О МНОГООБРАЗИЯХ МАЛЬЦЕВСКИХ И АЛЬТЕРНАТИВНЫХ АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ АЛГЕБРАМИ КОНЕЧНОГО РАНГА

В. Т. ФИЛИППОВ

Светлой памяти
Константина Александровича Жевлакова
посвящается

Пусть Φ — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, $\mathfrak{M}$ — некоторое многообразие Φ-алгебр, $\mathfrak{M}_n$ — подмногообразие многообразия $\mathfrak{M}$, порожденное свободной алгеброй из $\mathfrak{M}$ ранга n. Наименьшее кардинальное число n такое, что $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_n$, называется базисным рангом многообразия $\mathfrak{M}$ и обозначается через $r_b(\mathfrak{M})$ [3].

Пусть Alt — многообразие альтернативных Φ-алгебр, $\mathcal{M}$-многообразие Φ-алгебр Мальцева.

В 1958 г. А. И. Ширшов сформулировал вопрос о нахождении базисного ранга многообразия альтернативных колец [2]. Эта задача была решена И. П. Шестаковым [11]. Он доказал бесконечность базисных рангов многообразий Alt и $\mathcal{M}$, показав, что для любого натурального n выполняются неравенства $\mathrm{Alt}_n \neq \mathrm{Alt}_{2^n+1}$ и $\mathcal{M}_n \neq \mathcal{M}_{f(n)}$, где $f(n) = 2+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}$, при условии, что аддитивная группа кольца Φ не имеет элементов конечного порядка. В работе [8] доказана бесконечность базисного ранга многообразия $\mathcal{M}$, если $1/6\in\Phi$. (Из доказательства видно, что это утверждение остается в силе для алгебр над кольцом Φ, аддитивная группа которого не содержит элементов порядка 2 и 3, т. е. при более слабом ограничении, чем в [11].) Там же было доказано, что для любого натурального n выполняется неравенство $\mathcal{M}_n \neq \mathcal{M}_{2n+7}$.

И. П. Шестаков [11] поставил вопрос: справедливо ли для некоторого n равенство $\mathrm{Alt}_n=\mathrm{Alt}_{n+1}$? К настоящему моменту были известны только неравенства $\mathrm{Alt}_1\neq\mathrm{Alt}_2\neq\mathrm{Alt}_3\neq\mathrm{Alt}_4$, которые следуют из теоремы Артина и работ [1, 12]. Аналогичная проблема возникает и для алгебр Мальцева. В этом случае, кроме неравенства $\mathcal{M}_1\neq\mathcal{M}_2\neq\mathcal{M}_3$, которые следуют из бинарной лиевости алгебр Мальцева, было известно неравенство $\mathcal{M}_4\neq\mathcal{M}_5$ [7].

В дальнейшем будем предполагать, что $1/6\in\Phi$, хотя результаты остаются справедливыми для кольца Φ, аддитивная группа которого не содержит элементов порядка 2 и 3.

В настоящей работе показано, что для любого натурального $n\neq 3$ выполняется неравенство $\mathcal{M}_n\neq\mathcal{M}_{n+1}$. Применив этот результат к альтернативным алгебрам, мы получим отрицательный ответ на вопрос И. П. Шестакова [11], а именно докажем неравенство $\mathrm{Alt}_n\neq\mathrm{Alt}_{n+1}$ для любого натурального n. Отсюда, в частности, следует бесконечность базисного ранга многообразия Alt при более слабом ограничении на кольцо Φ, чем в [11]. Вопрос, будет ли $\mathcal{M}_3=\mathcal{M}_4$, остается открытым.

В разд. 2, в частности, содержится доказательство того, что квадрат вполне характеристического идеала G свободной алгебры Мальцева, построенного в [7], лежит в аннуляторе всей алгебры. Отсюда следует, что для любой разрешимой алгебры Мальцева A характеристики $p>n$ или $p=0$, удовлетворяющей n-му условию Энгеля, существует натуральное N такое, что $[A^N]^2A=0$. Ранее [8, теорема 5] при этих же предположениях было доказано, что $[A^N]^3=0$. Заметим, что существует разрешимая индекса 3 алгебра Мальцева, удовлетворяющая 5-му условию Энгеля, любая степень которой имеет ненулевое умножение.

Кроме того, получено, что в многообразии Alt_n всякая разрешимая алгебра нильпотентна. Это утверждение было доказано в [11], но при условии, что Φ — поле характеристики 0. Попутно рассматриваются некоторые вопросы, связанные с центрами многообразий $\mathcal{M}_n$ и Alt_n.

Воспользуемся терминологией и обозначениями работы [9]. Все недостающие определения будем вводить по мере надобности.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА

В дальнейшем, если не оговорено противное, будем предполагать, что A — произвольная Φ-алгебра Мальцева.

Пусть $\mathcal{J}(x, y, z) = xyz + zxy + yzx$, $\{x, y, z\} = \mathcal{J}(x, y, z) + 3x(yz)$, $g(y, z, t, v, u, x) = \mathcal{J}(\{yz, t, u\}, x, v) + \mathcal{J}(\{yz, t, x\}, u, v) + \mathcal{J}(\{yx, z, u\}, t, v) + \mathcal{J}(\{yu, z, x\}, t, v)$. При $u = x$ функция g принимает вид:

$$g(y, z, t, v, x, x) = 2\mathcal{J}(\{yz, t, x\}, x, v) + 2\mathcal{J}(\{yx, z, x\}, t, v).$$

Кроме того, по определению функции g имеем тождество

$$2g(y, z, t, v, u, x) = g(y, z, t, v, u+x, u+x) - g(y, z, t, v, u, u) - g(y, z, t, v, x, x).$$

В алгебре A выполняются тождества:

$$g(y, z, t, x, x, x) = 0, \tag{1}$$

$$g(y, z, t, v, x, x)x = 0, \tag{2}$$

$$g(y, z, v, t, x, x)t = -g(y, z, vt, t, x, x), \tag{3}$$

$$g(t, w, y, uvz, x, x)t = 0 \tag{4}$$

$$g(y, z, t, tv^2, x, x) = 0, \tag{5}$$

$$g(vwa^2, y, z, t, x, x) = 0, \tag{6}$$

$$g(va(bw), y, z, t, x, x) = 0, \tag{7}$$

$$g(t, yb, cd, v, x, x)t = 0, \tag{8}$$

$$g(t, yb, cdt, v, x, x) = 0, \tag{9}$$

$$g(t, yb, cd, wv, x, x) = 0, \tag{10}$$

$$g(y, z, t, v, x, x)(zt) = 0, \tag{11}$$

$$g(y, z, t, vw^2, x, x) = g(y, z, t, v, x, x)w^2 - g(y, z, t, w, x, x)vw - g(y, z, t, w, x, x)(vw), \tag{12}$$

$$g(ytw, y, z, v, x, x) = g(w, y, z, v, x, x)ty, \tag{13}$$

$$g(y, z, t, v, x, x)v^2 = 0, \tag{14}$$

$$\mathcal{J}(g(ab, c, z, y, x, x), v, w) = 0, \tag{15}$$

$$g(a, b, c, v, x, x)\, t = 2g(a, b, c, t, xv, x) + \frac{1}{2} g(ab, c, t, v, x, x) + \frac{1}{2} g(ca, b, t, v, x, x) + \frac{1}{2} g(bc, a, t, v, x, x). \tag{16}$$

Доказательство тождеств (1)—(4) можно найти в [6], тождеств (5)—(11) — в [7], (12) — в [8], а (13)—(16) — в [9].

Напомним, что функция $g(y, z, t, v, u, x)$ кососимметрична относительно y, z, t, v [6].

Применив последовательно (13), линеаризованное по a тождество (6), тождества (3) и (4), получим

$$g(a, b, c, v, x, x)(yz)v = g(v(yz)a, b, c, v, x, x) = -g(yzva, b, c, v, x, x) = g(yzav, b, c, v, x, x) = -g(yza, b, c, v, x, x)v = 0. \tag{17}$$

В силу линеаризованного по t тождества (5) и тождества (6)

$$g(av^2, b, yz, c, x, x) = -g(yzv^2, b, a, c, x, x) = 0. \tag{18}$$

Из (18) и (9) имеем

$$g(vab, v, yz, c, x, x) = -g(avb, v, yz, c, x, x) = -v\frac{\partial}{\partial b}g(ab^2, v, yz, c, x, x) + $$
$$+ g(abv, v, yz, c, x, x) = g(abv, v, yz, c, x, x) = 0. \tag{19}$$

Применив последовательно (3), (16), (19), (18) и (10), получим

$$g(a, b, c, v, x, x)\,v(yz) = g(va, b, c, v, x, x)(yz) = -g(va, b, v, c, x, x)(yz) =$$
$$= -2g(va, b, v, yz, xc, x) - \frac{1}{2}g(vab, v, yz, c, x, x) -$$
$$-\frac{1}{2}g(v(va), b, yz, c, x, x) - \frac{1}{2}g(bv, va, yz, c, x, x) =$$
$$= -2g(va, b, v, yz, xc, x). \tag{20}$$

В силу (3), линеаризованных тождеств (2), (1), (3), тождества (7), линеаризованного по t тождества (9), тождеств (3) и (4)

$$-2g(va, b, v, yz, xc, x) = -2g(a, b, v, yz, xc, x)v = 2g(a, b, v, yz, v, xc)x +$$
$$+ 2g(a, b, v, yz, x, v)(xc) = -g(a, b, xc, yz, v, v)x - g(a, b, x, yz, v, v)(xc) =$$
$$= g(a, b, xc, yzx, v, v) + g(a, b, x, yz(xc), v, v) = g(a, b, xc, yzx, v, v) =$$
$$= -g(x, b, xc, yza, v, v) = -g(x, b, c, yza, v, v)x.$$

