$$-\frac{1}{2}u(vw)'-u'vw+\frac{1}{2}uw'v+u'wv-\frac{1}{2}u(vw)'-u'vw=\frac{1}{2}uvw'+$$
$$+u'vw+uv'w-\frac{1}{2}uv'w-\frac{1}{2}uvw'-u'vw+\frac{1}{2}uvw'+u'vw-$$
$$-\frac{1}{2}uv'w-\frac{1}{2}uvw'-u'vw=0,$$

4) Легко проверить, что функции $(ux\cdot vy)(wz)$ и $(ux)(vy\cdot wz)$ кососимметричны по x, y, z. В самом деле, поскольку $(ux\cdot vy)(wz)=$ $=\frac{1}{2}(uv'+u'v)(wz)=\frac{1}{2}u(v'z)w+(u'z)vw$ и функции $u'z$, $v'z$ кососимметричны по x, y, z, то функция $(ux\cdot vy)(wz)$ обладает нужным свойством. Аналогично проверяется и кососимметричность другой функции. Отсюда

$$f(ux, vy, wz)=(ux, vy, wz)+(ux, wz, vy)=(ux\cdot vy)(wz)-$$
$$-(ux)(vy\cdot wz)+(ux\cdot wz)(vy)-(ux)(wz\cdot vy)=\{(ux\cdot vy)w-u(vx\cdot wy)-$$
$$-(ux\cdot wy)v+u(wx\cdot vy)\}z=\left\{\frac{1}{2}uv'w+u'vw-\frac{1}{2}uvw'-uv'w-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}uvw'-u'vw+\frac{1}{2}uv'w+uvw'\right\}z=0.$$

Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кольца**, близкие к ассоциативным/Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. М.: Наука, 1978.
2. **Роомельди Р. Э.** Разрешимость (—1, 1)-ниль-колец.— Алгебра и логика, 1973, т. 12, № 4, с. 478—489.
3. **Пчелинцев С. В.** Нильпотентность ассоциаторного идеала свободного конечно порожденного (—1, 1)-кольца.— Алгебра и логика, 1975, т. 14, № 5, с. 543—571.
4. **Шестаков И. П.** Абсолютные делители нуля и радикалы конечно порожденных альтернативных алгебр.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 5, с. 585—602.
5. **Филиппов В. Т.** О нильпотентных идеалах в алгебрах Мальцева.— Алгебра и логика, 1979, т. 18, № 5, с. 599—613.
6. **Kleinfeld E.** Right alternative rings.— Proc. Amer. Math. Soc., 1953, v. 4, N 6, p. 939—944.
7. **Hentzel J. R.** The characterization of (—1, 1)-rings.— J. Algebra, 1974, v. 30, N 1—3, p. 236—258.
8. **Thedy A.** Right alternative rings.— J. Algebra, 1975, v. 37, N 1, p. 1—43.

Поступила в редколлегию 28 мая 1980 г.

ФОРМАЦИИ СО СВЕРХРАЗРЕШИМЫМИ ЛОКАЛЬНЫМИ ПОДФОРМАЦИЯМИ

А. Н. СКИБА

В работах [1, 2] рассматривались формации, насыщенные нильпотентными подформациями. В данной работе изучаются несверхразрешимые локальные формации, обладающие сверхразрешимой максимальной локальной подформацией.

В разд. 1 приведены определения и сформулированы некоторые известные результаты, необходимые в дальнейшем. Классификация минимальных локальных несверхразрешимых формаций получена в разд. 2. В разд. 3 описаны свойства локальных формаций, обладающих максимальной локальной $\mathfrak{NA}$-подформацией, и в разд. 4 доказан основной результат. Рассматриваются только конечные группы.

1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В определениях и обозначениях будем следовать [3, 4]. Через $\subset$ обозначается знак строгого включения.

Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторый непустой класс групп; $\mathfrak{H}$-формацией будем называть всякую формацию, входящую в $\mathfrak{H}$. Следуя Л. А. Шеметкову

[5], непустую формацию $\mathfrak{F}$ назовем минимальной не $\mathfrak{H}$-формацией, если $\mathfrak{F}$ не входит в $\mathfrak{H}$, но любая ее нетривиальная подформация входит в $\mathfrak{H}$. Минимальной локальной не $\mathfrak{H}$-формацией [5] назовем локальную формацию, не входящую в $\mathfrak{H}$, но все нетривиальные локальные подформации которой входят в $\mathfrak{H}$. Будем считать, что единичная формация $\mathfrak{E}$ — минимальная не $\mathfrak{X}$-формация, если $\mathfrak{X}$ — пустая формация. Будем называть формацию $\mathfrak{M}$ максимальной подформацией формации $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ и не существует такой формации $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{X} \subset \mathfrak{F}$. Локальную формацию $\mathfrak{M}$ назовем максимальной локальной подформацией формации $\mathfrak{F}$, если $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}$ и не существует такой локальной формации $\mathfrak{X}$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{X} \subset \mathfrak{F}$. Легко видеть, что если $\mathfrak{H}$ — (локальная) формация, то всякая минимальная (локальная) не $\mathfrak{H}$-формация $\mathfrak{F}$ обладает единственной максимальной (локальной) подформацией, совпадающей с $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{H}$.

1.1. Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторая локальная формация. Тогда и только тогда формация $\mathfrak{F}$ — минимальная не $\mathfrak{H}$-формация, когда $\mathfrak{F} = \operatorname{form} G$, где G — монолитическая группа с монолитом $G^{\mathfrak{H}}$. При этом $\operatorname{form}(G/G^{\mathfrak{H}})$ — максимальная подформация формации $\mathfrak{F}$ [1].

Группа G называется формационно критической [6], если $G \notin \operatorname{form} \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — множество всех тех нетривиальных секций группы G, которые содержатся в $\operatorname{form} G$. Группа G называется s-формационно критической [7], если $G \notin \operatorname{form} \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — множество всех тех нетривиальных подгрупп группы G, которые содержатся в $\operatorname{form} G$. Группа G называется l-формационно критической [7], если $G \notin \operatorname{lform} \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — множество всех тех нетривиальных секций группы G, которые содержатся в $\operatorname{lform} G$.

1.2. Если группа G l-формационно критична и $G_{\mathfrak{S}} \neq 1$, то $G = P \leftthreetimes H$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная, а H — s-формационно критическая подгруппы из G [7].

1.3. Если $G = P \leftthreetimes H$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная, а H — формационно критическая подгруппы из G, то G — l-формационно критическая группа [7].

При изучении локальных формаций весьма полезным оказывается введенное Л. А. Шеметковым [3] понятие минимального локального экрана формации.

1.4. Если $\mathfrak{F}$ — локальная формация, порожденная классом групп $\mathfrak{X}$, то ее минимальный локальный экран f имеет для всякого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ значение $f(p) = \operatorname{form}\{A/F_p(A) \mid A \in \mathfrak{X}\} = \operatorname{form}\{A \mid A \in \mathfrak{F} \cap h(p),\ O_p(A) = 1\}$, где h — произвольный локальный экран формации $\mathfrak{F}$ [1].

1.5. Пусть h и f — минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, когда $h \leqslant f$ [1].

1.6. Пусть h и f — минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, когда найдется такое простое число p, что для всех простых чисел $q \neq p$ имеет место $h(q) = f(q)$, $h(p) \subset f(p)$, причем для всякой группы A из $f(p) \setminus h(p)$ с $O_p(A) = 1$ выполняется $f(p) = \operatorname{form}(\{A\} \cup h(p))$ [2].

1.7. Пусть $\mathfrak{F}$-корадикал $G^{\mathfrak{F}}$ всякой группы G из класса групп $\mathfrak{X}$ не содержит фраттиниевых G-главных факторов ($\mathfrak{F}$ — непустая формация). Тогда, если A — монолитическая группа из $\operatorname{form} \mathfrak{X}$, то либо $A \in \mathfrak{F}$, либо $A \in Q(\mathfrak{X})$ [7].

1.8. Пусть $\mathfrak{F} = \operatorname{form} \mathfrak{X}$, где $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Предположим, что каждой $\mathfrak{F}$-группе A однозначно сопоставлено такое ее множество изоморфных подгрупп $\alpha(A)$, что для любой группы $H \in \alpha(A)$ и для всякого гомоморфизма φ группы A имеет место $H^{\varphi} \in \alpha(A^{\varphi})$. Тогда $\alpha(G) \subseteq QR_0(\bigcup_{A \in \mathfrak{X}} \alpha(A))$ для любой группы $G \in \mathfrak{F}$ [7].

1.10. Если $\mathfrak{S}$-корадикал группы G не содержит фраттиниевых па группы G, то $M \in \operatorname{lform} G$ [2].

1.10. Если $\mathfrak{S}$-корадикал группы G не содержит фраттиниевых

G-главных факторов, то формация $\mathrm{form}\, G$ содержит лишь конечное множество подформаций [7].

1.11. Если $\mathfrak{F}$ — S-замкнутая формация, порожденная классом групп $\mathfrak{X}$, то $\mathfrak{F} = QR_oS\mathfrak{X}$ [2].

1.12. Если у каждой группы A из класса групп $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{F}$-корадикал не содержит фраттиниевых A-главных факторов ($\mathfrak{F}$ — непустая формация), то этим же свойством обладают и все группы из $\mathrm{form}\, \mathfrak{X}$ [8].

Если f и h — произвольные экраны, то через $f \vee h$ обозначим такой экран, что для любой группы G имеет место $(f \vee h)(G) = \mathrm{form}\,(f(G) \cup h(G))$. Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — произвольные формации, то положим $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H} = \mathrm{lform}\,(\mathfrak{M} \cup \mathfrak{H})$.

1.13. Пусть h и f — внутренние локальные экраны формаций $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Тогда $h \vee f$ — внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{F}$ [2].

1.14. Решетка многообразий нильпотентных групп класса 3 дистрибутивна [9, 10].

1.15. (см. [11]). Всякое разрешимое почти кроссово многообразие совпадает с одним из перечисленных в теореме 54.31 из [4].

Монолитической называется всякая неединичная группа с единственной минимальной нормальной подгруппой (монолитом). Напомним еще следующие обозначения: $\mathfrak{N}^r$ — произведение формации $\mathfrak{N}$ на себя, взятое r раз (r — натуральное число); $\mathfrak{G}_\pi$ — формация всех π-групп (π — некоторое непустое множество простых чисел).

2. МИНИМАЛЬНЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ НЕСВЕРХРАЗРЕШИМЫЕ ФОРМАЦИИ

В данном разделе изучаются различные типы минимальных формаций. Из леммы 3.1, которая будет доказана ниже, следует, что всякая (локальная) формация $\mathfrak{F}$, не входящая в разрешимую локальную формацию $\mathfrak{H}$, обладает, по крайней мере, одной минимальной (локальной) не $\mathfrak{H}$-подформацией. Это обстоятельство указывает на то, что результаты данного раздела имеют вполне самостоятельное значение. Конечная цель состоит в получении классификации минимальных локальных несверхразрешимых формаций.

Теорема 2.1. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}^r$-формация ($r > 1$), когда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — группа, удовлетворяющая одному из следующих условий:*

1) $\mathfrak{N}^{r-1}$-корадикал группы G неабелев и является единственной минимальной нормальной подгруппой в G;

2) $G = P \leftthreetimes H$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в G; а $H = Q \leftthreetimes N \neq 1$, где $Q = C_H(Q) = H^{\mathfrak{N}^{r-1}}$ — минимальная нормальная подгруппа в H.

Минимальный локальный экран h максимальной локальной подформации из $\mathfrak{F}$ имеет следующие непустые значения: $h(p) = \mathrm{form}\,((G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}})/O_p(G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}}))$ при всех $p \in \pi(G^{\mathfrak{N}^r})$, и $h(p) = \mathrm{form}\,(G/F_p(G))$ при всех $p \in \pi(G) \setminus \pi(G^{\mathfrak{N}^r})$.

