Лемма 4.3. *Пусть* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee_l \mathfrak{H}$, *где* $\mathfrak{M}$ *— сверхразрешимая локальная формация,* $\mathfrak{H}$ *— минимальная локальная не* $\mathfrak{M}$*-формация. Тогда, если* $\mathfrak{F}_1$ *— произвольная несверхразрешимая локальная подформация из* $\mathfrak{F}$, *то* $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$.

Доказательство. Если $\mathfrak{F}_1 \not\subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то утверждение вытекает из леммы 3.4. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$. Предположим, что $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M}) \subset \mathfrak{F}_1$. Пусть f, h, m, f_1 и f_2 — минимальные локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Найдется такое простое число t, что $f_2(t) \subset f_1(t) \subseteq f(t) = \mathrm{form}\,(m(t) \cup h(t))$. Ввиду теоремы 2.4 $\mathfrak{H} = \mathrm{lform}\, G$, где G — такая минимальная несверхразрешимая группа, что фактор-группа $G/F(G)$ циклична и $\Phi(G) = 1$. Тогда $G = P \leftthreetimes Q$, где $P = C_G(P)$ — минимальная нормальная p-подгруппа в G, а Q — циклическая примарная группа. Заметим, что поскольку все собственные локальные подформации из $\mathfrak{H}$ содержатся в $\mathfrak{M}$ и группа G l-формационно критична по 1.3, то группа $P \leftthreetimes Q_1$, где Q_1 — максимальная подгруппа группы Q, принадлежит формации $\mathfrak{M}$. Отсюда вытекает, что $Q_1 \in m(p)$. Найдется такая монолитическая или единичная группа A с $O_p(A) = 1$, что $A \in f_1(t) \backslash f_2(t)$. Если $A \in m(t)$, то, поскольку $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F}_1 = \langle m \cap f_1 \rangle \subseteq \mathfrak{F}_2$ и справедливо утверждение 1.4, $A \in f_2(t)$. Это противоречит определению группы A. Значит, $A \notin m(t)$. Ясно, что $\pi(\mathfrak{F}_2) = \pi(\mathfrak{F}_1)$. Следовательно, $f_2(t) \neq \varnothing$. Поэтому $|A| \neq 1$. Если $t \neq p$, то, поскольку $f(t) = \mathrm{form}(m(t) \cup \{G/F_t(G)\}) = \mathrm{form}\,(m(t) \cup \mathfrak{E}) = m(t)$, $A \in m(t)$, что невозможно. Значит, $t = p$ и $f(t) = \mathrm{form}\,(m(t) \cup \{Q\})$. Ясно, что A — циклическая примарная группа. Следовательно, поскольку $A \in \mathrm{form}\,(m(t) \cup \{Q\})$ и $A \notin m(p)$, то $A \simeq Q$. Но $G \in \mathfrak{F}_2$, и поэтому $Q \in f_2(t)$. Следовательно, $A \in f_2(t)$. Полученное противоречит определению группы A. Итак, остается заключить, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{H} \vee_l (\mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{M})$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4.1. Если $\mathfrak{H} \not\subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то все утверждения теоремы 4.1 вытекают из соответствующих утверждений теоремы 3.1. Следовательно, достаточно рассмотреть случай $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, который легко проверяется по схеме, данной в доказательстве теоремы 3.1 с использованием теоремы 2.4 и леммы 4.1, 4.2, 4.3.

В заключение выражаю глубокую благодарность профессору Л. А. Шеметкову за ряд важных замечаний и внимание к данной работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Скиба А. Н.** О критических формациях.— Изв. АН БССР, 1980, № 4, с. 27—33.
2. **Скиба А. Н.** О формациях с заданными системами подформаций.— В кн.: Подгрупповое строение конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1981, с. 155—180.
3. **Шеметков Л. А.** Формации конечных групп. М.: Наука, 1978. 272 с.
4. **Нейман Х.** Многообразия групп. М.: Мир, 1969. 264 с.
5. **Шеметков Л. А.** Экраны ступенчатых формаций.— В кн.: VI Всесоюз. симпоз. по теории групп. Киев: Наукова думка, 1980, с. 37—50.
6. **Bryant R., Bryce R., Hartley B.** The formation generated by a finite group.— Bull. Austral. Math. Soc., 1970, v. 2, N 3, p. 347—357.
7. **Скиба А. Н.** О формациях, порожденных классами групп.— Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1981, № 3, с. 33—38.
8. **Скиба А. Н.** О локальных формациях конечных групп с S_n-замкнутыми подформациями.— Докл. АН БССР, 1979, т. 23, № 8, с. 677—680.
9. **Ремесленников В. Н.** Два замечания о трехступенно нильпотентных группах.— Алгебра и логика, 1965, т. 4, № 2, с. 59—66.
10. **Jonsson B.** Varieties of groups of nilpotency three.— Notices AMS, 1966, v. 13, N 4.
11. **Ольшанский А. Ю.** Разрешимые почти-кроссовы многообразия групп.— Мат. сб., 1971, № 85, с. 98—114.
12. **Шеметков Л. А.** Экраны произведения формаций.— Докл. АН БССР, 1981, т. 25, № 8, с. 677—680.

Поступила в редколлегию 9 марта 1982 г.

ФУНКЦИИ РОСТА ГРУПП ПОДСТАНОВОК

В. И. ТРОФИМОВ

Важной характеристикой конечно порожденной группы G является введенное в [1] понятие функции роста относительно конечного множества $M=M^{-1}$ порождающих элементов: $R_{G,M}(n)=|\{g:g\in G$ и $l_M(g)\leqslant n\}|$, где $l_M(g)$ — наименьшая из длин записей g через элементы из M. Изучение функций роста обычно ведется для данного представления группы преобразованиями некоторого множества Ω, сохраняющими определенную структуру, заданную на этом множестве (например, структуру риманова многообразия [2] или линейного пространства [3]). Здесь функция роста выступает скорее в качестве характеристики представления группы. В связи с этим является естественным следующее определение. Пусть G — транзитивная группа подстановок множества Ω и $M=M^{-1}$ — конечное множество порождающих элементов группы G. Для $x\in\Omega$ и натуральных чисел n определим множества: $M^0(x)=\{x\}$, $M^n(x)=M^{n-1}(x)\cup\left(\bigcup_{g\in M}\left(M^{n-1}(x)\right)^g\right)$. Функцию $R_{(G,\Omega),M,x}(n)=|M^n(x)|$ назовем функцией роста группы подстановок (G,Ω) относительно M и x. Заметим, что если рассматривать группу G как группу подстановок, действующую на самой себе правыми сдвигами, то функция роста этой группы подстановок относительно множества M и функция роста группы G относительно M совпадут.

Так как в дальнейшем нас будет интересовать лишь асимптотическое поведение функции $R_{(G,\Omega),M,x}$, то удобно ограничиться изучением функций с точностью до следующей эквивалентности. Пусть N — множество натуральных чисел, f, $g:N\to N$ — неубывающие функции. Положим $f\sim g$, если для некоторых a, b из N имеем $f(n)\leqslant g(an)$ и $g(n)\leqslant f(bn)$ для всех $n\in N$. Через $[f]$ обозначим класс функций $\sim$-эквивалентных f. Нетрудно доказать, что класс $[R_{(G,\Omega),M,x}]$ не зависит от выбора M и x. Далее через $R_{(G,\Omega)}$ будем обозначать функцию роста группы подстановок (G,Ω) относительно произвольных фиксированных M и x.

Для функций роста конечно порожденных групп остается открытым * вопрос о справедливости следующей альтернативы Милнора (проблема 4.5 в [4]): для произвольной конечно порожденной группы G функция R_G либо $\sim$-эквивалентна экспоненте 2^n, либо $\sim$-эквивалентна полиному n^c, $c\in N$.

Представляет интерес проблема определения $\sim$-классов, содержащих функции роста конечно порожденных групп. В разд. 2 настоящей работы доказывается

Теорема 2.1. *Для того чтобы $\sim$-класс содержал функцию роста группы подстановок необходимо и достаточно, чтобы в нем содержалась (неубывающая) функция f, удовлетворяющая следующему условию:*

$$f(n+2)-f(n+1)\leqslant c(f(n+1)-f(n))\text{ для некоторого } c\in N.$$

В частности, альтернатива Милнора не имеет места для функций роста групп подстановок.

В связи с этим небезынтересен вопрос о возможности задания на Ω дополнительной «геометрической» структуры, сохранение которой под действием группы (G,Ω) влекло бы существование в $[R_{(G,\Omega)}]$ функции роста группы.

В случае, когда действие G на Ω есть действие G на самой себе правыми сдвигами, множество Ω можно рассматривать как множество вершин локально конечного связного графа, на котором G действует как вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Кэли группы G, соответствующего множеству порождающих M (определение см. в [5]). Определим для произвольного локально конечного связного графа Γ и $x\in V(\Gamma)$ функцию $R_{\Gamma,x}(n)=|\{y:y\in V(\Gamma)$ и $d_\Gamma(x,y)\leqslant n\}|$. Функцию $R_{\Gamma,x}$ назовем функцией роста графа Γ относительно вершины x. Заметим, что если Γ — граф Кэли группы G относительно конечного множества порождающих M, то $R_{\Gamma,x}=R_{(G,V(\Gamma)),M,x}=R_G$. В разд. 1 настоящей работы

* В то время, когда статья В. И. Трофимова уже находилась в печати, Р. И. Григорчук отрицательно решил этот вопрос.— *Прим. редактора.*

доказывается ряд утверждений, устанавливающих связь между $R_{\Gamma, x}$, $R_{(G, \Omega)}$ и R_G в общем случае. В частности, $[R_\Gamma] = [R_{(G, V(\Gamma))}]$ и $[R_G] = [R_\Gamma \cdot R_H]$, где G — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Г и H — стабилизатор вершины из Г в группе G.

Отмеченная ранее задача конкретизируется следующим образом.

Гипотеза (*). *Пусть Г — локально конечный связный вершинно-симметрический граф. Тогда $[R_\Gamma]$ содержит функцию роста конечно порожденной группы.*

Заметим, что в силу сказанного ранее $\sim$-класс, содержащий функцию роста группы, всегда содержит функцию роста графа, удовлетворяющего условиям гипотезы (*).

Пусть m — натуральное число. Через $\mathcal{T}(m)$ обозначим множество таких деревьев T, у которых валентности всех вершин, кроме, быть может, одной висячей вершины, равны 2 или 3 и для любой невисячей вершины x найдется вершина y такая, что $d_T(x, y) \leqslant m/2$ и $\deg_T(y) = 3$. Положим $\mathcal{T} = \bigcup_{m \in N} \mathcal{T}(m)$. Для $n \in N$ определим граф $\Gamma^{(n)}$: $V(\Gamma^{(n)}) = V(\Gamma)$, $E(\Gamma^{(n)}) = \{(x, y) : 0 < d_\Gamma(x, y) \leqslant n\}$. Ясно, что если Г содержит элемент из $\mathcal{T}(m)$, то $\Gamma^{(m)}$ содержит элемент из $\mathcal{T}(1)$. С гипотезой (*) тесно связана

Гипотеза (**) *Пусть Г — локально конечный связный граф и $G \leqslant \operatorname{Aut} \Gamma$ — вершинно-транзитивная группа. Тогда либо* а) *для некоторого $m \in N$ граф $\Gamma^{(m)}$ содержит элемент из $\mathcal{T}(1)$; либо* б) *на графе Г существует конечная G-эквивалентность σ такая, что стабилизатор вершины графа Γ/σ в группе G^σ конечен (определения см. в разд. 1).*

Справедливость для данного графа Г гипотезы (*) следует из верности для него гипотезы (**). Действительно, в этом случае либо для некоторого $m \in N$ $\Gamma^{(m)}$ содержит элемент из $\mathcal{T}(1)$, и тогда $[R_\Gamma] = [2^n]$, либо на Г существует конечная G-эквивалентность σ такая, что стабилизатор вершины графа Γ/σ в группе G^σ конечен. Согласно следствию 1.3 в группе G существует вершинно-транзитивная конечно порожденная подгруппа H. В силу следствия 1.1, учитывая конечность стабилизатора вершины графа Γ/σ в группе H^σ, имеем $[R_{H^\sigma}] = [R_{\Gamma/\sigma}]$. Так как по предложению 1.7 $[R_{\Gamma/\sigma}] = [R_\Gamma]$, то $R_{H^\sigma} \in [R_\Gamma]$.

Гипотеза (**) является неким «бесконечным» аналогом гипотезы Симса [9]. Укажем также на связь ее с вопросом о существовании локально конечного связного графа Г, не содержащего элементов из $\mathcal{T}$ и имеющего бесконечное отклонение (определение см. в [5]; пример из [7] не удовлетворяет первому из этих условий).

В разд. 3 гипотеза (**) доказывается для кубических графов Г. Более того, из доказательства теоремы 3.1 несложно получить описание вершинно-симметрических кубических графов, имеющих бесконечный стабилизатор вершины в группе всех автоморфизмов и не содержащих элементов из $\mathcal{T}(2)$.

Несколько неожиданной представляется теорема 4.1, которая утверждает справедливость заключения б) гипотезы (**) в случае его выполнения для вершинно-транзитивного нормального делителя.

В теореме 4.3 доказывается гипотеза (**) в случае, если она верна для орбиты нормального делителя H такого, что $G^{\sigma(H)}$ — циклическая группа (определение $G^{\sigma(H)}$ см. в разд. 1). Технически более сложная теорема 4.2 используется для доказательства теорем 4.3 и 5.1. Методы из разд. 3 и 4 являются в большей степени «геометрическими».

В разд. 5, опираясь на результаты разд. 4, мы доказываем справедливость гипотезы (**) для разрешимых групп G. Отсюда следует, в частности, альтернативность функций роста локально конечного графа, допускающего вершинно-транзитивную разрешимую группу автоморфизмов.

Примеры из разд. 6 представляют интерес в связи с результатами разд. 1, 3, 5.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Приведем некоторые определения и используемые обозначения.

Пусть N и Z — соответственно множество натуральных и целых чисел. Эквивалентность $\sim$ была определена во введении. Неубывающую функцию $f: N \to N$ назовем альтернативной, если $f(n) \sim 2^n$ или $f(n) \sim n^c$ для некоторого $c \in N \cup \{0\}$. Под $[f]$, если не оговорено противное, будем понимать множество функций $\sim$-эквивалентных функции f. Положим $[f_1] \preccurlyeq [f_2]$, если для некоторых $g_1 \in [f_1]$, $g_2 \in [f_2]$, $c \in N$ имеем $g_1(n) \leqslant \leqslant g_2(cn)$ для всех $n \in N$. Тогда $[f_1] \preccurlyeq [f_2]$ и $[f_2] \preccurlyeq [f_1]$ равносильно $f_1 \sim f_2$.

Если G — группа, $M = M^{-1}$ — конечное множество порождающих элементов группы G, $H \subseteq G$ и σ — произвольное отношение эквивалентности на H, то функцией роста фактор-множества H/σ относительно M назовем функцию $R_{H/\sigma, M}(n) = |\{y^\sigma : l_M(x) \leqslant n$ для некоторого $x \in y^\sigma\}|$.

Пусть $\mathfrak{S}_l$ — многообразие разрешимых групп длины $\leqslant l$.