Отсюда и из (20) следует

$$g(a, b, c, v, x, x)v(yz) = 0. \tag{21}$$

В силу (14), (17) и (21)

$$g(a, b, c, yz, x, x)\,v^2 = (yz)\frac{\partial}{\partial v}g(a, b, c, v, x, x)\,v^2 -$$
$$-g(a, b, c, v, x, x)(yz)\,v - g(a, b, c, v, x, x)\,v(yz) = 0. \tag{22}$$

Из (16) и последнего тождества получим

$$g(a, b, c, v, x, x)\,tw^2 = 2g(a, b, c, t, xv, x)\,w^2 + \frac{1}{2}g(ab, c, t, v, x, x)\,w^2 +$$
$$+\frac{1}{2}g(ca, b, t, v, x, x)\,w^2 + \frac{1}{2}g(bc, a, t, v, x, x)\,w^2 = 2g(a, b, c, t, xv, x)\,w^2. \tag{23}$$

По тождествам (12), (6), (22) и (17)

$$g(a, b, c, v, x, x)(yzv) = -g(a, b, c, yzv^2, x, x) +$$
$$+ g(a, b, c, yz, x, x)v^2 - g(a, b, c, v, x, x)(yz)v = 0. \tag{24}$$

В силу линеаризованного по z тождества (11) и тождества (24)

$$g(yz, b, c, v, x, x)(av) = -g(a, b, c, v, x, x)(yzv) = 0. \tag{25}$$

Из (3) и (21) получим

$$g(av, b, c, v, x, x)(yz) = -g(a, b, c, v, x, x)v(yz) = 0. \tag{26}$$

Из (25), (26) и кососимметричности функции $g(y, z, t, v, x, x)$ следует кососимметричность функции $g(yz, b, c, v, x, x)(aw)$ относительно a, b, c, y, z, v, w. Отсюда

$$g(yz, b, c, v, x, x)(aw) = -g(az, b, c, v, x, x)(yw) = g(aw, b, c, v, x, x)(yz). \tag{27}$$

В силу линеаризованного по t тождества (3) и тождества (7)

$$g(yz, aw, c, v, x, x)b = -g(yz, b, c, v, x, x)(aw) -$$
$$-g(yzb, aw, c, v, x, x) - g(yz(aw), b, c, v, x, x) =$$
$$= -g(yz, b, c, v, x, x)(aw) - g(yzb, aw, c, v, x, x). \tag{28}$$

Отсюда заменой переменных получим $-g(aw, yz, c, v, x, x)b = g(aw, b, c, v, x, x)(yz) + g(awb, yz, c, v, x, x)$. Сложим два последних тождества и применим (27):

$$2g(yz, aw, c, v, x, x)b = -g(yz, b, c, v, x, x)(aw) + g(aw, b, c, v, x, x)(yz) - g(yzb, aw, c, v, x, x) + g(awb, yz, c, v, x, x) = -g(yzb, aw, c, v, x, x) + g(awb, yz, c, v, x, x). \tag{29}$$

В силу (3) и (4) $g(uvz, wt, y, t, x, x) = -g(uvz, w, y, t, x, x)t = 0$. Из (9), (19), последнего тождества и кососимметричности функции $g(y, z, t, v, x, x)$ вытекает кососимметричность функции $g(yzb, aw, c, v, x, x)$ относительно a, b, c, y, z, v, w. Отсюда $g(yzb, aw, c, v, x, x) = -g(azb, yw, c, v, x, x) = g(awb, yz, c, v, x, x)$. Применив последнее тождество к правой части тождества (29) и сократив на 2, получим

$$g(yz, aw, c, v, x, x)b = 0. \tag{30}$$

В силу (28) и (30) $g(yz, b, c, v, x, x)(aw) = -g(yzb, aw, c, v, x, x)$. Отсюда и из (30)

$$g(yz, b, c, v, x, x)(aw)t = -g(yzb, aw, c, v, x, x)t = 0. \tag{31}$$

Линеаризуем тождество (22) по v:

$$g(a, b, c, yz, x, x)vw + g(a, b, c, yz, x, x)wv = 0. \tag{32}$$

В силу (32), (31) и (15) $2g(yz, b, c, v, x, x)awt = g(yz, b, c, v, x, x)awt - g(yz, b, c, v, x, x)wat = g(yz, b, c, v, x, x)awt - g(yz, b, c, v, x, x)wat - g(yz, b, c, v, x, x)(aw)t = \mathcal{J}(g(yz, b, c, v, x, x), a, w)t = 0$. Отсюда

$$g(yz, b, c, v, x, x)awt = 0. \tag{33}$$

Из тождества (15) следует

$$g(a, b, c, tw, x, x)(yz)v - g(a, b, c, tw, x, x)v(yz) - g(a, b, c, tw, x, x)(yzv) = \mathcal{J}(g(a, b, c, tw, x, x), yz, v) = 0.$$

Применив к последнему тождеству линеаризованные по v тождества (17), (21) и (24), получим

$$-g(a, b, c, v, x, x)(yz)(tw) + g(a, b, c, v, x, x)(tw)(yz) + g(a, b, c, v, x, x)[yz(tw)] = 0.$$

В силу лемм 3 и 5 [7] последнее слагаемое равно нулю. Поэтому

$$g(a, b, c, v, x, x)(yz)(tw) = g(a, b, c, v, x, x)(tw)(yz).$$

С другой стороны, из линеаризованных по v тождеств (17), (22), (21) следует $g(a, b, c, v, x, x)(yz)(tw) = -g(a, b, c, tw, x, x)(yz)v = g(a, b, c, tw, x, x)v(yz) = -g(a, b, c, v, x, x)(tw)(yz)$. Сложив два последних тождества и сократив на 2, получим

$$g(a, b, c, v, x, x)(yz)(tw) = 0. \tag{34}$$

Из линеаризованного по t тождества (3) имеем

$$g(a, b, c, v, x, x)(yz) = -g(a, b, c, yz, x, x)v + g(yza, b, c, v, x, x) + g(va, b, c, yz, x, x). \tag{35}$$

Пусть $Z(A)$ — лиев центр алгебры A: $Z(A) = \{n \in A;\ \mathcal{J}(n, A, A) = 0\}$. Поскольку $Z(A)$ — идеал алгебры A (см. [13]), то в силу (15) и (35) $g(a, b, c, v, x, x)(yz) \in Z(A)$, т. е. $\mathcal{J}(g(a, b, c, v, x, x)(yz), t, w) = 0$. Отсюда и из (34) следует

$$g(a, b, c, v, x, x)(yz)tw - g(a, b, c, v, x, x)(yz)wt = 0. \tag{36}$$

Определяющее тождество алгебр Мальцева: $\mathcal{J}(x, t, xy) = \mathcal{J}(x, t, y)x$ можно записать в виде

$$yx^2t = ytx^2 + (xt)\frac{\partial}{\partial x}yx^2. \tag{37}$$

В силу (37) и (22)

$$g(a, b, c, yz, x, x)vt^2 = g(a, b, c, yz, x, x)t^2v - (tv)\frac{\partial}{\partial t}g(a, b, c, yz, x, x)t^2 = 0.$$

Из (35), (22) и последнего тождества получим $g(a, b, c, v, x, x)(yz)t^2 = -g(a, b, c, yz, x, x)vt^2 + g(yza, b, c, v, x, x)t^2 + g(va, b, c, yz, x, x)t^2 = 0$. Линеаризуем его по t:

$$g(a, b, c, v, x, x)(yz)tw + g(a, b, c, v, x, x)(yz)wt = 0.$$

Отсюда и из (36) следует

$$g(a, b, c, v, x, x)(yz)tw = 0. \tag{38}$$

2. МНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫМИ АЛГЕБРАМИ МАЛЬЦЕВА

Если зафиксирована система образующих алгебры A, то длину слов из A определим обычным образом, а длину $d(u)$ произвольного элемента $u \in A$ — как минимальную длину слов, входящих в запись u.

Пусть $R(A)$ — алгебра правых умножений алгебры A. Длиной $d(X)$ R-слова $X = R_{x_1} \dots R_{x_n}$ будем называть сумму длин элементов $x_i \in A$, входящих в его запись. Длину $d(U)$ произвольного элемента $U \in R(A)$ определим как минимальную длину R-слов, входящих в запись U.