Доказательство. Первое утверждение доказано в [1]. Докажем второе утверждение. Обозначим через f минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Пусть h — такой локальный экран, что $h(p) = \mathrm{form}\,((G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}})/O_p(G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}}))$ при всех $p \in \pi(G^{\mathfrak{N}^r})$, $h(p) = \mathrm{form}\,(G/F_p(G))$ при всех $p \in \pi(G) \setminus \pi(G^{\mathfrak{N}^r})$ и $h(p) = \varnothing$ для любого простого числа $p \notin \pi(G)$. Покажем, что h — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{H} = \langle h \rangle$. Пусть $\pi_1 = \pi(G^{\mathfrak{N}^r}) = \{p_1, p_2, \ldots p_n\}$, $H_i = P_i \wr ((G/G^{\mathfrak{N}^r})/O_{p_i}(G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}}))$ — регулярное сплетение группы P_i порядка

p_i с группой $(G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}})/O_{p_i}(G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}})$. По 1.4 для всех $p \in \pi(G)$ имеет место $f(p) = \mathrm{form}\,(G/F_p(G))$. Легко видеть, что $(G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}})/$ $/O_{p_i}(G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}}) \in f(p_1) \cap f(p_2) \cap \ldots \cap f(p_n)$. Следовательно, поскольку группа H_i представима в виде $A_i \leftthreetimes ((G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}})/O_{p_i}(G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}}))$, где A_i — база сплетения H_i, то по лемме 3.11 из [3] $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \subseteq \mathfrak{F}$. Нетрудно заметить, что $F_{p_i}(H_i) = A_i$. Значит, при всех $j = 1, 2, \ldots, n$ $H_i/F_{p_j}(H_i) \in$ $\in Q((G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}})/O_{p_j}(G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}})) \subseteq h(p_j)$. Поскольку при всяком $p \in \pi(G) \setminus \pi_1$ имеет место $f(p) = h(p)$ и $H_i \in \mathfrak{F}$, то по лемме 4.5 из [3] $H_i/F_p(H_i) \in$ $\in h(p)$. Итак, для любого $p \in \pi(H_i)$ имеет место $H_i/F_p(H_i) \in h(p)$. Следовательно, $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\} \subseteq \mathfrak{H}$. Покажем, что $G/G^{\mathfrak{N}^r} \in \mathfrak{H}$. Ясно, что $G/G^{\mathfrak{N}^r} \in \mathfrak{F}$, и поэтому при всех $p \in \pi(G) \setminus \pi_1$ справедливо $(G/G^{\mathfrak{N}^r})/$ $/F_p(G/G^{\mathfrak{N}^r}) \in f(p) = h(p)$. Пусть p — произвольное число из $\pi(G^{\mathfrak{N}^r})$. Если группа $G^{\mathfrak{N}^r}$ неабелева, то $G/G^{\mathfrak{N}^r} = G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}}$. Поскольку $O_p(G/G^{\mathfrak{N}^r}) \subseteq F_p(G/G^{\mathfrak{N}^r})$, то $(G/G^{\mathfrak{N}^r})/F_p(G/G^{\mathfrak{N}^r}) \in Q((G/G^{\mathfrak{N}^r})/O_p(G/G^{\mathfrak{N}^r})) \subseteq$ $\subseteq h(p)$. Пусть группа $G^{\mathfrak{N}^r}$ абелева. Тогда $G = P \leftthreetimes (Q \leftthreetimes N)$, где $P =$ $= C_G(P) = G^{\mathfrak{N}^r}$ — минимальная нормальная подгруппа в G, а $Q =$ $= C_{Q \leftthreetimes N}(Q) = (Q \leftthreetimes N)^{\mathfrak{N}^{r-1}}$ — минимальная нормальная подгруппа в $H =$ $= Q \leftthreetimes N \neq 1$. По лемме 3.9 из [3] Q — p'-группа. Отсюда легко вытекает, что $H/F_p(H) \simeq N/F_p(N)$. Поскольку $O_p(N) \subseteq F_p(N)$, то $H/F_p(H) \in Q(N/$ $/O_p(N))$. По лемме 1.2 из [3] $G^{\mathfrak{N}^{r-1}}/P = (G/P)^{\mathfrak{N}^{r-1}}$. Следовательно, поскольку имеет место изоморфизм $G/P \simeq H$ и $Q = H^{\mathfrak{N}^{r-1}}$, то $G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}} \simeq$ $\simeq N$. Значит, $H/F_p(H) \in \mathrm{form}\,(N/O_p(N)) = h(p)$. Итак, для любого простого числа $p \in \pi(G/G^{\mathfrak{N}^r})$ справедливо $(G/G^{\mathfrak{N}^r})/F_p(G/G^{\mathfrak{N}^r}) \in h(p)$. По лемме 4.5 из [3] $G/G^{\mathfrak{N}^r} \in \mathfrak{H}$. Ввиду всего сказанного, множество групп $\{H_1, H_2, \ldots H_n, G/G^{\mathfrak{N}^r}\}$ содержится в $\mathfrak{H}$. Следовательно, $\mathfrak{H}_1 = \mathrm{lform}\,(H_1,$ $H_2, \ldots, H_n, G/G^{\mathfrak{N}^r}) \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть h_1 — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{H}_1$. Из 1.4 вытекает, что $h \leqslant h_1$. По 1.5 включение $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ влечет вложение $h_1 \leqslant h$. Значит, $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$ и $h = h_1$. Таким образом, h — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{H}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ — произвольная собственная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, f_1 — ее минимальный локальный экран. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть h_1 — такой локальный экран, что $h_1(p) = \mathrm{form}\,(G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}})$ при всех $p \in \pi_1 = \pi_1(G^{\mathfrak{N}^r})$, $h_1(p) = \mathrm{form}\,(G/F_p/(G))$ при всех $p \in \pi(G) \setminus \pi_1$ и $h_1(p) = \varnothing$ для любого простого числа $p \notin \pi(G)$. Обозначим через h_2 максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}$. Тогда ввиду замечания 4 из [3] имеет место вложение $h_1 \leqslant h_2$. Из построения экранов h и h_1 вытекает, что $h \leqslant h_1$. Значит, $\langle h_1 \rangle = \mathfrak{H}$. Покажем, что $f_1 \leqslant h_1$. Поскольку $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$, то ввиду 1.5 $f_1 \leqslant f$, но $f_1 \neq f$. Экран h_1 построен таким образом, что при всех $p \in \pi(G) \setminus \pi_1$ имеем $h_1(p) = f(p)$. Следовательно, чтобы показать, что $f_1 \leqslant h_1$ достаточно показать, что для всех $p \in \pi_1$ имеет место $f_1(p) \subseteq h_1(p)$. Пусть p — произвольное число из π_1. Предположим, что $f_1(p) = f(p)$. Пусть $G^{\mathfrak{N}^r}$ — неабелева группа. Тогда $F_p(G) = 1$. Значит, $G \simeq G/F_p(G) \in f(p) = f_1(p)$. Но f_1 — внутренний экран формации $\mathfrak{F}_1$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}_1$. Но тогда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G \subseteq \mathfrak{F}_1$. Последнее противоречит определению формации $\mathfrak{F}_1$. Пусть $G^{\mathfrak{N}^r}$ — абелева группа. Тогда $G = P \leftthreetimes H$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G. Легко видеть, что $F_p(G) = P$. Следовательно, $H \simeq G/P =$ $= G/F_p(G) \in f(p) = f_1(p) \subseteq \mathfrak{F}_1$. Нетрудно показать, что для всех $q \in$ $\in \pi(G) \setminus p$ имеет место $G/F_q(G) \simeq H/F_q(H)$. Отсюда, ввиду 1.4 вытекает, что для любого простого числа $q \in \pi(G) \backslash p$ выполняется $f_1(q) = f(q)$. Значит, $f_1 = f$ и $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. Последнее противоречит определению формации $\mathfrak{F}_1$. Таким образом, $f_1(p) \subset f(p)$. По лемме 1.2 из [3] и из строения группы G вытекает, что $\mathfrak{N}^{r-1}$-корадикал группы $G/F_p(G)$ является ее единственной минимальной нормальной подгруппой. Но form $(G/F_p(G)) = f(p)$. Следовательно, по 1.1 формация $\mathfrak{M} = \mathrm{form}\,((G/F_p(G))/(G/F_p(G))_{\mathfrak{N}}^{r-1})$ является единственной максимальной подформацией формации $f(p)$. Значит, $f_1(p) \subseteq \mathfrak{M}$. Но по лемме 1.2 из [3] $(G/F_p(G))/(G/F_p(G))^{\mathfrak{N}^{r-1}} = (G/F_p(G))/ /(G^{\mathfrak{N}^{r-1}}/F_p(G)) \simeq G/G^{\mathfrak{N}^{r-1}}$. Таким образом, $f_1(p) \subseteq h_1(p)$. Значит, $f_1 \leqslant h_1$ и поэтому $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{H}$. Итак, всякая собственная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{H}$. При этом ясно, что $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$, т. е. $\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Лемма 2.1. *Пусть f — минимальный, а h — максимальный внутренний локальные экраны формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{H}$-формация, когда $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая монолитическая группа с монолитом $G^{\mathfrak{H}}$, что для всех $p \in \pi(G^{\mathfrak{H}})$ $f(p)$ — минимальная не $h(p)$-формация.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \backslash \mathfrak{H}$. Тогда G — монолитическая группа с монолитом $G^{\mathfrak{H}}$ и $\mathrm{lform}\, G = \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \pi(G^{\mathfrak{H}})$. Предположим, что $f(p) = \mathfrak{E}$. Тогда поскольку $f(p) = \mathrm{form}\,(G/F_p(G))$, то G — группа порядка p. Но $G \notin \mathfrak{H}$. Следовательно, $h(p) = \varnothing$. Итак, в этом случае $f(p)$ — минимальная не $h(p)$-формация. Пусть $f(p) \neq \mathfrak{E}$. Обозначим через $\mathfrak{M}$ произвольную собственную подформацию из $f(p)$. Предположим, что $\mathfrak{M} \not\subseteq h(p)$ и A — группа минимального порядка из $\mathfrak{M} \backslash h(p)$. Поскольку по теореме 3.3 из [3] $h(p) = \mathfrak{N}_p h(p)$, то $O_p(A) = 1$. Ясно также, что в A содержится лишь одна минимальная нормальная подгруппа. Пусть L — точный неприводимый $GF_{(p)}[A]$-модуль. Обозначим через H группу $L \leftthreetimes A$. Поскольку $A \in \mathfrak{M} \subseteq f(p)$, то по лемме 3.11 из [3] $H \in \mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathrm{lform}\, H = \mathfrak{F}$. Тогда по 1.4 $f(p) = \mathrm{form}\, A \subseteq \mathfrak{M} \subset f(p)$. Противоречие показывает, что $\mathrm{lform}\, H \subset \mathfrak{F}$. Значит, $\mathrm{lform}\, H \subseteq \mathfrak{H}$. Но тогда $H/F_p(H) \simeq A \in h(p)$. Противоречие показывает, что $\mathfrak{M} \subseteq h(p)$. Итак, каждая собственная подформация из $f(p)$ входит в $h(p)$. Предположим, что $f(p) \subseteq h(p)$. Если $G^{\mathfrak{H}} \notin \mathfrak{N}_p$, то $F_p(G) = 1$. Следовательно, $G \simeq G/F_p(G) \in f(p) \subseteq h(p)$. Поскольку экран h является внутренним для формации $\mathfrak{H}$, то из последнего следует, что $G \in \mathfrak{H}$. Противоречие показывает, что $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$. По 1.2 $G^{\mathfrak{H}} = C_G(G^{\mathfrak{H}}) = F_p(G)$. Но $G/F_p(G) \in f(p) \subseteq h(p)$. Значит, по лемме 3.11 из [3] $G \in h(p) \subseteq \mathfrak{H}$. Полученное противоречие показывает, что $f(p) \not\subseteq h(p)$, т. е. $f(p)$ — минимальная не $h(p)$-формация.

Достаточность. Предположим, что выполнены условия леммы. Тогда $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная собственная локальная подформация из $\mathfrak{F}$ и m — ее минимальный локальный экран. Возьмем $p \in \pi(G) \setminus \pi(G^{\mathfrak{H}})$. Легко видеть, что $G/F_p(G) \simeq (G/G^{\mathfrak{H}})/F_p(G/G^{\mathfrak{H}})$. Следовательно, $G/F_p(G) \in h(p)$. По 1.4 $f(p) \subseteq h(p)$. Но по 1.5 $m(p) \subseteq f(p)$. Таким образом, для всех $p \in \pi(G) \setminus \pi(G^{\mathfrak{H}})$ $m(p) \subseteq h(p)$. Пусть теперь $p \in \pi(G^{\mathfrak{H}})$. Предположим, что $m(p) = f(p)$. Тогда $G/F_p(G) \in m(p)$. Если $G^{\mathfrak{H}} \notin \mathfrak{N}_p$, то $G \simeq G/F_p(G) \in m(p) \subseteq \mathfrak{M}$. В этом случае $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}\, G \subseteq \mathfrak{M}$, что противоречит определению формации $\mathfrak{M}$. Пусть $G^{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{N}_p$. Тогда $G^{\mathfrak{H}} = F_p(G)$. Следовательно, $G/G^{\mathfrak{H}} \in m(p)$. По лемме 3.11 из [3] $G \in \mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$. Противоречие показывает, что $m(p) \subset f(p)$. По условию всякая собственная подформация из $f(p)$ входит в $h(p)$. Значит, $m(p) \subseteq h(p)$. Итак, для всех простых p $m(p) \subseteq h(p)$, т. е. $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{H}$-формация.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая формция, $\mathfrak{F}$ — формация с внутренним локальным экраном f_1, причем $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Тогда формация $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ ло-*

кальна и имеет такой максимальный локальный экран φ, *что для любого* $p \in \pi(\mathfrak{F}\mathfrak{H})$ *имеет место* $\varphi(p) = \mathrm{form}\{A \mid A \in f_1(p)\mathfrak{H},\ O_p(A) = 1\}$.