Обозначения, относящиеся к группам подстановок, стандартны. Если G — группа подстановок на множестве Ω (что иногда будет записываться как (G, Ω)), $g \in G$, $X \subseteq \Omega$, то X^g — образ множества X под действием элемента g. Если g_1, g_2 — элементы G, то $X^{g_1 g_2} = (X^{g_1})^{g_2}$. Положим, кроме того, $G_X = \{g : g \in G$ и $x^g = x$ для всех $x \in X\}$, $G_{\{X\}} = \{g : g \in G$ и $X^g = X\}$, $G(X) \cong G_{\{X\}}/G_X$ — ограничение группы $G_{\{X\}}$ на множество X. Если $H \subseteq G$, то $F(H) = \{x : x \in \Omega$ и $x^h = x$ для всех $h \in H\}$. Если (G, Ω) — транзитивная группа подстановок, $M = M^{-1}$ — конечное множество порождающих элементов группы G, x, y — элементы множества Ω, то $d_{(G, \Omega), M}(x, y) = \min\{l_M(g) : g \in G$ и $x^g = y\}$. Ясно, что $R_{(G, \Omega), M, x}(n) = |\{y : d_{(G, \Omega), M}(x, y) \leqslant \leqslant n\}|$.

Менее стандартны следующие обозначения, относящиеся к графам (бо́льшая часть из них совпадает с обозначениями из [8] или [9]).

Под графом Γ далее понимается неориентированный (если не оговорено противное) граф без петель и кратных ребер, а $V(\Gamma)$ и $E(\Gamma)$ — соответственно множество вершин и ребер графа Γ.

Положим $x \operatorname{adj}_\Gamma y$, если $(x, y) \in E(\Gamma)$. Последовательность $x_0, \ldots, x_m$ вершин графа Γ назовем путем (m-путем), если $x_i \operatorname{adj}_\Gamma x_{i+1}$ для всех $0 \leqslant \leqslant i < m$. Кроме того, назовем путем бесконечную последовательность $x_0, x_1, \ldots$ в случае, когда $x_i \operatorname{adj}_\Gamma x_{i+1}$ для всех $i \geqslant 0$.

По определению m-дуга $(x_0, \ldots, x_m)$ графа Γ есть m-путь $x_0, \ldots, x_m$, у которого $x_i \neq x_{i+2}$ для всех $0 \leqslant i < m-1$.

Для вершин x, y графа Γ через $d_\Gamma(x, y)$ обозначим расстояние между ними в графе Γ.

Для $x \in V(\Gamma)$, $i \in N$ положим $\Gamma_i(x) = \{y : y \in V(\Gamma)$ и $d_\Gamma(x, y) \leqslant i\}$. Тогда $\deg_\Gamma(x) = |\Gamma_1(x)| - 1$ — валентность вершины x в графе Γ. Граф Γ назовем локально конечным, кубическим или цепью, если валентности всех вершин соответственно конечны, равны 3, равны 2 и в последнем случае Γ связен.

Если $X \subseteq V(\Gamma)$, то $\langle X \rangle_\Gamma$ — подграф, порожденный в графе Γ множеством вершин X. Граф Δ содержится в графе Γ, если $V(\Delta) \subseteq V(\Gamma)$ и $E(\Delta) \subseteq E(\Gamma)$. Однако удобно считать, что путь $X: x_0, \ldots, x_m$ содержится в пути $Y: y_0, \ldots, y_n$, когда для некоторого $i \geqslant 0$, $m + i \leqslant n$, имеют место равенства $x_j = y_{i+j}$ для всех $0 \leqslant j \leqslant m$. Если в этом случае $i = 0$, то путь X называется началом пути Y.

Через $\operatorname{Aut}\Gamma$ обозначается группа автоморфизмов графа Γ. Если $G \leqslant \operatorname{Aut}\Gamma$ действует транзитивно на множестве $V(\Gamma)$, то группа G называется вершинно-транзитивной. Если $\operatorname{Aut}\Gamma$ — вершинно-транзитивная группа, то граф Γ называется вершинно-симметрическим. Наконец, пути X и Y назовем G-подобными, $G \leqslant \operatorname{Aut}\Gamma$, если $X = Y^g$ для некоторого элемента $g \in G$.

Перейдем к доказательству ряда вспомогательных утверждений, часть которых представляет самостоятельный интерес.

Предложение 1.1. *Пусть G — конечно порожденная группа и H — подгруппа группы G. Пусть, далее, R_G — функция роста группы G, R_H —*

функция роста подгруппы H в группе G, $R'_{G/H}$ и $R''_{G/H}$ — функции роста соответственно правых и левых смежных классов G по H. Тогда $[R_G] = [R_{G/H}\cdot R_H]$, где $R_{G/H} = R'_{G/H} = R''_{G/H}$.

Доказательство. Пусть M' (соответственно M'') — множество представителей минимальной длины правых (левых) смежных классов группы G по подгруппе H. Равенство $R'_{G/H} = R''_{G/H}$ очевидно, если заметить, что в качестве M'' можно взять множество $(M')^{-1}$.

Так как элемент $g\in G$ однозначно представим в виде $g = hf$, где $h\in H$, $f\in M'$, то $R_H(n)R_{G/H}(n)\leqslant R_G(2n)$. Покажем, что $[R_G]\leqslant[R_{G/H}\cdot R_H]$. Пусть $g = hf$, где $h\in H$, $f\in M'$. Тогда $l(h)\leqslant l(g)+l(f)$ и $l(f)\leqslant l(g)$ по выбору f. Отсюда $l(h)\leqslant 2l(g)$, $l(f)\leqslant l(g)$ и $R_G(n)\leqslant R_H(2n)R_{G/H}(n)$. Предложение 1.1 доказано.

Следствие 1.1. *Пусть (G, Ω) — конечно порожденная транзитивная группа подстановок, $x\in\Omega$. Тогда $[R_G] = \left[R_{(G,\Omega)}R_{G_x}\right]$. В частности, эквивалентны следующие утверждения:*

а) *R_G экспоненциальна;*

б) *R_{G_x} или $R_{(G,\,\Omega)}$ экспоненциальна.*

Предложение 1.2. *Пусть Γ — связный локально конечный граф и G — конечно порожденная вершинно-транзитивная группа автоморфизмов Γ. Тогда $[R_\Gamma] = [R_{(G,\,V(\Gamma))}]$.*

Доказательство. Пусть $x\in V(\Gamma)$ и $\Gamma_1(x) = \{x, x_1, \ldots, x_k\}$. Пусть, далее, $h_i\in G$ и $x^{h_i} = x_i$ для $1\leqslant i\leqslant k$. Обозначим через H подгруппу группы G, порожденную множеством $M = \{h_i^{\pm1}: 1\leqslant i\leqslant k\}$. Тогда H действует транзитивно на $V(\Gamma)$ (см. следствие 1.3) и $d_\Gamma\left(x, x^{h_i^{-1}}\right) = d_\Gamma\left(x, x^{h_i}\right) = 1$, $1\leqslant i\leqslant k$. Пусть $y\in V(\Gamma)$, $d_\Gamma(x, y)\leqslant n$. Индукцией по натуральному параметру n докажем существование элемента $h\in H$ такого, что $l_M(h)\leqslant n$ и $x^h = y$. Для $n = 1$ утверждение справедливо по выбору M. Предполагая, что утверждение выполняется для меньших значений, выберем вершину z такую, что $d_\Gamma(x, z) < n$, $z\,\mathrm{adj}_\Gamma\, y$ и $x^{h'} = z$, где $h'\in H$, $l_M(h') < n$. Тогда $y^{(h')^{-1}}\mathrm{adj}_\Gamma\, x$, и по выбору M имеем $y^{(h')^{-1}h_i^{-1}} = x$ для некоторого i, $1\leqslant i\leqslant k$. Так как $l_M(h_ih')\leqslant l_M(h')+1\leqslant n$ и $x^{h_ih'} = y$, то $h = h_ih'$ — требуемый элемент. Отсюда $[R_\Gamma]\preccurlyeq[R_{(H,\,V(\Gamma))}]$ и, следовательно, $[R_\Gamma]\preccurlyeq[R_{(G,\,V(\Gamma))}]$.

Обратно, покажем, что $[R_{(G,\,V(\Gamma))}]\preccurlyeq[R_\Gamma]$. Пусть $G = \langle M\rangle$, где $M = M^{-1}$ — конечное порождающее множество, $x\in V(\Gamma)$, $d = \max\{d_\Gamma(x, x^f): f\in M\}$. Индукцией по натуральному параметру n докажем, что, если $g\in G$ и $l_M(g)\leqslant n$, то $d_\Gamma(x, x^g)\leqslant nd$. Для $n = 1$ утверждение справедливо по выбору числа d. Предполагая, что утверждение выполняется для всех меньших значений, выберем элемент $g'\in G$ такой, что $d_\Gamma\left(x, x^{g'}\right)\leqslant(n-1)d$ и $g = g'f$, где $f\in M$. Тогда $d_\Gamma\left(x, x^g\right)\leqslant d_\Gamma\left(x, x^f\right)+d_\Gamma\left(x^f, x^g\right) = d_\Gamma\left(x, x^f\right)+d_\Gamma\left(x, x^{g'}\right)\leqslant(n-1)d+d$, и все доказано. Отсюда получаем $R_{(G,\,V(\Gamma))}(n)\leqslant R_\Gamma(nd)$ и $[R_{(G,\,V(\Gamma))}]\preccurlyeq[R_\Gamma]$. Предложение 1.2 доказано.

Объединяя результаты следствия 1.1 и предложения 1.2, имеем

Следствие 1.2. *Пусть Γ — связный локально конечный граф и G — конечно порожденная группа автоморфизмов графа Γ, действующая транзитивно на множестве $V(\Gamma)$ вершин графа Γ. Пусть, далее, $x\in V(\Gamma)$, $H = G_x$ и R_H — функция роста подгруппы H в группе G. Тогда $[R_G] = [R_\Gamma R_H]$. В частности, эквивалентны следующие два условия:*

а) *R_G экспоненциальна;*

б) *R_Γ или R_H экспоненциальны.*

Предложение 1.3. *Пусть Γ — связный локально конечный граф, $x\in V(\Gamma)$, $G\leqslant\mathrm{Aut}\,\Gamma$ и $V(\Gamma) = \bigcup_{i\in I} V_i$ — разбиение $V(\Gamma)$ на G-орбиты. Пусть, кроме того, $\rho_x^G(n) = |\{V_i: d_\Gamma(x, V_i)\leqslant n\}|$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

а) $\rho_x^G(n) > n$ *для всех* $n \in N$;

б) $\rho_x^G(n) = k$, *где* k *— наименьшее натуральное число со свойством* $\rho_x^G(k) = k$; $n \geqslant k$.

Доказательство. Предположим, что утверждение а) не выполнено; k — наименьшее натуральное число такое, что $\rho_x^G(k) \leqslant k$; $|I| > k$. Тогда $\rho_x^G(k) = k$, и из условия связности графа Γ следует существование таких вершин y, z графа Γ, что $y \operatorname{adj}_\Gamma z$, $y \in (\Gamma_k(x))^G$, $z \notin (\Gamma_k(x))^G$. Тогда из $\rho_x^G(k-1) = k$ и $y \operatorname{adj}_\Gamma z$ следует, что $d_\Gamma(x, z^g) \leqslant k$ *для* некоторого $g \in G$. Противоречие с выбором z.

Следствие 1.3. *Пусть* Γ *— связный локально конечный граф,* $G \leqslant \operatorname{Aut}\Gamma$ *и* G *действует транзитивно на множестве* $V(\Gamma)$ *вершин графа* Γ. *Тогда найдется конечно порожденная подгруппа* $H \leqslant G$, *действующая транзитивно на* $V(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть $x \in V(\Gamma)$ и H — конечно порожденная подгруппа G, действующая транзитивно на $\Gamma_1(x)$. Согласно предложению 1.3 $\left(\rho_x^H(1) = 1\right)$ группа H транзитивна на $V(\Gamma)$. Следствие 1.3 доказано.

Предложение 1.4. *Пусть* Γ *— связный кубический граф,* $G \leqslant \operatorname{Aut}\Gamma$ *и группа* G *транзитивна на* s*-дугах и нетранзитивна на* $s+1$*-дугах графа* Γ. *Тогда, если* $s > 0$, *то* G *действует регулярно на* s*-дугах графа* Γ.

Доказательство. Это доказывается в [10].

Дадим некоторые дополнительные определения. Пусть Γ — граф, G — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов Γ. Отношение эквивалентности σ на множестве $V(\Gamma)$ вершин графа Γ назовем G-эквивалентностью, если σ-классы x^σ, $x \in V(\Gamma)$, задают систему импримитивности группы $(G, V(\Gamma))$. В этом случае Γ/σ — граф, определенный следующим образом: $V(\Gamma/\sigma) = \{x^\sigma : x \in V(\Gamma)\}$, $E(\Gamma/\sigma) = \{(x^\sigma, y^\sigma) : x^\sigma \neq y^\sigma$ и $z_1 \operatorname{adj}_\Gamma z_2$ для некоторых $z_1 \in x^\sigma$, $z_2 \in y^\sigma\}$. Для G-эквивалентности σ положим $G_\sigma = \{g : g \in G$ и g стабилизирует каждый σ-класс$\}$. Ясно, что $G_\sigma \triangleleft G$ и $G^\sigma = G/G_\sigma$ действует очевидным образом на Γ/σ как вершинно-транзитивная группа автоморфизмов. Для подгруппы $H \triangleleft G$ через $\sigma(H)$ обозначим G-эквивалентность: $x^{\sigma(H)} = x^H$.

Предложение 1.5. *Пусть* G *— вершинно-транзитивная группа автоморфизмов локально конечного графа* Γ, $x \in V(\Gamma)$, $\sigma = \sigma(G_\sigma)$ *—* G*-эквивалентность на графе* Γ. *Тогда* $\deg_{\Gamma/\sigma}(x^\sigma) \leqslant \deg_\Gamma(x)$.

Доказательство. Если $x \operatorname{adj}_\Gamma y$, то, действуя элементами группы G_σ, получим, что каждая вершина из x^σ инцидентна в графе Γ с некоторой вершиной из y^σ. Предложение 1.4 теперь очевидно.

Если σ и τ — G-эквивалентности, определенные на графе Γ, и σ-классы являются объединениями τ-классов, то скажем, что τ содержится в σ. В этом случае через σ/τ обозначим G^τ-эквивалентность на графе Γ/τ, определенную следующим образом: $x^\tau \in (y^\tau)^{\sigma/\tau}$, если $x \in y^\sigma$. Ясно, что $\Gamma/\sigma \cong (\Gamma/\tau)/(\sigma/\tau)$, $G^\sigma \cong (G^\tau)^{\sigma/\tau}$, и для произвольной G^τ-эквивалентности θ однозначно определена G-эквивалентность σ такая, что $\sigma/\tau = \theta$. Наконец, если σ — G-эквивалентность и σ-классы конечны, то назовем σ конечной G-эквивалентностью.

Предложение 1.6. *Пусть* σ_i *— конечные* G*-эквивалентности, определенные на графе* Γ; $\sigma_i = \sigma\left(G_{\sigma_i}\right)$, $i = 1, 2$. *Тогда* $\sigma = \sigma_1 \circ \sigma_2$ *— конечная* G*-эквивалентность, содержащая* σ_1 *и* σ_2.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\sigma = \sigma \circ \sigma$. Пусть $y \in x^\sigma$, $z \in y^\sigma$. По условию найдутся элементы g_i, g_i' из G_{σ_i}, $i = 1, 2$, такие, что $y = x^{g_1' g_2'}$, $z = y^{g_1 g_2} = x^{g_1' g_2' g_1 g_2} = x^{g_1' g_1 (g_2')^{g_1} g_2}$. Так как $G_{\sigma_2} \triangleleft G$, то $z \in x^\sigma$. Предложение 1.6 доказано.

