mathscr{J}} + R_{I^2}\overline{R} \subseteq R_{I_0} R_{\mathscr{J}} + R_{I^2}\overline{R},$$

следовательно,

$$R^2_{\mathscr{J}} \subseteq R_{I_0} R_{\mathscr{J}} + R_{I^2}\overline{R} \text{ и } R^4_{\mathscr{J}} \subseteq R^3_{I_0} R_{\mathscr{J}} + R_{I^2}\overline{R}.$$

Так как $I_0 \subseteq [A, A]$, то из леммы 1, б) и тождества (3) имеем

$$tR^3_{I_0} R_{\mathscr{J}} \subseteq ((t, I_0, I_0), I_0, \mathscr{J}) + tR_{I^2}\overline{R} \subseteq ((t, A, [A, A]), [A, A], A) +$$
$$+ tR_{I^2}\overline{R} \subseteq (Z(A), [A, A], A) + tR_{I^2}\overline{R} \subseteq tR_{I^2}\overline{R},$$

следовательно, $R^4_{\mathcal{J}} \subseteq R_{I^2}\overline{R}$, т. е. $\mathcal{J}_{\langle 4N+1\rangle} \subseteq (I^2)_{\langle N\rangle}$. Поскольку I разрешим, то I^2 нильпотентен по теореме 1, следовательно, $\mathcal{J}$ правонильпотентен, а в силу [3] $\mathcal{J}$ нильпотентен, что и требовалось.

Теорема 4. *Пусть A — алгебра типа $(-1, 1)$, I — ее разрешимый идеал. Тогда существует нильпотентный идеал $\mathcal{J}$ алгебры A такой, что $I/\mathcal{J}$ является тривиальным идеалом алгебры $A/\mathcal{J}$, содержащимся в ее полном центре.*

Доказательство. В силу теорем 2 и 3 достаточно показать, что нильпотентен идеал, порожденный множеством (I, A, A). Положим $I_0 = (I, A, A)$, $I_{n+1} = I_n \circ A$, $\mathcal{J} = \widehat{I}_0$ и заметим, что

$$\mathcal{J} \subseteq \sum_{n=0}^{\infty} I_n + [\widehat{I, A}].$$

Пусть $K = [\widehat{I, A}] + I^2$. Тогда ввиду теорем 2 и 3 идеал K нильпотентен. В силу правой альтернативности имеем

$$R^4_{\mathcal{J}} \subseteq R^3_{I_0} R_{\mathcal{J}} + R_K \overline{R}.$$

Легко видеть, что $R_K\overline{R}$ является идеалом алгебры $\overline{R}$. Пусть $\xi, \eta \in \overline{R}$. Будем писать $\xi \equiv \eta$ всякий раз, когда $\xi - \eta \in R_K\overline{R}$. Пусть $x, y \in I$, $a, b, c \in A$, $d \in D(A)$. Так как $R_xR_{y\circ a} \equiv R_{x\circ a}R_y$, то, считая $(a, b, c)^+ = (a\circ b)\circ c - a\circ(b\circ c)$, имеем

$$R_xR_{(a,y,b)^+} = R_xR_{(a\circ y)\circ b} - R_xR_{a\circ(y\circ b)} \equiv R_{a\circ(x\circ b)}R_y - R_{(a\circ x)\circ b}R_y = -R_{(a,x,b)^+}R_y,$$

т. е.

$$R_xR_{(a,y,b)^+} \equiv -R_{(a,x,b)^+}R_y. \tag{5}$$

В дальнейшем нам потребуются следующие два соотношения:

$$(c, a, b) = 2(a, c, b)^+ - \frac{1}{2}\cdot[c, [a, b]], \tag{6}$$

$$[c, [a, b]] \in \operatorname{Ann} D(A). \tag{7}$$

Первое тождество справедливо во всякой правоальтернативной алгебре (доказательство можно найти в [1, с. 69]); второе соотношение справедливо в любой алгебре типа $(-1, 1)$, его доказательство можно найти в [3]. Используя (5)—(7), имеем

$$\xi R_xR_{(y,a,b)}\eta R_d = 2\xi R_xR_{(a,y,b)^+}\eta R_d \equiv -2\xi R_{(a,x,b)^+}R_y\eta R_d = -\xi R_{(x,a,b)}R_y\eta R_d,$$

т. е.

$$\xi R_xR_{(y,a,b)}\eta R_d \equiv -\xi R_{(x,a,b)}R_y\eta R_d. \tag{8}$$

Пусть $x_i \in I$, $a_i, b_i \in A$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$; положим $\rho_i = R_{a_i}R_{b_i} - R_{a_ib_i}$, тогда $x_i\rho_i = (x_i, a_i, b_i)$. Итак, в силу (8)

$$R_{x_1\rho_1}R_{x_2\rho_2}R_{x_3\rho_3}R_d \equiv -R_{x_1\rho_1\rho_2}R_{x_2}R_{x_3\rho_3}R_d \equiv R_{x_1\rho_1\rho_2}R_{x_2\rho_3}R_{x_3}R_d \equiv -R_{x_1\rho_1\rho_2\rho_3}R_{x_2}R_{x_3}R_d.$$

С другой стороны,

$$R_{x_1\rho_1}R_{x_2\rho_2}R_{x_3\rho_3}R_d \equiv -R_{x_1\rho_1\rho_2}R_{x_2}R_{x_3\rho_3}R_d \equiv R_{x_1\rho_1\rho_2}R_{x_3\rho_3}R_{x_2}R_d \equiv -R_{x_1\rho_1\rho_2\rho_3}R_{x_3}R_{x_2}R_d \equiv R_{x_1\rho_1\rho_2\rho_3}R_{x_2}R_{x_3}R_d.$$

Поэтому

$$R_{x_1\rho_1}R_{x_2\rho_2}R_{x_3\rho_3}R_d \equiv 0,$$

т. е.

$$R^3_{I_0}R_{\mathcal{J}} \equiv 0,\quad R^4_{\mathcal{J}} \subseteq R_K\overline{R},$$

что и требовалось.