В алгебре A выполняются тождества:

$$g(y, z, t, v, x, x)yz = 0, \tag{39}$$

$$g(y, z, t, v, x, x)w^2t = 0, \tag{40}$$

$$xyzt + txyz + ztxy + yztx = xz(yt). \tag{41}$$

Доказательство тождества (39) можно найти в [6], тождества (40) — в [9], (41) — в [13]. В силу (39) и (1)

$$g(y, z, t, v, x, x)yx = x\frac{\partial}{\partial z}g(y, z, t, v, x, x)yz - g(y, x, t, v, x, x)yz = 0. \tag{42}$$

Из (11) и (1) следует

$$g(y, z, t, v, x, x)(zx) = x\frac{\partial}{\partial t}g(y, z, t, v, x, x)(zt) - g(y, z, x, v, x, x)(zt) = 0. \tag{43}$$

Лемма 1. *В алгебре A для любого $n \geqslant 2$ функция $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_5)y_1 \dots y_nt$ кососимметрична относительно $y_1, \dots, y_n$.*

Доказательство. В алгебре A выполняется тождество

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_5)y_1 \dots y_nw^2t = 0 \quad (n \geqslant 0). \tag{44}$$

Действительно, для $n = 0$ (44) следует из (40). Если (44) выполняется для всех $n < k$ ($k \geqslant 1$), то в силу (37) и (40)

$$g(x_1, \dots, x_5, x_5)y_1 \dots y_kw^2t = g(x_1, \dots, x_5, x_5)y_1 \dots y_{k-1}w^2y_kt - (wy_k)\frac{\partial}{\partial w}g(x_1, \dots, x_5, x_5)y_1 \dots y_{k-1}w^2t = 0.$$

Тождество (44) по индукции доказано. Теперь утверждение леммы легко следует из линеаризованного по w тождества (44). Лемма доказана.

Лемма 2. *В алгебре A выполняются тождества:*

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_5)x_6 \dots x_nx_ix_j = 0, \tag{45}$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_5)x_6 \dots x_nx_i(x_jx_k) = 0, \tag{46}$$

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_5)x_6 \dots x_n(x_ix_j) = 0, \tag{47}$$

где $i, j, k = 1, \dots, n$, $n \geqslant 5$.

Доказательство. Докажем тождества (45). Справедливость их для $n=5$ вытекает из (39), (42), (2) и кососимметричности функции g. Для $n=6$ имеем три случая: 1) $i=6$; 2) $i=5$; 3) $i=1, \ldots, 4$. Если $i=6$, то (45) следуют из (40). Если $i=5$, то по лемме 1 и тождества (2) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6x_5x_j = -g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_5x_6x_j = 0$. В третьем случае ввиду кососимметричности g для определенности можно положить $i=1$. Если $j=6$, то в силу леммы 1, (3) и (22) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6x_1x_6 = -g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_1x_6^2 = -g(x_1, x_1x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6^2 = 0$. Для $j=5$ по лемме 1, (3), линеаризованному по v тождеству (22) и (2) получим $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6x_1x_5 = -g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_1x_6x_5 = -g(x_1, x_1x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6x_5 = g(x_1, x_1x_2, \ldots, x_5, x_5)x_5x_6 = 0$. Если $j=1$, то, применив последовательно лемму 1, (3), линеаризованное по v тождество (22), (3) и (40), получим $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6x_1^2 = -g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_1x_6x_1 = -g(x_1, x_1x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6x_1 = g(x_1, x_1x_2, \ldots, x_5, x_5)x_1x_6 = g(x_1, x_2, \ldots, x_5, x_5)x_1^2x_6 = 0$. Для $j=2$, 3, 4 тождества (45) доказываем аналогично, используя лемму 1 и тождества (3), (22), (39). Итак, для $n=6$ тождества (45) доказаны.

Пусть $n>6$. Также имеем три случая: 1) $i=6, \ldots, n$; 2) $i=5$; 3) $i=1, \ldots, 4$. В первом случае справедливость (45) следует из леммы 1. Во втором по лемме 1 и (2) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6\ldots x_nx_5x_j = (-1)^{n-5}g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_5x_6\ldots x_nx_j = 0$. В третьем случае в силу кососимметричности g, для определенности можно положить $i=1$. По лемме 1, (3) и (33) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6\ldots x_nx_1x_j = (-1)^{n-5}g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_1x_6\ldots x_nx_j = (-1)^{n-5}g(x_1, x_1x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6\ldots x_nx_j = 0$. Тождества (45) доказаны для $n>6$ и, следовательно, для любого $n \geqslant 5$.

Доказательство (46). Пусть $n=5$. Для $i=1, \ldots, 4$ тождества (46) следуют из (21), а для $i=5$ — из (2).

Пусть $n>5$. Имеем три случая: 1) $i=6, \ldots, n$; 2) $i=5$; 3) $i=1, \ldots, 4$. В первом случае тождества (46) выполняются ввиду леммы 1. Во втором по лемме 1 и (2) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6\ldots x_nx_5(x_jx_k) = (-1)^{n-5}g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_5x_6\ldots x_n(x_jx_k) = 0$. В третьем случае в силу кососимметричности g для определенности можно положить $i=1$. Тогда по лемме 1 и (3)

$$g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6\ldots x_nx_1(x_jx_k) = (-1)^{n-5}g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_1x_6\ldots x_n(x_jx_k) = \\ = (-1)^{n-5}g(x_1, x_1x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6\ldots x_n(x_jx_k). \tag{48}$$

Поскольку лиев центр $Z(A)$ алгебры A является идеалом, то в силу (15) $g(x_1, x_1x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6\ldots x_n \in Z(A)$. Отсюда и из (33) $g(x_1, x_1x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6\ldots x_n(x_jx_k) = g(x_1, x_1x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6\ldots x_nx_jx_k - g(x_1, x_1x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6\ldots x_nx_kx_j = 0$. Из (48) и последнего тождества следует $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6\ldots x_nx_1(x_jx_k) = 0$. Итак, тождества (46) доказаны для любого $n \geqslant 5$.

Прежде чем доказывать (47), предварительно докажем тождества

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_5)x_6\ldots x_{n-1}(x_ix_j)x_n = 0, \tag{49}$$

где $i, j=1, \ldots, n$, $n \geqslant 6$.

Если $n>6$, то в силу леммы 1 и (38) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6\ldots x_{n-1}(x_ix_j)x_n = (-1)^{n-6}g(x_1, \ldots, x_5, x_5)(x_ix_j)x_6\ldots x_{n-1}x_n = 0$. Остается рассмотреть случай $n=6$. При $i, j=1, \ldots, 5$ в силу (11) и (43) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)(x_ix_j)x_6 = 0$. Если $i=6$, то имеем два случая: 1) $j=1, \ldots, 4$; 2) $j=5$. В первом случае для определенности можно положить $j=1$. Тогда в силу линеаризованного по v тождества (17) и (11) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)(x_6x_1)x_6 = -g(x_1, x_6, \ldots, x_5, x_5)(x_6x_1)x_2 = 0$. Во втором из линеаризованного по v тождества (17) и (43) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)(x_6x_5)x_6 = -g(x_1, x_6, \ldots, x_5, x_5)(x_6x_5)x_2 = 0$. Случай $j=6$ аналогичен. Тождества (49) для $n=6$ доказаны. Следовательно, (49) выполняются для любого $n \geqslant 6$.

Доказательство (47). Для $n=5$ тождества (47) следуют из (11), (43) и кососимметричности функции g.

Пусть $n=6$. Ввиду антикоммутативности алгебры A достаточно рассмотреть четыре случая: 1) $i=5$, $j=6$; 2) $i=1, \ldots, 4$, $j=6$; 3) $i=1, \ldots, 4$, $j=5$; 4) $i=1, \ldots, 4$, $j=1, \ldots, 4$.

1) По (37), (49), (40) и (2) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6(x_5x_6) = -g(x_1, \ldots, x_5, x_5)(x_5x_6)x_6 - g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6^2x_5 + g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_5x_6^2 = 0$.

В силу кососимметричности g в случаях 2)—4) для определенности можно положить $i=1$.

2) По (37), (49), (40), (3) и (22)

$$\begin{aligned} g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6(x_1x_6) &= -g(x_1, \ldots, x_5, x_5)(x_1x_6)x_6 - \\ &- g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6^2x_1 + g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_1x_6^2 = \\ &= g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_1x_6^2 = g(x_1, x_1x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6^2 = 0. \qquad (50)\end{aligned}$$

3) В силу (50) и (2) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6(x_1x_5) = x_5\frac{\partial}{\partial x_6}g(x_1, \ldots, x_5, x_5)\times x_6(x_1x_6) - g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_5(x_1x_6) = 0$.

4) Для определенности можно положить $j=2$. По (50), $g(x_2, x_6, \ldots, x_5, x_5)x_1(x_2x_1)=0$. Из линеаризованного по v тождества (21) и последнего получим $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6(x_1x_2) = -g(x_6, x_2, \ldots, x_5, x_5)x_1(x_1x_2) = -g(x_2, x_6, \ldots, x_5, x_5)x_1(x_2x_1) = 0$. Для $n=6$ тождества (47) доказаны.

Пусть $n>6$. Ввиду антикоммутативности алгебры A достаточно рассмотреть пять случаев: 1) $i, j=6, \ldots, n$; 2) $i=1, \ldots, 4$, $j=6, \ldots, n$; 3) $i, j=1, \ldots, 4$; 4) $i=1, \ldots, 4$, $j=5$; 5) $i=5$, $j=6, \ldots, n$, а в силу леммы 1 и кососимметричности функции g можно ограничиться доказательством (47) в случаях: 1) $i=n-1$, $j=n$; 2) $i=1$, $j=n$; 3) $i=1$, $j=2$; 4) $i=1$, $j=5$; 5) $i=5$, $j=n$.

1) По (37), (49) и лемме 1 $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_{n-1}x_n(x_{n-1}x_n) = -g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_{n-1}(x_{n-1}x_n)x_n - g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_{n-1}x_n^2x_{n-1} + g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_{n-1}^2x_n^2 = 0$.

2) По тождествам (37), (49), лемме 1, (3) и (33) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_n(x_1x_n) = -g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots (x_1x_n)x_n - g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_n^2x_1 + g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_1x_n^2 = g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_1x_n^2 = (-1)^{n-6}\times g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_1x_6 \ldots x_{n-1}x_n^2 = (-1)^{n-6}g(x_1, x_1x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_{n-1}x_n^2 = 0$.