Предложение 1.7. *Пусть* σ *— конечная* G*-эквивалентность, определенная на локально конечном связном графе* Γ. *Тогда имеют место следующие утверждения:*

а) $[R_{\Gamma/\sigma}]=[R_\Gamma]$;

б) *если граф* $(\Gamma/\sigma)^{(m)}$, $m\in N$, *содержит элемент из* $\mathcal{T}(1)$, *то и граф* $\Gamma^{(n)}$ *содержит элемент из* $\mathcal{T}(1)$ *для некоторого* $n\in N$.

Доказательство. Пусть k — число вершин в σ-классе графа Γ, $d>0$ — максимум расстояний между вершинами из одного σ-класса. Так как числа k и d не зависят от выбора σ-класса, то легко видеть, что

$$d_{\Gamma/\sigma}(x^\sigma, y^\sigma)\leqslant d_\Gamma(x, y)\leqslant d(d_{\Gamma/\sigma}(x^\sigma, y^\sigma)+1),\ x,\ y\in V(\Gamma). \qquad (\alpha)$$

Тогда $R_{\Gamma/\sigma}([n/d]-1)\leqslant R_\Gamma(n)\leqslant kR_{\Gamma/\sigma}(n)$, где $n\geqslant 2d$, $[n/d]$ — целая часть числа n/d, и, следовательно, $[R_\Gamma]=[R_{\Gamma/\sigma}]$.

Если элемент из $\mathcal{T}(1)$ содержится в $(\Gamma/\sigma)^{(m)}$, то согласно (α) в $\Gamma^{(n)}$ содержится элемент из $\mathcal{T}(1)$, где $n=d(m+2)$. Предложение 1.7 доказано.

Наконец, нам понадобятся следующие два результата.

Предложение 1.8. [2, 11]. *Функция роста конечно порожденной разрешимой группы альтернативна.*

Предложение 1.9. [12]. *Пусть* $(G,\ \Omega)$ — *транзитивная группа подстановок,* $x\in\Omega$. *Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

а) *длины орбит группы* $(G_x,\ \Omega)$ *не превосходят некоторого числа* c;

б) *на* Ω, *как на множестве вершин графа с пустым множеством ребер, существует конечная* G-*эквивалентность* σ *такая, что стабилизатор вершины графа* Ω/σ *в группе* G^σ *конечен.*

2. ФУНКЦИИ РОСТА ГРУПП ПОДСТАНОВОК

Теорема 2.1. *Для того чтобы* $\sim$-*класс содержал функцию роста конечно порожденной группы подстановок, необходимо и достаточно, чтобы в нем содержалась функция* f *такая, что*

$$f(n+2)-f(n+1)\leqslant c(f(n+1)-f(n)) \qquad (\beta)$$

для некоторого $c\in N$ *и произвольного* $n\in N$.

Доказательство. Пусть T — такое дерево, что относительно некоторой вершины $x\in V(T)$ функция роста $R_{T,x}$ совпадает с f и валентности вершин дерева T не превосходят $c+1$. Возможность построения дерева с такими свойствами следует из условия (β) теоремы. Нетрудно, далее, найти подстановки $g_0,\ g_1,\ \ldots,\ g_c$ на множестве $V(T)$, удовлетворяющие следующим условиям:

а) $d_T\left(y, y^{g_i}\right)\leqslant k$ для некоторого $k\in N$ и всех $y\in V(T)$, $0\leqslant i\leqslant c$;

б) если $y_1,\ y_2\in V(T)$ и $y_1\operatorname{adj}_T y_2$, то $y_1=y_2^{g_i^\varepsilon}$ для некоторого $0\leqslant i\leqslant c$ и $\varepsilon\in\{1,\ -1\}$.

Положим $M=\{g_0^{\pm1}, g_1^{\pm1},\ldots, g_c^{\pm1}\}$, $G=\langle M\rangle$. По условию б) группа G действует транзитивно на $V(T)$. Согласно условию а) имеем $R_{(G,\ V(T)),\ M,\ x}(n)\leqslant R_{T,x}(k\cdot n)$ для всех $n\in N$. Следовательно, $[R_{(G,\ V(T))}]\preccurlyeq[R_T]$. В силу условия б) имеем также $R_{T,x}(n)\leqslant R_{(G,\ V(T)),\ M,\ x}(n)$. Окончательно, $[R_{(G,\ V(T))}]=[R_T]=[f]$.

Доказательство необходимости тривиально. Теорема 2.1 доказана.

Замечание. Из теоремы 2.1 следует, в частности, существование конечно порожденной группы G и такой подгруппы H группы G, что $R_{G/H}$ неальтернативна. Аналогичный результат справедлив для

1) $G=\langle x,\ y:[y,\ y^x]=1\rangle$;

2) $G=\langle x,\ y:x^2=y^3=1\rangle$ (случай анонсирован ранее в [12]);

3) $G=\langle x,\ y,\ z:x^2=y^2=z^2=1\rangle$.

В случае 1) выбираем $H\leqslant\langle y^G\rangle$. Доказательства в случаях 2) и 3) аналогичны приведенному. Заметим лишь, что если $H\leqslant G$, $N\lhd G$ и $\overline{G}=G/N$, то $R_{\overline{G}/\overline{H}}=R_{G/HN}$.

3. ГИПОТЕЗА (* *) ДЛЯ КУБИЧЕСКИХ ГРАФОВ

Теорема 3.1. *Гипотеза* (**) *справедлива для кубических графов* Γ.

Доказательство. Пусть Γ — кубический связный граф, $G \leqslant \operatorname{Aut} \Gamma$ действует транзитивно на множестве $V(\Gamma)$ вершин графа Γ и граф Γ не содержит элементов из $\mathscr{T}(2)$. Пусть, далее $v \in V(\Gamma)$. В зависимости от действия G_v на $\Gamma_1(v)$ рассмотрим четыре случая.

Случай 1. G_v действует транзитивно на множестве $\Gamma_1(v)\backslash\{v\}$.

Так как граф Γ не содержит элементов из $\mathscr{T}(1)$, то в Γ найдется простой цикл $v_0, \ldots, v_k, v_0$. Пусть $v_{k+1} \in \Gamma_1(v_k)\backslash\{v_0, v_{k-1}, v_k\}$. Тогда $k+1$-дуги $(v_0, \ldots, v_k, v_0)$ и $(v_0, \ldots, v_k, v_{k+1})$ не являются G-подобными, так как лишь первая из них — цикл. Следовательно (см. также [13]), G действует нетранзитивно на $k+1$-дугах. Так как по предположению рассматриваемого случая группа G действует транзитивно на 1-дугах, то согласно предложению 1.4 группа G действует регулярно на множестве всех s-дуг для некоторого $s \leqslant k$. Так как $\Gamma_s(v)$ (даже $\Gamma_{[(s+1)/2]}(v)$, где в данном случае $[(s+1)/2]$ — целая часть числа $(s+1)/2$) содержит s-дугу графа Γ, то $G_{\Gamma_s(v)} = 1$ и G_v — конечная группа.

Случай 2. $\Gamma_1(v) \cap F(G_v) = \{v, w\}$ и $v \notin F(G_w)$. Зададим на графе Γ G-допустимую ориентацию, считая вершину u_1 началом ребра (u_1, u_2) графа Γ, если $u_2 \notin F(G_{u_1})$. Убедимся, прежде всего, что такое определение корректно. Пусть (u_1, u_2) — ребро графа Γ такое, что u_1 не является его началом. Тогда $u_2 \in \Gamma_1(u_1) \cap F(G_{u_1})$ и согласно предположению рассматриваемого случая $u_1 \in \Gamma_1(u_2) \setminus F(G_{u_2})$, т. е. u_2 — начало ребра (u_1, u_2). Предположим, что u_1 и u_2 являются началами ребра (u_1, u_2). Пусть $u_3 \in \Gamma_1(u_1) \setminus F(G_{u_1})$, $u_3 \neq u_2$, $u_4 \in \Gamma_1(u_1)\backslash\{u_1, u_2, u_3\}$. Тогда 1-дуги (u_1, u_3) и (u_1, u_2) G-эквивалентны. Так как свойство быть началом ребра является G-допустимым, то u_3 — начало ребра (u_1, u_3). Согласно сказанному ранее u_4 — начало ребра (u_1, u_3). Следовательно, вершина u_1 — конец каждого инцидентного ей ребра. В силу транзитивности действия G на $V(\Gamma)$ это же верно для вершины u_4. Но u_4 не является концом ребра (u_1, u_4). Полученное противоречие доказывает корректность данного определения.

Как и в случае 1, в графе Γ найдется простой неориентированный цикл $v_0, \ldots, v_k, v_0$. Без потери общности предположим, что v_0 — начало ребра (v_0, v_1) в заданной ориентации. Так как каждая вершина является концом в точности одного ребра, то $v_0, \ldots, v_k, v_0$ — ориентированный цикл, и, если $v' adj_\Gamma v_i$, где $i \in \{0, \ldots, k\}$, $v' \notin \{v_0, \ldots, v_k\}$, то v' — конец ребра (v_i, v'). Транзитивность действия группы G на $V(\Gamma)$ и допустимость выбранной ориентации приводят к существованию простого ориентированного цикла $v_0' = v', \ldots, v_k', v_0'$, проходящего через вершину v'. Положим $j = \min\{l\colon v_l' \in \{v_0, \ldots, v_k\}\}$. Так как $v_0' \notin \{v_0, \ldots, v_k\}$ $v_k' \in \{v_0, \ldots, v_k\}$, то j определено и $j > 0$. Согласно сказанному ранее для такого j вершина v_j' — начало ребра (v_j', v_{j-1}'). Последнее противоречит тому, что $v_0', \ldots, v_{j-1}', v_j', \ldots, v_k', v_0'$ — ориентированный цикл.

Случай 3. $\Gamma_1(v) \cap F(G_v) = \{v, w\} = F(G_w) \cap \Gamma_1(w)$.

Назовем s-дугу $(v_0, \ldots, v_s)$ графа Γ $\tilde{s}$-дугой, если $v_{i+1} \in F(G_{v_i})$ для четных i, $0 \leqslant i \leqslant s$. Ясно, что множество $\tilde{s}$-дуг является G-допустимым подмножеством множества s-дуг. В зависимости от действия группы G на множестве $\tilde{s}$-дуг рассмотрим следующие подслучаи.

Подслучай 3.1. Для каждого s группа G действует транзитивно на множестве всех $\tilde{s}$-дуг графа Γ.

Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть* Γ *и* G *удовлетворяют предположению подслучая* 3.1. *Тогда в графе* Γ *нет* $\tilde{s}$-*дуг, содержащих циклы.*

Доказательство. Пусть $u_0, \ldots, u_k, u_0$ — простой цикл, содержащийся в $\tilde{s}$-дуге X. Если k — нечетное, то одна из $k+1$-дуг $(u_0, \ldots, u_k, u_0)$,

$(u_1, \ldots, u_k, u_0, u_t)$ является $\widetilde{k+1}$-дугой, и, не теряя общности, можно считать, что $X=(u_0, \ldots, u_k, u_0)$. По условию леммы $\widetilde{k+1}$-дуги X и $(u_0, \ldots, u_k, u)$, где $u \in \Gamma_1(u_k) \setminus \{u_{k-1}, u_k, u_0\}$, являются G-подобными. Последнее противоречит тому, что лишь первая из них является циклом. Следовательно, можно считать, что k четное. Пусть $v_0 \in \Gamma_1(u_0) \setminus \{u_0, u_1, u_k\}$. Тогда $(v_0, u_0, \ldots, u_k, u_0)$ — $\widetilde{k+2}$-дуга. Так как вершины v_0 и u_0 G-подобны, то найдется $\widetilde{k+2}$-дуга $(u_0, v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0)$. Но тогда $\widetilde{2k+5}$-дуги $(v_0, u_0, u_1, \ldots, u_k, u_0, v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0, x)$ при $x=u_0$ и $x=v_1$ не являются G-подобными, что противоречит условию леммы.

Для $v \in V(\Gamma)$ определим следующие G_v-инвариантные множества: $\Delta_0^-(v)=\{v\}$, $\Delta_0^+(v)=\{w\}$, $\Delta_i^-(v)=\{u : u \in \Gamma_1(x) \setminus F(G_x)$ для некоторой вершины $x \in \Delta_{i-1}^+(v)\}$, $\Delta_i^+(v)=\{u: u \in (\Gamma_1(x) \cap F(G_x)) \setminus \{x\}$ для некоторой вершины $x \in \Delta_i^-(v)\}$, $\Delta_i(v)=\Delta_i^+(v) \cup \Delta_i^-(v)$, $\Delta^i(v)=\bigcup_{j<i} \Delta_j(v)$, $\Delta^+(v)=\bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i^+(v)$, $\Delta^-(v)=\bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta_i^-(v)$, $\Delta(v)=\Delta^+(v) \cup \Delta^-(v)$. Ясно, что $|\Delta_i^+(v)|=|\Delta_i^-(v)|$ и $|\Delta_1^-(v)|=2$. Для $u \in V(\Gamma)$ положим $\Delta_i^{\pm}(u)=(\Delta_i^{\pm}(v))^g$, где $g \in G$ и $v^g=u$. Так как граф Γ не содержит элементов из $\mathscr{T}(2)$, то для некоторого натурального числа j имеем $|\Delta_j^-(v) \setminus \Delta^j(v)| < 2^j$. Пусть $j>1$ — наименьшее с этим свойством. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

а) найдутся вершины x, y такие, что $y \in \Delta_{j-1}^+(v)$, $x \in \Gamma_1(y) \setminus F(G_y)$ и $x \in \Delta^j(v)$;

б) найдутся вершины x, y такие, что $\{x, y\} \subseteq \Delta_{j-1}^-(v) \setminus \Delta^{j-1}(v)$ и $x \in F(G_y) \setminus \{y\}$;

в) для некоторой вершины $x \in \Delta_j^-(v) \setminus \Delta^j(v)$ найдутся вершины y, z, $y \neq z$, такие, что $\{y, z\} \subseteq \Delta_{j-1}^+(v) \cap \Gamma_1(x)$.

Действительно, если утверждения а) и б) не выполнены, то $2^j > |\Delta_j^-(v) \setminus \Delta^j(v)| = |\Delta_j^-(v)|$ и имеет место в).

Подслучай 3.1а. Для G и Γ выполняется утверждение а) и не выполняется б).

Пусть $x \in \Delta_l(v)$, где $l \leqslant j-1$.

Лемма 3.2. $l=j-1$.

Доказательство. Если $x \in \Delta_l^+(v)$, то $y \in \Gamma_1(x) \setminus F(G_x)$ дает $y \in \Delta_{l+1}^-(v)$, и по выбору j имеем $l=j-1$. Предположим, что $x \in \Delta_l^-(v)$. Пусть $\{w_1, w_2\}=\Delta_1^-(v)$, $y \in \Delta_{j-2}^+(w_1)$. Если $x \in \Delta^{j-1}(w_1)$, то $x \in \Delta_{j-1}^-(w_1) \cap \Delta_{l-1}^-(w_1)$ и, следовательно, $|\Delta_{j-1}^-(w_1) \setminus \Delta^{j-1}(w_1)| < 2^{j-1}$. Тогда из G-подобия вершин w_1 и v имеем $|\Delta_{j-1}^-(v) \setminus \Delta^{j-1}(v)| < 2^{j-1}$, что противоречит выбору j. Следовательно, либо $x=v$, либо $x \in \Delta^{j-1}(w_2)$. В первом из этих случаев, если $(v_0=v, \ldots, v_{2j-1}=y)$ — $\widetilde{2j-1}$-дуга, содержащаяся в $\langle \Delta^j(v) \rangle_\Gamma$, то $(v_0, \ldots, v_{2j-1}, v_0)$ — $\widetilde{2j}$-дуга, содержащая цикл. По лемме 3.1 последнее невозможно. Пусть $x \in \Delta^{j-1}(w_2)$ и, следовательно, $x \in \Delta_{l-1}^-(w_2)$. По предположению случая 3.1 группа G_{w, w_1, w_2} действует транзитивно на множестве $\widetilde{2j-3}$-дуг, содержащихся в $\langle \Delta^{j-1}(w_1) \rangle_\Gamma$. Но тогда каждая вершина множества $\Delta_{j-2}^+(w_1)$ соединена с некоторой вершиной из $\Delta_{l-1}^-(w_2)$. Так как каждая вершина из $\Delta_{l-1}^-(w_2)$ соединена не более чем с одной вершиной из $\Delta_{j-2}^+(w_1)$, то $2^{j-2}=|\Delta_{j-2}^+(w_1)| \leqslant |\Delta_{l-1}^-(w_2)|=2^{l-1}$ и $l=j-1$. Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. $x \notin \Delta_{j-1}^+(v)$.