Рассуждая как в теореме 3, легко показать, что имеет место

Теорема 5. *Всякий конечно порожденный разрешимый идеал алгебры типа* $(-1, 1)$ *нильпотентен.*

3. ПРИМЕРЫ

1°. Построим альтернативную алгебру, удовлетворяющую тождествам

$$x^3 = 0,\ (xy)(zt)\cdot u = u\cdot(xy)(zt) = 0,$$

все степени которой имеют ненулевое умножение.

Пусть A_0 — разрешимая индекса 2 альтернативная ниль-алгебра индекса 3, порожденная множеством $\{x, x_1, x_2, \ldots\}$ и удовлетворяющая определяющим соотношениям

$$x^2 = 0;\ x_i x_j = 0,\ i, j = 1, 2, \ldots.$$

Введем следующие обозначения:

$R_j, L_j \in \mathrm{End}_\Phi(A_0)$, $aR_j = ax_j$, $aL_j = x_j a$;

Σ — множество операторов вида $R_{i_1} R_{i_2} \ldots R_{i_n}$, где $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$;

Ω — множество операторов вида $R_{i_1} \ldots R_{i_n} L_{i_{n+1}}$, где $i_1 < \ldots < i_n < i_{n+1}$;

$\sum_k = \{\xi \in \sum \mid d(\xi) \equiv k \pmod 2\}$, $k = 0, 1$; $1_{A_0} \in \sum_0$;

$\Omega_k = \{\xi \in \Omega \mid d(\xi) + 1 \equiv k \pmod 2\}$, $k = 0, 1$.

Легко видеть, что алгебра A_0 имеет базис:

а) $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$,

б) $U_k = x\Sigma_k$,

в) $V_k = x\Omega_k$, где $k = 0, 1$.

Заметим, что $A_0 \cong B/\mathrm{Ann}\, B$, где B — алгебра Дорофеева, построенная в [1, с. 155—157].

Пусть E — свободный модуль над кольцом Φ с базисом $e_{i_1, i_2, \ldots, i_{2n}}$, где $n \geqslant 1$ и $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$. На прямой сумме $A = A_0 \oplus E$ введем умножение с помощью таблицы,

	X	U_0	U_1	V_0	V_1	E
X	0	V_0	V_1	U_0	U_1	0
U_0	U_1	E	0	0	0	0
U_1	U_0	0	E	0	0	0
V_0	U_0+V_1	0	E	E	0	0
V_1	U_1+V_0	E	0	0	E	0
E	0	0	0	0	0	0

где X и A_0 перемножаются как в алгебре A_0, а произведения $U_i \cdot U_j$, $V_i \cdot V_j$ $(i, j = 0, 1)$, $V_i \cdot U_j$ $(i \neq j)$ вычисляются согласно следующим правилам, указывающим, как надо перемножать соответствующие базисные элементы:

1) Пусть $\xi, \eta \in \Sigma_0$, $\xi = R_{i_1} R_{i_2} \ldots R_{i_{2m}}$, $\eta = R_{j_1} R_{j_2} \ldots R_{j_{2n}}$ и $\{i_1, i_2, \ldots, i_{2m}\} \cap \{j_1, j_2, \ldots, j_{2n}\} = \varnothing$. Допустим, что $\{i_1, \ldots, i_{2m}, j_1, \ldots, j_{2n}\} = \{k_1, \ldots, k_{2(m+n)}\}$, где $k_1 < k_2 < \ldots < k_{2(m+n)}$. Тогда

$$x\xi \cdot x\eta = \begin{cases} (-1)^{n+(\xi,\eta)} e_{k_1, \ldots, k_{2(m+n)}}, & \text{если } m \not\equiv n \pmod 2, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где (ξ, η) — число инверсий в соответствующей перестановке индексов. Если же существуют r, s: $i_r = j_s$, то $x\xi \cdot x\eta = 0$.

2) $x\xi L_j \cdot x\eta L_k = ((x\xi \cdot x_j) \cdot x_k) \cdot x\eta$.
3) $x\xi L_j \cdot x\eta R_k = -((x\xi \cdot x_j) \cdot x_k) \cdot x\eta$.
4) $x\xi R_j \cdot x\eta R_k = ((x\xi \cdot x_j) \cdot x_k) \cdot x\eta$.
5) $x\xi R_j L_k \cdot x\eta = x\eta \cdot (x\xi R_j R_k)$.
6) $x\xi R_j L_k \cdot x\eta R_m L_n = (x\xi R_j R_k) \cdot (x\eta R_m R_n)$.

Тем самым алгебра A полностью определена. Заметим, что из таблицы умножения вытекает: $A^2 \subseteq A_0^2 + E$, $A_{(2)} \subseteq E$, следовательно, $A_{(2)} \cdot A = A \cdot A_{(2)} = 0$.