Доказательство. Пусть f — такой локальный экран, что $f(p) = f_1(p)\mathfrak{H}$ для любого $p \in \pi(\mathfrak{F})$, а для $q \notin \pi(\mathfrak{F}) = \pi(\mathfrak{F}\mathfrak{H})$ пусть $f(q) = \varnothing$. Повторяя дословно доказательство теоремы 2 из [12], видим, что f — локальный экран формации $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Теперь применяем утверждение 1.4. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — S*-замкнутая формация, причем многообразие* $\mathfrak{M} = \mathrm{var}\,\mathfrak{F}$ *локально конечно. Для всякой* S*-замкнутой подформации* $\mathfrak{H}$ *из* $\mathfrak{F}$ *положим* $\mathfrak{H}^\varphi = \mathrm{var}\,\mathfrak{H}$. *Тогда* φ — *изоморфное отображение решетки* $\mathrm{Lat}\,\mathfrak{F}$ *всех* S*-замкнутых подформаций формации* $\mathfrak{F}$ *на решетку* $\mathrm{Lat}\,\mathfrak{M}$ *всех подмногообразий многообразия* $\mathfrak{M}$.

Доказательство. Заметим прежде, что если $\mathfrak{H}$ — произвольная S-замкнутая подформация формации $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}$ совпадает с множеством всех конечных групп многообразия $\mathfrak{H}^\varphi = \mathrm{var}\,\mathfrak{H}$. Действительно, поскольку $\mathrm{var}\,\mathfrak{H} \subseteq \mathrm{var}\,\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$ и многообразие $\mathfrak{M}$ локально конечно, то по теореме 51.1 из [4] любая конечная группа A из $\mathrm{var}\,\mathfrak{H}$ принадлежит $QSR_0\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$.

Покажем, что φ — биективное отображение решетки $\mathrm{Lat}\,\mathfrak{F}$ в решетку $\mathrm{Lat}\,\mathfrak{M}$. Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — произвольные S-замкнутые подформации формации $\mathfrak{F}$, и пусть $\mathfrak{F}_1^\varphi = \mathfrak{F}_2^\varphi$. Тогда поскольку $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — множества всех конечных групп соответственно в $\mathfrak{F}_1^\varphi$ и $\mathfrak{F}_2^\varphi$, то $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2$. Следовательно, отображение φ инъективно. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — произвольное подмногообразие многообразия $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ множество всех конечных групп из $\mathfrak{M}_1$. Поскольку $\mathfrak{F}$ — множество всех конечных групп из $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$. Так как всякое многообразие замкнуто относительно операций Q, S и R_0, то $\mathfrak{F}_1$ — S-замкнутая формация. Многообразие $\mathfrak{M}_1$ локально конечно, а значит, порождается своими конечными группами. Таким образом, $\mathfrak{F}_1^\varphi = \mathfrak{M}_1$. Следовательно, отображение φ сюръективно.

Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — произвольные S-замкнутые подформации формации $\mathfrak{F}$; $\mathfrak{H}$ — S-замкнутая формация, порожденная $\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2$. По 1.11 $\mathfrak{H} = QR_0S(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Но $\mathrm{var}\,(QR_0S(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)) = \mathrm{var}\,(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$ и $\mathrm{var}\,(\mathrm{var}\,\mathfrak{F}_1 \cup \cup \mathrm{var}\,\mathfrak{F}_2) = \mathrm{var}\,(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$. Следовательно, $\mathfrak{H}^\varphi = \mathrm{var}\,(\mathfrak{F}_1^\varphi \cup \mathfrak{F}_2^\varphi) = \mathfrak{F}_1^\varphi \vee \mathfrak{F}_2^\varphi$. Кроме того, поскольку два локально конечных многообразия совпадают тогда и только тогда, когда совпадают их множества конечных групп, то $(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2)^\varphi = \mathrm{var}\,(\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2) = \mathrm{var}\,\mathfrak{F}_1 \cap \mathrm{var}\,\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1^\varphi \cap \mathfrak{F}_2^\varphi = \mathfrak{F}_1^\varphi \wedge \mathfrak{F}_2^\varphi$. Таким образом, φ сохраняет операции. Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Тогда и только тогда* $\mathfrak{F}$ — *минимальная неабелева формация, когда* $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\,G$, *где* G — *группа, удовлетворяющая одному из следующих условий:*

1) G — *непримарная группа с единственной минимальной нормальной подгруппой* R, *причем* $R = G^{\mathfrak{A}}$;

2) G — *неабелева группа порядка* p^3 *экспоненты* p, *где* p — *нечетное простое число*;

3) G — *группа кватернионов порядка* 8.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — минимальная неабелева формация. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственной максимальной подформацией $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}$.

Пусть $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}$. Тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная ненильпотентная формация. По 1.1 $\mathfrak{F} = \mathrm{form}\,G$, где G — неединичная группа с единственной минимальной нормальной подгруппой R, причем $G^{\mathfrak{N}} = R$ и формация $\mathrm{form}\,(G/R)$ является максимальной подформацией в $\mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathrm{form}\,(G/R) = \mathfrak{H}$. Значит, $R = G^{\mathfrak{A}}$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию 1).

Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}$. Поскольку в $\mathfrak{F}$ содержится лишь одна максимальная подформация, то $\mathfrak{F}$ порождается некоторой p-группой A. Но тогда, по теореме 52.11 из [4] $\mathrm{var}\,\mathfrak{F} = \mathrm{var}\,A$ — кроссово многообразие. По теореме 2.4 из [3] всякая подформация из $\mathfrak{N}$ S-замкнута. Следовательно, по лемме 2.3 отображение φ такое, что для всякой подформации $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{F}_1^\varphi = \mathrm{var}\,\mathfrak{F}_1$

является изоморфным отображением решетки $\operatorname{Lat}\mathfrak{F}$ всех подформаций формации $\mathfrak{F}$ на решетку $\operatorname{Lat}(\operatorname{var}\mathfrak{F})$ всех подмногообразий многообразия $\operatorname{var}\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{H}^{\varphi}=\operatorname{var}\mathfrak{H}$ — единственное максимальное отличное от $\operatorname{var}\mathfrak{F}$ подмногообразие многообразия $\operatorname{var}\mathfrak{F}$. Поскольку многообразие $\operatorname{var}\mathfrak{F}$ содержит неабелевы группы, то по теореме 24.64 из [4] произведение $\mathfrak{A}_q\operatorname{var}\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{A}_q$ — многообразие абелевых групп простой экспоненты $q\neq p$, не является кроссовым многообразием. Известно, что всякое некроссово многобразие обладает почти кроссовым, т. е. таким подмногообразием, которое само не кроссово, но все собственные подмногообразия которого кроссовы. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — почти кроссово подмногообразие многообразия $\mathfrak{A}_q\operatorname{var}\mathfrak{F}$. Легко видеть, что $\mathfrak{A}_q\operatorname{var}\mathfrak{F}$ — разрешимое многообразие. Следовательно, по 1.15 и по теореме 54.31 и [4] $\mathfrak{M}_1$ может быть лишь одним из следующих многообразий: 1) $\mathfrak{A}$; 2) $\mathfrak{A}_q^2$; 3) $\mathfrak{A}_q\mathfrak{A}_p\mathfrak{A}_t$ $(t\neq p,q)$; 4) $\mathfrak{A}_q\mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{H}_1$ — многообразие, порожденное либо группой кватернионов $(q\neq 2)$, либо неабелевой группой порядка p^3 экспоненты p $(p\neq 2)$. Легко проверить, что первые три многообразия не являются подмногообразиями многообразия $\mathfrak{A}_q\operatorname{var}\mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{A}_q\mathfrak{H}_1$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{H}_1\subseteq\operatorname{var}\mathfrak{F}$. Поскольку формация $\mathfrak{H}$ абелева, то $\mathfrak{H}^{\varphi}=\operatorname{var}\mathfrak{H}$ — абелево многообразие. Но $\mathfrak{H}_1\not\subseteq\mathfrak{A}$. Следовательно, $\operatorname{var}\mathfrak{F}=\mathfrak{H}_1$. Таким образом, $\mathfrak{F}=\operatorname{form}G$, где G — либо неабелева группа порядка p^3 экспоненты p $(p\neq 2)$, либо группа кватернионов порядка 8.

Пусть теперь $\mathfrak{F}=\operatorname{form}G$, где G — одна из групп, описанных в условии. Если $G\notin\mathfrak{N}$, то $G^{\mathfrak{A}}=G^{\mathfrak{N}}$, и поэтому максимальная подформация $\operatorname{form}(G/G^{\mathfrak{N}})$ формации $\mathfrak{F}$ абелева. Если G удовлетворяет одному из условий 2), 3), то многообразие, порожденное группой G, является минимальным неабелевым. Ввиду леммы 2.3 отсюда вытекает, что $\mathfrak{F}$ — минимальная неабелева формация.

Теорема 2.3. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация, когда $\mathfrak{F}=\operatorname{lform}G$, где G — такая группа, что либо $G^{\mathfrak{A}}$ — неабелева единственная минимальная нормальная подгруппа в G, либо $G=P\leftthreetimes H$, где $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в G, а H — одна из следующих групп: 1) $Q\leftthreetimes N$, где $Q=C_{Q\times N}(Q)=(Q\times N)^{\mathfrak{A}}\neq 1$ — минимальная нормальная подгруппа в $Q\leftthreetimes N$; 2) неабелева группа порядка p^3 экспоненты p, где p — нечетное простое число; 3) группа кватернионов порядка* 8.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация. Тогда в $\mathfrak{F}$ содержится единственная максимальная локальная подформация $\mathfrak{H}$. Обозначим через f и h минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

Предположим сначала, что $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{N}^2$. Тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}^2$-формация. Ввиду теоремы 2.1 $\mathfrak{F}=\operatorname{lform}G$, где G — группа, удовлетворяющая одному из следующих условий: 1) $G^{\mathfrak{N}}$ — неабелева единственная минимальная нормальная подгруппа в G; 2) $G=P\leftthreetimes H$, где $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в G, а $H=Q\leftthreetimes N\neq 1$, где $Q=C_H(Q)=H^{\mathfrak{N}}$ — минимальная нормальная подгруппа в H. Пусть G удовлетворяет первому из этих двух условий. Покажем, что в этом случае $G^{\mathfrak{N}}=G^{\mathfrak{A}}$. Пусть p и q — различные простые числа из $\pi(G^{\mathfrak{N}})$. По теореме 2.1 $h(p)=\operatorname{form}((G/G^{\mathfrak{N}})/O_p(G/G^{\mathfrak{N}}))$ и $h(q)=\operatorname{form}((G/G^{\mathfrak{N}})/O_q\times\times(G/G^{\mathfrak{N}}))$. Но $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Следовательно, ввиду 1.5 $h\leqslant t$, где t — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Отсюда и из леммы 2.2 заключаем, что $h(r)\subseteq\mathfrak{A}\cap\mathfrak{S}_{r'}$ для всякого простого числа r. Значит, группы $(G/G^{\mathfrak{N}})/O_p(G/G^{\mathfrak{N}})$ и $(G/G^{\mathfrak{N}})/O_q(G/G^{\mathfrak{N}})$ абелевы. Таким образом, фактор-группа $G/G^{\mathfrak{N}}$ абелева, т. е. $G^{\mathfrak{N}}=G^{\mathfrak{A}}$. Пусть теперь G удовлетворяет второму условию, $\{p\}=\pi(P)$ и $\{q\}=\pi(Q)$. По лемме 3.9 из [3] $p\neq q$. Следовательно, ввиду теоремы 2.1 $h(q)=\operatorname{form}(G/F_q(G))$. Нетрудно заметить, что $F_q(G) = P \leftthreetimes Q$. Значит, $N \simeq G/F_q(G) \in h(q) \subseteq \mathfrak{A}$. Отсюда следует, что $Q = (Q \leftthreetimes N)^{\mathfrak{A}}$.

Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{N}^2$. Тогда ввиду лемм 2.1 и 2.2 найдутся такие простые числа p и q, что $f(q) = \mathfrak{G}$, $f(p)$ — минимальная неабелева формация q-групп, и для всякого простого числа $t \notin \{p, q\}$ $f(t) = \varnothing$. По теореме 2.2 $f(p) = \operatorname{form} H$, причем H — либо группа кватернионов, либо неабелева группа порядка q^3 экспоненты q $(q \neq 2)$. В любом из этих случаев группа H обладает лишь одной минимальной нормальной подгруппой. Следовательно, существует точный неприводимый $GF(p)[H]$-модуль P. Пусть $G = P \leftthreetimes H$. Ясно, что $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в G. По лемме 3.11 из [3] $G \in \mathfrak{F}$. Поскольку $F(G) = P$ и $H \notin \mathfrak{A}$, то $G \notin \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Значит, $\mathfrak{F} = \operatorname{lform} G$. Этим доказана необходимость.

Пусть теперь $\mathfrak{F} = \operatorname{lform} G$, где G — группа из условия теоремы. Если $G \notin \mathfrak{N}^2$, то ввиду условия и теоремы 2.1 формация $\mathfrak{F}$ обладает единственной максимальной локальной подформацией $\mathfrak{H}$, минимальный локальный экран h которой для всякого простого числа t удовлетворяет включению $h(t) \subseteq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{S}_{t'}$. Последнее означает, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, т. е. в этом случае $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация. Пусть $G \in \mathfrak{N}^2$. Тогда по условию $G = P \leftthreetimes H$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в G, а H — либо неабелева группа порядка q^3 экспоненты q $(q \neq 2)$, либо группа кватернионов. Пусть $\{p\} = \pi(P)$. По лемме 3.9 из [3] $p \neq q$. Обозначим через f минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}$. По 1.4 $f(p) = \operatorname{form} H$, $f(q) = \mathfrak{G}$ и $f(t) = \varnothing$ для всех $t \notin \{p, q\}$. По теореме 2.2 в формации $f(p)$ содержится лишь одна максимальная подформация $\mathfrak{H}$, причем $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{S}_{p'}$. Следовательно, $f(p)$ — минимальная не $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{S}_{p'}$-формация. Из последнего ввиду лемм 2.2 и 2.1 следует, что $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация. Теорема доказана.

Из теорем 2.1 и 2.3 легко вытекает описание минимального локального экрана максимальной локальной подформации минимальной локальной не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формации в случае, когда эта формация неметанильпотентна. В ходе доказательства теоремы 2.3 получено следующее утверждение.

Следствие 2.3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — метанильпотентная минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация, h — минимальный локальный экран максимальной локальной подформации из $\mathfrak{F}$. Тогда найдутся такие простые числа p и q, что $h(q) = \mathfrak{G}$, $h(p)$ — либо формация элементарных абелевых q-групп $(q \neq 2)$, либо формация абелевых групп экспоненты 4 $(q = 2)$ и $h(t) = \varnothing$ для всех простых $t \notin \{p, q\}$.*

Теорема 2.4. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной локальной несверхразрешимой формацией, когда $\mathfrak{F} = \operatorname{lform} G$, где G — группа, удовлетворяющая одному из следующих условий:*

1) $G^{\mathfrak{A}}$ — неабелева единственная минимальная нормальная подгруппа в G, $G/G^{\mathfrak{A}}$ — 2-группа экспоненты, делящей $p-1$ для всякого нечетного $p \in \pi(G^{\mathfrak{A}})$;

2) $G = P \leftthreetimes H$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, $H = Q \leftthreetimes N \neq 1$, где $Q = C_H(Q) = H^{\mathfrak{A}}$ — циклическая минимальная нормальная q-подгруппа в H, $|N|$ делит $q-1$, $|N_{p'}|$ делит $p-1$;

3) G — минимальная несверхразрешимая группа, $\Phi(G) = 1$ и фактор-группа $G/F(G)$ либо циклична, либо изоморфна группе кватернионов, либо является неабелевой группой порядка q^3 простой нечетной экспоненты q.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная несверхразрешимая формация, $\mathfrak{H}$ — ее максимальная локальная подформация. Обозначим через f и h минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$.

Предположим сначала, что $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация. Ввиду теоремы 2.3 $\mathfrak{F} = \operatorname{lform} G$, где G — одна из групп, описанных в условии теоремы 2.3. Пусть в группе G $G^{\mathfrak{A}}$ — неабелева единственная минимальная нормальная подгруппа. Покажем, что $G/G^{\mathfrak{A}}$ — 2-группа экспоненты, делящей $p-1$, для всякого нечетного $p\in\pi(G^{\mathfrak{A}})$. Ввиду теоремы Томпсона — Фейта о разрешимости групп нечетного порядка $2\in\pi(G^{\mathfrak{A}})$. По теореме 2.1 $h(2)=\mathrm{form}((G/G^{\mathfrak{A}})/O_2(G/G^{\mathfrak{A}}))$. Но $\mathfrak{H}$ — сверхразрешимая формация. Отсюда и из 1.5 вытекает, что $h(2)\subseteq\mathfrak{E}$, т. е. $(G/G^{\mathfrak{A}})/O_2(G/G^{\mathfrak{A}})\simeq 1$. Пусть p — произвольное нечетное число из $\pi(G^{\mathfrak{A}})$. По теореме 2.1 $h(p)=\mathrm{form}((G/G^{\mathfrak{A}})/O_p(G/G^{\mathfrak{A}}))=\mathrm{form}(G/G^{\mathfrak{A}})$. Хорошо известно (см., например, [3]), что формация всех сверхразрешимых групп имеет такой локальный экран s, что для всякого простого числа q $s(q)$ — формация всех абелевых групп экспоненты, делящей $q-1$. Но по 1.5 $h\leqslant s$. Следовательно, экспонента группы $G/G^{\mathfrak{A}}$ делит $p-1$. Пусть теперь $G=P\leftthreetimes H$, где $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а $H=Q\leftthreetimes N\neq 1$, где $Q=C_H(Q)=H^{\mathfrak{A}}$ — минимальная нормальная q-подгруппа в H. По теореме 53.44 из [4] группа H является критической. Следовательно, по 1.3 группа G l-формационно критична. Отсюда вытекает, что формация $\mathrm{lform}\,H$ является собственной локальной подформацией формации $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\,G$. Но в $\mathfrak{F}$ каждая собственная локальная подформация сверхразрешима. Значит, группа H сверхразрешима. Следовательно, Q — циклическая группа. Поскольку N — неприводимая абелева группа автоморфизмов группы Q, то по лемме 4.1 из [3] $|N|$ делит $q-1$. По теореме 2.1 $h(p)=\mathrm{form}((G/G^{\mathfrak{A}})/O_p(G/G^{\mathfrak{A}}))\subseteq s(p)$. Значит, экспонента группы $(G/G^{\mathfrak{A}})O_p(G/G^{\mathfrak{A}})$ делит $p-1$. По лемме 1.2 из [3] $G^{\mathfrak{A}}=PH^{\mathfrak{A}}=PQ$. Следовательно, $G/G^{\mathfrak{A}}=PH/PQ\simeq H/Q\simeq N$. Таким образом, экспонента группы $N/Q_p(N)$ делит $p-1$. Группа N циклична, поскольку она является неприводимой абелевой группой автоморфизмов. Кроме того, $N/O_p(N)\simeq N_{p'}$. Следовательно, $|N_{p'}|$ делит $p-1$. Итак, группа G удовлетворяет условию 2).

Пусть $G=P\leftthreetimes H$, где $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в G, а H — либо неабелева группа порядка q^3 экспоненты q $(q\neq 2)$, либо группа кватернионов. В любом из этих случаев группа H формационно критична. Следовательно, по 1.3 G — l-формационно критическая группа. Значит, если L — произвольная собственная подгруппа группы G, входящая в $\mathrm{lform}\,G$, то $\mathrm{lform}\,L\subset\mathrm{lform}\,G=\mathfrak{F}$. Но $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная несверхразрешимая формация. Поэтому группа L сверхразрешима. Поскольку $G\in\mathfrak{N}^2$, то по 1.9 формация $\mathfrak{F}$ S-замкнута. Следовательно, все собственные подгруппы группы G сверхразрешимы. Таким образом, G — минимальная несверхразрешимая группа. Кроме того, ясно, что $\Phi(G)=1$ и $G/F(G)$ — либо группа кватернионов, либо неабелева группа порядка q^3 экспоненты q $(q\neq 2)$, т. е. группа G удовлетворяет условию 3).

Пусть $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Обозначим через G группу минимального порядка из $\mathfrak{F}\backslash\mathfrak{H}$. Поскольку $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\,G$. Покажем, что G удовлетворяет условию 3). По 1.9 формация $\mathfrak{F}$ S-замкнута. Следовательно, ввиду определения группы G все ее собственные подгруппы входят в $\mathfrak{F}$, а значит сверхразрешимы. Отсюда и из определения формации $\mathfrak{F}$ получаем, что G — минимальная несверхразрешимая группа. Поскольку коммутант группы G нильпотентен, то ввиду свойств минимальных несверхразрешимых групп $G/F(G)$ — циклическая группа. К этому остается добавить, что поскольку всякая локальная формация насыщена, то $\Phi(G)=1$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}=\mathrm{lform}\,G$, где G — одна из групп, описанных в условии теоремы. Покажем, что $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная несверхразрешимая формация. Для этого достаточно показать, что всякая собственная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$ сверхразрешима. Если G — группа из пунктов 1), 2), то по теореме 2.1 формация $\operatorname{lform} G$ содержит лишь одну максимальную локальную подформацию $\mathfrak{H}$, минимальный локальный экран h которой таков, что для всех $p \in \pi(G)$ $h(p)$ — некоторая формация абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$, и $h(p)=\varnothing$, если $p \notin \pi(G)$. Тогда $h \leqslant s_r$, т. е. формация $\mathfrak{H}$ сверхразрешима. Пусть G — группа из пункта 3). Тогда ввиду свойств минимальных несверхразрешимых групп $G=P \leftthreetimes H$, где $P=C_G(P)=F(G)$ — минимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть $\{p\}=\pi(P)$ и $\{q\}=\pi(H)$. По 1.4 $f(p)=\operatorname{form} H$ и $f(q)=\mathfrak{G}$. Пусть H — циклическая группа порядка q^n $(n \geqslant 1)$, H_1 — ее максимальная подгруппа. Пусть h — такой локальный экран, что $h(q)=\mathfrak{G}$, $h(p)=\operatorname{form} H_1$ и $h(t)=\varnothing$ при всех простых $t \notin \{p, q\}$. По 1.4 h — минимальный локальный экран формации $\langle h\rangle=\mathfrak{H}$. Легко показать, что формация $\operatorname{form} H_1$ является единственной максимальной подформацией формации $\operatorname{form} H$. Следовательно, ввиду 1.5 $\mathfrak{H}$ — максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Поскольку G — минимальная несверхразрешимая группа, то $|H_1|$ делит $p-1$. Значит, $h \leqslant s$, т. е. формация $\mathfrak{H}$ сверхразрешима. Пусть $\mathfrak{H}_1$ — произвольная максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, h_1 — ее минимальный локальный экран. Тогда по 1.6 либо $h_1(q)=\varnothing$ и $h_1(p)=f(p)$, либо $h_1(q)=\mathfrak{G}$ и $h_1(p)=\operatorname{form} H_1$. Первое невозможно, поскольку h_1 — внутренний локальный экран формации $\mathfrak{H}_1$. Следовательно, имеет место второе, т. е. $\mathfrak{H}_1=\mathfrak{H}$. Таким образом, $\mathfrak{H}$ — единственная максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Предположим теперь, что H — либо неабелева группа порядка q^3 экспоненты q $(q \neq 2)$, либо группа кватернионов. Поскольку G — минимальная несверхразрешимая группа, то в первом случае q делит $p-1$, во втором 4 делит $p-1$. Отсюда ввиду леммы 2.1 и теоремы 2.2 вытекает, что $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная несверхразрешимая формация. Теорема доказана.