Доказательство. Предположим, что $x \in \Delta_{j-1}^+(v)$. Пусть $(v_0=v, v_1=w, \ldots, v_{2j-1}=y)$ и $(v_0'=v, v_1'=w, \ldots, v_{2j-1}'=x)$ — $\widetilde{2j-1}$-дуги, содержащиеся в $\langle \Delta^j(v) \rangle_\Gamma$. Тогда $(v_0, v_1, \ldots, v_{2j-1}, v_{2j-1}', \ldots, v_1', v_0')$ — $\widetilde{4j-1}$-дуга, содержащая цикл. По лемме 3.1 последнее невозможно.

Лемма 3.4. $x \notin \Delta_{j-1}^{-}(v)$.

Доказательство. Предположим, что $x \in \Delta_{j-1}^{-}(v)$. Пусть, как и в лемме 3.2, $\{w_1, w_2\} = \Delta_1^{-}(v)$, $y \in \Delta_{j-2}^{+}(w_1)$. Так как по предположению рассматриваемого случая группа G_v действует транзитивно на множестве всех $\widetilde{2j-1}$-дуг с началом в v, содержащихся в $\Delta^j(v)$, то каждая вершина z из $\Delta_{j-1}^{+}(v)$ соединена по крайней мере с одной вершиной из $\Delta_{j-1}^{-}(v) \setminus F(G_z)$. Для каждой вершины $z \in \Delta_{j-1}^{+}(v)$ обозначим через z' представителя множества $(\Delta_{j-1}^{-}(v) \cap \Gamma_1(z)) \setminus F(G_z)$. Тогда для некоторого $k \in N$ найдется последовательность вершин $v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0$ графа Γ такая, что $v_0 \in \Delta_{j-1}^{-}(v)$, k — нечетное, $v_{i+1} \in \Delta_0^{+}(v_i)$ для четных $i < k$, $v_{i+1} = v_i'$ для нечетных $i < k$ и $v_0 = v_k'$. Пусть k — наименьшее натуральное число с этим свойством. Тогда $(v_0, v_1, \ldots, v_k, v_0)$ — $\widetilde{k+1}$-дуга, являющаяся простым циклом. Согласно лемме 3.1 последнее невозможно. Подслучай 3.1а полностью рассмотрен.

Подслучай 3.1б. Для G и Γ выполняется утверждение б).

Пусть $(v_0 = v, \ldots, v_{2j-2} = x)$ и $(v_0' = v, \ldots, v_{2j-2}' = y)$ — $\widetilde{2j-2}$-дуги, содержащиеся в $\langle \Delta^j(v) \rangle_\Gamma$. Тогда $(v_0, \ldots, v_{2j-2}, v_{2j-2}', \ldots, v_0')$ — $\widetilde{4j-3}$-дуга, содержащая цикл. Согласно лемме 3.1 последнее невозможно.

Подслучай 3.1в. Для G и Γ выполняется утверждение в) и не выполняются утверждения а) и б).

Пусть $\{w_1, w_2\} = \Delta_1^{-}(v)$.

Лемма 3.5. $\Delta_{j-1}^{-}(w_1) = \Delta_{j-1}^{-}(w_2) = \Delta_j^{-}(v)$.

Доказательство. Включения $\Delta_{j-1}^{-}(w_1) \subseteq \Delta_j^{-}(v)$, $\Delta_{j-1}^{-}(w_2) \subseteq \Delta_j(v)$ очевидны. Предположим, что $x' \in \Delta_j^{-}(v) \setminus \Delta_{j-1}^{-}(w_1)$. Пусть $X_1 = (u_0 = v, u_1 = w, \ldots, u_{2j} = x')$ и $X_2 = (v_0 = v, v_1 = w, \ldots, v_{2j} = x)$ — $\widetilde{2j}$-дуги, содержащиеся в $\langle \Delta^{j+1}(v) \rangle_\Gamma$. Так как по предположению рассматриваемого случая группа G действует транзитивно на $\widetilde{2j}$-дугах, то X_1 и X_2 являются G-подобными. Тогда согласно предположению случая 3.1в найдутся вершины $z', y', z' \neq y'$, такие, что $\{z', y'\} \subseteq \Delta_{j-1}^{+}(v) \cap \Gamma_1(x')$. Так как $x' \notin \Delta_{j-1}^{-}(w_1)$, то $\{z', y'\} \subseteq \Delta_{j-2}^{+}(w_2)$. Но тогда $2^{j-1} = |\Delta_{j-1}^{-}(w_2)| \leqslant 2|\Delta_{j-2}^{+}(v) \setminus \{z', y'\}| + 3 \leqslant 2^{j-1} - 1$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Обозначим через $\mathscr{L}_j$ следующий класс графов: $\Gamma \in \mathscr{L}_j$, если Γ — кубический связный граф; $V(\Gamma) = \bigcup_{k \in Z} X_k$; $|X_k \cap X_l| = 2^j \delta_{k,l}$, где $\delta_{k,l}$ — символ Кронекера; $X_k = X_k^{+} \cup X_k^{-}$; $|X_k^{+}| = |X_k^{-}| = 2^{j-1}$; если $u \in X_k^{+}$, то $|\Gamma_1(u) \cap X_k^{-}| = 1$ и $|\Gamma_1(u) \cap X_{k+1}^{-}| = 2$; если $u \in X_k^{-}$, то $|\Gamma_1(u) \cap X_k^{+}| = 1$ и $|\Gamma_1(u) \cap X_{k-1}^{+}| = 2$.

Наша цель — доказать, что $\Gamma \in \mathscr{L}_j$. Для этого положим $X_j^{-} = \Delta_j^{-}(v)$, $X_j^{+} = \Delta_j^{+}(v)$. Для $k > j$: $X_k^{-} = \{u : u \in \Gamma_1(u') \setminus X_{k-1}^{+}$ для некоторого $u' \in X_{k-1}^{+}\}$, $X_k^{+} = \{u : u \in (\Gamma_1(u') \cap F(G_{u'})) \setminus X_k^{-}$ для некоторого $u' \in X_{k-1}^{+}\}$. Для $k < j$: $X_k^{+} = \{u : u \in \Gamma_1(u') \setminus X_{k+1}^{-}$ для некоторого $u' \in X_{k+1}^{-}\}$, $X_k^{-} = \{u : u \in (\Gamma_1(u') \cap F(G_{u'})) \setminus X_k^{+}$ для некоторого $u' \in X_k^{+}\}$.

Покажем, что для таких множеств $X_k^{\pm}$ выполнены свойства из определения класса $\mathscr{L}_j$.

Лемма 3.6. *Для* $u \in X_t^{-}$, $k \geqslant j + t$ *имеем* $X_k^{\pm} = \Delta_{k-t}^{\pm}(u)$. *Для* $u \in X_t^{+}$, $k \leqslant t - j$ *имеем* $X_k^{\pm} = \Delta_{t-k}^{\mp}(u)$.

Доказательство. Лемма следует из транзитивности действия группы G на $V(\Gamma)$ и леммы 3.5.

Заметим также, что если $v^g = w$, $g \in G$, то $(X_k^{\pm})^g = X_{-k}^{\mp}$. Проверка требуемых свойств теперь не вызывает затруднений. $V(\Gamma) = \bigcup_{k \in Z} X_k$ в силу включения $\Gamma_1(u) \subseteq X_{k-1} \cup X_k \cup X_{k+1}$, где $u \in X_k$, и связности графа Г. По лемме 3.6, транзитивности действия группы G на $V(\Gamma)$ и выбору числа j имеем $|X_k| = 2^j$. Более того, согласно предположению 3.1в $|X_k^+| = |X_k^-| = 2^{j-1}$. Пусть $u \in X_k \cap X_l$, где $k \neq l$. В силу транзитивности действия группы G на $V(\Gamma)$ можно считать, что $v \in X_0^- \cap X_i$, где $i \neq 0$. Если $i > 0$, то в Г найдется $\widetilde{2i}$-дуга (если $v \in X_i^-$) или $\widetilde{2i+1}$-дуга (если $v \in X_i^+$), содержащая цикл. По лемме 3.1 это невозможно. Следовательно, $i < 0$. Пусть $g \in G$, $v^g = w$. Тогда, как отмечалось ранее, $(X_t)^g = X_{-t}$ и $w = v^g \in X_{-i}$. Если $w \in X_{-i}^-$, то $v \in X_{-i-1}^+$; если $w \in X_{-i}^+$, то $v \in X_{-i+1}^-$. Поэтому в любом случае $v \in X_t$, где $t > 0$. Последнее, как уже доказано, невозможно.

Чтобы закончить рассмотрение подслучая 3.1, остается определить на графе Г конечную G-эквивалентность σ такую, что стабилизатор вершины графа Γ/σ в группе G^σ конечен. Множества $X_k^\pm$ образуют систему импримитивности группы $(G, V(\Gamma))$. Действительно, пусть $u = v^g \in X_0^-$. Тогда g стабилизирует множество $X_{j-1}^+ = \Delta_{j-1}^+(u) = \Delta_{j-1}^+(v)$. Но глобальный стабилизатор множества X_{j-1}^+ стабилизирует X_0^-, так как $X_0^- = \Delta_{j-1}^-(u')$ для любой вершины $u' \in X_{j-1}^+$. Положим $(v')^\sigma = X_k^\varepsilon$, $\varepsilon \in \{+, -\}$, если $v' \in X_k^\varepsilon$. Тогда Γ/σ — цепь и стабилизатор вершины графа Γ/σ в группе G^σ конечен (даже тривиален, как легко видеть из определения класса $\mathscr{L}_j$).

Подслучай 3.2. Для некоторого числа s группа G действует нетранзитивно на множестве $\widetilde{s+1}$-дуг графа Г.

Пусть s — наименьшее число с этим свойством. Тогда $s \geqslant 3$. Покажем, что $G_{\Gamma_s(v)} = 1$.

Пусть $\Delta_i^\pm(v)$, $\Delta_i(v)$, $\Delta(v)$ определены для $v \in V(\Gamma)$, как в случае 3.1, $g \in G$ и $\Gamma_s(v) \subseteq F(g)$.

Лемма 3.7. *Пусть* $(v_0, \ldots, v_{s+1})$ — $\widetilde{s+1}$*-дуга и* $\{v_0, \ldots, v_s\} \subseteq F(g)$. *Тогда* $v_{s+1} \in F(g)$.

Доказательство. Предположим, что $v_{s+1}^g \neq v_{s+1}$, и пусть $X = (u_0, \ldots, u_{s+1})$, $Y = (u_0', \ldots, u_{s+1}')$ — произвольные $\widetilde{s+1}$-дуги графа Г. Согласно предположению найдутся элементы $g_1, g_2 \in G$ такие, что $u_i^{g_1} = v_i = (u_i')^{g_2}$, $0 \leqslant i \leqslant s$. Но тогда $X^{g_1} = Y^{g_2}$ или $X^{g_1 g} = Y^{g_2}$, и, следовательно, $Y \in X^G$ для произвольной $\widetilde{s+1}$-дуги Y. Противоречие с выбором s.

Лемма 3.8. $\Delta(v) \subseteq F(g)$.

Доказательство. Для $i \leqslant (s-1)/2$ включение $\Delta_i(v) \subseteq F(g)$ следует из $\Gamma_s(v) \subseteq F(g)$. После этого, используя лемму 3.7, индукцией по натуральному параметру i нетрудно показать, что $\Delta_i(v) \subseteq F(g)$ для $i > (s-1)/2$.

Пусть $V_0 = \{v\}$, $V_1 = \Delta(v)$, $V_i = \bigcup_{x \in V_{i-1}} \Delta(x)$, $V = \bigcup_{i \in N} V_i$.

Лемма 3.9. $V = V(\Gamma)$.

Доказательство. Пусть $x \in V_i$, $y \operatorname{adj}_\Gamma x$. Если $y \in F(G_x)$, то $y \in \Delta(x) \subseteq V_{i+1} \subseteq V$. Пусть $y \notin F(G_x)$. Тогда $y \in \Delta(z)$, где $z \operatorname{adj}_\Gamma x$ и $z \in F(G_x)$. Но тогда $z \in V_{i+1}$ и $y \in V_{i+2} \subseteq V$. В любом случае $y \in V$, и, следовательно, $\Gamma_1(x) \subseteq V$. Лемма следует теперь из условия связности графа Г.

Лемма 3.10. *Если* $u_2 \in \Delta(u_1) \subseteq F(g)$, *то* $\Delta(u_2) \subseteq F(g)$.

Доказательство. В случае $u_2 \in \Delta^-(u_1)$ имеем $\Delta(u_2) \subseteq \Delta(u_1) \subseteq F(g)$. Поэтому предположим, что $u_2 \in \Delta^+(u_1)$, $u_3 \in \Delta_i(u_2) \backslash F(g)$ и i — наименьшее число со свойством $\Delta_i(u_2) \backslash F(g) \neq \varnothing$. Можно считать, что $u_3 \in \Delta_i^-(u_2)$, и, следовательно, найдется $\widetilde{2i}$-дуга $(x_0 = u_2, \ldots, x_{2i} = u_3)$ из $\langle \Delta_i(u_2) \rangle_\Gamma$. По выбору i имеем $\{x_0, \ldots, x_{2i-1}\} \subseteq F(g)$. Если $2i - 1 \geqslant s$, то согласно лемме 3.7 $u_3 \in F(g)$. Если $2i - 1 < s$, то пусть $(y_0, \ldots, y_{s-2i+1} = u_2)$ — произвольная $\widetilde{s-2i-1}$-дуга из $\langle \Delta(u_1) \rangle_\Gamma$. Тогда для $\widetilde{s+1}$-дуги

$(y_0, \ldots, y_{s-2i+1}, x_1, \ldots, x_{2i} = u_3)$ имеем $\{y_0, \ldots, y_{s-2i+1}, x_1, \ldots, x_{2i-1}\} \subseteq F(g)$, и вновь по лемме 3.7 $u_3 \in F(g)$. Противоречие с выбором u_3.

Из лемм 3.8, 3.9, 3.10 имеем $V(\Gamma) = V \subseteq F(g)$. Следовательно, $g = 1$ и $G_{\Gamma_s(v)} = 1$, что завершает доказательство в случае 3.2.

Случай 4. $\Gamma_1(v) \subseteq F(G_v)$.

Из условия связности графа Γ имеем $G_v = 1$.

Теорема 3.1 полностью доказана.

Замечание. Доказательство теоремы 3.1 фактически дает описание связных кубических графов Γ, не содержащих элементов из $\mathcal{T}(2)$, у которых группа $G = \operatorname{Aut}\Gamma$ транзитивна на множестве вершин и для $v \in V(\Gamma)$ группа G_v бесконечна (пример 1 из разд. 7).