Пусть n — произвольное нечетное число. Тогда

$$(((x \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot \ldots) \cdot x_{2n} = xR_1 \ldots R_{2n},$$
$$((x \cdot x_{2n+1}) \cdot \ldots) \cdot x_{6n} = xR_{2n+1} \ldots R_{6n},$$
$$xR_1 \ldots R_{2n} \cdot xR_{2n+1} \ldots R_{6n} = (-1)^{2n} e_{1,2,\ldots,6n} \neq 0;$$

следовательно, для любого N имеем $(A^N)^2 \neq 0$.

Докажем теперь, что A — альтернативная ниль-алгебра индекса 3. Доказательство этого утверждения дадим в виде последовательности лемм.

Лемма 1. *В алгебре* A_0 *для любых* $w \in \widehat{x}$, $a, b, \ldots, c \in X$:

1) $(aw)b = a(wb) - (wa)b$,
2) $b(aw) = (wa)b$,
3) *всякий одночлен* $f(w, a, b, \ldots, c)$ *является кососимметрической функцией относительно* $a, b, \ldots, c$.

Доказательство тривиально.

Лемма 2. *В алгебре* A *для любых* $v, w \in U_0$, $a, b, c, d \in X$:

1) $v \cdot w + w \cdot v = 0$,
2) $((v \cdot a) \cdot b) \cdot w + v \cdot ((w \cdot a) \cdot b) = 0$,
3) $(a \cdot v) \cdot (b \cdot w) = ((v \cdot a) \cdot b) \cdot w$,
4) $(a \cdot v) \cdot (w \cdot b) = -((v \cdot a) \cdot b) \cdot w$,
5) $(v \cdot a) \cdot (w \cdot b) = ((v \cdot a) \cdot b) \cdot w$,
6) $(b \cdot (v \cdot a)) \cdot w = -((v \cdot a) \cdot b) \cdot w$,
7) $(b \cdot (v \cdot a)) \cdot (d \cdot (w \cdot c)) = ((v \cdot a) \cdot b) \cdot ((w \cdot c) \cdot d)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем только пункт 4), поскольку остальные утверждения проверяются аналогично. Если u, u' — базисные слова алгебры A_0, то (u, u') — число инверсий в соответствующей перестановке индексов. Если $u \in U_0 \cup U_1$, $a \in X$, то $\overline{ua}$ обозначает базисное слово алгебры A_0 с тем же носителем, что и ua. Если $\xi = R_{i_1} \ldots R_{i_{2n}} \in \Sigma_0$, то положим $\nu(x\xi) = n$. Кроме того, пусть $\overline{av} = a'v'$, $\overline{wb} = w'b'$. Имеем

$$(a \cdot v) \cdot (w \cdot b) + ((v \cdot a) \cdot b) \cdot w = (-1)^{(v, a)+(w, b)} \overline{av} \cdot \overline{wb} +$$
$$+ (-1)^{(v, a)+(\overline{va}, b)} \overline{vab} \cdot w = (-1)^{(v, a)+(w, b)} a'v' \cdot w'b' +$$
$$+ (-1)^{(v, a)+(\overline{va}, b)} \overline{vab} \cdot w = -(-1)^{(v, a)+(w, b)} ((v' \cdot a') \cdot b') \cdot w' +$$
$$+ (-1)^{(v, a)+(\overline{va}, b)} \overline{vab} \cdot w =$$
$$= -\begin{cases} (-1)^{(v, a)+(w, b)+(v'a', b')+(\overline{v'a'b'}, w')+\nu(w')} e, & \nu(v) \equiv \nu(w) \\ 0 \end{cases} +$$
$$+ \begin{cases} (-1)^{(v, a)+(\overline{va}, b)+(\overline{vab}, w)+\nu(w)} e, & \nu(v) \equiv \nu(w) \\ 0 \end{cases} = 0,$$

поскольку

$$(w, b) + (v'a', b') + (\overline{v'a'b'}, w') = (w, b) + (\overline{va}, b') + (\overline{va}, w') =$$
$$= (w, b) + (\overline{va}, w'b') = (w, b) + (\overline{va}, \overline{wb}),$$
$$(\overline{va}, b) + (\overline{vab}, w) = (\overline{va}, b) + (\overline{va}, w) + (b, w) = (b, w) + (\overline{va}, \overline{wb}),$$
$$(w, b) \equiv (b, w), \text{ так как } w \in U_0.$$

Лемма 3. 1) $(W, W, W) = 0$, *где* $W = U_0 \cup U_1 \cup V_0 \cup V_1 \cup E$;
2) $(X, U_k, U_k) = (U_k, X, U_k) = (U_k, U_k, X) = 0$, $k = 0, 1$;
3) $(X, V_k, V_k) = (V_k, X, V_k) = (V_k, V_k, X) = 0$, $k = 0, 1$;
4) $(X, U_i, V_j) = (X, V_j, U_i) = (U_i, X, V_j) = (V_j, X, U_i) = \ldots = 0$, $i \neq j$.
Доказательство тривиально.

Лемма 4. *Алгебра A альтернативна.*

Доказательство. Докажем, что A левоальтернативна, правая альтернативность проверяется аналогично. Пусть $f(a, b, c) = (a, b, c) + (b, a, c)$.

В силу леммы 3 достаточно доказать:

а) $f(X, U_0, U_1) = f(X, U_1, U_0) = f(U_0, U_1, X) = 0$,
б) $f(X, V_0, V_1) = f(X, V_1, V_0) = f(V_0, V_1, X) = 0$,
в) $f(X, U_0, V_0) = f(X, V_0, U_0) = f(U_0, V_0, X) = 0$,
г) $f(X, U_1, V_1) = f(X, V_1, U_1) = f(U_1, V_1, X) = 0$.