3. ФОРМАЦИЯ С МАКСИМАЛЬНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-ПОДФОРМАЦИЕЙ

Лемма 3.1. *Пусть $\mathfrak{H}$ — разрешимая локальная формация, $\mathfrak{F}$ — (локальная) формация, не входящая в $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает минимальной (локальной) не $\mathfrak{H}$-подформацией.*

Доказательство. Пусть G — группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathfrak{H}$. Тогда $G^{\mathfrak{H}}$ — единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $G^{\mathfrak{H}} \not\subseteq \Phi(G)$. Покажем, что в формации $\operatorname{lform} G$ содержится лишь конечное множество локальных подформаций. Обозначим через f минимальный локальный экран формации $\operatorname{lform} G$. По 1.4 $f(p)=\operatorname{form}(G/F_p(G))$, если $p \in \pi(G)$ и $f(p)=\varnothing$ для всякого простого числа $p \notin \pi(G)$. Так как $\mathfrak{S}$-корадикал группы G не содержит фраттиниевых G-главных факторов, то по 1.12 $\mathfrak{S}$-корадикал группы $G/F_p(G)$ также не содержит фраттиниевых $(G/F_p(G))$-главных факторов. По 1.10 в формации $\operatorname{form}(G/F_p(G))=f(p)$ содержится лишь конечное множество подформаций. Следовательно, лишь конечное число локальных экранов t может удовлетворять вложению $t \leqslant f$. Но если $\mathfrak{H}_1$ — локальная подформация в $\operatorname{lform} G$ и h — ее минимальный локальный экран, то по 1.5 $h \leqslant f$. Таким образом, в формации $\operatorname{lform} G$ содержится лишь конечное множество локальных подформаций. Так как $\operatorname{lform} G \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{H} \cap \operatorname{lform} G$, то из последнего вытекает, что в формации $\operatorname{lform} G$ найдется такая локальная подформация $\mathfrak{M}$, что $\mathfrak{M} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{H}$ для всякой собственной локальной подформации $\mathfrak{M}_1$ из $\mathfrak{M}$. Но $\operatorname{lform} G \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, минимальная локальная не $\mathfrak{H}$-формация $\mathfrak{M}$ является подформацией формации $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Тогда и только тогда локальная $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация $\mathfrak{M}$ является максимальной локальной подформацией локальной формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — такая минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация, все собственные локальные подформации которой входят в $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация локальной формации $\mathfrak{F}$, причем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, но $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Если каждая собственная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{F}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация, и в этом случае утверждение леммы справедливо. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — такая собственная локальная подформация в $\mathfrak{F}$, что $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то из последнего заключаем, что $\mathfrak{M}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. По лемме 3.1 в формации $\mathfrak{M}_1$ содержится некоторая минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация $\mathfrak{H}$. Ясно, что $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Кроме того, если $\mathfrak{H}_1$ — собственная локальная подформация формации $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{M}$, ибо в противном случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$.

Пусть теперь $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — локальная $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация, а $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация, причем всякая собственная локальная подформация из $\mathfrak{H}$ входит в $\mathfrak{M}$. Покажем, что в такой ситуации $\mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. По теореме 2.3 $\mathfrak{H} = \operatorname{lform} G$, где G — одна из групп, описанных в теореме 2.3. Обозначим через f, m и h минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$. Предположим, что $\mathfrak{M}$ не является максимальной локальной подформацией в $\mathfrak{F}$. Тогда в $\mathfrak{F}$ имеется такая локальная подформация $\mathfrak{F}_1$, что $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$. Пусть f_1 — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}_1$. Ввиду 1.5 $m \leqslant f_1 \leqslant f$, причем найдутся такие простые числа p и q, что $m(p) \subset f_1(p)$ и $f_1(q) \subset f(q)$. Покажем прежде, что в $f_1(p) \setminus m(p)$ найдется такая группа A с единственной минимальной нормальной подгруппой, что $O_p(A) = 1$. В самом деле, по 1.4 множество $f_1(p) \setminus m(p)$ содержит хотя бы одну группу B с $O_p(B) = 1$. Пусть $N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_m$ — цоколь группы B, $M_i = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_{i-1} \times N_{i+1} \times \ldots \times N_m$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$. Обозначим через L_i наибольшую нормальную подгруппу группы B, содержащую M_i, но не содержащую N_i. Тогда B/L_i — монолитическая группа с монолитом $L_iN_i/L_i \simeq N_i$. Так как $O_p(B) = 1$, то $O_p(B/L_i) = 1$. Заметим, что $\bigcap_{i=1}^{m} L_i = 1$, т. е. $B \in R_0(B/L_1, B/L_2, \ldots, B/L_m) \setminus m(p)$. Следовательно, для некоторого l имеем $B/L_l \notin m(p)$. При этом ясно, что $B/L_l \in f_1(p)$.

Покажем теперь, что $\{p, q\} \subseteq \pi(G)$. Поскольку $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то $\mathfrak{N}_{\pi(G)} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}$. Ввиду предположения о $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{N}_{\pi(G)} \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{M})$. Ясно, что $\mathfrak{F} = \operatorname{lform}(\{G\} \cup \mathfrak{M})$. По 1.4 $f(t) = \operatorname{form}(\{G/F_t(G)\} \cup m(t))$ при $t \in \pi(\mathfrak{M})$ и $f(t) = \varnothing$ для всякого простого числа $t \notin \pi(\mathfrak{M})$. Следовательно, $f(r) = f_1(r) = m(r)$, если $r \notin \pi(G)$, т. е. $\{p, q\} \subseteq \pi(G)$.

Предположим, что $G \notin \mathfrak{S}$. Тогда $G^{\mathfrak{A}}$ — неабелева единственная минимальная нормальная подгруппа в G. Пусть $t \in \pi(G) \setminus \pi(G^{\mathfrak{A}})$. Ясно, что $G/F_t(G) \simeq (G/G^{\mathfrak{A}})/F_t(G/G^{\mathfrak{A}}) \simeq 1$. Следовательно, $f(t) = m(t)$. Поэтому $\{p, q\} \subseteq \pi(G^{\mathfrak{A}})$. Легко видеть, что $F_p(G) = 1$. Значит, $f(p) = \operatorname{form}(\{G\} \cup m(p))$. Пусть A — такая группа из $f_1(p) \setminus m(p)$ с $O_p(A) = 1$, у которой имеется лишь одна минимальная нормальная подгруппа. Обозначим через $\mathfrak{F}_0$ формацию $\operatorname{form}(\{G/G^{\mathfrak{A}}\} \cup m(p))$. Так как $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то по лемме 2.2 и 1.5 $m(p) \subseteq \mathfrak{A}$. Значит, $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{A}$. Предположим, что $A \in \mathfrak{F}_0$. Тогда A — циклическая t-группа, где простое число $t \neq p$. Пусть $\mathfrak{F}_2$ — формация, порожденная силовскими t-подгруппами всех групп из $\{G/G^{\mathfrak{A}}\} \cup m(p)$. Покажем, что $\mathfrak{F}_2 \subseteq m(p)$. Действительно, по теореме 2.1 в формации $\operatorname{lform} G$ содержится максимальная локальная подформация $\mathfrak{H}_1$, минимальный локальный экран h_1 которой таков, что $h_1(p) = \operatorname{form}((G/G^{\mathfrak{A}})/O_p(G/G^{\mathfrak{A}}))$. Но по условию $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $h_1(p) \subseteq m(p)$. Следовательно, $(G/G^{\mathfrak{A}})/O_p(G/G)^{\mathfrak{A}} \in m(p)$. Так как группа $G/G^{\mathfrak{A}}$ абелева, то это означает, что силовская t-подгруппа из $G/G^{\mathfrak{A}}$ принадлежит формации $m(p)$. В силу этого $\mathfrak{F}_2 \subseteq m(p)$. Таким образом, поскольку группа A принадлежит формации $\mathfrak{F}_0$, то по 1.8 она содержится в $\mathfrak{F}_2$, а значит, и в $m(p)$. Последнее противоречит определению группы A. Таким образом,

$A \notin \mathfrak{F}_0$. По 1.7 $A \simeq G$. Следовательно, $G \in f_1(p)$. Поскольку f_1 — внутренний экран формации $\mathfrak{F}_1$, то $G \in \mathfrak{F}_1$. Но $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{F}_1$. Отсюда заключаем, что $\mathfrak{F} = \mathrm{lform}(\{G\} \cup \mathfrak{M}) \subseteq \mathfrak{F}_1$, т. е. $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$. Приходим к противоречию с определением формации $\mathfrak{F}_1$. Значит, группа G разрешима.

Предположим, что $G \notin \mathfrak{N}^2$. Тогда $G = P \leftthreetimes H$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в G, а $H = Q \leftthreetimes N \neq 1$, где $Q = C_H(Q) = H^{\mathfrak{A}}$ — минимальная нормальная подгруппа в H. Пусть $\{t\} = \pi(P)$. По теореме 2.1 для всех $r \in \pi(G) \backslash t$ имеем $h_1(r) = h(r)$, где h_1 — минимальный локальный экран максимальной локальной подформации $\mathfrak{H}_1$ из $\mathfrak{H}$. Но $\mathfrak{H}_1 \subseteq \mathfrak{M}$. Следовательно, $h_1 \leqslant m$. Таким образом, $G/F_r(G) \in m(r)$ при всяком $r \in \pi(G) \backslash t$. Ввиду сказанного выше это означает, что $p = q = t$. Пусть A — монолитическая или единичная группа из $f_1(p) \backslash m(p)$ с $O_p(A) = 1$. Так как $f(p) = \mathrm{form}(\{G/F_p(G)\}) \cup m(p)$ и, как не трудно заметить, $P = F_p(G)$, то $A \in \mathrm{form}(\{H\} \cup m(p)) = f(p)$. Точно так же, как и в предыдущем абзаце, можно показать, что $A \notin \mathrm{form}(\{H/Q\} \cup m(p))$. Ввиду 1.7 это дает $A \simeq H$. Но тогда $f(p) = \mathrm{form}(\{A\} \cup m(p)) = f_1(p)$. Противоречие показывает, что G — метанильпотентная группа, т. е. $G = P \leftthreetimes Q$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная подгруппа в G, Q — либо неабелева группа порядка t^3 простой экспоненты t ($t \neq 2$), либо группа кватернионов. Пусть $\{r\} = \pi(P)$, $\{l\} = \pi(Q)$. Ясно, что $f(l) = \mathrm{form}(\{G/F_l(G)\} \cup m(l)) \subseteq m(l)$. Следовательно, $p = q = r$. Покажем, что каждая абелева группа формации $f(p)$ содержится в $m(p)$. Действительно, пусть A — циклическая примарная группа из $f(p)$. Пусть $|A| = t_1^{\alpha}$, где t_1 — простое число. Так как $f(p) = \mathrm{form}(\{G/F_p(G)\} \cup m(p)) = \mathrm{form}(\{Q\} \cup m(p))$, то по 1.8 $A \in QR_0(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ — множество силовских t_1-подгрупп всех групп из $(\{Q\} \cup m(p))$. Значит, найдутся такие группы $H_1, H_2, \ldots, H_n$, принадлежащие $\mathfrak{X}$, что $A \in QR_0(H_1, H_2, \ldots, H_n)$. По теореме 51.2 из [4] экспонента группы A не превосходит наибольшую из экспонент групп $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Поскольку экспонента циклической группы совпадает с ее порядком, то одна из групп $H_1, H_2, \ldots, H_n$ содержит циклическую подгруппу L порядка t_1^{β} не меньшего, чем t_1^{α}. Следовательно, A изоморфно вкладывается в L. Так как $h_1(p) \subseteq m(p)$, то по следствию 2.3.1 всякая циклическая подгруппа из Q входит в $m(p)$. Отсюда и из сказанного ранее вытекает, что $A \in m(p)$. Итак, всякая циклическая примарная группа из $f(p)$ входит в $m(p)$. Следовательно, в $m(p)$ содержатся все абелевы группы из $f(p)$, поскольку они являются прямыми произведениями своих циклических подгрупп. Это означает, что $f_1(p) \not\subseteq \mathfrak{A}$. Пусть A — группа из $f_1(p) \backslash \mathfrak{A}$. По 1.10 в формации $\mathrm{form}\, A$ содержится лишь конечное множество подформаций. Следовательно, в $\mathrm{form}\, A$ содержится минимальная неабелева подформация $\mathfrak{M}_1$. По теореме 2.2 $\mathfrak{M}_1 = \mathrm{form}\, B$, где B — либо неабелева группа порядка c^3 экспоненты c (c — простое нечетное число), либо группа кватернионов. Покажем, что $B \simeq Q$. Действительно, так как $B \in \mathrm{form}(\{Q\} \cup m(p))$, то по 1.8 $B \in QR_0(\mathfrak{X})$, где $\mathfrak{X}$ — множество силовских l_1-подгрупп всех групп из $\{Q\} \cup m(p)$, а $\{l_1\} = \pi(B)$. Так как $m(p) \subseteq \mathfrak{A}$, а группы Q и B неабелевы, то последнее означает, что $\pi(Q) = \pi(B)$. Следовательно, $Q \simeq B$. Но $B \in f_1(p)$. Поэтому $f(p) = \mathrm{form}(\{Q\} \cup m(p)) \subseteq f_1(p)$, т. е. $f_1(p) = f(p)$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 3.3. *Пусть $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация, $\mathfrak{M}$ — $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ формация. Тогда в формации $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$ не существует минимальных локальных не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-подформаций, отличных от $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Можно считать, что $\mathfrak{M}$ — локальная формация. Предположим, что $\mathfrak{H}_1$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-подформация формации $\mathfrak{F}$, отличная от $\mathfrak{H}$. Пусть f, m, h и h_1 минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_1$. Так как $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, то по 1.5 и 1.13 $f = m \vee h$, $h_1 \leqslant f$. Ввиду теоремы 2.3 найдутся такие группы G и H, что $\mathfrak{H} = \mathrm{lform}\, G$, $\mathfrak{H}_1 = \mathrm{lform}\, H$, причем каждая из групп G и H принадлежит одному из классов групп, описанных в теореме 2.3. Пусть p принадлежит множеству простых делителей порядка монолита группы