4. ГИПОТЕЗА $(**)$ В СЛУЧАЕ ЕЕ СПРАВЕДЛИВОСТИ ДЛЯ ОРБИТЫ НОРМАЛЬНОГО ДЕЛИТЕЛЯ

Теорема 4.1. *Пусть Γ — локально конечный связный граф, G — группа автоморфизмов графа Γ, $H \triangleleft G$ и H — вершинно-транзитивная группа. Предположим, что на графе Γ существует конечная H-эквивалентность τ такая, что стабилизатор вершины графа Γ/τ в группе H^τ конечен. Тогда на Γ существует конечная G-эквивалентность σ такая, что стабилизатор вершины графа Γ/σ в группе G^σ конечен.*

Доказательство. Пусть $v \in V(\Gamma)$, $d = \max\{d_\Gamma(x, y) : x \in y^\tau\}$, $G_{\Gamma_i(v)} = \{g : g \in G$ и $u^g = u$ для $u \in \Gamma_i(v)\}$, $K = HG_{\Gamma_d(v)}$.

Лемма 4.1. *τ — K-эквивалентность на графе Γ.*

Доказательство. Пусть $g \in K$, $v^g \in v^\tau$. Так как $g = hg_1$, где $h \in H$, $g_1 \in G_{\Gamma_d(v)}$, и $v^\tau \subseteq \Gamma_d(v)$, то $g_1 \in G_{v^\tau}$ и $v^h = v^{gg_1^{-1}} \in v^\tau$. Но τ — H-эквивалентность, и, следовательно, $h \in G_{\{v^\tau\}}$. Тогда и $g = hg_1 \in G_{\{v^\tau\}}$. Лемма 4.1 доказана.

В силу леммы 4.1 определена группа K^τ, действующая вершинно-транзитивно на графе Γ/τ.

Лемма 4.2. *Стабилизатор вершины графа Γ/τ в группе K^τ конечен.*

Доказательство. Так как стабилизатор вершины графа Γ/τ в группе H^τ конечен, то для достаточно большого числа m имеем $(H^\tau)_X = 1$, где $X = \{u^\tau : d_{\Gamma/\tau}(u^\tau, v^\tau) \leqslant m\}$. Пусть $h_1, \ldots, h_t$ — такие элементы группы H^τ, что $d_{\Gamma/\tau}\left(v^\tau, (v^\tau)^{h_i}\right) = 1$, $1 \leqslant i \leqslant t$, и для каждой вершины u^τ графа Γ/τ, инцидентной вершине v^τ, найдется элемент h_i, $1 \leqslant i \leqslant t$, переводящий v^τ в u^τ. Тогда для элемента $g \in (K^\tau)_Y$, $Y = \{u^\tau : d_{\Gamma/\tau}(u^\tau, v^\tau) \leqslant m + 1\}$, имеем $h_i^{-1}g^{-1}h_ig \in H^\tau \cap (K^\tau)_X = 1$ для всех $1 \leqslant i \leqslant t$. Следовательно, элемент g централизует транзитивную на $V(\Gamma/\tau)$ (см. доказательство следствия 1.3) подгруппу $\langle h_1, \ldots, h_t\rangle$. Но тогда $g = 1$ и $(K^\tau)_Y = 1$. Лемма 4.2 доказана.

Закончим доказательство теоремы 4.1. Так как τ-классы конечны и в силу леммы 4.2 группа $(K^\tau)_{v^\tau}$ конечна, то длины орбит группы K_v на $V(\Gamma)$ ограничены в совокупности. Так как, далее, индекс $|G_v : K_v|$ конечен, то ограничены в совокупности и длины орбит группы G_v. Теорема 4.1 следует теперь из предложения 1.9.

Для дальнейшего нам удобно зафиксировать следующую ситуацию.

Предположение 4.1. Γ — локально конечный связный граф такой, что для каждого $m \in N$ граф $\Gamma^{(m)}$ не содержит элементов из $\mathcal{T}(1)$; $v \in V(\Gamma)$; G — вершинно-транзитивная группа автоморфизмов графа Γ; $H \triangleleft G$ и $G^{\sigma(H)} = \langle g\rangle^{\sigma(H)}$ — циклическая группа.

Пусть выполнено предположение 4.1. Для $i \in Z$ положим $\Gamma_i = \langle v^{Hg^i}\rangle_\Gamma$. Если x, y — вершины графа Γ, то определим $\rho(x, y) = \min\{|i| : i \in Z$ и $x^{g^i} \in y^H\}$. Для произвольного пути $X : x_0, \ldots, x_k, \ldots, x_l, \ldots, x_m$ положим $\rho_X(x_k, x_l) = \sum_{i=0}^{l-k-1} \rho(x_{k+i}, x_{k+i+1})$. Пусть $(x, y) \in E(\Gamma)$.

Тогда $(x, y) \in E_p^+(\Gamma)$, где $p \in N$, если $\rho(x, y) = p$ и $x^{g^p} \in y^H$; $(x, y) \in E_p^-(\Gamma)$, где $p \in N$, если $(y, x) \in E_p^+(\Gamma)$; $(x, y) \in E_p(\Gamma)$, где $p \geqslant 0$, если $\rho(x, y) = p$. Пусть $r_1, \ldots, r_t$ — все натуральные числа, для которых $E_{r_j}(\Gamma) \neq \varnothing, 1 \leqslant j \leqslant t$. Определим неотрицательное целое число r. В случае бесконечного графа $\Gamma/\sigma(H)$ положим $r = \max\{r_j : 1 \leqslant j \leqslant t\}$. Если граф $\Gamma/\sigma(H)$ конечен, то $r = [|V(\Gamma/\sigma(H))|/2]$ — целая часть числа $|V(\Gamma/\sigma(H))|/2$. В любом случае $r \geqslant \max\{r_j : 1 \leqslant j \leqslant t\}$. Путь $X: x_0, \ldots, x_m$ графа Γ назовем E^0-путем, если $(x_i, x_{i+1}) \in E^+(\Gamma) = \bigcup_{j=1}^{t} E_{r_j}(\Gamma)$ для всех $0 \leqslant i < m$, для которых $(x_i, x_{i+1}) \notin E_0(\Gamma)$, и $\rho(x_i, x_{i+2}) > 0$ для всех i, $0 \leqslant i < m-1$. E^0-путь X назовем E^+-путем, если $(x_i, x_{i+1}) \in E^+(\Gamma)$ для всех i, $0 \leqslant i < m$. Пусть $M \subseteq Z$ и $D = \bigcup_{i \in M} V(\Gamma_i)$. Для $P \leqslant G$ положим $P_{\{M\}} = P_{\{D\}}$, $P_M = P_D$, и, если $P \leqslant G_{\{M\}}$, то $P(M) = P(D)$.

Следующий результат очевиден.

Лемма 4.3. *Пусть выполнено предположение* 4.1 *и* σ — $G(0)$*-эквивалентность на графе* Γ_0. *Положим* $x \in y^{\widehat{\sigma}}$, *если для некоторого* $i \in Z$ $x^{g^i} \in \left(y^{g^i}\right)^\sigma$. *Тогда* $\widehat{\sigma}$ *является* G*-эквивалентностью на графе* Γ.

Более того, для $\Gamma/\widehat{\sigma}, G^{\widehat{\sigma}}, v^{\widehat{\sigma}}, H^{\widehat{\sigma}}, g^{\widehat{\sigma}}$ имеет место предположение 4.1. В частности, есть смысл говорить о $(\Gamma/\widehat{\sigma})_i$, $i \in Z$; $G^{\widehat{\sigma}}(M) = G(M)^{\widehat{\sigma}}$, $M \subseteq Z$, и т.п.

Предположение 4.2. Выполнено предположение 4.1 и на графе Γ_0 определена конечная $H(0)$-эквивалентность τ, для которой стабилизатор вершины графа Γ_0/τ в группе $H(0)^\tau$ конечен.

Лемма 4.4. *Пусть выполнено предположение* 4.2 *и* τ *является* $G(0)$*-эквивалентностью, для которой стабилизатор вершины графа* Γ_0/τ *в группе* $G(0)^\tau$ *конечен. Тогда для произвольного конечного множества* $M \subseteq Z$ *стабилизатор вершины графа* $\Gamma/\widehat{\tau}$ *в группе* $G^{\widehat{\tau}}(M)$ *конечен.*

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $0 \in M$. В силу локальной конечности графа $\Gamma/\widehat{\tau}$ индекс $\left|\left(\sigma^{\widehat{\tau}}\right)_0 : \left(\sigma^{\widehat{\tau}}\right)_M\right|$ конечен. В силу конечности множества M конечен индекс $\left|G^{\widehat{\tau}}_{\{M\}} : G^{\widehat{\tau}}_{\{0\}}\right|$. Так как по условию стабилизатор вершины $v^{\widehat{\tau}}$ в группе $G^{\widehat{\tau}}(0) = G^{\widehat{\tau}}_{\{0\}}/\left(G^{\widehat{\tau}}\right)_0$ конечен, то конечным является и стабилизатор вершины $v^{\widehat{\tau}}$ в группе $G^{\widehat{\tau}}_{\{M\}}/\left(G^{\widehat{\tau}}\right)_M = G^{\widehat{\tau}}(M)$. Лемма 4.4 доказана.

Теорема 4.2. *Пусть выполнено предположение* 4.1. *Тогда для некоторого натурального числа* d *граф* $(\Gamma^{(d)})_0$ *связен.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что граф $(\Gamma^{(m)})^{(n)}$ содержится в $\Gamma^{(mn)}$, и, следовательно, достаточно доказать теорему 4.2 для графа $\Gamma^{(m)}$, где m — некоторое произвольное натуральное число. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что граф Γ обладает следующими свойствами:

1) $E_1(\Gamma) \neq \varnothing$;

2) если x, y — различные вершины графа Γ, $x \in y^H$; $x_0 = x$, $x_1, \ldots, x_k = y$ — путь графа Γ, $k \leqslant 4$, и $(x_l, x_{l+1}) \notin E_0(\Gamma)$ для всех $0 \leqslant l < k$, от $(x, y) \in E(\Gamma)$.

Действительно, так как граф Γ связен, то в Γ существует путь $z_0, \ldots, z_s$, для которого $z_0 \in V(\Gamma_0)$, $z_s \in V(\Gamma_1)$. Как было замечено, справедливость теоремы для графа Γ следует из ее справедливости для графа $\Gamma^{(s)}$. Так как $E_1(\Gamma^{(s)}) \neq \varnothing$ при $\Gamma_0 \neq \Gamma$, то можно считать, что $E_1(\Gamma) \neq \varnothing$. Определим граф Γ' : $V(\Gamma') = V(\Gamma)$, $E(\Gamma') = E(\Gamma) \cup \{(x, y) : x$ и y удовлетворяют посылке 2)$\}$. Так как граф $(\Gamma')^{(m)}$ содержится, очевидно, в графе $(\Gamma^{(4)})^{(m)}$ и, следовательно в $\Gamma^{(4m)}$, то справедливость теоремы 4.2 для графа Γ следует из ее справедливости для графа Γ'. Так как $E_1(\Gamma') = E_1(\Gamma) \neq \varnothing$ и Γ' обладает согласно определению свойством 2), то можно считать, что Γ обладает одновременно свойствами 1) и 2).

Для каждого натурального числа i определим граф $\Gamma^i : V(\Gamma^i) = V(\Gamma)$, $E(\Gamma^i) = E(\Gamma) \cup \{(x, y) : x \neq y$ и в графе Γ существуют E^+-пути $X : x_0 = x$, $x_1, \ldots, x_m$; $Y : y_0 = y, y_1, \ldots, y_n$, для которых $\max\{\rho_X(x_0, x_m), \rho_Y(y_0, y_n)\} \leqslant \leqslant ir$ и либо $x_m = y_n$, либо $(x_m, y_n) \in E_0(\Gamma)\}$. Кроме того, положим $V(\Gamma^\infty) = V(\Gamma)$, $E(\Gamma^\infty) = \bigcup_{i \in N} E(\Gamma^i)$. Заметим, что, если $\{x, y\} \subseteq V(\Gamma_j)$, $j \in Z$, и в графе Γ существуют E^0-пути $X : x_0 = x, \ldots, x_m$; $Y : y_0 = y, \ldots, y_n$, для которых $\max\{\rho_X(x_0, x_m), \rho_Y(y_0, y_n)\} \leqslant ir$, $i \in N$, и $d_\Gamma(x_n, y_m) \geqslant 1$, то вершины x и y лежат в одной компоненте графа $(\Gamma^i)_j$.

Лемма 4.5. *Граф* Γ^i *содержится в графе* $\Gamma^{(2ir+1)}$.

Доказательство. Непосредственно следует из определений.

Лемма 4.6. *Для некоторого натурального числа i компоненты графа* $(\Gamma^i)_0$ *являются компонентами графа* $(\Gamma^{i+1})_0$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда для каждого натурального числа k в графе Γ_{-kr} существуют вершины x_k, y_k такие, что x_k и y_k лежат в различных компонентах графа $(\Gamma^{k+1})_{-kr}$, и $(x_k, y_k) \in E(\Gamma^{k+2})$ и в силу определения множеств $E(\Gamma^{k+1})$ и $E(\Gamma^{k+2})$ найдутся E^+-пути $X_k : x_{k,0} = x_k, x_{k,1}, \ldots, x_{k,\alpha(k)}$ и $Y_k : y_{k,0} = y_k, y_{k,1}, \ldots, y_{k,\beta(k)}$ графа Γ, для которых $(k+1)r < \max\{\rho_{X_k}(x_{k,0}, x_{k,\alpha(k)}), \rho_{Y_k}(y_{k,0}, y_{k,\beta(k)})\} \leqslant (k+2)r$ и либо $x_{k,\alpha(k)} = y_{k,\beta(k)}$, либо $(x_{k,\alpha(k)}, y_{k,\beta(k)}) \in E_0(\Gamma)$.