Докажем лишь пункт б), поскольку остальные соотношения проверяются аналогично. Учитывая леммы 1 и 2, имеем:

1) $f(a, bu, c(vd)) = a(bu) \cdot c(vd) + (bu)a \cdot c(vd) - (bu) \cdot a(c(vd)) =$
$= uba \cdot c(vd) + \{b(ua) - (ub)a\} \cdot c(vd) - bu \cdot (vd)c)a =$
$= b(ua) \cdot c(vd) - bu \cdot ((vd)c)a = uab \cdot vdc + uba \cdot vdc = 0$;

2) $f(a, c(vd), bu) = a(c(vd)) \cdot bu + (c(vd) \cdot a)(bu) - c(vd) \cdot a(bu) =$
$= vdca \cdot bu + \{c(vd \cdot a) - vdca\} \cdot bu - c(vd) \cdot uba =$
$= -a(vdc) \cdot bu - c(vd) \cdot uba = -vdcab \cdot u + vdc \cdot uba =$
$= wba \cdot u + w \cdot uba = 0$; $w = vdc \in \langle U_0 \rangle$;

3) $f(bu, c(vd), a) = -bu \cdot (c(vd))a + c(vd) \cdot (bu)a =$
$= -bu \cdot \{c(vda) - vdca\} - c(vd) \cdot \{b(ua) - uba\} =$
$= bu \cdot a(vdc) + bu \cdot vdca - c(vd) \cdot b(ua) + c(vd) \cdot uba =$
$= uba \cdot vdc - uba \cdot vdc - vdc \cdot uab - vdc \cdot uba = 0.$

Лемма 5. *В алгебре* A: $x^3 = 0$.

Доказательство. Ясно, что в алгебре A тождество $x^3 = 0$ равносильно тождеству $f(x, y, z) = (x \circ y)z + (y \circ z)x + (z \circ x)y = 0$, справедливость которого достаточно установить лишь для базисных элементов x, y, z алгебры A. Если x, $y \in X$, то $f = 0$ в алгебре A, так как $f = 0$ в алгебре A_0. Если же x, y, $z \in A^2$, то $f = 0$, так как $(A^2)^3 = 0$. Пусть $x \in X$, y, $z \in U_0 \cup U_1 \cup V_0 \cup V_1$. Тогда

$$f(x, y, z) = (x \circ y)z + (z \circ x)y = y(xz) + z(xy).$$

Рассмотрим функцию $f_x(y, z) = (yx)z + (zx)y$. Из таблицы умножения следует, что $f_x(y, z) = 0$ за исключением, быть может, случаев:

а) $y \in U_0$, $z \in U_1$, б) $y \in U_0$, $z \in V_0$, в) $y \in V_0$, $z \in V_1$,

рассмотрение которых подобно доказательству леммы 4.

Замечание. В заключение этого пункта докажем одно предложение, имеющее непосредственное отношение к результатам работы В. Т. Филиппова [5].

Предложение. *В свободной специальной алгебре Мальцева* $\mathscr{M}$ *индекс нильпотентности идеала* $G(\mathscr{M})$ *равен трем.*

Доказательство. Вычислим в алгебре A_0 для $w \in \widehat{x}$

$$g_{w+x_3}(x_1, x_2, x_4, x_5) = -36\,(([w, x_1], x_2\, x_3), x_4, x_5) =$$
$$= -36\,[w, x_1]\, R_{x_2} \ldots R_{x_5}.$$

Так как $[[w, x_1], x_2] = 3wx_1x_2$, то $wR_1 \ldots R_6 \in G(A_0^{(-)}) \subseteq G(A^{(-)})$. Пусть $\xi = R_1 \ldots R_6$, $\eta = R_7 \ldots R_{14}$. Так как $d(\xi) = 6$, $d(\eta) = 8$, то в силу леммы 2 имеем

$$[x\xi, x\eta] = 2x\xi \cdot x\eta = 2e_{1, 2, \ldots, 14} \neq 0,$$

следовательно, $[G(A^{(-)}), G(A^{(-)})] \neq 0$, что и требовалось.

2°. Построим алгебру A типа $(-1, 1)$ такую, что для любого числа n существует разрешимая индекса n подалгебра B алгебры A, обладающая свойством: всякая степень B^k $(k \geqslant 2)$ разрешима индекса $n - 1$.

Пусть $X=\{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество символов, Σ — множество ассоциативных слов над X вида $\xi=x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$, где $i_1<i_2<\ldots<i_n$, при этом мы не исключаем из рассмотрения и пустое слово над X. На множестве Σ введем отношение порядка: если ξ, $\eta\in\Sigma$ и $\xi=x_{i_1}x_{i_2}\ldots$ $\ldots x_{i_n}$, $\eta=x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_m}$, то $\xi<\eta$ означает, что $i_n<j_1$. Пусть Σ_0 — множество слов из Σ четной длины. Наряду с множеством X нам потребуется еще одно счетное множество символов $Z=\{z_1, z_2, \ldots\}$. Пусть σ — произвольное неассоциативное слово в алфавите $X\cup Z$. Множество X_σ, состоящее из всех символов множества X, входящих в σ, называется X-составом слова σ.