H. Тогда $T = H/F_p(H)$ — неабелева монолитическая группа из $h_1(p)$. Следовательно, $T \in \mathrm{form}\,(m(p) \cup h(p))$. Пусть R — монолит группы G. Так как для всех $q \in \pi(G) \setminus \pi(R)$ $G/F_q(G)$ — абелева группа и $h(q) = \mathrm{form}\,(G/F_q(G))$, то $p \in \pi(R)$. Пусть T — непримарная группа. Тогда $G/F_p(G)$ — непримарная группа, ибо в противном случае $T \in \mathrm{form}\,(\{G/F_p(G)\} \cup m(p)) \subseteq \mathfrak{N}$. Пусть K — монолит группы $L = G/F_p(G)$. Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ формацию $\mathrm{form}\,(\{L/K\} \cup m(p))$. Ввиду определения группы G фактор-группа L/K абелева, т. е. $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{A}$. Но T — неабелева группа, значит, по 1.7 $T \simeq L$. Если R — неабелева группа, то из последнего ввиду определения групп G и H вытекает, что $G \simeq H$. Но тогда $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$. Полученное противоречие показывает, что R — абелева группа. Следовательно, группы G и H разрешимы. Легко видеть, что для всякого простого числа $q \neq p$ имеют место изоморфизмы $G/F_q(G) \simeq L/F_q(L)$ и $H/F_q\ (H) \simeq T/F_q(T)$. Но $T \simeq L$, следовательно, по 1.4 $h = h_1$, т. е. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$. Противоречие показывает, что группа T примарна. Пусть $\{q\} = \pi(T)$. Ввиду 1.8 T принадлежит формации, порожденной силовскими q-подгруппами всех групп из $m(p) \cup \{L\}$. Так как $m(q) \subseteq \mathfrak{A}$, то q делит $|L|$. Значит, $T \simeq L$. Следовательно, для всех простых t имеем $h(t) = h_1(t)$, т. е. $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 3.4. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — локальная $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{M}$-формация. Тогда если $\mathfrak{F}_1$ — произвольная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-подформация из $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{F}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то ввиду леммы 3.1 в $\mathfrak{F}_1$ содержится минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-подформация $\mathfrak{H}_1$. По лемме 3.3 $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}$. Предположим, что $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}) \subset \mathfrak{F}_1$. Тогда $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$. Обозначим через f, m, h, f_1, f_2 минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}_1$. $\mathfrak{F}_2$. Поскольку $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, то по 1.4 и 1.13 $f = m \vee h$. Следовательно, по 1.5 для всякого простого числа t справедливо $f_1(t) \subseteq \mathrm{form}\,(m(t) \cup h(t))$. Пусть p — такое число из $\pi(\mathfrak{F}_1)$, что $f_2(p) \subset f_1(p)$. Тогда найдется такая монолитическая или единичная группа A с $O_p(A) = 1$, что $A \in f_1(p) \setminus f_2(p)$. Пусть $A \in m(p)$. По лемме 3.7 из [3] $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M} = \langle f_1 \cap m \rangle$. При этом нетрудно заметить, что экран $f_1 \cap m$ является внутренним для формации $\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}$. Следовательно, поскольку $A \in m(p) \cap f_1(p)$ и $O_p(A) = 1$, то ввиду леммы 1.4 $A \in f_2(p)$. Полученное противоречие показывает, что $A \notin m(p)$. Ввиду теоремы 2.3 $\mathfrak{H} = \mathrm{lform}\, G$, где G — одна из групп, описанных в теореме 2.3. Пусть R — монолит группы G. Легко видеть, что $p \in \pi(R)$. Предположим сначала, что $G \notin \mathfrak{N}^2$. Обозначим через $\mathfrak{F}_0$ формацию $\mathrm{form}(m(p) \cup \{(G/F_p(G))/(G/F_p(G))^{\mathfrak{A}}\})$. Поскольку $G/F_p(G)$ — монолитическая группа, монолит которой совпадает с ее $\mathfrak{A}$-корадикалом и $\Phi(G/F_p(G)) = 1$, то по 1.7 из $A \in f_1(p) \subseteq \mathrm{form}\,(m(p) \cup \{G/F_p(G)\})$ следует, что либо $A \in \mathfrak{F}_0$, либо $A \simeq G/F_p(G)$. Пусть имеет место первое. Тогда A — циклическая примарная группа. Так как $O_p(A) = 1$, то A — q-группа, где $q \neq p$. Ввиду определения формации $\mathfrak{H}$ ее максимальная локальная подформация входит в $\mathfrak{M}$. Значит, по теореме 2.1 силовская q-подгруппа группы $(G/F_p(G))/(G/F_p(G))^{\mathfrak{A}}$ входит в $m(p)$. Из последнего ввиду 1.8 следует, что $A \in m(p)$. Итак, первый случай невозможен, т. е. $A \simeq G/F_p(G)$. Но $G \in \mathfrak{F}_2$. Значит, $A \simeq G/F_p(G) \in f_2(p)$. Последнее противоречит определению группы A. Таким образом, $G = R \leftthreetimes Q$, где $R = C_G(R)$, Q — либо неабелева группа порядка q^3 простой экспоненты q $(q \neq 2)$, либо группа кватернионов. Так как $f(p) = \mathrm{form}\,(m(p) \cup h(p)) = \mathrm{form}\,(m(p) \cup \{Q\}) \subseteq \mathfrak{N}$, то A — примарная группа. Нетрудно заметить, что $A \neq 1$. Пусть $r \in \pi(A)$. По лемме 1.8 A принадлежит формации, порожденной силовскими r-подгруппами всех групп из $m(p) \cup \{Q\}$. Если $r \notin \pi(Q)$, то $A \in m(p)$. Последнее невозможно. Значит, $r \in \pi(Q)$. Тогда $A \in \mathrm{form}\,(m(p) \cup \{Q\})$. Ввиду теоремы 2.2 из [3] найдутся такие r-группы $A_1, A_2, \ldots, A_n$, принадлежащие формации $m(p)$, что $A \in \mathfrak{F}_0 = \mathrm{form}\,(Q, A_1, A_2, \ldots, A_n)$. Все группы $Q, A_1, A_2, \ldots, A_n$ имеют класс, не превосходящий 2. Следовательно, по теоремам 5.2 и 52.11 из [4] $\mathfrak{M}_0 = \mathrm{var}\,\mathfrak{F}_0 = \mathrm{var}\, Q \times A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ — кроссово многообразие r-групп класса 2. Ввиду 1.14 решетка подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}_0$ дистрибутивна. Поскольку в $\mathfrak{F}_0$ каждая подформация S-замкнута [3], то по лемме 2.3 решетка всех подформаций формации $\mathfrak{F}_0$ дистрибутивна. Таким образом, $\operatorname{form} A = \operatorname{form} A \cap \operatorname{form} (\operatorname{form} Q \cup \operatorname{form} A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \operatorname{form} ((\operatorname{form} A \cap \operatorname{form} Q) \cup (\operatorname{form} A \cap \operatorname{form} A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n))$. Предположим, что $Q = \operatorname{form} A$. Тогда $\operatorname{form} A = \operatorname{form} (\operatorname{form} Q \cup (\operatorname{form} A \cap \operatorname{form} A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n))$. Поскольку $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \in m(p)$, $A \in f_1(p)$, то $\operatorname{form} A \cap \operatorname{form} A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \subseteq m(p) \cap f_1(p)$. Так как $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, то ввиду леммы 3.7 из [3] $m \cap f_1 \leqslant f_2$. Итак, $\operatorname{form} A \cap \operatorname{form} A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \subseteq f_2(p)$. Заметим, что поскольку $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $Q \in f_2(p)$. Из всего сказанного вытекает, что $A \in f_2(p)$. Полученное противоречит определению A, значит, $Q \notin \operatorname{form} A$. Пусть A — абелева группа. Тогда A — циклическая примарная группа. Ввиду теоремы 5.2 из [4] порядок группы A не превосходит наибольшую из экспонент групп Q, A_1, A_2, ..., A_n. Следовательно, $A \in m(p) \cap f_1(p) \subseteq f_2(p)$. Противоречие показывает, что A — неабелева группа. По 1.10 число всех подформаций формации $\operatorname{form} A$ конечно. Значит, в $\operatorname{form} A$ содержится минимальная неабелева подформация $\mathfrak{H}_0$. По теореме 2.2 $\mathfrak{H}_0 = \operatorname{form} T$, где T — либо неабелева группа порядка q^3 простой экспоненты q $(q \neq 2)$, либо группа кватернионов. Последнее означает, что $T \simeq Q$, т. е. $Q \in \operatorname{form} A$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, не входящая в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ обладает максимальной локальной $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-подформацией, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_l \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — локальная $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация, при этом:* 1) *всякая $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{H}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{H}$;* 2) *всякая локальная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$, не входящая в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$, имеет вид $\mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$, причем в точности тогда $\mathfrak{F}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$, когда $\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1)$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{M}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то по лемме 3.2 $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}_1 \vee_l \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — некоторая минимальная локальная не $\mathfrak{M}_1$-формация, не входящая в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Обратно, пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — локальная формация, входящая в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$, а $\mathfrak{H}$ — некоторая минимальная локальная не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация. Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ максимальную локальную подформацию из $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M})$. Ввиду леммы 3.2 $\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация формации $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то всякая локальная подформация формации $\mathfrak{F}$, входящая в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$, должна содержаться в $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1$. Этим самым доказаны первое и второе утверждения теоремы.

Пусть теперь $\mathfrak{F}_1$ — локальная подформация из $\mathfrak{F}$, не входящая в $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Ввиду леммы 3.4 $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1))$. Покажем, что $\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1) = \mathfrak{H}_1 \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$. Пусть h_1, f_1 и m — минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{M}$. Тогда ввиду утверждений 1.4, 1.5 и 1.13 $f_1 \cap (m \vee h_1)$ — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1)$, а $h_1 \vee (f_1 \cap m)$ — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{H}_1 \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$.