3) В силу (45) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_{n-2}x_1x_2 = 0$. Линеаризуем последнее тождество по x_1 и x_2 и умножим справа на x_1x_2:

$$\begin{aligned} &g(x_1, x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_{n-1}x_n(x_1x_2) + \\ &+g(x_{n-1}, x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_1x_n(x_1x_2) + \\ &+g(x_1, x_n, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_{n-1}x_2(x_1x_2) + \\ &+g(x_{n-1}, x_n, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_1x_2(x_1x_2) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 1 следует

$$\begin{aligned} &g(x_1, x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_{n-1}x_n(x_1x_2) = \\ &=g(x_{n-1}, x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_nx_1(x_1x_2) - \\ &-g(x_1, x_n, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_{n-1}x_2(x_1x_2) - \\ &-g(x_{n-1}, x_n, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_1x_2(x_1x_2).\end{aligned}$$

В правой части последнего тождества первые два слагаемых равны нулю в силу 2), а последнее — в силу 1). Следовательно,

$$g(x_1, x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_n(x_1x_2) = 0.$$

4) Из 3) и (1) следует тождество $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_n(x_1x_5) = x_5\frac{\partial}{\partial x_2}g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_n(x_1x_2) - g(x_1, x_5, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_n(x_1x_2) = 0$.

5) В силу (2) и (1) $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_n(x_5x_n) = x_5\frac{\partial}{\partial x_1}g(x_1, \ldots$
$\ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_n(x_1x_n) - g(x_5, x_2, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_n(x_1x_n) = 0.$
Тождества (47) доказаны для любого $n \geqslant 5$. Лемма доказана.

В дальнейшем через $G(A)$ будем обозначать T-идеал алгебры A, порожденный функцией $g(y, z, t, v, x, x)$. Пусть $V(A) = \{v \in A;\ vxy = 0,\ v(xy) = 0$ для любых $x, y \in A\}$. Очевидно, что $V(A)$ — идеал алгебры A.

Теорема 1. *В свободной Ф-алгебре Мальцева* $A_n\left(\frac{1}{6} \in \Phi\right)$ *от* $n \geqslant 5$ *свободных образующих выполняется равенство* $G(A_n)X = 0$ *для любого* $X \in R(A_n)$ *длины* $d(X) \geqslant n - 3$.

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — свободные образующие алгебры A_n. Предварительно докажем, что

$$g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_n \in V(A_n) \tag{51}$$

для любых $x_i \in A_n$, $n \geqslant 5$. По теореме 4 [10] идеал $V(A_n)$ алгебры A_n является вполне характеристическим. Поэтому для доказательства (51) достаточно показать, что $g(a_1, \ldots, a_5, a_5)a_6 \ldots a_n \in V(A_n)$, т. е. достаточно доказать соотношения:

$$g(a_1, \ldots, a_5, a_5)a_6 \ldots a_n xy = 0, \tag{52}$$

$$g(a_1, \ldots, a_5, a_5)a_6 \ldots a_n(xy) = 0, \tag{53}$$

для любых $x, y \in A_n$.

Тождеству (41) в $R(A)$ эквивалентно соотношение $R_{xyz} = R_xR_yR_z - R_zR_xR_y - R_{yz}R_x - R_yR_{xz}$. Пусть X — произвольный элемент из $R(A)$. Применив последнее соотношение к операторам правого умножения, входящим в X, длина которых больше 2, мы можем представить X в виде

$$X = \sum_i \alpha_i R x_{i_1} \ldots R x_{i_{k(i)}}, \tag{54}$$

где x_{i_j} — слова из A длины $d(x_{i_j}) \leqslant 2$, $\alpha_i \in \Phi$.

В силу (54) для доказательства (52) и (53) достаточно заметить $g(a_1, \ldots, a_5, a_5)a_6 \ldots a_na_ia_j = 0$, $g(a_1, \ldots, a_5, a_5)a_6 \ldots a_na_i(a_ja_k) = 0$, $g(a_1, \ldots$ $\ldots, a_5, a_5)a_6 \ldots a_n(a_ia_j) = 0$, где $i, j, k = 1, \ldots, n$, $n \geqslant 5$. Но эти равенства выполняются в A_n по лемме 2. Следовательно, соотношения (52) и (53) также выполняются в A_n. Отсюда следует (51).

Возвращаясь к доказательству теоремы, заметим, что для $n = 5$ утверждение теоремы следует из (51). Пусть $n > 5$. По тождествам (54), (51), (34), (38) и лемме 1 для доказательства теоремы достаточно получить, что в A_n верно

$$g(x_1, \ldots, x_5, x_5)x_6 \ldots x_{n-1}(x_nx_{n+1})x_{n+2} = 0. \tag{55}$$

Пусть $\mathcal{U}(A_n) = \{n \in A_n;\ n(xy)z = 0$ для любых $x, y, z \in A_n\}$. В силу теоремы 4 [10] $\mathcal{U}(A_n)$ вполне характеристический подмодуль Ф-модуля алгебры A_n. Поэтому для доказательства (55) достаточно заметить, что выполняется $g(a_1, \ldots, a_5, a_5)a_6 \ldots a_{n-1}(x_nx_{n+1})x_{n+2} = 0$, где a_i — образующие алгебры A_n, x_n, x_{n+1}, x_{n+2} — произвольные элементы A_n. В силу (54), (51), (34), (38) и леммы 1 последнее соотношение достаточно доказать в предположении, что x_n, x_{n+1}, x_{n+2} — образующие алгебры A_n, т. е. что $g(a_1, \ldots, a_5, a_5)a_6 \ldots a_{n-1}(a_ia_j)a_k = 0$, где $i, j, k = 1, \ldots, n$. Но последнее следует из (49). Следовательно, тождество (55) выполняется. Теорема доказана.

Пусть B — произвольная альтернативная алгебра. Если $[x, y] = xy - yx$ — коммутатор, $(x, y, z) = xyz - x(yz)$ — ассоциатор, то функции $\mathcal{J}(x, y, z) = [[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x]$ и $\{x, y, z\} = \mathcal{J}(x, y, z) + 3[x, [y, z]]$ в алгебре B принимают вид

$$\begin{gathered} \mathcal{J}(x, y, z) = 6(x, y, z), \\ \{x, y, z\} = 6(x, y, z) + 3[x, [y, z]]. \end{gathered} \tag{56}$$

Следовательно, функция g в алгебре B принимает вид

$$\begin{gathered} g(y, z, t, v, u, x) = 18[(2([y, z], t, u) + [[y, z], [t, u]], x, v) + \\ + (2([y, z], t, x) + [[y, z], [t, x]], u, v) + (2([y, x], z, u) + \\ + [[y, x], [z, u]], t, v) + (2([y, u], z, x) + [[y, u], [z, x]], t, v)]. \end{gathered} \tag{57}$$

Если B — свободная альтернативная алгебра с множеством свободных образующих X, то подалгебру C алгебры $B^{(-)}$, порожденную множеством X назовем свободной специальной алгеброй Мальцева, а элементы из X — свободными образующими алгебры C.

Лемма 3. *В свободной специальной алгебре Мальцева* C_{k+1} *с* $k+1$ *свободными образующими* $(k+1>5)$ *не выполняются тождества*

$$\begin{gathered} \mathcal{J}(g(y_1, \ldots, y_5, y_5)y_6 \ldots y_k, y_4, y_{k+1}) = 0, \\ g(y_1, \ldots, y_5, y_5)y_6 \ldots y_k y_{k+1} y_4 = 0. \end{gathered} \tag{58}$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно найти специальную алгебру Мальцева с $k+1$ образующим, в которой не выполняются тождества (58). Возьмем произвольное натуральное число $n = 4n' + 2 \geqslant k + 3$. Через B_n обозначим альтернативную алгебру из [4] *. Эта алгебра удовлетворяет тождествам

$$xy(zt)v = 0, \quad v[xy(zt)] = 0. \tag{59}$$

Кроме того, как видно из таблицы умножения, все слова из B_n, в которые входят либо два раза e_i, либо четыре раза e, равны нулю.