Рассмотрим множество T, состоящее из элементов $(z\xi)$, где $z\in Z$, $\xi\in\Sigma_0$. Ассоциативное слово σ над T назовем правильным, если оно имеет вид $\sigma=(z_{i_1}\xi_1)(z_{i_2}\xi_2)\ldots(z_{i_n}\xi_n)$, где для любых j, k: $\xi_j\cap\xi_k=\varnothing$ и $i_1<i_2<\ldots<i_n$. Если σ — ассоциативное слово над T, то $[\sigma]$ означает правильное слово того же T-состава, что и σ, разумеется если такое слово существует. Например, если для любых i, j: $\xi_i\cap\xi_j=\varnothing$, то

$$[(z_n\xi_n)\ldots(z_2\xi_2)(z_1\xi_1)]=(z_1\xi_1)(z_2\xi_2)\ldots(z_n\xi_n).$$

Весом $\omega(\sigma)$ правильного слова σ назовем вектор $\omega(\sigma)=(d(\xi_1), \ldots, d(\xi_n))$, где $d(\xi)$ — длина слова ξ. Правильное слово σ назовем регулярным, если оно имеет вид $\sigma=(z_{i_1}\xi_1)(z_{i_2}\xi_2)\ldots(z_{i_n}\xi_n)$, где $\xi_1<\xi_2<\ldots<\xi_n$. Если σ — правильное слово, то $\bar\sigma$ означает регулярное слово такое, что $X_{\bar\sigma}=$ $=X_\sigma$, $Z_{\bar\sigma}=Z_\sigma$ и $\omega(\bar\sigma)=\omega(\sigma)$. Например,

$$\overline{(z_1x_5x_7x_8x_{10})(z_3x_1x_4)(z_8x_2x_3x_6x_9)}=(z_1x_1x_2x_3x_4)(z_3x_5x_6)(z_8x_7x_8x_9x_{10}).$$

Множество всех регулярных слов обозначим через U. Если $\sigma\in U$, $\xi_n<x_k$, то слово вида σx_k назовем полурегулярным; множество всех полурегулярных слов обозначим через U'. Если σ — регулярное слово, $x_k\notin X_\sigma$, то $\overline{\sigma x_k}$ означает полурегулярное слово τx_l такое, что $X_\sigma\cup\{x_k\}=X_\tau\cup\{x_l\}$, $Z_\sigma=Z_\tau$ и $\omega(\sigma)=\omega(\tau)$.

Пусть

$$X_i=\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\};\ X_j=\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_m}\}.$$

Положим

$$(X_i, X_j)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{m}(i_r, j_s),\ \text{где}\ (a, b)=\begin{cases}1, & \text{если } a>b,\\ 0, & \text{если } a<b.\end{cases}$$

Если σ, τ — неассоциативные слова над $X\cup Z$, то положим

$$(\sigma, \tau)=(X_\sigma, X_\tau).$$

Рассмотрим алгебру A над кольцом Φ, содержащим 1/2, с аддитивным базисом $X\cup U\cup U'$ и следующей таблицей умножения:

1) Если $u\in U$, $x_i\notin X_u$, то

$$x_i\cdot u=u\cdot x_i=(-1)^{(u,x_i)}\overline{ux_i}.$$

2) Если $ux_i\in U'$, $x_j\notin X_u\cup\{x_i\}$, то

$$ux_i\cdot x_j=(-1)^{(ux_i,x_j)}\cdot\sum_{k=1}^{n}u_k,$$

где для любого k: $u_k\in U$, $X_{u_k}=X_u\cup\{x_i, x_j\}$, $Z_{u_k}=Z_u$, $n=\operatorname{card}Z_u$, $\omega(u_k)=\omega(u)+2e_k^n$, e_k^n — n-мерный вектор вида $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}, 1, 0, \ldots, 0)$.

3) Если $ux_i\in U'$, то

$$x_j\cdot ux_i=-\frac{1}{2}ux_i\cdot x_j.$$

4) Если u, $v\in U$, $X_u\cap X_v=Z_u\cap Z_v=\varnothing$, то

$$u\cdot v=(-1)^{(u,v)}[\overline{uv}].$$

5) Если $ux_i \in U'$, $v \in U$, то

$$ux_i \cdot v = v \cdot ux_i = (u \cdot v) \cdot x_i.$$

6) Если ux_i, $vx_j \in U'$, то

$$ux_i \cdot vx_j = \frac{1}{2} u \cdot ((v \cdot x_i) \cdot x_j) + (ux_i \cdot x_j) \cdot v.$$

7) Остальные произведения базисных элементов нулевые.

Поскольку в алгебре A имеет место равенство

$$(((z_j, x_{i_1}, x_{i_2}), \ldots), x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}}) = z_j x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{2n}},$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_{2n}$, то а) ассоциаторный идеал алгебры A ненильпотентен (неразрешим); б) подалгебра B алгебры A, порожденная множеством $X \cup \{z_1, z_2, \ldots, z_N\}$, где $N = 2^n - 1$, разрешима индекса n, а любая ее степень B^k $(k \geqslant 2)$ разрешима индекса $n-1$.

Докажем, что алгебра A правоальтернативна и $[[A, A], A] = 0$. Доказательство этого факта разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. *Для любых* $u, v, w \in U$, $t \in U \cup U'$, $x, y \in X$:

1) $[u, v] = (u, v, w) = 0$, *т. е.* Φ — *модуль* $\overline{U}$, *порожденный множеством* U, *является ассоциативной и коммутативной подалгеброй алгебры* A;

2) $[u, x] = [u \cdot x, v] = 0$, $(u \cdot x) \cdot v = (u \cdot v) \cdot x$. *Более того,*

$$\overline{U} \subseteq Z(A) \quad \text{и} \quad [[A, A], A] = 0.$$

3) $y \cdot (u \cdot x) = -\frac{1}{2} (u \cdot x) \cdot y$.