Пусть A — произвольная монолитическая группа из $(f_1 \cap (m \vee h_1))(p)$. Ясно, что A — примарная циклическая группа. Поскольку $A \in \operatorname{form} (m(p) \cup h_1(p))$, то либо $A \in m(p)$, либо $A \in h_1(p)$. Если имеет место первое, то, поскольку $A \in f_1(p)$, справедливо $A \in (f_1 \cap m)(p)$. Следовательно, $A \in (h_1 \vee (f_1 \cap m))(p)$. Во втором случае также $A \in (h_1 \vee (f_1 \cap m))(p)$. Итак, всякая монолитическая группа из $(f_1 \cap (m \vee h_1))(p)$ принадлежит $(h_1 \vee (f_1 \cap m))(p)$. Значит, $(f_1 \cap (m \vee h_1))(p) \subseteq (h_1 \vee (f_1 \cap m))(p)$. Аналогично показываем, что $(h_1 \vee (f_1 \cap m))(p) \subseteq (f_1 \cap (m \vee h_1))(p)$. Следовательно, $h_1 \vee (f_1 \cap m) = f_1 \cap (m \vee h_1)$. Таким образом, $\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1) = \mathfrak{H}_1 \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$. Из последнего вытекает, что $\mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1)) = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{H}_1 \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})) = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$. Предположим, что $\mathfrak{F}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Покажем, что $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{F}_1 \cap (\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1)$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1$. Пусть справедливо противное. Тогда найдется такая локальная формация $\mathfrak{M}_2$, что $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1$. Обозначим через f, h, m_1, m_2 минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$. По 1.5 найдутся такие простые числа t и l, что $m_1(t) \subset \subset m_2(t)$ и $m_2(l) \subset (m \vee h_1)(l)$. Предположим, что для некоторого простого числа r $f_1(r) = \varnothing$, но $f(r) \neq \varnothing$. Тогда группа T порядка r принадлежит $\mathfrak{F} \backslash \mathfrak{F}_1$. Поскольку $\mathfrak{F}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F} = = \text{lform}(\mathfrak{F}_1 \cup \{T\})$. Следовательно для всякого числа $k \in \pi(\mathfrak{F})$ $f(k) = = \text{form}(f_1(k) \cup \{T/F_k(T)\})$. Последнее означает, что $f(r) = \mathfrak{E}$ и $f(c) = f_1(c)$ для всякого простого числа c, отличного от r. Заметим, что $h_1 \leqslant f$ и $m \leqslant f$. Значит, для всякого простого c из равенства $f_1(c) = f(c)$ следует, что $m_1(c) = f_1(c) \cap \text{form}(m(c) \cup h_1(c)) = \text{form}(m(c) \cup h_1(c))$. Таким образом, $r = = t = l$, т. е. $m_1(r) = \varnothing$, $(h_1 \vee m)(r) = \mathfrak{E}$. Значит, включения $m_1(r) \subset m_2(r)$ и $m_2(r) \subset (m \vee h_1)(r)$ не могут быть справедливыми одновременно. Итак, остается заключить, что для всякого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ $f_1(p) \neq \varnothing$. Пусть A и B — группы минимальных порядков соответственно из $\mathfrak{M}_2 \backslash \mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1 \backslash \mathfrak{M}_2$. Ясно, что группы A и B — l-формационно критичны, и поэтому ввиду 1.2 и леммы 4.1 из [3] $A = P \leftthreetimes Q$, $B = R \leftthreetimes T$, где $P = C_A(P)$, $R = C_B(R)$ — минимальные нормальные подгруппы соответственно в A и B, Q и T — циклические примарные группы. Ввиду максимальности $\mathfrak{F}_1$ в $\mathfrak{F}$ $\mathfrak{F} = = \text{lform}(\mathfrak{F}_1 \cup \{A\})$. Значит, для всякого $p \in \pi(\mathfrak{F})$ $f(p) = \text{form}(f_1(p) \cup \cup \{A/F_p(A)\})$. Так как $\pi(\mathfrak{F}_1) = \pi(\mathfrak{F})$, то $\pi(\mathfrak{M}_1) = \pi(\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1)$. Поэтому, группы A и B непримарны. Пусть $\{p\} = \pi(P)$, $\{r\} = \pi(R)$. Понятно, что для всех $c \in \pi(\mathfrak{F}) \backslash p$ справедливо $f(c) = \text{form}(f_1(c) \cup \mathfrak{E}) = f_1(c)$. Следовательно, $t = l = p = r$. При этом поскольку $B \notin \mathfrak{M}_2$, то $T \in (m \vee h_1)(p) \backslash m_2(p)$. Так как $A/F_p(A) \simeq Q$, то $T \in \text{form}(f_1(p) \cup \{Q\})$. Ввиду леммы 3.7 из [3] и утверждений 1.4, 1.5 и 1.13 $f_1 = h \vee (f_1 \cap m)$. Значит, $f_1(p) = \text{form}(h(p) \cup \cup (f_1(p) \cap m(p)))$. Пусть $\mathfrak{H} = \text{lform}\, G$, где G — одна из групп, описанных в теореме 2.3. Обозначим через N монолит группы G. Тогда, если $p \notin \pi(N)$, то $h(p) = \text{form}(G/F_p(G)) \subseteq \mathfrak{A}$. Значит, и $f_1(p) = \text{form}(h(p) \cup (f_1(p) \cap m(p)) \subseteq \subseteq \mathfrak{A}$. Поэтому T изоморфна некоторой подгруппе хотя бы одной из групп множества $f_1(p) \cup \{Q\}$. Пусть $T \in f_1(p)$. Тогда $T \in f_1(p) \cap (m \vee h_1)(p) = = m_1(p) \subseteq m_2(p)$. Противоречие показывает: T изоморфна некоторой подгруппе из Q. Пусть Q_1 — максимальная подгруппа группы Q. Ввиду определения группы A имеем $PQ_1 \in \mathfrak{M}_1$. Но, как нетрудно заметить, $P = = F_p(PQ_1)$. Следовательно, $(PQ_1)/F_p(PQ_1) \simeq Q_1 \in m_1(p)$. Значит, поскольку $T \notin m_2(p)$, то $T \simeq Q$. Так как $A \in \mathfrak{M}_2$, то $A/F_p(A) \simeq Q \in m_2(p)$, т. е. $T \in \in m_2(p)$. Полученное противоречие показывает, что $p \in \pi(N)$. Если $G \in \in \mathfrak{N}^2$, то $h(p) = \text{form}(G/F_p(G)) \subseteq \mathfrak{N}$. Тогда $f_1(p) = \text{form}(h(p) \cup (f_1(p) \cap \cap m(p))) \subseteq \mathfrak{N}$. Следовательно, $f_1(p)$ — S-замкнутая формация, поскольку каждая подформация из $\mathfrak{N}$ S-замкнута [3]. Рассуждая теперь точно так же, как и в случае абелевости формации $f_1(p)$, приходим к тому, что $T \in m_2(p)$. Последнее невозможно. Значит, $G \notin \mathfrak{N}^2$. Как следует из теоремы 2.3, $M = G/F_p(G)$ — монолитическая группа, и ее монолит L таков, что $L \not\subseteq \Phi(G/F_p(G))$, $L = M$ Пусть $\mathfrak{F}_0 = \text{form}(\{M/L\} \cup (f_1(p) \cap m(p)) \cup \cup \{Q\})$. Так как $h(p) = \text{form}\, M$ и $f(p) = \text{form}(f_1(p) \cup \{Q\}) = \text{form}(\{M, Q\} \cup \cup (f_1(p) \cap m(p)))$, то ввиду леммы 1.7 либо $T \simeq M$, либо $T \in \mathfrak{F}_0$. Группа T циклична, и поэтому первое не может иметь места. Значит, $T \in \mathfrak{F}_0$. Поскольку $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{A}$, то отсюда легко вытекает, что T изоморфна некоторой подгруппе хотя бы одной из групп множества $\{M/L, Q\} \cup (f_1(p) \cap m(p))$. Но, как отмечалось выше, $T \notin f_1(p)$ и T не может быть изоморфна подгруппе из Q. Следовательно, $T \in \text{form}(M/L)$. Но $G \in \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$, т. е. $G/F_p(G) = M \in f_1(p)$. Значит, $T \in f_1(p)$. Полученное противоречие показывает, что $(\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M}$.

Предположим теперь, что $\mathfrak{M}_1 = (\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M}$. Покажем, что $\mathfrak{F}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Прежде заметим, что $\mathfrak{F}_1 \neq \mathfrak{F}$, ибо в противном случае $(\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M}$, что противоречит предположению о формации $(\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M}) \cap \mathfrak{F}_1$. Пусть существует такая локальная формация $\mathfrak{F}_2$, что $\mathfrak{F}_1 \subset$

$\subset \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F}$. Обозначим через f_2 минимальный локальный экран формации $\mathfrak{F}_2$. Тогда существуют такие простые числа t и l, что $f_1(t) \subset f_1(t)$ и $f_2(l) \subset f(l)$. Пусть A — группа минимального порядка из $\mathfrak{H}_1 \vee_l \mathfrak{M} \backslash \mathfrak{M}_1$. Тогда $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}_1 = \mathrm{lform}(\mathfrak{M}_1 \cup \{A\})$. Группа A l-формационно критична, и поэтому $A = P \leftthreetimes Q$, где $P = C_A(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в A, Q — циклическая q-группа, причем простые числа p и q различны. Поскольку $\mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$, то тем более $\mathrm{lform}(\mathfrak{M}_1 \cup \{A\}) \vee_l \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Но $\mathfrak{M}_1 \vee_l \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Следовательно, $\mathrm{lform}(\mathfrak{F}_1 \cup \{A\}) = \mathfrak{F}$. Значит, для всякого $r \in \pi(\mathfrak{F})$ $f(r) = \mathrm{form}(f_1(r) \cup (A/F_p(A)))$. Последнее означает, что для всех простых чисел $r \notin \pi(A)$ справедливо $f(r) = f_1(r)$. Пусть $f_1(q) = \varnothing$. Из определения группы A вытекает, что в этом случае $|A| = p$. Но тогда $f_1(p) = \varnothing$ и $f(p) = \mathfrak{E}$. Таким образом, включения $f_1(t) \subset f_2(t)$ и $f_2(l) \subset f(l)$ не могут выполняться одновременно ни для каких простых чисел t и l. Противоречие показывает, что $f_1(q) \neq \varnothing$. Но тогда $f(p) = \mathrm{form}(f_1(p) \cup \{Q\})$ и $f_1(r) = f(r)$ для всех простых $r \neq p$. Следовательно, $p = t = l$. Пусть B — монолитическая группа из $f_2(p) \backslash f_1(p)$ с $O_p(A) = 1$. Поскольку $\mathfrak{H} = \mathrm{lform}\, G$, где G — одна из групп, выделенных теоремой 2.3, то для всякого простого $r \in \pi(G)$ $h(r) = \mathrm{form}(G/F_r(G))$ и $h(r) = \varnothing$, если $r \notin \pi(G)$. Так как $f_1 = h \vee (f_1 \cap m)$, то $f(p) = \mathrm{form}(\{Q\} \cup f_1(p)) = \mathrm{form}(\{Q\} \cup \mathrm{form}(\mathrm{form}(G/F_p(G)) \cup (f_1(p) \cap m(p))) = \mathrm{form}(\{Q, G/F_p(G)\} \cup (f_1(p) \cup m(p)))$. Пусть R — монолит группы G и $p \in \pi(R)$. Предположим, что $G \notin \mathfrak{N}^2$. Тогда $G/F_p(G)$ — монолитическая группа. Обозначим через N монолит группы $M = G/F_p(G)$. Поскольку $B \in f(p)$, то по 1.7 либо $B \simeq M$, либо $B \in \mathfrak{F}_0 = \mathrm{form}(\{M/N, Q\} \cup (f_1(p) \cap m(p)))$. Так как $G \in \mathfrak{F}_1$, то $M \in f_1(p)$. Но $B \notin f_1(p)$. Следовательно, $B \in \mathfrak{F}_0$. Поскольку $\mathfrak{F}_0 \subseteq \mathfrak{A}$, то B — примарная циклическая группа. Значит, $B \in S(\{M/N, Q\} \cup (f_1(p) \cup m(p)))$. Заметим, что $S(\{M/N\} \cup (f_1(p) \cap m(p))) \subseteq f_1(p)$. Следовательно, $B \in S(Q)$. Если $B \simeq Q$, то, поскольку $B \in f_2(p)$, справедливо $f(p) = \mathrm{form}(f_1(p) \cup \{Q\}) \subseteq f_2(p)$. Противоречие показывает, что $B \simeq T \subset Q$. Так как $PT \subset PQ = A$, то $PT \in \mathfrak{M}_1$. Но $P = F_p(PT)$. Значит, $T \in m_1(p) = f_1(p) \cap \mathrm{form}(h_1(p) \cup m(p))$. Следовательно, $B \in f_1(p)$. Полученное противоречие показывает, что $G \in \mathfrak{N}^2$. По теореме 2.3 $G = R \leftthreetimes D$, где $R = C_G(R)$, D — либо неабелева r-группа порядка r^3 экспоненты r $(r \neq 2)$, либо группа кватернионов. По теореме 2.2 $h(p) = \mathrm{form}\, D$ — минимальная неабелева формация. Если B — примарная циклическая группа, то $B \in S(\{Q, D\} \cup (f_1(p) \cap m(p)))$. Как показано выше, B не может быть изоморфна подгруппе из Q. Кроме того, $B \notin f_1(p) \cap m(p)$. Значит, $B \simeq H \subseteq D$. Но $D \in \mathfrak{N}$. Следовательно, по теореме 2.4 из [3] $H \in \mathrm{form}\, D \subseteq f_1(p)$, т. е. $B \in f_1(p)$. Противоречие показывает, что $B \notin \mathfrak{A}$. По 1.10 в $\mathrm{form}\, B$ содержится лишь конечное множество подформаций. Значит, в $\mathrm{form}\, B$ содержится минимальная неабелева подформация $\mathfrak{H}_0$. Так как $B \in \mathrm{form}(m(p) \cup \{D\}) \subseteq \mathfrak{N}$, то B — примарная группа. Пусть $\{r\} = \pi(B)$. Поскольку $B \notin \mathfrak{A}$, то ввиду 1.8 D — r-группа. Отсюда и из теоремы 2.2 следует, что $\mathfrak{H}_0 = h(p)$. Найдется такая группа $C \in m(p)$, что $B \in \mathrm{form}(D, C)$. Тогда $\mathrm{form}\, B = \mathrm{form}\, B \cap \mathrm{form}(\mathrm{form}\, C \cup \mathrm{form}\, D)$. Можно показать (как это было сделано при доказательстве леммы 3.4), что $\mathrm{form}\, B \cap \mathrm{form}(\mathrm{form}\, C \cup \mathrm{form}\, D) = \mathrm{form}(\mathrm{form}\, D \cup (\mathrm{form}\, B \cap \mathrm{form}\, C))$. Так как $\mathrm{form}\, B \cap \mathrm{form}\, C \subseteq \mathfrak{A} \cap f_2(p)$, то любая монолитическая группа из $\mathrm{form}\, B \cap \mathrm{form}\, C$ входит в $f_1(p)$, т. е. $\mathrm{form}\, B \cap \mathrm{form}\, C \subseteq f_1(p)$. Кроме того, $\mathrm{form}\, D \subseteq f_1(p)$. Значит, $\mathrm{form}\, B \subseteq f_1(p)$. Но тогда $B \in f_1(p)$. Снова пришли к противоречию. Таким образом, $p \notin \pi(R)$. По теореме 2.3 $G/F_p(G) \in \mathfrak{A}$. Следовательно, $f(p) = \mathrm{form}(\{G/F_p(G)\} \cup m(p)) \subseteq \mathfrak{A}$. Значит, B — примарная циклическая группа. По 1.8 $B \in S(\{Q, G/F_p(G)\} \cup (f_1(p) \cap m(p)))$. Но $S(\{G/F_p(G)\} \cup (f_1(p) \cap m(p))) \subseteq f_1(p)$, т. е. $B \in S(Q)$. Ранее было показано, что последнее также не может иметь места. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Используя предыдущие результаты, докажем следующую основную теорему настоящей работы.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — несверхразрешимая локальная формация. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ обладает сверхразрешимой максимальной локальной подформацией, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — сверхразрешимая локальная формация, $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная несверхразрешимая формация, при этом: 1) всякая сверхразрешимая подформация из $\mathfrak{F}$ входит в $\mathfrak{M}\vee_l\vee_l\mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{H}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{H}$; 2) всякая несверхразрешимая локальная подформация $\mathfrak{F}_1$ из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{H}\vee_l(\mathfrak{F}_1\cap\mathfrak{M})$, причем в точности тогда $\mathfrak{F}_1$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$, когда $\mathfrak{F}_1\cap(\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{H}_1)$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{H}_1$.*