В силу (57) и (59) в алгебре B_n функция g принимает вид

$$\begin{gathered} g(y, z, t, v, u, x) = 6^2[([y, z]tu, x, v) + ([y, z]tx, u, v) + \\ + ([y, x]zu, t, v) + ([y, u]zx, t, v)]. \end{gathered} \tag{60}$$

По (60), (59) и таблице умножения алгебры B_n

$$\begin{gathered} \alpha = g(e_{n-k-1}, e_{n-k}, e_{n-k+2}, e_{n-k+3}, e^2e_1 \ldots e_{n-k-2}, e_{n-k+1}) = \\ = 6^2[([e_{n-k-1}, e_{n-k}] \cdot e_{n-k+2} \cdot e^2e_1 \ldots e_{n-k-2}, e_{n-k+1}, e_{n-k+3}) + \\ + ([e_{n-k-1}, e_{n-k}] \cdot e_{n-k+2} \cdot e_{n-k+1}, e^2e_1 \ldots e_{n-k-2}, e_{n-k+3}) + \\ + ([e_{n-k-1}, e_{n-k+1}] \cdot e_{n-k} \cdot e^2e_1 \ldots e_{n-k-2}, e_{n-k+2}, e_{n-k+3}) + \\ + ([e_{n-k-1}, e^2e_1 \ldots e_{n-k-2}] \cdot e_{n-k} \cdot e_{n-k+1}, e_{n-k+2}, e_{n-k+3})] = \\ = -6^2([e^2e_1 \ldots e_{n-k-2}, e_{n-k-1}] \cdot e_{n-k} \cdot e_{n-k+1}, e_{n-k+2}, e_{n-k+3}) = \\ = -6^2[e^2e_1 \ldots e_{n-k-2}, e_{n-k-1}] \cdot e_{n-k} \cdot e_{n-k+1}, \cdot e_{n-k+2}, \cdot e_{n-k+3}. \end{gathered} \tag{61}$$

В алгебре B_n выполняются равенства (см. [9]):

1) $m > s \geqslant 0$,

$$[e^2e_1 \ldots e_s, e_m] = \begin{cases} e^2e_1 \ldots e_se_m - e_1e^2e_2 \ldots e_se_m, & s \text{ — четное;} \\ 2e^2e_1 \ldots e_se_m + e_1e^2e_2 \ldots e_se_m, & s \text{ — нечетное;} \end{cases} \tag{α_1}$$

2) $m > s \geqslant 1$,

$$[e_1e^2e_2 \ldots e_s, e_m] = \begin{cases} e^2e_1 \ldots e_se_m + 2e_1e^2e_2 \ldots e_se_m, & s \text{ — четное;} \\ - e^2e_1 \ldots e_se_m + e_1e^2e_2 \ldots e_se_m, & s \text{ — нечетное.} \end{cases} \tag{α_2}$$

Поскольку n — четное число, то из равенства (α_1) имеем

$$[e^2e_1 \ldots e_{n-k-2}, e_{n-k-1}] = \begin{cases} e^2e_1 \ldots e_{n-k-1} - e_1e^2e_2 \ldots e_{n-k-1}, & k \text{ — четное;} \\ 2e^2e_1 \ldots e_{n-k-1} + e_1e^2e_2 \ldots e_{n-k-1}, & k \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

---

* В [4] B_n — алгебра над полем. Но мы предполагаем, что B_n — алгебра над кольцом Φ, рассматривая свободный Φ-модуль с той же таблицей умножения, что и в [4].

Отсюда, из (61) и таблицы умножения алгебры B_n получим равенство

$$\alpha=\begin{cases}-6^2(e^2e_1\dots e_{n-k+3}-e_1e^2e_2\dots e_{n-k+3}), & k \text{ — четное};\\ -6^2(2e^2e_1\dots e_{n-k+3}+e_1e^2e_2\dots e_{n-k+3}), & k \text{ — нечетное}.\end{cases}\tag{62}$$

По определению функции g, тождествам (59) и таблице умножения B,

$$\begin{gathered}\beta=g(e_{n-k-1},\ e_{n-k},\ e_{n-k+2},\ e_{n-k+3},\ e^2e_1\dots e_{n-k-2}+\\ +e_{n-k+1},\ e^2e_1\dots e_{n-k-2}+e_{n-k+1})=\\ =g(e_{n-k-1},\ e_{n-k},\ e_{n-k+2},\ e_{n-k+3},\ e^2e_1\dots e_{n-k-2},\ e^2e_1\dots e_{n-k-2})+\\ +2g(e_{n-k-1},\ e_{n-k},\ e_{n-k+2},\ e_{n-k+3},\ e^2e_1\dots e_{n-k-2},\ e_{n-k+1})+\\ +g(e_{n-k-1},\ e_{n-k},\ e_{n-k+2},\ e_{n-k+3},\ e_{n-k+1},\ e_{n-k+1})=\\ =2g(e_{n-k-1},\ e_{n-k},\ e_{n-k+2},\ e_{n-k+3},\ e^2e_1\dots e_{n-k-2},\ e_{n-k+1})=2\alpha.\end{gathered}\tag{63}$$

Пусть $\operatorname{Ann}B_n$ — аннулятор алгебры B_n. Будем писать $a\equiv b$, если $a-b\in\operatorname{Ann}B_n$. В силу определения функции g, (59), (63) и (62)

$$\begin{gathered}\gamma=g(e_{n-k-1},e_{n-k},e_{n-k+2},e_{n-k+3}+ee_{n-1},e^2e_1\dots e_{n-k-2}+\\ +e_{n-k+1},e^2e_1\dots e_{n-k-2}+e_{n-k+1})=g(e_{n-k-1},e_{n-k},e_{n-k+2},e_{n-k+3},e^2e_1\dots e_{n-k-2}+\\ +e_{n-k+1},e^2e_1\dots e_{n-k-2}+e_{n-k+1})+g(e_{n-k-1},e_{n-k},e_{n-k+2},ee_{n-1},e^2e_1\dots e_{n-k-2}+\\ +e_{n-k+1},e^2e_1\dots e_{n-k-2}+e_{n-k+1})\equiv g(e_{n-k-1},e_{n-k},e_{n-k+2},e_{n-k+3},e^2e_1\dots e_{n-k-2}+\\ +e_{n-k+1},e^2e_1\dots e_{n-k-2}+e_{n-k+1})=\beta=2\alpha=\\ =\begin{cases}-6^2\cdot2(e^2e_1\dots e_{n-k+3}-e_1e^2e_2\dots e_{n-k+3}), & k \text{ — четное};\\ -6^2\cdot2(2e^2e_1\dots e_{n-k+3}+e_1e^2e_2\dots e_{n-k+3}), & k \text{ — нечетное}.\end{cases}\end{gathered}\tag{64}$$

С помощью таблицы умножения алгебры B_n нетрудно проверить, что для любых $e_i,\ e_j\in B_n$, $x\in B_n^2$ выполняется равенство

$$[[x,\ e_i],\ e_j]=3x\cdot e_i\cdot e_j.\tag{65}$$

Пусть теперь $\delta=\mathcal{J}([\dots[\gamma,\ e_{n-k+4}],\ \dots,\ e_{n-2}],\ e_{n-k+3}+ee_{n-1},\ e_n)$. (Если $k=5$, то δ имеет вид $\mathcal{J}(\gamma,\ e_{n-k+3}+ee_{n-1},\ e_n)$.) Поскольку e_{n-k+3} входит в состав γ, то

$$\begin{gathered}\delta=\mathcal{J}([\dots[\gamma,\ e_{n-k+4}],\ \dots,\ e_{n-2}],\ e_{n-k+3},\ e_n)+\\ +\mathcal{J}([\dots[\gamma,\ e_{n-k+4}],\ \dots,\ e_{n-2}],\ ee_{n-1},\ e_n)=\\ =\mathcal{J}([\dots[\gamma,\ e_{n-k+4}],\ \dots,\ e_{n-2}],\ ee_{n-1},\ e_n).\end{gathered}$$

Отсюда и из тождеств (56), (59) получим равенство

$$\begin{gathered}\delta=6([\dots[\gamma,e_{n-k+4}],\dots,e_{n-2}],ee_{n-1},e_n)=\\ =-6[\dots[\gamma,e_{n-k+4}],\dots,e_{n-2}]\cdot(ee_{n-1}\cdot e_n)=\\ =\begin{cases}-6\cdot3^{\frac{k-6}{2}}[\gamma\cdot e_{n-k+4}\cdot\ldots\cdot e_{n-3},e_{n-2}]\cdot(ee_{n-1}\cdot e_n), & k \text{ — четное};\\ -6\cdot3^{\frac{k-5}{2}}\gamma\cdot e_{n-k+4}\cdot\ldots\cdot e_{n-2}\cdot(ee_{n-1}\cdot e_n), & k \text{ — нечетное}.\end{cases}\end{gathered}$$

Подставив (64) в последнее равенство и применив (α_1), (α_2) и таблицу умножения алгебры B_n, получим равенство

$$\delta=\begin{cases}2^4\cdot3^{\frac{k+2}{2}}e^2e_1\dots e_{n-2}\cdot e\,e_{n-1}e_n, & k \text{ — четное};\\ 2^4\cdot3^{\frac{k+1}{2}}(2e^2e_1\dots e_{n-2}+e_1e^2e_2\dots e_{n-2})\cdot ee_{n-1}e_n, & k \text{ — нечетное};\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}-2^4\cdot3^{\frac{k+2}{2}}e^2e_1\dots e_ne, & k \text{ — четное};\\ -2^5\cdot3^{\frac{k+1}{2}}e^2e_1\dots e_ne, & k \text{ — нечетное}.\end{cases}$$

Аналогично получим равенство

$$[[[\dots[\gamma, e_{n-k+4}], \dots, e_{n-2}], e_n], e_{n-k+3} + ee_{n-1}] =$$
$$= \begin{cases} 2^3 \cdot 3^{\frac{k+2}{2}} e^2 e_1 \dots e_n e, & k \text{ — четное;} \\ 2^4 \cdot 3^{\frac{k+1}{2}} e^2 e_1 \dots e_n e, & k \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Рассмотрим в $B_n^{(-)}$ подалгебру V, порожденную $k+1$ элементом:

$$y_1 = e_{n-k-1},\ y_2 = e_{n-k},\ y_3 = e_{n-k+2},\ y_4 = e_{n-k+3} + ee_{n-1},$$
$$y_5 = e^2 e_1 \dots e_{n-k-2} + e_{n-k+1},\ y_6 = e_{n-k+4},\ \dots,\ y_k = e_{n-2},\ y_{k+1} = e_n.$$

Ввиду последних равенств алгебра V не удовлетворяет тождеством (58). Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $\frac{1}{6} \in \Phi$. *Тогда* $\mathcal{M}_n \neq \mathcal{M}_{n+1}$ *для любого натурального* $n \neq 3$.