4) $(t, x, y) + (t, y, x) = 0$.

5) $(u \cdot x) \cdot (v \cdot y) = \frac{1}{2} u \cdot (v, x, y) + (u, x, y) \cdot v$.

Доказательство. Докажем лишь пункт 5), поскольку остальные утверждения проверяются аналогично, но значительно проще. Используя таблицу умножения, вычислим последовательно выражения

$$\text{а) } (u \cdot x) \cdot (v \cdot y), \text{ б) } \frac{1}{2} u \cdot (v, x, y), \text{ в) } (u, x, y) \cdot v.$$

Будем считать, что $Z_u \cap Z_v = \varnothing$ и всякие два множества из X_u, X_v, $\{x\}$, $\{y\}$ не содержат общих символов (в противном случае каждое из указанных выражений равно нулю). Пусть

$$\operatorname{card} Z_u = n, \ \operatorname{card} Z_v = m, \ \overline{ux} = u'x', \ \overline{vy} = v'y', \ \overline{v'x'} = v''x'', \ \overline{vx} = wz.$$

а) $(u \cdot x) \cdot (v \cdot y) = (-1)^{(u,x)+(v,y)} u'x' \cdot v'y' = (-1)^{(u,x)+(v,y)} \times$

$$\times \left\{ \frac{1}{2} u' \cdot ((v' \cdot x') \cdot y') + (u'x' \cdot y') \cdot v' \right\} = \frac{1}{2} \cdot (-1)^{(u,x)+(v,y)+(v',x')+(v''x'',y')} u' \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m} v_k'' + (-1)^{(u,x)+(v,y)+(u'x',y')} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} u_k' \right) \cdot v' =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{m} (-1)^{(u,x)+(v,y)+(v',x')+(v''x'',y')+\left(u', v_k''\right)} \overline{[u'v_k'']} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(u,x)+(v,y)+(u'x',y')+\left(u_k', v'\right)} \overline{[u_k'v']},$$

б) $\frac{1}{2} u \cdot (v, x, y) = \frac{1}{2} u \cdot ((v \cdot x) \cdot y) = \frac{1}{2} \cdot (-1)^{(v,x)+(wz,y)} u \times$

$$\times \sum_{k=1}^{m} w_k = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{m} (-1)^{(v,x)+(wz,y)+(u,w_k)} \overline{[uw_k]},$$

в) $(u, x, y) \cdot v = ((u \cdot x) \cdot y) \cdot v = (-1)^{(u,x)+(u'x',y)} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} u_k' \right) \cdot v =$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(u,x)+(u'x',y)+\left(u_k', v\right)} \overline{[u_k'v]}.$$

Легко видеть, что для завершения доказательства достаточно проверить справедливость следующих соотношений:

1) $(u,x)+(v,y)+(v',x')+(v''x'',y')+(u',v''_k)\equiv(v,x)+(wz,y)+(u,w_k)$,

2) $\overline{[u'v''_k]}=\overline{[uw_k]}$,

3) $(u,x)+(v,y)+(u'x',y')+(u'_k,v')\equiv(u,x)+(u'x',y)+(u'_k,v)$,

4) $\overline{[u'_kv']}=\overline{[u'_kv]}$.

Установим истинность первых двух соотношений (остальные рассматриваются аналогично).

1) Прежде всего заметим, что для любых неассоциативных слов σ, δ, τ над $X\cup Z$ таких, что $X_\sigma\cap X_\delta=X_\sigma\cap X_\tau=X_\delta\cap X_\tau=\varnothing$: a) $(\sigma\delta,\tau)=$ $=(\sigma,\tau)+(\delta,\tau)$;

б) если $\operatorname{card}X_\sigma$ четна, то $(\sigma,\tau)\equiv(\tau,\sigma)$. Учитывая эти замечания, получаем

$$(u,x)+(v,y)+(v',x')+(v''x'',y')+(u',v''_k)\equiv(u,x)+(v,y)+(v',x')+$$
$$+(v'x',y')+(u',vx'y)\equiv(u,x)+(v,y)+(v',x')+(x',y')+(u',vy)\equiv$$
$$\equiv(u,x)+(v,y)+(x',v'y')+(u',vy)\equiv(u,x)+(v,y)+(ux,vy),$$

аналогично,

$$(v,x)+(wz,y)+(u,w_k)\equiv(v,x)+(vx,y)+(u,vxy)\equiv$$
$$\equiv(v,x)+(v,y)+(x,y)+(u,x)+(u,vy)\equiv(u,x)+(v,y)+(ux,vy).$$

2) Рассмотрим правильные слова $[u'v''_k]$ и $[uw_k]$. Они имеют одинаковый X-состав (соответственно Z-состав). Следовательно, для доказательства равенства соответствующих регулярных слов достаточно понять, что регулярные слова u', u (соответственно v''_k, w_k) имеют одинаковый вес. Ясно, что $\omega(u')=\omega(u)$, так как $\overline{ux}=u'x'$. Далее, $\omega(v''_k)=\omega(v)+2e^m_k$, так как $\omega(v'')=\omega(v')=\omega(v)$; $\omega(w_k)=\omega(v)+2e^m_k$, так как $\omega(w)=$ $=\omega(v)$, что и доказывает пункт 5).