Предположим, что граф $\Gamma/\sigma(H)$ конечен. В этом случае найдутся натуральное число s и бесконечное подмножество $M \subseteq N$ такие, что $\{x_{k,\alpha(k)}, y_{k,\beta(k)}\} \subseteq V(\Gamma_s)$ для произвольного $k \in M$. Пусть $x \in V(\Gamma_s)$. Тогда для каждого $k \in M$ в группе H существует такой элемент h_k, что $x = x_{k,\alpha(k)}^{h_k}$. Заменяя пути X_k, Y_k на $X_k^{h_k}$, $Y_k^{h_k}$, можно считать, что $x = x_{k,\alpha(k)}$ для произвольного $k \in M$. Если множества $\{\rho_{X_k}(x_{k,0}, x_{k,\alpha(k)}) : k \in M\}$ и $\{\rho_{Y_k}(y_{k,0}, y_{k,\beta(k)}) : k \in M\}$ неограничены, то в силу локальной конечности графа Γ найдутся числа m, n, $\{m, n\} \subseteq M$, $m < n$, для которых: $\Gamma_{-mr} = \Gamma_{-nr}$, $\min\{\alpha(m), \beta(m), \alpha(n), \beta(n)\} \geqslant r$ и $x_{m,\alpha(m)-j} = x_{n,\alpha(n)-j}$, $y_{m,\beta(m)-j} = y_{n,\beta(n)-j}$ для всех $0 \leqslant j \leqslant r$. Тогда по определению множества $E(\Gamma^{n+1})$ вершины $x_{n,0}$, $y_{n,0}$ лежат в компонентах графа $(\Gamma^{n+1})_{-nr}$, содержащих соответственно вершины $x_{m,0}$ и $y_{m,0}$. Но $(y_{m,0}, x_{m,0}) \in E(\Gamma^{n+1})$, и, следовательно, вершины $x_{n,0}$ и $y_{n,0}$ лежат в одной компоненте графа $(\Gamma^{n+1})_{-nr}$. Последнее противоречит их выбору. Если одно из множеств, например $\{\rho_{X_k}(x_{k,0}, x_{k,\alpha(k)}) : k \in M\}$, ограничено, то согласно неравенству $\max\{\rho_{X_k}(x_{k,0}, x_{k,\alpha(k)}), \rho_{Y_k}(y_{k,0}, y_{k,\beta(k)})\} > (k+1)r$ множество $\{\rho_{Y_k}(y_{k,0}, y_{k,\beta(k)}) : k \in M\}$ неограничено. В силу локальной конечности графа Γ найдутся числа m, n, $\{m, n\} \subseteq M$, $m < n$, для которых $x_{m,0} = x_{n,0}$, $\min\{\beta(m), \beta(n)\} \geqslant r$ и $y_{m,\beta(m)-j} = y_{n,\beta(n)-j}$ для всех $0 \leqslant j \leqslant r$. Тогда вершины $y_{m,0}$, $y_{n,0}$ лежат в одной компоненте графа $(\Gamma^{n+1})_{-nr}$. Но $(y_{m,0}, x_{m,0}) \in E(\Gamma^{n+1})$, и, следовательно, вершины $x_{n,0} = x_{m,0}$ и $y_{n,0}$ лежат в одной компоненте графа $(\Gamma^{n+1})_{-nr}$. Последнее противоречит их выбору. Поэтому $\Gamma/\sigma(H)$ — бесконечный граф.

В случае бесконечного графа $\Gamma/\sigma(H)$ имеем $(k+1)r < \rho_{X_k}(x_{k,0}, x_{k,\alpha(k)}) = \rho_{Y_k}(y_{k,0}, y_{k,\beta(k)}) \leqslant (k+2)r$. Не теряя общности (заменяя, если потребуется, пути X_k, Y_k на некоторые их начала), можно считать, что если $k \in N$ пути X_k и Y_k не имеют общих отличных от $x_{k,\alpha(k)}$ вершин. Так как $\{x_{k,\alpha(k)}, y_{k,\beta(k)}\} \subseteq \bigcup_{r < l \leqslant 2r} V(\Gamma_l)$, то найдутся число s, $r < s \leqslant 2r$, и бесконечное подмножество $M \subseteq N$ такие, что $\{x_{k,\alpha(k)}, y_{k,\beta(k)}\} \subseteq V(\Gamma_s)$ для всех $k \in M$. Пусть $x \in V(\Gamma_s)$. Как и ранее, можно считать, что $x = x_{k,\alpha(k)}$ для всех $k \in M$. В силу локальной конечности графа Γ в множестве M найдется бесконечное подмножество M', удовлетворяющее следующему условию: если $k \in M'$, $\varphi(k) = \min\{j : \rho_{X_k}(x_{k,0}, x_{k,j}) > kr\}$, $\psi(k) = \min\{j : \rho_{Y_k}(y_{k,0}, y_{k,j}) > kr\}$ (так как $r \geqslant \max\{r_c : 1 \leqslant c \leqslant t\}$ и $\rho_{X_k}(x_{k,0}, x_{k,\alpha(k)}) = \rho_{Y_k}(y_{k,0}, y_{k,\beta(k)})$, то $\varphi(k)$ и $\psi(k)$ определены, причем $\varphi(k) < \alpha(k)$, $\psi(k) < \beta(k)$), то E^+-пути $X'_k : x_{k,\varphi(k)}, x_{k,\varphi(k)+1}, \ldots, x_{k,\alpha(k)}$ и $Y'_k : y_{k,\psi(k)}, y_{k,\psi(k)+1}, \ldots, y_{k,\beta(k)}$ не зависят от выбора k.

Определим последовательность графов, T_j, $j>0$, содержащихся в Г. Пусть $k\in M'$. Положим $V(T_1)=\{x_{k,\varphi(k)}, x_{k,\varphi(k)+1}, \ldots, x_{k,\alpha(k)}, y_{k,\psi(k)}, y_{k,\psi(k)+1}, \ldots, y_{k,\beta(k)}\}$, $E(T_1)=\{(x_{k,\varphi(k)+p}, x_{k,\varphi(k)+p+1}):0\leqslant p<\alpha(k)-\varphi(k)\}\cup\cup\{(y_{k,\psi(k)+p}, y_{k,\psi(k)+p+1}):0\leqslant p<\beta(k)-\psi(k)\}\cup\{(x_{k,\alpha(k)}, y_{k,\beta(k)}):$ если $x_{k,\alpha(k)}\neq y_{k,\beta(k)}\}$. По определению множества M' граф T_1 не зависит от выбора числа $k\in M'$. Предположим, что граф T_j определен и $\{z_{j,0}, \ldots \ldots, z_{j,\gamma(j)}\}$ — множество всех висячих вершин графа T_j. Для каждого l, $0\leqslant l\leqslant\gamma(j)$, выберем элемент $g_{j,l}\in G$, для которого $x^{g_{j,l}}=z_{j,l}$. Положим

$$V(T_{j+1})=V(T_j)\cup\left(\bigcup_{0\leqslant l\leqslant\gamma(j)}(V(T_1))^{g_{j,l}}\right),$$

$$E(T_{j+1})=E(T_j)\cup\left(\bigcup_{0\leqslant l\leqslant\gamma(j)}(E(T_1))^{g_{j,l}}\right).$$

Покажем, что для $j\in N$ граф T_j является деревом. Для этого заметим, прежде всего, что если $z\in V(\Gamma)$ и $z_0=z, \ldots, z_m$ — E^0-путь графа Г, для которого $z_m=x_{k,\alpha(k)}$, $z_{m-1}=x_{k,\alpha(k)-1}, \ldots, z_{m-\alpha(k)+\varphi(k)}=x_{k,\varphi(k)}$, $k\in M'$, то в Г нет E^0-пути $z_0'=z, \ldots, z_n'$, для которого $z_n'=y_{k,\beta(k)}, z_{n-1}'=y_{k,\beta(k)-1}, \ldots, z_{n-\beta(k)+\psi(k)}'=y_{k,\psi(k)}$. Действительно, предположим противное. Тогда, если $z\in\Gamma_p$, то для некоторого $k'\in M'$ имеем $-k'r<p$. Так как $E_1(\Gamma)\neq\varnothing$, то в $\Gamma_{-k'r}$ найдется вершина $z_{-k'r-p}$, для которой в Г имеется E^+-путь $z_{-k'r-p}, \ldots, z_0$. Рассматривая E^0-пути $X_{k'}$ и $z_{-k'r-p}, z_0, z_1, \ldots, z_m$, заключаем, что вершины $z_{-k'r-p}$ и $x_{k'}$ лежат в одной компоненте графа $\left(\Gamma^{k'+1}\right)_{-k'r}$. Аналогично, рассматривая E^0-пути $Y_{k'}$ и $z_{-k'r-p}, \ldots, z_0=z_0', z_1', \ldots, z_n'$, заключаем, что $z_{-k'r-p}$ и $y_{k'}$ лежат в одной компоненте графа $\left(\Gamma^{k'+1}\right)_{-k'r}$. Но тогда вершины $x_{k'}$ и $y_{k'}$ лежат в одной компоненте графа $\left(\Gamma^{k'+1}\right)_{-k'r}$. Последнее невозможно по выбору $x_{k'}$ и $y_{k'}$. Предположим теперь, что граф T_j не является деревом. Тогда по выбору путей X_k, Y_k, $k\in M'$, имеем $j>1$, и для некоторой вершины $z\in V(T_j)$ в графе Г найдутся различные E^0-пути $z_0=z, \ldots, z_m=x$ и $z_0'=z, \ldots, z_n'=x$, содержащиеся в T_j и соединяющие вершины z и x. Пусть a — наименьшее целое число, для которого $z_{m-a-1}\neq z_{n-a-1}'$. Как доказано ранее, $a>0$. Тогда, как легко видеть, $z_{m-a}=z_{n-a}'$ является висячей вершиной $z_{j',l}$ для некоторого графа $T_{j'}$, $j'<j$, и некоторого $0\leqslant l\leqslant\leqslant\gamma(j')$. Рассматривая вершину $\left(z_{j',l}\right)^{g_{j',l}^{-1}}$ и E_0-пути $z_0^{g_{j',l}^{-1}}, \ldots, z_{m-a}^{g_{j',l}^{-1}}$ и $(z_0')^{g_{j',l}^{-1}}, \ldots, (z_{n-a}')^{g_{j',l}^{-1}}$, заключаем, что $z_{m-a-1}=z_{n-a-1}'$. Последнее противоречит выбору a. Следовательно, графы T_j, $j\in N$, являются деревьями.

Пусть T_∞ — индуктивный предел последовательности графов T_j. Тогда легко видеть, что $T_\infty\in\mathcal{T}(c)$, где $c=\max\{\alpha(k)-\varphi(k), \beta(k)-\psi(k)+1:k\in M'\}$. Лемма доказана.

Далее i — натуральное число, удовлетворяющее заключению леммы 4.6.

Лемма 4.7. *Компоненты графа* $(\Gamma^i)_0$ *являются компонентами графа* $(\Gamma^\infty)_0$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть j — наименьшее натуральное число, для которого в графе Γ_0 найдутся вершины x, y, лежащие в различных компонентах графа $(\Gamma^i)_0$ и такие, что $(x, y)\in\in E(\Gamma^j)$. Тогда по лемме 4.6 имеем $j>i+1$ и, в частности, $j>2$. Из определения множеств $E(\Gamma^{j-1})$ и $E(\Gamma^j)$ следует существование в графе Г E^+-путей $X:x_0=x, \ldots, x_m$ и $Y:y_0=y, \ldots, y_n$, для которых $(j-1)r<<\max\{\rho_X(x_0, x_m), \rho_Y(y_0, y_n)\}\leqslant jr$ и либо $x_m=y_n$, либо $(x_m, y_n)\in E(\Gamma)$. Далее, не теряя общности, будем считать, что $\rho_X(x_0, x_m)>(j-1)r$.

Рассмотрим сначала случай $\rho_Y(y_0, y_n)>r$. Пусть $m'=\min\{k::\rho_X(x_0, x_k)>r\}$, $n'=\min\{k:\rho_Y(y_0, y_k)>r\}$. Согласно предположению числа m' и n' определены. Так как $E_1(\Gamma)\neq\varnothing$, то в графе Γ_r найдутся вершины x', y', для которых в Γ существуют такие E^+-пути $X': x', \ldots, x_{m'}$ и $Y': y', \ldots, y_{n'}$, что $\rho_{X'}(x', x_{m'}) \leqslant r$, $\rho_{Y'}(y', y_{n'}) \leqslant r$. Рассмотрим E^+-пути $X_1: x', \ldots, x_{m'}, x_{m'+1}, \ldots, x_m$ и $Y_1: y', \ldots, y_{n'}, y_{n'+1}, \ldots, y_n$. Для них $(j-1) r \geqslant \max\{\rho_{X_1}(x', x_m), \rho_{Y_1}(y', y_n)\}$ и либо $x_m = y_n$, либо $(x_m, y_n) \in E(\Gamma)$. Из определения множества $E(\Gamma^{j-1})$ получаем, что $(x', y') \in E(\Gamma^{j-1})$. Но тогда по выбору числа j вершины x' и y' лежат в одной компоненте графа $(\Gamma^i)_r$. Пусть $z_0' = x', \ldots, z_k' = y'$ — путь графа $(\Gamma^i)_r$, соединяющий вершины x' и y'. Так как $E_1(\Gamma) \neq \varnothing$, то в графе Γ_0 для произвольного l, $0 \leqslant l \leqslant k$, найдется вершина z_l, для которой в Γ существует E^+-путь $Z_l: z_l, \ldots, z_l'$ и $\rho_{Z_l}(z_l, z_l') = r$. Из определения множества $E(\Gamma^{i+1})$ получаем, что для произвольного l, $0 \leqslant l < k$, вершины z_l и z_{l+1} графа Γ_0 лежат в одной компоненте графа $(\Gamma^{i+1})_0$ и, следовательно, графа $(\Gamma^i)_0$. Но тогда вершины z_0 и z_k также лежат в одной компоненте графа $(\Gamma^i)_0$. Рассматривая E^+-пути $x_0 = x, \ldots, x_{m'}$ и $z_0, \ldots, z_0' = x', \ldots, x_{m'}$, заключаем, что либо $x = z_0$, либо $(x, z_0) \in E(\Gamma^2)$. Поэтому вершины x и z_0 лежат в одной компоненте графа $(\Gamma^i)_0$. Аналогичное верно для вершин y и z_k. Следовательно, вершины x и y лежат в одной компоненте графа $(\Gamma^i)_0$. Последнее противоречит их выбору.

Пусть $\rho_Y(y_0, y_n) \leqslant r$. Ясно, что в этом случае $\Gamma/\sigma(H)$ — конечный граф. Вновь положим $m' = \min\{k: \rho_X(x_0, x_k) > r\}$. Так как $E_1(\Gamma) \neq \varnothing$, то в графе Γ_r найдутся вершины x', y', для которых в Γ существуют такие E^+-пути $X': x', \ldots, x_{m'}$ и $Y': y', \ldots, y_n$, что $\rho_{X'}(x', x_{m'}) \leqslant r$ и $\rho_{Y'}(y', y_n) \leqslant 2r$ (последнее возможно, так как $r = \left[\frac{|V(\Gamma/\sigma(H))|}{2}\right]$). Рассматривая E^+-пути $X_1: x', \ldots, x_{m'}, x_{m'+1}, \ldots, x_m$ и Y', удовлетворяющие условиям $\rho_{X_1}(x', x_m) \leqslant (j-1) r$, $\rho_{Y'}(y', y_n) \leqslant 2r$, и учитывая неравенство $j > 2$, на основании определения множества $E(\Gamma^{j-1})$ заключаем, что $(x', y') \in E(\Gamma^{j-1})$. По выбору числа j вершины x' и y' лежат тогда в одной компоненте графа $(\Gamma^i)_r$. Точно так же, как и в первом случае, показывается, что последнее невозможно. Лемма 4.7 доказана.

Обозначим через θ отношение эквивалентности на множестве $V(\Gamma_0)$, задаваемое разбиением $V(\Gamma_0)$ на компоненты графа $(\Gamma^\infty)_0$. По лемме 4.7 это же отношение задается разбиением $V(\Gamma_0)$ на компоненты графа $(\Gamma^i)_0$. Положим $\Delta = \Gamma^\infty/\theta \cong \Gamma^i/\widehat{\theta}$. Ясно, что $E_0(\Delta) = \varnothing$.

Лемма 4.8. *Пусть v_1, v_2, v_3 — вершины графа Δ, $\{(v_1, v_2), (v_1, v_3)\} \subseteq E_p^\varepsilon(\Delta)$ для некоторого $p \in \{r_c: 1 \leqslant c \leqslant t\}$ и некоторого $\varepsilon \in \{+, -\}$. Тогда $v_2 = v_3$.*

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что $v_1 \in V(\Delta_0)$. Пусть $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} \subseteq V(\Gamma)$, $\{x_0, x_1\} \subseteq v_1$, $x_2 \in v_2$, $x_3 \in v_3$, $\{(x_0, x_2), (x_1, x_3)\} \subseteq E_p^\varepsilon(\Gamma)$. Из определения $\widehat{\theta}$ следует существование в графе $(\Gamma^i)_0$ простого пути $y_0 = x_0, y_1, \ldots, y_m = x_1$.