Доказательство. Неравенства $\mathcal{M}_1 \neq \mathcal{M}_2 \neq \mathcal{M}_3$ следуют из бинарной лиевости алгебр Мальцева. Неравенство $\mathcal{M}_4 \neq \mathcal{M}_5$ доказано в [7]. Если $n \geqslant 5$, то по теореме 1 в $\mathcal{M}_n$ выполняется тождество $g(x_1, \dots, x_5, x_5)x_6 \dots x_{n+2} = 0$. С другой стороны, в силу леммы 3 в $\mathcal{M}_{n+1}$ имеем $g(x_1, \dots, x_5, x_5)x_6 \dots x_{n+2} \neq 0$. Теорема доказана.

Пусть $Z(A_n)$ и $\operatorname{Ann}(A_n)$ — соответственно лиев центр и аннулятор свободной алгебры Мальцева A_n от n свободных образующих, A — свободная алгебра Мальцева от счетного числа образующих. Определим следующие подмодули Φ-модуля алгебры A:

$$Z_n(A) = \{f(x_1, \dots, x_k) \in A;\ \text{для любых } a_i \in A_n,\ f(a_1, \dots, a_k) \in Z(A_n)\},$$
$$\operatorname{Ann}_n(A) = \{f(x_1, \dots, x_k) \in A;\ \text{для любых } a_i \in A_n,\ f(a_1, \dots, a_k) \in \operatorname{Ann}(A_n)\}.$$

Эти подмодули являются вполне характеристическими идеалами алгебры A (см. [8]).

Теорема 3. *Пусть* $\frac{1}{6} \in \Phi$. *Тогда* $Z_n(A) \neq Z_{n+1}(A)$, $\operatorname{Ann}_n(A) \neq \operatorname{Ann}_{n+1}(A)$ *для любого натурального* $n \geqslant 4$.

Доказательство. Пусть $h(y, z, t, x, x) = 2\{yz, t, x\}x + 2\{yx, z, x\}t$. По следствию 4 [7] $h(y, z, t, x, x) \in Z_4(A)$. В алгебре A выполняется тождество (см. [7])

$$2\mathcal{J}(h(y, z, t, x, x), w, v) = -g(y, z, t, wv, x, x) +$$
$$+ g(y, z, t, w, x, x)v + wg(y, z, t, v, x, x). \qquad (66)$$

Положив $w = t$, применив (3), кососимметричность функции g и сократив на 2, получим тождество

$$\mathcal{J}(h(y, z, t, x, x), t, v) = -g(ty, z, t, v, x, x). \qquad (67)$$

В алгебре A_5 по лемме 3 [9] $g(ty, z, t, v, x, x) \neq 0$. Поэтому в силу (67) $\mathcal{J}(h(y, z, t, x, x), t, v) \neq 0$, т. е. $h(y, z, t, x, x) \notin Z(A_5)$. Отсюда $h(y, z, t, x, x) \notin Z_5(A)$ и, следовательно, $Z_4(A) \neq Z_5(A)$.

По теореме 3 [7] $g(y, z, t, v, x, x) \in \operatorname{Ann}_4(A)$. С другой стороны, в силу леммы 3 $g(y, z, t, v, x, x) \notin \operatorname{Ann}_5(A)$. Поэтому $\operatorname{Ann}_4(A) \neq \operatorname{Ann}_5(A)$. Следовательно, для $n = 4$ утверждение теоремы доказано.

Пусть $n \geqslant 5$. По теореме 1 $g(x_1, \dots, x_5, x_5)x_6 \dots x_n \in Z_n(A)$, $g(x_1, \dots, x_5, x_5)x_6 \dots x_{n+1} \in \operatorname{Ann}_n(A)$. С другой стороны, в силу леммы 3 $g(x_1, \dots, x_5, x_5)x_6 \dots x_n \notin Z_{n+1}(A)$, $g(x_1, \dots, x_5, x_5)x_6 \dots x_{n+1} \notin \operatorname{Ann}_{n+1}(A)$. Поэтому $Z_n(A) \neq Z_{n+1}(A)$, $\operatorname{Ann}_n(A) \neq \operatorname{Ann}_{n+1}(A)$ для $n \geqslant 5$. Теорема доказана.

Легко видеть, что для идеалов $Z_n(A)$ и $\operatorname{Ann}_n(A)$ при $n = 1, 2$. $A = Z_1(A) = Z_2(A) \neq Z_3(A)$, $A = \operatorname{Ann}_1(A) \neq \operatorname{Ann}_2(A) = \mathcal{J}(A) \neq \operatorname{Ann}_3(A)$. Остается открытым вопрос, будут ли выполняться равенства $Z_3(A) = Z_4(A)$, $\operatorname{Ann}_3(A) = \operatorname{Ann}_4(A)$?

Автором [7] было доказано, что если $G(A)$ — T-идеал алгебры A, порожденный функцией g, то $[G(A)]^3=0$. С. В. Пчелинцев [5] доказал, что, начиная с некоторого n, $[G(A_n)]^2\neq 0$. Используя пример Ю. А. Медведева [4], мы докажем, что это неравенство выполняется, начиная с $n=10$.

Лемма 4. *В свободной специальной Φ — алгебре Мальцева A от $k\geqslant 10$ свободных образующих* $[G(A)]^2\neq 0$.

Доказательство. Рассмотрим альтернативную алгебру B_{10} из [4]. Алгебра B_{10} удовлетворяет равенствам

$$g(e,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ ee_1,\ e_2)=6^2(-2e^2e_1e_2e_3e_4e_5-e_1e^2e_2e_3e_4e_5),$$

$$g(e_7,\ e_8,\ e_9,\ e_{10},\ e,\ e_6)=6^2(e_6ee_7e_8e_9e_{10}-ee_6e_7e_8e_9e_{10}).$$

Докажем первое из них. По (60), (59) и таблице умножения алгебры B_{10} имеем

$$\begin{aligned}g(e,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ ee_1,\ e_2)&=6^2[([e,\ e_3]\cdot e_4\cdot ee_1,\ e_2,\ e_5)+([e,\ e_3]\cdot e_4\cdot e_2,\ ee_1,\ e_5)+\\&+([e,\ e_2]\cdot e_3\cdot ee_1,\ e_4,\ e_5)+([e,ee_1]\cdot e_3\cdot e_2,\ e_4,\ e_5)]=\\&=6^2[([e,\ e_3]\cdot e_4\cdot e_2,\ ee_1,\ e_5)+([e,\ ee_1]\cdot e_3\cdot e_2,\ e_4,\ e_5)]=\\&=6^2[-[e,\ e_3]\cdot e_4\cdot e_2\cdot(ee_1\cdot e_5)+[e,\ ee_1]\cdot e_3\cdot e_2\cdot e_4\cdot e_5]=\\&=6^2[e,\ ee_1]\cdot e_3\cdot e_2\cdot e_4\cdot e_5=6^2(-2e^2e_1e_2e_3e_4e_5-e_1e^2e_2e_3e_4e_5).\end{aligned}$$

Проверка второго равенства проводится аналогично. Из этих равенств и таблицы умножения получим

$$[g(e,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ ee_1,\ e_2),\ g(e_7,\ e_8,\ e_9,\ e_{10},\ e,\ e_6)]=6^4\cdot 3e^2e_1\ldots e_{10}e\neq 0. \quad (68)$$

Поскольку слова из B_{10}, в которые входят либо два раза буква e_i, либо четыре раза буква e, равны нулю, то

$$\begin{aligned}\gamma=[g(e,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ ee_1+e_2,\ ee_1+e_2),\ g(e_7,\ e_8,\ e_9,\ e_{10},\ e+e_6,\ e+e_6)]=\\=4[g(e,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ ee_1,\ e_2),\ g(e_7,\ e_8,\ e_9,\ e_{10},\ e,\ e_6)].\end{aligned}$$

Отсюда и из (68) $\gamma=2\cdot 6^5e^2e_1\ldots e_{10}e\neq 0$.

Пусть теперь W — подалгебра алгебры $B_{10}^{(-)}$, порожденная десятью элементами e, ee_1+e_2, e_3, e_4, e_5, $e+e_6$, e_7, e_8, e_9, e_{10}. Последнее неравенство показывает, что $[G(W),\ G(W)]\neq 0$. Отсюда вытекает утверждение леммы. Лемма доказана.

В дальнейшем будет показано, что в алгебре A_n $(n<10)$ выполняется равенство $[G(A_n)]^2=0$.

Лемма 5. *В любой алгебре Мальцева* $A\left(\frac{1}{6}\in\Phi\right)$ *выполняется равенство* $[G(A)]^2A=0$.