Лемма 2. *Для любых $u, v\in U$, $x, y\in X$:*

$$(u\cdot v,x,y)=(u,x,y)\cdot v+u\cdot(v,x,y).$$

Доказательство. Как и в лемме 1, можно считать, что $Z_u\cap$ $\cap Z_v=\varnothing$ и никакие два из множеств X_u, X_v, $\{x\}$, $\{y\}$ не содержат общих символов. Пусть $\operatorname{card}Z_u=n$, $\operatorname{card}Z_v=m$ и $\overline{ux}=u'x'$, $\overline{vx}=v'z$, $\overline{[uv]}=w$, $\overline{wx}=w't$. Вычислим последовательно необходимые выражения:

$$(u\cdot v,x,y)=((u\cdot v)\cdot x)\cdot y\equiv(-1)^{(u,v)}(w\cdot x)\cdot y=(-1)^{(u,v)+(w,x)}w't\cdot y=$$
$$=(-1)^{(u,v)+(w,x)+(w't,y)}\cdot\sum_{k=1}^{m+n}w'_k=(-1)^{(u,v)+(uv,x)+(uv,y)+(x,y)}\sum_{k=1}^{m+n}w'_k.$$

Далее,

$$(u,x,y)\cdot v+u\cdot(v,x,y)=((u\cdot x)\cdot y)\cdot v+u\cdot((v\cdot x)\cdot y)=$$
$$=(-1)^{(u,x)}(u'x'\cdot y')\cdot v+(-1)^{(v,x)}u\cdot(v'z\cdot y)=(-1)^{(u,x)+(u'x',y)}\left(\sum_{k=1}^{n}u'_k\right)\cdot v+$$
$$+(-1)^{(v,x)+(v'z,y)}u\cdot\left(\sum_{k=1}^{m}v'_k\right)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{(u,x)+(ux,y)+(u'_k,v)}\overline{[u'_kv]}+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{(v,x)+(vx,y)+(u,v'_k)}\overline{[uv'_k]}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{(u,x)+(u,y)+(x,y)+(uxy,v)}\overline{[u'_kv]}+$$
$$+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{(v,x)+(vx,y)+(u,vxy)}\overline{[uv'_k]}=(-1)^{(u,v)+(uv,x)+(uv,y)+(x,y)}\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{[u'_kv]}+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{m}\overline{[uv'_k]}\right).$$

Ясно, что достаточно проверить равенство

$$\sum_{k=1}^{m+n} w_k' = \sum_{k=1}^{n} \overline{[u_k'v]} + \sum_{k=1}^{m} \overline{[uv_k']}. \qquad (*)$$

Заметим, что все регулярные слова, участвующие в записи (*), имеют один и тот же X-состав (соответственно Z-состав). Пусть

$$S = \{\sigma \in U \mid X_\sigma = X_u \cup X_v \cup \{x, y\},\ Z_\sigma = Z_u \cup Z_v\},$$

$$Z_u = \{z_{i_k} \mid 1 \leqslant k \leqslant n\},\ Z_v = \{z_{j_k} \mid 1 \leqslant k \leqslant m\},\ Z_\sigma = \{z_{l_k} \mid 1 \leqslant k \leqslant m+n\},$$

где $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$; $j_1 < j_2 < \ldots < j_m$; $l_1 < l_2 < \ldots < l_{m+n}$. Введем отображения φ и ψ:

$$\left[\begin{tikzcd} \mathbf{N}_n \arrow[dr, "\varphi"'] & & \mathbf{N}_m \arrow[dl, "\psi"] \\ & \mathbf{N}_{m+n} & \end{tikzcd}\right], \text{ где } \mathbf{N}_k = \{1, 2, \ldots, k\},$$

следующим образом:

$$\varphi(x) = y, \text{ если } i_x = l_y,$$
$$\psi(x) = y, \text{ если } j_x = l_y.$$

Пусть правильное слово $[uv]$ имеет вес ω. Тогда, как легко видеть, регулярные слова w_k', $\overline{[u_k'v]}$ и $\overline{[uv_k']}$ имеют соответственно веса $\omega + 2e_k^{m+n}$, $\omega + 2e_{\varphi(k)}^{m+n}$ и $\omega + 2e_{\psi(k)}^{m+n}$. Так как отображения φ и ψ инъективны и $\varphi(\mathbf{N}_n) \cup \psi(\mathbf{N}_m) = \mathbf{N}_{m+n}$, а всякое регулярное слово из S однозначно определяется своим весом, то в левой и правой частях равенства (*) участвуют одни и те же регулярные слова.

Лемма 3. $(U, U, A) = (U, A, U) = (A, U, U) = 0.$

Доказательство тривиально в силу леммы 1.