Предположим, что $\varepsilon = -$. Пусть $h_l \in H$, $x^{h_l} = y_l$ для $0 \leqslant l \leqslant m$. Положим $y_l' = x_2^{h_l}$ для $0 \leqslant l \leqslant m$. По определению графа Γ^{i+1} для произвольного l, $0 \leqslant l < m$, либо $y_l' = y_{l+1}'$, либо $(y_l', y_{l+1}') \in E(\Gamma^{i+1})$. Тогда вершины y_0' и y_m' лежат в одной компоненте графа $(\Gamma^{i+1})_{-p}$. Как это следует из свойства б) графа Γ (см. начало доказательства теоремы), вершины x_2, x_3 лежат в тех же компонентах графа $(\Gamma^{i+1})_{-p}$, что и y_0', y_m' соответственно. Поэтому вершины x_2, x_3 лежат в одной компоненте графа $(\Gamma^{i+1})_{-p}$, и по определению $\widehat{\theta}$ имеем $v_2 = v_3$.

Предположим, что $\varepsilon = +$ и $v_2 \neq v_3$. Определим последовательность графов T^j, $j \in N$, содержащихся в Γ^i. Положим $V(T_1) = \{y_0, \ldots, y_m, x_2, x_3\}$, $E(T_1) = \{(y_0, x_2), (y_m, y_3), (y_s, y_{s+1}): 0 \leqslant s < m\}$. Если граф T_j уже определен и $\{z_0, \ldots, z_k\}$ — множество всех висячих вершин графа T_j, то выберем для каждого l, $0 \leqslant l \leqslant k$, элемент $g_l \in G$, для которого $y_0^{g_l} = z_l$. Положим теперь $V(T_{j+1}) = V(T_j) \cup \left(\bigcup\limits_{0 \leqslant l \leqslant k} (V(T_1))^{g_l}\right)$, $E(T_{j+1}) = E(T_j) \cup \left(\bigcup\limits_{0 \leqslant l \leqslant k} (E(T_1))^{g_l}\right)$.

Покажем, что так определенные графы T_j, $j \in N$, являются деревьями. Действительно, образ графа T_j в Δ согласно рассмотренному ранее случаю $\varepsilon = -$ является деревом. Так как путь $y_0, \ldots, y_m$ графа Γ^i является по выбору простым путем, то граф T_j также является деревом.

Пусть T_∞ — индуктивный предел последовательности графов T_j, $j \in N$. Тогда, очевидно, $T_\infty \in \mathcal{T}(m+1)$, что противоречит условию теоремы. Лемма 4.8 доказана.

Лемма 4.9. *Пусть $v_0, \ldots, v_n$ — путь графа Δ, $x \in V(\Gamma)$ и $x \in v_0$. Тогда в графе Γ существует такой путь $x_0 = x, \ldots, x_n$, что $x_l \in v_l$ для всех l, $0 \leqslant l \leqslant n$.*

Доказательство. Рассуждая по индукции, достаточно ограничиться случаем $n \leqslant 1$. Если $n = 0$, то лемма очевидна. Предположим, что $n = 1$. Тогда найдутся такие вершины x_0', x_1' графа Γ, что $x_0' \in v_0, x_1' \in v_1$ и $(x_0', x_1') \in E(\Gamma)$. Пусть h — элемент из H, для которого $(x_0')^h = x$. Тогда по лемме 4.8 имеем $(x_1')^h \in v_1$ и можно положить $x_1 = (x_1')^h$. Лемма 4.9 доказана.

Лемма 4.10. *Пусть v_1, v_2, v_3 — вершины графа Δ, $(v_1, v_2) \in E_m^{\varepsilon_1}(\Delta)$, $(v_2, v_3) \in E_n^{\varepsilon_2}(\Delta)$, где $\varepsilon_1 \in \{+, -\}$, $\varepsilon_2 \in \{+, -\}$, $m \in \{r_c : 1 \leqslant c \leqslant t\}$, $n \in \in \{r_c : 1 \leqslant c \leqslant t\}$. Тогда в графе Δ найдется вершина v_4, для которой $(v_1, v_4) \in E_n^{\varepsilon_2}(\Delta)$, $(v_4, v_3) \in E_m^{\varepsilon_1}(\Delta)$.*

Доказательство. Пусть $x_1 \in V(\Gamma)$, $x_1 \in v_1$. По лемме 4.9 в графе Γ найдутся вершины x_2, x_3, для которых $x_2 \in v_2$, $x_3 \in v_3$, $\{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\} \subseteq E(\Gamma) \backslash E_0(\Gamma)$. Пусть v_4, v_5 — такие вершины графа Δ, что $(v_1, v_4) \in E_n^{\varepsilon_2}(\Delta)$, $(v_4, v_5) \in E_m^{\varepsilon_1}(\Delta)$. По лемме 4.9 в графе Γ найдутся вершины x_4, x_5, для которых $x_4 \in v_4, x_5 \in v_5$, $\{(x_1, x_4), (x_4, x_5)\} \subseteq E(\Gamma) \backslash E_0(\Gamma)$. Рассматривая путь x_5, x_4, x_1, x_2, x_3 графа Γ, на основании свойства б) графа Γ (см. начало доказательства теоремы) заключаем, что либо $x_3 = x_5$, либо $(x_3, x_5) \in E(\Gamma)$. В любом случае $v_3 = v_5$, и лемма 4.10 доказана.

Для завершения доказательства теоремы 4.2 достаточно показать, что $|V(\Delta_0)| = 1$. Действительно, в этом случае граф $(\Gamma^i)_0$ связен и по лемме 4.5 для $d = 2ir + 1$ граф $(\Gamma^{(d)})_0$ связен.

Пусть u_1, u_2 — вершины из Δ_0. В силу связности графа Δ существует путь $V: v_0 = u_1, \ldots, v_n = u_2$, соединяющий в графе Δ вершины u_1 и u_2. По лемме 4.10, не теряя общности, можно считать, что в V E^+-ребра предшествуют E^--ребрам графа Δ. Согласно лемме 4.9 в графе Γ существует такой путь $X: x_0, \ldots, x_n$, что $x_l \in v_l$ для $0 \leqslant l \leqslant n$. Так как по выбору пути V в X E^+-ребра графа Γ предшествуют E^--ребрам и $\{x_0, x_n\} \subseteq \subseteq V(\Gamma_0)$, то вершины x_0 и x_n лежат в одной компоненте графа $(\Gamma^\infty)_0$ и, следовательно, $u_1 = u_2$. Теорема 4.2 полностью доказана.

Теорема 4.3. *Пусть выполнено предположение 4.2. Тогда на графе Γ существует такая конечная G-эквивалентность σ, что стабилизатор вершины графа Γ/σ в группе G^σ конечен.*

Доказательство. Так как утверждение теоремы 4.3 следует из ее справедливости для группы G, действующей на графе $\Gamma^{(m)}$ для некоторого произвольного натурального числа m, то по теореме 4.2 можно считать, что граф Γ_0 связен. По теореме 4.1 (если применить ее к группе $G(0)$ и $H(0) \lhd G(0)$, действующим на графе Γ_0) на графе Γ_0 существует такая конечная $G(0)$-эквивалентность τ_1, что стабилизатор вершины графа Γ_0/τ_1 в группе $G(0)^{\tau_1}$ конечен. Докажем сначала теорему 4.3 в двух частных случаях.

Случай 1. Граф $\Gamma/\sigma(H)$ конечен.

Положим $\sigma = \hat{\tau}_1$. Теорема 4.3 следует теперь из леммы 4.4, если заметить, что $G^\sigma = G^\sigma(M)$ для конечного множества M.

Случай 2. Граф $\Gamma/\sigma(H)$ — бесконечная цепь.

Начнем рассмотрение случая 2 с доказательства одного технического результата.

Лемма 4.11. *Пусть выполнено предположение 4.1 и граф $\Gamma/\sigma(H)$ — бесконечная цепь. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

1) для некоторого $p \geqslant 0$ имеет место равенство $G_{0,\ldots,p}(M)=1$, где $M=N\cup\{0\}$;

2) существуют путь $X: x_0, \ldots, x_n$; $x_l\in V(\Gamma_l)$ для всех $0\leqslant l\leqslant n$ графа Γ и элемент $h\in G_0$ такие, что $X\neq X^h$ и $x_n=x_n^h$.

Доказательство. Если для некоторых чисел $p\geqslant 0$, $s>1$ и произвольного $k\in\{1, s-1\}$ имеют место равенства $G_{0,\ldots,p}(p+k)=1$, то $G_{0,\ldots,p}(p+s)=G_{0,\ldots,p,p+1}(p+s)=G_{-1,0,\ldots,p}(p+s-1)=1$. Следовательно, если не выполняется утверждение 1) леммы, то для произвольного числа $p\geqslant 0$ имеем $G_{0,\ldots,p}(p+1)\neq 1$. Пусть $X: x_0, x_1, \ldots$; $x_l\in V(\Gamma_l)$ — путь графа Γ. Для $p\geqslant 0$ положим $X_p: x_0, \ldots, x_p$; $\mathcal{X}_p=\left\{X_p^{g'} : g'\in G_0\right\}$. Так как $G_{0,\ldots,p}(p+1)\neq 1$, то каждый путь из $\mathcal{X}_p$ является началом, по крайней мере, двух путей из $\mathcal{X}_{p+1}$. Если предположить, что утверждение 2) леммы не выполняется, то различные пути из $\mathcal{X}_{p+1}$ не имеют общих конечных вершин. Так как это справедливо для любого $p\geqslant 0$, то Γ содержит элемент из $\mathcal{T}(1)$, что противоречит условию леммы.

Определим на графе Γ последовательность конечных G-эквивалентностей $\widehat{\sigma}_i$, $i\geqslant 0$. Для этого (см. лемму 4.3) зададим на графе Γ_0 конечные $G(0)$-эквивалентности σ_i, $i\geqslant 0$. Положим $\sigma_0=\tau_1$, и, если отношение σ_i уже определено, то $x\in y^{\sigma_{i+1}}$, когда $x^{\sigma_i}=\left(y^{\sigma_i}\right)^h$ для некоторого элемента $h\in\left(G^{\widehat{\sigma}_i}\right)_{-1}$. Так как σ_i — конечная $G(0)$-эквивалентность, то граф $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ локально конечен и, следовательно, σ_{i+1} — конечная $G(0)$-эквивалентность. Заметим также, что G-эквивалентность $\widehat{\sigma}_i$ содержится в $\widehat{\sigma}_{i+1}$.

Вершину y графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ назовем **E_1^--инцидентной** вершине x, если $(y,x)\in E_1^-\left(\Gamma/\widehat{\sigma}_i\right)$. Ребро (y, x) графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ назовем E_1^--инцидентным вершине x, если вершина y E_1^--инцидентна вершине x. Через $t(\widehat{\sigma}_i)$ обозначим число вершин (или, что то же, ребер) графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ E_1^--инцидентных фиксированной вершине $x\in V(\Gamma/\widehat{\sigma}_i)$. Так как $G^{\widehat{\sigma}_i}$ — вершинно-транзитивная группа, то число $t(\widehat{\sigma}_i)$ не зависит от выбора x.

Лемма 4.12. $t(\widehat{\sigma}_{i+1})\leqslant t(\widehat{\sigma}_i)$ *для* $i\geqslant 0$.

Доказательство. Пусть $\theta=\widehat{\sigma}_{i+1}/\widehat{\sigma}_i$. Предположим, что θ-класс графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ содержит k элементов. Тогда число вершин графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ E_1^--инцидентных, по крайней мере, с одной вершиной из данного θ-класса x^θ, $x\in V(\Gamma/\widehat{\sigma}_i)$, есть $t(\widehat{\sigma}_{i+1})k$. Действительно, если вершина $z\in V(\Gamma/\widehat{\sigma}_i)$ E_1^--инцидентна в графе $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$, по крайней мере, с одной вершиной y из x^θ, то по определению G-эквивалентности $\widehat{\sigma}_{i+1}$ каждая вершина графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ из z^θ E_1^--инцидентна в $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ с вершиной y. С другой стороны, общее число ребер графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ E_1^--инцидентных, по крайней мере, одной вершине графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$, принадлежащей x^θ, равно $t(\widehat{\sigma}_i)k$. Но тогда $t(\widehat{\sigma}_{i+1})k\leqslant t(\widehat{\sigma}_i)k$, и лемма 4.12 доказана.

Лемма 4.13. *Пусть x, y — различные вершины графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$, $i\geqslant 0$, содержащиеся в одном $\widehat{\sigma}_{i+1}/\widehat{\sigma}_i$-классе. Тогда, если некоторая вершина z графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ E_1^--инцидентна вершинам x и y, то $t(\widehat{\sigma}_{i+1})<t(\widehat{\sigma}_i)$.*

Доказательство. Пусть $\theta=\widehat{\sigma}_{i+1}/\widehat{\sigma}_i$. Предположим, что θ-класс графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ содержит k элементов. Тогда, как в лемме 4.12, число вершин графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ E_1^--инцидентных, по крайней мере, с одной вершиной из x^θ есть $t(\widehat{\sigma}_{i+1})k$. С другой стороны, так как вершина z E_1^--инцидентна с вершинами x, $y\in x^\theta$, то это число строго меньше $t(\widehat{\sigma}_i)k$ — общего числа ребер графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ E_1^--инцидентных, по крайней мере, с одной вершиной из x^θ. Лемма 4.13 доказана.

Закончим рассмотрение случая 2 теоремы 4.3. По лемме 4.12 найдется натуральное число j такое, что $t(\widehat{\sigma}_i)=t(\widehat{\sigma}_j)$ для всех $i\geqslant j$. Предположим, что стабилизатор вершины графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ в $G^{\widehat{\sigma}\,i}(M)$, $M=N\cup\{0\}$, является бесконечной группой для всех $i\geqslant j$. Так как по лемме 4.4 стабилизатор вершины графа $\Gamma_0/\widehat{\sigma}_i$ в группе $G^{\widehat{\sigma}\,i}(0,\ldots,p)$ конечен для любого $p\geqslant 0$, то на основании леммы 4.11 существуют путь X: $x_0,\ldots,x_n$; $x_l\in V(\Gamma_l/\widehat{\sigma}_i)$ для $0\leqslant l\leqslant n$, графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ и элемент $h\in\left(G^{\widehat{\sigma}\,i}\right)_0$ такие, что $X\neq X^h$, $\{x_0, x_n\}\subseteq F(h)$. Предположим, что n — наименьшее натуральное число, для которого существуют такие $i\geqslant j$, h и X. Тогда, в частности, $x_{n-1}\notin F(h)$. Пусть $\theta=\widehat{\sigma}_{i+1}/\widehat{\sigma}_i$, $\bar g$ — образ элемента g в группе $G^{\widehat{\sigma}\,i+1}$, $\bar h$ — образ элемента h в группе $\left(G^{\widehat{\sigma}\,i}\right)^\theta\cong G^{\widehat{\sigma}\,i+1}$. Из определения G-эквивалентности $\widehat{\sigma}_{i+1}$ следует, что вершины z и z^h графа $(\Gamma/\widehat{\sigma}_i)_1$ лежат в одном θ-классе, и, следовательно, $\overline{gh}\,\bar g^{-1}\in\left(G^{\widehat{\sigma}\,i+1}\right)_0$. Пусть $Y: y_0=$ $=\left(x_1{}^\theta\right)^{\bar g^{-1}},\ldots,y_{n-1}=\left(x_n^\theta\right)^{\bar g^{-1}}$; $y_l\in V((\Gamma/\widehat{\sigma}_{i+1})_l)$ для $0\leqslant l<n$,— путь графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_{i+1}$. Тогда $\{y_0, y_{n-1}\}\subseteq F\bar g\bar h\bar g^{-1})$, и по выбору числа n имеем $Y^{\bar g\bar h\bar g^{-1}}=Y$. В частности, $y_{n-2}^{\bar g\bar h\bar g^{-1}}=y_{n-2}$ и, следовательно, вершины x_{n-1} и x_{n-1}^h лежат в одном θ-классе графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$. Так как вершина x_n графа $\Gamma/\widehat{\sigma}_i$ E_1^-- инцидентна с x_{n-1} и $x_{n-1}^h\neq x_{n-1}$, то по лемме 4.13 имеем $t(\widehat{\sigma}_{i+1})<t(\widehat{\sigma}_i)$. Последнее противоречит выбору числа i. Следовательно, для некоторого числа $i\geqslant 0$ стабилизатор вершины графа $(\Gamma/\widehat{\sigma}_i)_0$ в группе $G^{\widehat{\sigma}_i}(M)$, $M=N\cup\{0\}$, конечен. Кроме того, из построения $G(0)$-эквивалентности σ_i следует, что $\sigma_i/\widehat{\tau}_1=\sigma\left(\left(G^{\widehat{\tau}\,1}\right)_{\widehat{\sigma}_i/\widehat{\tau}_1}\right)$.