Доказательство. Из (13), линеаризованного по t тождества (3), тождеств (40), (3) и (30) следует

$$\begin{aligned}g(a,\ b,\ c,\ azv,\ x,\ x)t&=g(a,\ b,\ c,\ v,\ x,\ x)zat=-g(z,\ b,\ c,\ v,\ x,\ x)a^2t-\\-g(a,\ b,\ c,\ vz,\ x,\ x)at&-g(z,\ b,\ c,\ va,\ x,\ x)at=-g(a,\ b,\ c,\ vz,\ x,\ x)at-\\-g(z,\ b,\ c,\ va,\ x,\ x)at&=g(a,\ ba,\ c,\ vz,\ x,\ x)t-g(z,\ b,\ c,\ va,\ x,\ x)at=\\&=-g(z,\ b,\ c,\ va,\ x,\ x)at. \quad (69)\end{aligned}$$

Положим $g(z,\ b,\ c,\ va,\ x,\ x)=g_1$. В силу (15) $g_1at-g_1ta-g_1(at)=0$. С другой стороны, из линеаризованного по v тождества (22) получим $g_1at+g_1ta=0$. Из двух последних тождеств $2g_1at=g_1(at)$. Отсюда и из (69) следует $g(a,b,c,azv,x,x)t=-\frac{1}{2}g(z,b,c,va,x,x)(at)$. В разд. 1 настоящей статьи было доказано, что функция $g(yz,\ b,\ c,\ v,\ x,\ x)(aw)$ кососимметрична относительно a, b, c, y, z, v, w. Поэтому правая часть последнего тождества равна нулю. Следовательно,

$$g(a,\ b,\ c,\ azv,\ x,\ x)t=0. \quad (70)$$

В силу (3) и (30) $g(a, b, c, yza, x, x)t = -g(a, b, c, yz, x, x)at = g(a, ba, c, yz, x, x)t = 0$. Отсюда, из (4) и (70) следует, что функция $g(a, b, c, yzv, x, x)t$ кососимметрична относительно a, b, c, y, z, v, t. Отсюда, в частности, вытекает тождество

$$g(a, b, c, yz^2, x, x)t = 0. \tag{71}$$

Заметим, что в свободной алгебре Мальцева A от $n \geqslant 6$ свободных образующих функция $g(a, b, c, yz^2, x, x)$ является ненулевой функцией, принадлежащей по тождеству (71) аннулятору $\mathrm{Ann}\,A$ алгебры A. Действительно, пусть B_{10} — альтернативная алгебра из [4], U — подалгебра алгебры $B_{10}^{(-)}$, порожденная шестью элементами $e_4, e_5, e_7, e_8, e_9 + ee_{10}, e^2e_1e_2e_3 + e_6$. В алгебре U выполняется равенство $g(e_4, e_5, e_7, [[e_8, e_9 + ee_{10}], e_9 + ee_{10}], e^2e_1e_2e_3 + e_6, e^2e_1e_2e_3 + e_6) = -2 \cdot 6^3e^2e_1\ldots e_{10}e \neq 0$, которое и показывает, что $g(a, b, c, yz^2, x, x) \neq 0$.

Вернемся к доказательству леммы. В силу (71), (7) и кососимметричности функции g

$$g(a, b, c, vwyz, x, x)t = -g(a, b, c, y(vw)z, x, x)t =$$
$$= -(vw)\frac{\partial}{\partial z}g(a, b, c, yz^2, x, x)t + g(a, b, c, yz(vw), x, x)t = 0.$$

Отсюда и из (7) вытекает включение $g(A, A, A, A^n, A, A) \subseteq \mathrm{Ann}\,A$ для любого $n \geqslant 4$. В частности,

$$g(A, A, A, G(A), A, A) \subseteq \mathrm{Ann}\,A. \tag{72}$$

По тождеству (16), идеал $G(A)$ совпадает с Ф-подмодулем Ф-модуля A, порожденным функцией g. Поэтому для доказательства леммы достаточно доказать тождество $g(x_1, \ldots, x_5, x_5)g(y_1, \ldots, y_5, y_5)t = 0$. Положим $g(y_1, \ldots, y_5, y_5) = g_1$. В силу линеаризованного по t тождества (3) и (72)

$$g(x_1, \ldots, x_5, x_5)g(y_1, \ldots, y_5, y_5)t = -g(x_1, x_2, x_3, g_1, x_5, x_5)x_4t +$$
$$+ g(g_1x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_5)t + g(x_4x_1, x_2, x_3, g_1, x_5, x_5)t = 0.$$

Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть A — свободная Ф-алгебра Мальцева $\left(\frac{1}{6} \in \Phi\right)$ от n свободных образующих. Если $n < 5$, то $G(A) = 0$. Если $n \geqslant 5$, то $G(A) \neq 0$ и имеем два случая:*

1) $[G(A)]^2 = 0$ *для* $n < 10$;
2) $0 \neq [G(A)]^2 \subseteq \mathrm{Ann}\,A$ *для* $n \geqslant 10$.

Доказательство. Если $n < 5$, то по теореме 3 [7] $G(A) = 0$. Для $n \geqslant 5$ по лемме 3 $G(A) \neq 0$ (см. также лемму 1 [7]). Пусть $n < 10$. Поскольку $G(A) \subseteq A^6$, то в силу теоремы 1 $g(x_1, \ldots, x_5, x_5) \cdot G(A) \subseteq g(x_1, \ldots, x_5, x_5) \cdot A^6 = 0$ для любых $x_1, \ldots, x_5 \in A$. Так как ввиду (16) $G(A)$ совпадает с Ф-подмодулем Ф-модуля алгебры A, порожденным g, то из последнего равенства следует равенство $[G(A)]^2 = 0$. Если же $n \geqslant 10$, то по леммам 4 и 5 $0 \neq [G(A)]^2 \subseteq \mathrm{Ann}\,A$. Теорема доказана.

Теорема 5. *Если кольцо Ф имеет характеристику $p > n$ или $p = 0$, то в любой разрешимой индекса k Ф-алгебре Мальцева A, удовлетворяющей n-му условию Энгеля, выполняется равенство $[A^N]^2A = 0$ для некоторого натурального $N = N(k, n)$.*

Доказательство теоремы следует из предложения 3 [8] и леммы 5. Ранее автором [8, теорема 5] при этих же предположениях было доказано, что $[A^N]^3 = 0$ для некоторого N.

В связи с теоремой 5 мы докажем следующее

Предложение. *Существует разрешимая индекса 3 алгебра Мальцева, удовлетворяющая 5-му условию Энгеля, любая степень которой имеет ненулевое умножение.*

Доказательство. Пусть B_n $(n = 4n' + 2)$ — альтернативная алгебра из [4]. В алгебре B_n выполняется тождество $x^3 = 0$. Доказательство этого тождества аналогично доказательству ее правой альтернативности в [4]. Отсюда $[\dots[y,\underbrace{x],\dots,x}_{5}] = \sum_{i=0}^{5}(-1)^i\binom{5}{i}x^i y x^{5-i} = 0$. Следовательно, алгебра $C_n = B_n^{(-)}$ удовлетворяет 5-му условию Энгеля. Кроме того, в силу (59) алгебра C_n разрешима индекса 3. Из равенства (65) и таблицы умножения алгебры B_n следует равенство $\left[\left[\dots[e^2, e_1], \dots, e_{\frac{n}{2}-1}\right], \left[\dots[[e, e_n], e_{n-1}], \dots, e_{\frac{n}{2}}\right]\right] = 3^{n'}\left[e^2 e_1 \dots e_{\frac{n}{2}-1}, \left[\dots[[e, e_n], e_{n-1}], \dots, e_{\frac{n}{2}}\right]\right] = 3^{n'+1}\left[e^2 e_1 \dots e_{\frac{n}{2}-1}, \left[\dots [e e_n e_{n-1}, e_{n-2}], \dots, e_{\frac{n}{2}}\right]\right] = 3^{2n'+1} \left[e^2 e_1 \dots e_{\frac{n}{2}-1}, e e_n \dots e_{\frac{n}{2}}\right] = 2\cdot 3^{\frac{n}{2}} e^2 e_1 \dots e_n e \neq 0$. Следовательно, $[C_n^k]^2 \neq 0$, где $k = \frac{n}{2} + 1$. Рассмотрим прямую сумму $C = \sum_n C_n$, где n пробегает все натуральные числа вида $4n' + 2$. Алгебра C так же, как и алгебры C_n, является разрешимой индекса 3 алгеброй Мальцева, удовлетворяющей 5-му условию Энгеля. Из последнего неравенства следует, что для любого натурального m имеем $[C^m]^2 \neq 0$. Предложение доказано.

3. МНОГООБРАЗИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫМИ АЛЬТЕРНАТИВНЫМИ АЛГЕБРАМИ

В дальнейшем, если не оговорено противное, через A будем обозначать произвольную альтернативную Ф-алгебру.