Лемма 4. *Алгебра A правоальтернативна.*

Доказательство. Положим $f(a, b, c) = (a, b, c) + (a, c, b)$. Легко видеть, что лемма будет доказана, если установить справедливость следующих равенств: $f(X, A, A) = f(U, A, A) = f(U', A, A) = 0$. Проверим лишь одно из этих равенств, а именно $f(U', A, A) = 0$. В силу леммы 1 4) и леммы 3 имеем $f(U', X, X) = f(U', U, U) = 0$, следовательно, достаточно показать, что

$$f(U', X, U) = f(U', X, U') = f(U', U, U') = f(U', U', U') = 0.$$

Пусть $u, v, w \in U$, $x, y, z \in X$. Положим $t' = (t, x, y)$. Из леммы 1 3) и 5) вытекает, что

$$y(ux) = -\frac{1}{2}u';\ (ux)(vy) = \frac{1}{2}uv' + u'v.$$

Далее, на основании леммы 2 $(uv)' = u'v + uv'$. Имеем:

1) $f(ux, y, v) = (ux, y, v) + (ux, v, y) = u'v - (ux)(yv) + (uv)' - (ux)(vy) = u'v - 2(ux)(vy) + (uv)' = u'v - uv' - 2u'v + (uv)' = 0.$

2) Прежде всего заметим, что функция $(u, x, y)z$ кососимметрична относительно x, y, z. Тогда

$$f(ux, y, vz) = (ux, y, vz) + (ux, vz, y) = (u, x, y)(vz) - (ux)(y \cdot vz) +$$
$$+ (ux)(vz) \cdot y - (ux)(v, z, y) = u'vz + \frac{1}{2}ux(v, z, y) +$$
$$+ \frac{1}{2}u(v, x, z)y + (u, x, z)vy - ux(v, z, y) =$$
$$= \left(u'v - \frac{1}{2}uv' - \frac{1}{2}uv' - u'v + uv'\right)z = 0,$$

3) $$f(ux, v, wy) = (ux, v, wy) + (ux, wy, v) = (uv \cdot x)(wy) -$$
$$- (ux)(vw \cdot y) + (ux \cdot wy)v - (ux)(vw \cdot y) = \frac{1}{2}uvw' + (uv)'w -$$

$$-\frac{1}{2}u(vw)'-u'vw+\frac{1}{2}uw'v+u'wv-\frac{1}{2}u(vw)'-u'vw=\frac{1}{2}uvw'+$$

$$+u'vw+uv'w-\frac{1}{2}uv'w-\frac{1}{2}uvw'-u'vw+\frac{1}{2}uvw'+u'vw-$$

$$-\frac{1}{2}uv'w-\frac{1}{2}uvw'-u'vw=0,$$

4) Легко проверить, что функции $(ux\cdot vy)(wz)$ и $(ux)(vy\cdot wz)$ кососимметричны по x, y, z. В самом деле, поскольку $(ux\cdot vy)(wz)=$ $=\frac{1}{2}(uv'+u'v)(wz)=\frac{1}{2}u(v'z)w+(u'z)vw$ и функции $u'z$, $v'z$ кососимметричны по x, y, z, то функция $(ux\cdot vy)(wz)$ обладает нужным свойством. Аналогично проверяется и кососимметричность другой функции. Отсюда

$$f(ux, vy, wz)=(ux, vy, wz)+(ux, wz, vy)=(ux\cdot vy)(wz)-$$

$$-(ux)(vy\cdot wz)+(ux\cdot wz)(vy)-(ux)(wz\cdot vy)=\{(ux\cdot vy)w-u(vx\cdot wy)-$$

$$-(ux\cdot wy)v+u(wx\cdot vy)\}z=\left\{\frac{1}{2}uv'w+u'vw-\frac{1}{2}uvw'-uv'w-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}uvw'-u'vw+\frac{1}{2}uv'w+uvw'\right\}z=0.$$

Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кольца**, близкие к ассоциативным/Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. М.: Наука, 1978.
2. **Роомельди Р. Э.** Разрешимость (—1, 1)-ниль-колец.— Алгебра и логика, 1973, т. 12, № 4, с. 478—489.
3. **Пчелинцев С. В.** Нильпотентность ассоциаторного идеала свободного конечно порожденного (—1, 1)-кольца.— Алгебра и логика, 1975, т. 14, № 5, с. 543—571.
4. **Шестаков И. П.** Абсолютные делители нуля и радикалы конечно порожденных альтернативных алгебр.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 5, с. 585—602.
5. **Филиппов В. Т.** О нильпотентных идеалах в алгебрах Мальцева.— Алгебра и логика, 1979, т. 18, № 5, с. 599—613.
6. **Kleinfeld E.** Right alternative rings.— Proc. Amer. Math. Soc., 1953, v. 4, N 6, p. 939—944.
7. **Hentzel J. R.** The characterization of (—1, 1)-rings.— J. Algebra, 1974, v. 30, N 1—3, p. 236—258.
8. **Thedy A.** Right alternative rings.— J. Algebra, 1975, v. 37, N 1, p. 1—43.

Поступила в редколлегию 28 мая 1980 г.

ФОРМАЦИИ СО СВЕРХРАЗРЕШИМЫМИ ЛОКАЛЬНЫМИ ПОДФОРМАЦИЯМИ

А. Н. СКИБА

В работах [1, 2] рассматривались формации, насыщенные нильпотентными подформациями. В данной работе изучаются несверхразрешимые локальные формации, обладающие сверхразрешимой максимальной локальной подформацией.

В разд. 1 приведены определения и сформулированы некоторые известные результаты, необходимые в дальнейшем. Классификация минимальных локальных несверхразрешимых формаций получена в разд. 2. В разд. 3 описаны свойства локальных формаций, обладающих максимальной локальной $\mathfrak{NA}$-подформацией, и в разд. 4 доказан основной результат. Рассматриваются только конечные группы.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В определениях и обозначениях будем следовать [3, 4]. Через $\subset$ обозначается знак строгого включения.

Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторый непустой класс групп; $\mathfrak{H}$-формацией будем называть всякую формацию, входящую в $\mathfrak{H}$. Следуя Л. А. Шеметкову