Заменяя в рассуждениях случая 2 элемент g на g^{-1}, получим, что на графе Γ_0 существует конечная $G(0)$-эквивалентность σ' такая, что $\widehat{\sigma}'/\widehat{\tau}_1=\sigma\left(\left(G^{\widehat{\tau}\,1}\right)_{\widehat{\sigma}'/\widehat{\tau}_1}\right)$ и стабилизатор вершины графа $\left(\Gamma/\widehat{\sigma}'\right)_0$ в группе $G^{\widehat{\sigma}'}(\overline{M})$, где $\overline{M}=Z\setminus N$, конечен.

Согласно предложению 1.6 отношение $\widehat{\sigma}_i/\widehat{\tau}_1\circ\widehat{\sigma}'/\widehat{\tau}_1$ — конечная $G^{\widehat{\tau}_1}$- эквивалентность на графе $\Gamma/\widehat{\tau}_1$, содержащая $\widehat{\sigma}_i/\widehat{\tau}_1$ и $\widehat{\sigma}'/\widehat{\tau}_1$. Положим $\sigma/\widehat{\tau}_1=\widehat{\sigma}_i/\widehat{\tau}_1\circ\widehat{\sigma}'/\widehat{\tau}_1$. Так как стабилизатор вершины графа $(\Gamma/\sigma)_0$ в группах $G^\sigma(M)$, $G^\sigma(\overline{M})$ конечен и $Z=M\cup\overline{M}$, то конечен и стабилизатор вершины графа $(\Gamma/\sigma)_0$ в группе $\left(G^\sigma\right)_{\sigma(H^\sigma)}$. Последний является стабилизатором вершины графа $(\Gamma/\sigma)_0$ в группе G^σ, что завершает доказательство в случае 2.

Закончим доказательство теоремы 4.3. Согласно рассмотренному случаю 1 можно считать, что $\Gamma/\sigma(H)$ — бесконечный граф. Пусть вершина v графа Γ_0 инцидентна в Γ вершине графа Γ_k, $k>0$. Рассмотрим граф $\Gamma^k: V(\Gamma^k)=\bigcup\limits_{i\in Z}V(\Gamma_{ik})$, $E(\Gamma^k)=\left(\bigcup\limits_{i\in Z}E(\Gamma_{ik})\right)\cup\{(x,y):(x,y)\in E(\Gamma)$ и $x\in$ $\in V(\Gamma_{ik})$, $y\in V(\Gamma_{(i+1)k})$ для некоторого $i\in Z\}$. В силу связности графа Γ_0 граф Γ^k связен. Пусть $G^k=G(V(\Gamma^k))=\langle G_{\sigma(H)}(V(\Gamma^k)), g^k\rangle$, $H^k=H(V(\Gamma^k))$. Тогда для Γ^k, v, G^k, H^k, g^k, τ выполнено предположение 4.2. Так как граф $\Gamma^k/\sigma(H^k)$ — бесконечная цепь, то согласно рассмотренному случаю 2, на графе Γ^k существует конечная G^k-эквивалентность θ такая, что стабилизатор вершины графа Γ^k/θ в группе $(G^k)^\theta$ конечен. Положим $\sigma=(\widehat{\theta}_0)$, где θ_0 — ограничение G^k-эквивалентности θ на граф Γ_0, а $(\widehat{\theta}_0)$ строится по θ_0 в соответствии с леммой 4.3. Для $0\leqslant j<k$ определим граф $(\Gamma^k)^{g^j}$: $V((\Gamma^k)^{g^j})=(V(\Gamma^k))^{g^j}$, $E((\Gamma^k)^{g^j})=(E(\Gamma^k))^{g^j}$. Тогда стабилизатор вершины графа $(\Gamma^k)^{g^j}/\sigma$, $0\leqslant j<k$, в группе $G(V((\Gamma^k)^{g^j}))^\sigma$

конечен. Так как $V(\Gamma)=\bigcup\limits_{0\leqslant j<k} V\left((\Gamma^k)^{g^j}\right)$ и по лемме 4.4 стабилизатор вершины графа Γ_0/σ в группе $G(0, \ldots, k-1)^\sigma$ конечен, то конечен и стабилизатор вершины графа Γ/σ в группе $(G_{\sigma(H)})^\sigma$. Но стабилизатор вершины графа Γ/σ в группе G^σ содержится в группе $(G_{\sigma(H)})^\sigma$, и теорема 4.3 доказана.

5. ГИПОТЕЗА (* *) ДЛЯ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Применим результаты разд. 4 для доказательства следующего утверждения.

Теорема 5.1. *Гипотеза* (**) *справедлива для разрешимых групп* G.

Доказательство. Пусть n — наименьшее натуральное число, для которого существует контрпример (G, Γ), $G\in\mathfrak{S}_n$, к утверждению теоремы. Для произвольной резрешимой группы T, $T\in\mathfrak{S}_n\backslash\mathfrak{S}_{n-1}$, действующей вершинно-транзитивно на локально конечном связном графе Δ, обозначим через $s(T, \Delta)$ минимум рангов абелевых групп $T^{\sigma(K)}$, где $[T, T]\leqslant K\in\mathfrak{S}_{n-1}$. Так как согласно предложению 1.5 граф $\Delta/\sigma(K)$ является локально конечным, то в силу следствия 1.3 и регулярности действия группы $T^{\sigma(K)}$ на графе $\Delta/\sigma(K)$ ранг абелевой группы $T^{\sigma(K)}$ конечен для произвольной подгруппы K, $[T, T]\leqslant K$. Следовательно, определение $s(T, \Delta)$ корректно. Предположим, далее, что для (G, Γ) значение $s(G, \Gamma)=s$ наименьшее среди контрпримеров (T, Δ), $T\in\mathfrak{S}_n$. Тогда $G^{\sigma(K)}=\langle g_1, \ldots, g_s\rangle^{\sigma(K)}$ для некоторой подгруппы $K\in\mathfrak{S}_{n-1}$, $[G, G]\leqslant K$, и некоторых элементов $g_1, \ldots, g_s$ группы G.

Если $s=0$, то по выбору числа n на графе Γ существует конечная K-эквивалентность σ такая, что стабилизатор вершины графа Γ/σ в группе K^σ конечен. Теорема 5.1 следует тогда из теоремы 4.1.

Пусть $s\geqslant 1$. Так как графы $\Gamma^{(m)}$, $m\in N$, не содержат элементов из $\mathcal{T}(1)$, то для Γ, G, $H=\langle K, g_1, \ldots, g_{s-1}\rangle$, $g=g_s$ выполнено предположение 4.1. Так как согласно теореме 4.2 граф Γ_0 можно считать связным (см. начало доказательства теоремы 4.3) и $s(H(0), \Gamma_0)\leqslant$ ранг $H^{\sigma(K)}= =s-1$, то по выбору числа s для некоторой $H(0)$-эквивалентности на графе Γ_0 выполнено предположение 4.2. Теорема 5.1 следует теперь из теоремы 4.3.

Следствие 5.1. *Если Γ — локально конечный связный граф, допускающий вершинно-транзитивную разрешимую группу автоморфизмов, то функция R_Γ альтернативна.*

Доказательство. Если граф $\Gamma^{(m)}$ для некоторого $m\in N$ содержит элемент из $\mathcal{T}(1)$, то $R_\Gamma\in[2^n]$. Предположим поэтому, что для любого $m\in N$ граф $\Gamma^{(m)}$ не содержит элементов из $\mathcal{T}(1)$. Пусть G — вершинно-транзитивная разрешимая группа автоморфизмов графа Γ. Согласно следствию 1.3 в группе G найдется вершинно-транзитивная конечно порожденная подгруппа H. В силу теоремы 5.1 и следствия 1.1 $[R_{\Gamma/\sigma}]=[R_{H^\sigma}]$ для некоторой конечной H-эквивалентности σ на графе Γ. Но тогда по предложению 1.7 а) имеем $[R_\Gamma]=[R_{H^\sigma}]$, и предложение 1.8 завершает доказательство следствия 5.1.

Замечание. Из того, что конечно порожденная разрешимая группа G действует транзитивно на вершинах локально конечного связного графа с полиномиальной функцией роста, не следует полиномиальность функции R_G (см. пример 6.1).

6. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ

В связи с результатами разд. 3 и 5 представляет интерес следующий пример кубического графа.

Пример 6.1. Класс $\mathcal{L}_1$ (определение см. в разд. 3) исчерпывается с точностью до изоморфизма единственным графом $\Gamma: V(\Gamma)=\{x_i^+, x_i^-, y_i^+, y_i^-: i$ — целое$\}$, $E(\Gamma)=\{(x_i^+, x_{i+1}^-), (x_i^-, x_i^+), (y_i^+, y_{i+1}^-), (y_i^-, y_i^+),$

(x_i^+, y_{i+1}^-), (y_i^+, x_{i+1}^-): i — целое}. Нетрудно доказать, что $\mathrm{Aut}\,\Gamma$ — разрешимая группа. Кроме того, в $\mathrm{Aut}\,\Gamma$ имеется вершинно-транзитивный конечно порожденный нормальный делитель с экспоненциальной функцией роста. Отметим, наконец, что $R_\Gamma \in [n]$.

Пример 6.2. Существует связный кубический граф Γ такой, что для некоторой вершины $v_0 \in V(\Gamma)$ функция R_{Γ, v_0} неальтернативна и $\rho_{v_0}^{\mathrm{Aut}\Gamma}(n) = n + 1$ для всех $n \in N$.

Сопоставим каждому слову X над алфавитом $\{a, b\}$ граф $\Gamma(X)$ с отмеченной вершиной v_0.

Если e — пустое слово, то $\Gamma(e)$ имеет вершины $\{v_i\colon 0 \leqslant i \leqslant 9\}$ и ребра $\{(v_0, v_i), (v_i, v_{i+1}), (v_i, v_{i+2})\colon i = 1, 4, 7\}$.

Если граф $\Gamma(X)$ уже определен, то граф $\Gamma(Xa)$, содержащий в качестве подграфа граф $\Gamma(X)$, строится следующим образом. Каждой вершине v графа $\Gamma(X)$, для которой $\deg_{\Gamma(X)}(v) = 1$, сопоставим две новые вершины $u_1(v)$, $u_2(v)$ и соединим вершину v с вершинами $u_1(v)$ и $u_2(v)$.

Если граф $\Gamma(X)$ определен, то граф $\Gamma(Xb)$, содержащий в качестве подграфа граф $\Gamma(X)$, строится следующим образом. Каждой неупорядоченной паре вершин $\{v, u\}$ графа $\Gamma(X)$ такой, что $\deg_{\Gamma(X)}(v) = \deg_{\Gamma(X)}(u) = 1$ и $d_{\Gamma(X)}(v, u) \leqslant \varepsilon$, сопоставим новые вершины $w_i(\{v, u\})$, $i = 1, 2, 3, 4$, и соединим v и u с вершинами $w_1(\{v, u\})$, $w_2(\{v, u\})$, вершину $w_j(\{v, u\})$ с вершиной $w_{j+2}(\{v, u\})$, $j = 1, 2$. Здесь $\varepsilon = 4$, если X оканчивается символом b, и $\varepsilon = 2$ в противном случае.

Пусть теперь $\varphi\colon N \to \{a, b\}$ и $\bar{X}$: $\varphi(1), \varphi(2), \ldots$ — последовательность символов a и b. Определим граф $\Gamma(\bar{X})$ как индуктивный предел последовательности графов $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \ldots$, где $\Gamma_i = \Gamma(\varphi(1) \ldots \varphi(i))$. Несложно проверить, что для любой последовательности $\bar{X}$ граф $\Gamma(\bar{X})$ является кубическим графом, и если $G = (\mathrm{Aut}\,\Gamma(\bar{X}))_{v_0}$, то $\rho_{v_0}^G(n) = n + 1$ для всех $n \in N$. Доказательство завершается построением по любой функции $f\colon N \to N$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{f(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(n)}{2^n} = 0$, последовательности $\bar{X}$, для которой каждое из множеств $M = \{m \in N : R_{\Gamma(\bar{X}), v_0}(m) > f(m)\}$ и $\bar{M} = N \setminus M$ бесконечно. Для этого следует заметить, что если X — произвольное слово над алфавитом $\{a, b\}$, то функции $R_{\Gamma(Xa^n), v_0}(n)$ и $R_{\Gamma(Xb^n), v_0}(n)$ асимптотически ведут себя соответственно как экспонента 2^n и функция n^2. Чередуя участки экспоненциального и квадратичного роста, легко построить требуемую последовательность $\bar{X}$.

Автор выражает признательность Н. Ф. Сесекину и А. И. Старостину за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Milnor J.** A note on fundamental groups and curvature of Riemannian manifolds.— J. Diff. Geometry, 1967, v. 2, p. 1—7.
2. **Wolf J.** Growth of finitely generated solvable groups and curvature of Riemannian manifolds.— J. Diff. Geometry, 1968, v. 2, p. 421—446.
3. **Tits J.** Free subgroups in linear groups.— J. Algebra, 1972, v. 20, N 2, p. 250—270.
4. **Коуровская** тетрадь. 5-е изд., Новосибирск: изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1976.
5. **Sabidussi G.** Vertex-transitive graphs.— Monatsh. Math., 1964, T. 68, S. 426—438.
6. **Thompson J.** Bounds for orders of maximal subgroups.— J. Algebra, 1970, v. 14, N 2, p. 135—138.
7. **Знойко Д. В.** Свободные произведения сеток и свободные симметризаторы графов.— Мат. сб., 1975, т. 98, № 4, с. 518—537.
8. **Харари Ф.** Теория графов. М.: Мир, 1973. 300 с.
9. **Sims C.** Graphs and finite permutation groups.— Math. Z., 1967, T. 95, S. 76—86.
10. **Tutte W.** On symmetry of cubic graphs.— Can. J. Math., 1959, v. 11, p. 621—624.
11. **Milnor J.** Growth in finitely generated solvable groups.— J. Diff. Geometry, 1968, v. 2, p. 447—449.
12. **Трофимов В. И.** Функции роста некоторых множеств в группах.— В кн.: 7-й Всесоюз. симпоз. по теории групп. Красноярск, 1980, с. 125.
13. **Tutte W.** The connectivity of graphs. Toronto: Univ. press, 1967.

Поступила в редколлегию 21 апреля 1981 г.