Дополнительно нам потребуются следующие три леммы.

Лемма 4.1. *Тогда и только тогда сверхразрешимая локальная формация $\mathfrak{M}$ является максимальной локальной подформацией несверхразрешимой локальной формации $\mathfrak{F}$, когда $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — несверхразрешимая минимальная локальная не $\mathfrak{M}$-формация.*

Доказательство. Необходимость доказывается точно так же, как и в лемме 3.2. Пусть $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ — несверхразрешимая минимальная локальная не $\mathfrak{M}$-формация, $\mathfrak{M}$ — сверхразрешимая локальная формация. Покажем, что $\mathfrak{M}$ является максимальной локальной подформацией в $\mathfrak{F}$. Предположим, что $\mathfrak{H}$ не является $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формацией. Тогда $\mathfrak{F}$ — также не $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$-формация, т. е. выполнены все условия леммы 3.2. Значит, $\mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{H}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Тогда ввиду теоремы 2.4 $\mathfrak{H}=\mathrm{lform}\,G$, причем $G=P\leftthreetimes Q$, где $P=C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, Q — циклическая неединичная примарная группа. Пусть f, m и h — минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{N}_{\pi(G)}\subset\mathfrak{H}$, то ввиду определения формации $\mathfrak{H}$ $\mathfrak{N}_{\pi(G)}\subseteq\mathfrak{M}$, т. е. $\pi(G)\subseteq\pi(\mathfrak{M})$. Следовательно, поскольку $\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{H}=\mathrm{lform}\,(\mathfrak{M}\cup\mathfrak{H})=\mathrm{lform}\,(\mathfrak{M}\cup\{G\})$, то по 1.4 $f(p)=\mathrm{form}\,(m(p)\cup\cup\{G/P\})=\mathrm{form}\,(m(p)\cup\{Q\})$ и $f(t)=m(t)$ для всех простых $t\neq p$. Покажем, что $m(p)$ — максимальная подформация в $f(p)$. Пусть A — произвольная циклическая примарная группа из $f(p)\backslash m(p)$. Тогда по 1.8 $A\in\in QR_0(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — силовские r-подгруппы некоторых групп из $(m(p)\cup\{Q\})$, $\{r\}=\pi(A)$. Ввиду теоремы 51.2 из [4] найдется l такое, что $A\simeq T\subseteq A_l$. Поскольку $A\notin m(p)$, то $A_l\notin m(p)$, т. е. $A_l\simeq Q$. Так как $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная не $\mathfrak{M}$-формация, то по лемме 2.1 $h(p)$ — минимальная не $m(p)$-формация. По 1.4 $h(p)=\mathrm{form}\,Q$. Следовательно, всякая собственная подгруппа из Q входит в $m(p)$. Таким образом, поскольку $A\notin m(p)$, то $A\simeq Q$. Итак, всякая циклическая примарная группа из $f(p)\backslash m(p)$ изоморфна группе Q. Из последнего вытекает, что $m(p)$ — максимальная подформация в $f(p)$. Ввиду 1.5 это означает, что $\mathfrak{M}$ — максимальная локальная подформация в $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathfrak{H}$ — минимальная локальная несверхразрешимая формация, $\mathfrak{M}$ — сверхразрешимая формация. Тогда в формации $\mathfrak{F}=\mathfrak{H}\vee_l\vee_l\mathfrak{M}$ не существует минимальных локальных несверхразрешимых подформаций, отличных от $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Если $\mathfrak{F}\not\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то утверждение леммы 4.2 вытекает прямо из леммы 3.3. Следовательно, остается рассмотреть случай, когда $\mathfrak{F}\subseteq\mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{H}_1$ — минимальная локальная несверхразрешимая подформация из $\mathfrak{F}$, отличная от $\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{H}=\mathrm{lform}\,G$ и $\mathfrak{H}_1=\mathrm{lform}\,H$, причем группы G и H удовлетворяют условию 3) теоремы 2.4. Пусть R и P — монолиты соответственно групп G и H, $r\in\pi(R)$ и $p\in\pi(P)$. Поскольку $H\in\mathfrak{F}=\mathfrak{M}\vee_l\mathfrak{H}$, то циклическая группа H/P принадлежит формации $\mathrm{form}\,(\{G/F_p(G)\}\cup m(p))$, где m — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{M}$. Отсюда вытекает, что либо $H/P\in m(p)$, либо H/P изоморфна некоторой подгруппе из $G/F_p(G)$. Если справедливо первое, то ввиду леммы 3.11 из [3] $H\in\mathfrak{M}$, что противоречит определению H. Поскольку G и H минимальные несверхразрешимые группы, то $|H/P|$ не делит $p-1$, но порядок каждой собственной подгруппы из G/R делит $r-1$. Таким образом, остается заключить, что $H/P\simeq G/R$ и $p=r$. Из последнего получаем, что $\mathfrak{H}=\mathrm{lform}\,G=\mathrm{lform}\,H=\mathfrak{H}_1$. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

Лемма 4.3. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{M}$ — *сверхразрешимая локальная формация,* $\mathfrak{H}$ — *минимальная локальная не* $\mathfrak{M}$-*формация. Тогда, если* $\mathfrak{F}_1$ — *произвольная несверхразрешимая локальная подформация из* $\mathfrak{F}$, *то* $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$.

Доказательство. Если $\mathfrak{F}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то утверждение вытекает из леммы 3.4. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Предположим, что $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}) \subset \mathfrak{F}_1$. Пусть f, h, m, f_1 и f_2 — минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Найдется такое простое число t, что $f_2(t) \subset f_1(t) \subseteq f(t) = \mathrm{form}\,(m(t) \cup h(t))$. Ввиду теоремы 2.4 $\mathfrak{H} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая минимальная несверхразрешимая группа, что фактор-группа $G/F(G)$ циклична и $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = P \leftthreetimes Q$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а Q — циклическая примарная группа. Заметим, что поскольку все собственные локальные подформации из $\mathfrak{H}$ содержатся в $\mathfrak{M}$ и группа G l-формационно критична по 1.3, то группа $P \leftthreetimes Q_1$, где Q_1 — максимальная подгруппа группы Q, принадлежит формации $\mathfrak{M}$. Отсюда вытекает, что $Q_1 \in m(p)$. Найдется такая монолитическая или единичная группа A с $O_p(A) = 1$, что $A \in f_1(t) \backslash f_2(t)$. Если $A \in m(t)$, то, поскольку $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1 = \langle m \cap f_1 \rangle \subseteq \mathfrak{F}_2$ и справедливо утверждение 1.4, $A \in f_2(t)$. Это противоречит определению группы A. Значит, $A \notin m(t)$. Ясно, что $\pi(\mathfrak{F}_2) = \pi(\mathfrak{F}_1)$. Следовательно, $f_2(t) \neq \varnothing$. Поэтому $|A| \neq 1$. Если $t \neq p$, то, поскольку $f(t) = \mathrm{form}(m(t) \cup \{G/F_t(G)\}) = \mathrm{form}\,(m(t) \cup \mathfrak{E}) = m(t)$, $A \in m(t)$, что невозможно. Значит, $t = p$ и $f(t) = \mathrm{form}\,(m(t) \cup \{Q\})$. Ясно, что A — циклическая примарная группа. Следовательно, поскольку $A \in \mathrm{form}\,(m(t) \cup \{Q\})$ и $A \notin m(p)$, то $A \simeq Q$. Но $G \in \mathfrak{F}_2$, и поэтому $Q \in f_2(t)$. Следовательно, $A \in f_2(t)$. Полученное противоречит определению группы A. Итак, остается заключить, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Если $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то все утверждения теоремы 4.1 вытекают из соответствующих утверждений теоремы 3.1. Следовательно, достаточно рассмотреть случай $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, который легко проверяется по схеме, данной в доказательстве теоремы 3.1 с использованием теоремы 2.4 и леммы 4.1, 4.2, 4.3.

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Л. А. Шеметкову за ряд важных замечаний и внимание к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Скиба А. Н.** О критических формациях.— Изв. АН БССР, 1980, № 4, с. 27—33.
2. **Скиба А. Н.** О формациях с заданными системами подформаций.— В кн.: Подгрупповое строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1981, с. 155—180.
3. **Шеметков Л. А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
4. **Нейман Х.** Многообразия групп. М.: Мир, 1969. 264 с.
5. **Шеметков Л. А.** Экраны ступенчатых формаций.— В кн.: VI Всесоюз. симпоз. по теории групп. Киев: Наукова думка, 1980, с. 37—50.
6. **Bryant R., Bryce R., Hartley B.** The formation generated by a finite group.— Bull. Austral. Math. Soc., 1970, v. 2, N 3, p. 347—357.
7. **Скиба А. Н.** О формациях, порожденных классами групп.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1981, № 3, с. 33—38.
8. **Скиба А. Н.** О локальных формациях конечных групп с S_n-замкнутыми подформациями.— Докл. АН БССР, 1979, т. 23, № 8, с. 677—680.
9. **Ремесленников В. Н.** Два замечания о трехступенно нильпотентных группах.— Алгебра и логика, 1965, т. 4, № 2, с. 59—66.
10. **Jonsson B.** Varieties of groups of nilpotency three.— Notices AMS, 1966, v. 13, N 4.
11. **Ольшанский А. Ю.** Разрешимые почти-кроссовы многообразия групп.— Мат. сб., 1971, № 85, с. 98—114.
12. **Шеметков Л. А.** Экраны произведения формаций.— Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 8, с. 677—680.

Поступила в редколлегию 9 марта 1982 г.

ФУНКЦИИ РОСТА ГРУПП ПОДСТАНОВОК

В. И. ТРОФИМОВ

Важной характеристикой конечно порожденной группы G является введенное в [1] понятие функции роста относительно конечного множе-