В алгебре A выполняется [9, тождество (43)]

$$g(y, z, t, v^2, x, x) = g(y, z, t, v, x, x) \circ v,$$

где $x \circ y = xy + yx$ — йорданово умножение. Линеаризуем последнее тождество по x и сократим на 2:

$$g(y, z, t, v^2, u, x) = g(y, z, t, v, u, x) \circ v. \tag{73}$$

Отсюда линеаризацией по v получим

$$g(y, z, t, v \circ w, u, x) = g(y, z, t, v, u, x) \circ w + g(y, z, t, w, u, x) \circ v. \tag{74}$$

Положив в последнем тождестве $w = t$ в силу кососимметричности функции g получим

$$g(y, z, t, v \circ t, u, x) = g(y, z, t, v, u, x) \circ t.$$

Из линеаризованного по x тождества (3) следует

$$g(y, z, t, [v, t], u, x) = -[g(y, z, t, v, u, x), t].$$

Сложив два последних тождества и сократив на 2, получим

$$g(y, z, t, vt, u, x) = tg(y, z, t, v, u, x). \tag{75}$$

Положим $g(y, z, t, v, u, x) = g_1$, $g(y, z, t, w, u, x) = g_2$. В алгебре A выполняется

$$[[v, w], w] = v \circ w^2 - 2wvw. \tag{76}$$

Из линеаризованного тождества (76) следует

$$t \circ w \circ v + [[t, v], w] + [t, [v, w]] = 2tvw + 2wvt.$$

Отсюда

$$g_2 \circ w \circ v + [[g_2, v], w] + [g_2, [v, w]] = 2g_2 vw + 2wvg_2. \tag{77}$$

В силу (76), (74), (73), линеаризованного по x тождества (12), (76) и (77)

$2g(y, z, t, wvw, u, x) = g(y, z, t, v \circ w^2, u, x) - g(y, z, t, [[v, w], w], u, x) =$
$= g(y, z, t, v, u, x) \circ w^2 + g(y, z, t, w^2, u, x) \circ v - g(y, z, t, [[v, w], w], u, x) =$

$$= g_1 \circ w^2 + g_2 \circ w \circ v - g(y, z, t, [[v, w], w], u, x) = g_1 \circ w^2 + g_2 \circ w \circ v -$$
$$-[[g_1, w], w] + [[g_2, v], w] + [g_2, [v, w]] = 2wg_1w + g_2 \circ w \circ v +$$
$$+ [[g_2, v], w] + [g_2, [v, w]] = 2wg_1w + 2g_2vw + 2wvg_2.$$

Следовательно, в алгебре A выполняется

$$g(y, z, t, wvw, u, x) = wg(y, z, t, v, u, x)w +$$
$$+ g(y, z, t, w, u, x)vw + wvg(y, z, t, w, u, x). \qquad (78)$$

Пусть R_x и L_x — операторы правого и левого умножений на элемент $x \in A$. Алгеброй умножений алгебры A называется подалгебра $T(A)$ алгебры эндоморфизмов Ф-модуля A, порожденная тождественным эндоморфизмом и всеми операторами R_x и L_x.

Теорема 6. *В свободной альтернативной Ф-алгебре* $A_4\left(\frac{1}{6} \in \Phi\right)$ *с четырьмя свободными образующими выполняется тождество*

$$g(y, z, t, v, x, u) = 0. \qquad (79)$$

Доказательство. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — образующие алгебры A_4. Зафиксируем произвольные элементы $x, u \in A_4$. Для произвольных элементов $y, z, t, v \in A$ через $f(y, z, t, v)$ обозначим идеал алгебры A_4, порожденный элементом $g(y, z, t, v, x, u)$. Тогда в силу кососимметричности функции g относительно y, z, t, v отображение f удовлетворяет условиям а) и б) предложения 1 [2, с. 307], а по тождествам (78) и (75) — условиям д) и е). Условия в) и г) проверяются тривиально. Следовательно, отображение f удовлетворяет условиям предложения 1 [2, с. 307]. Поэтому для любых $y, z, t, v \in A_4$ выполняется включение $f(y, z, t, v) \subseteq \subseteq \sum_i f\left(a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}, v_i\right)$, где $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$ — различные образующие алгебры A_4, а v_i — слова не содержащие образующих $a_{i_1}, a_{i_2}, a_{i_3}$. Последнее означает, что $d(v_i) = 1$, $v_i = \alpha_i a_{i_4}$. Поэтому в силу условий а) и г) $f(y, z, t, v) \subseteq \subseteq f(a_1, a_2, a_3, a_4)$. Следовательно, для любых $y, z, t, v, x, u \in A_4$ выполняется равенство

$$g(y, z, t, v, x, u) = \sum_i g(a_1, a_2, a_3, a_4, x, u) X_i, \qquad (80)$$

где $X_i \in T(A)$. Положив в (80) $x = u = a_4$ и применив к правой части тождество (1), получим равенство $g(y, z, t, v, a_4, a_4) = \sum_i g(a_1, a_2, a_3, a_4, a_4, a_4) X_i = 0$. Отсюда в силу линеаризованного по x тождества (1) $g(y, z, t, a_4, v, a_4) = -\frac{1}{2} g(y, z, t, v, a_4, a_4) = 0$. Положив в (80) $u = a_4$ и применив последнее равенство, получим соотношение $g(y, z, t, v, x, a_4) = = \sum_i g(a_1, a_2, a_3, a_4, x, a_4) X_i = 0$. Из линеаризованного по x тождества (1) и последнего равенства следует соотношение $g(y, z, t, a_4, x, u) = = -g(y, z, t, u, x, a_4) - g(y, z, t, x, u, a_4) = 0$. Отсюда и из (80) получим тождество (79). Теорема доказана.

Пусть $N(A)$ — ассоциативный центр алгебры A: $N(A) = \{n \in A;$ $(n, A, A) = 0\}$. Хорошо известно, что $N(A)$ — подалгебра алгебры A.

Зафиксируем множество образующих алгебры A.

Лемма 6. *Для любых $a, b, x \in A$ ассоциатор (a, b, x) можно представить в виде*

$$(a, b, x) = \sum_i (a, b, x_i) X_i, \qquad (81)$$

где $X_i \in T(A)$, x_i — коммутаторы от образующих алгебры A длины $\leqslant 3$.

Доказательство. Утверждение леммы достаточно доказать для слова $x \in A$. В любой альтернативной алгебре A выполняется тождество

$$(y, z, x^2) = (y, z, x) \circ x. \qquad (82)$$

Пусть $I_2(A)$ — подмодуль Φ-модуля алгебры A, порожденный элементами вида x^2, $x\in A$. Известно [2, с. 160], что $I_2(A)$ является идеалом алгебры A и $A^4\subseteq I_2(A)$. Пусть x и y — произвольные элементы из A одного и того же состава. Будем писать $x\equiv y$, если $x-y\in I_2(A)$. Поскольку $I_2(A)\lhd A$, то $2xy=[x,\ y]+x\circ y\equiv[x,\ y]$, $4xyz=2[x,\ y]z+2(x\circ y)z\equiv2[x,\ y]z\equiv\equiv[[x,\ y],z]+[x,\ y]\circ z\equiv[[x,\ y],z]$, $4z(xy)=-4xyz+4xy\circ z\equiv-4xyz\equiv\equiv-[[x,\ y],z]$. Из последних сравнений и тождества (82) следует, что для любого слова $x\in A$ длины $\leqslant3$ представление (81) справедливо. Теперь доказательство (81) для любого слова y можно провести индукцией по его длине, применив включение $A^4\subseteq I_2(A)$ и тождество (82). Лемма доказана.

Теорема 7. *В свободной альтернативной Φ-алгебре $A_n\left(\frac{1}{6}\in\Phi\right)$ от $n\geqslant5$ свободных образующих*

$$[\ldots[g(x_1,\ \ldots,\ x_5,\ x_5),\ x_6],\ \ldots,\ x_n]\in N(A_n) \tag{83}$$

для любых $x_1,\ \ldots,\ x_n\in A_n$.

Доказательство. Пусть $a_1,\ \ldots,\ a_n$ — свободные образующие алгебры A_n. В силу теоремы 4 [10] ассоциативный центр $N(A_n)$ является вполне характеристической подалгеброй. Поэтому для доказательства (83) достаточно получить, что $[\ldots[g(a_1,\ \ldots,\ a_5,\ a_5),a_6],\ \ldots,\ a_n]\in N(A_n)$, т. е.

$$([\ldots[g(a_1,\ \ldots,\ a_5,\ a_5),\ a_6],\ \ldots,\ a_n],\ x,\ y)=0 \tag{84}$$

для любых $x,\ y\in A_n$. По лемме 6 (84) достаточно доказать в предположении, что $x,\ y$ — коммутаторы от образующих алгебры A_n длины $\leqslant3$. Пусть C — подалгебра алгебры $A^{(-)}$, порожденная n образующими $a_1,\ \ldots$ $\ldots,\ a_n$. По теореме 1 в алгебре C выполняется равенство

$$\mathcal{J}([\ldots[g(a_1,\ \ldots,\ a_5,\ a_5),\ a_6],\ \ldots,\ a_n],\ x,\ y)=0$$

для любых $x,\ y\in C$. Отсюда и из (56), в частности, следует (84). Теорема доказана.

Теорема 8. *Пусть* $\frac{1}{6}\in\Phi$. *Тогда* $\mathrm{Alt}_n\neq\mathrm{Alt}_{n+1}$ *для любого натурального n. В частности, базисный ранг $r_b(\mathrm{Alt})$ многообразия альтернативных Φ-алгебр равен ω_0.*

Доказательство. Для $n\leqslant3$ справедливость этого утверждения следует из теоремы Артина и результатов работ [1, 12], для $n=4$ — из теоремы 6 и леммы 3, а для $n>4$ — из теоремы 7 и леммы 3. Теорема доказана.

Пусть A — свободная альтернативная алгебра от счетного числа образующих. Следуя [10], положим

$$N_n(A)=\{f(x_1,\ \ldots,\ x_k)\in A;\ \text{для любых } a_i\in A_n,\ f(a_1,\ \ldots,\ a_k)\in N(A_n)\}.$$

Поскольку по следствию 4 [10] $N(A_n)$ — вполне характеристическая подалгебра алгебры A_n, то $N_n(A)$ — вполне характеристические подалгебры алгебры A. При этом $A=N_1(A)=N_2(A)\geqslant N_3(A)\geqslant\ldots$ $\ldots\geqslant N_n(A)\geqslant\ldots$ и $N(A)=\bigcap\limits_n N_n(A)$.

И. П. Шестаковым [10] сформулирован вопрос: будет ли включение $N_4(A)\geqslant N(A)$ строгим? Из следующей теоремы, в частности, следует положительный ответ на этот вопрос.

Теорема 9. *Если* $\frac{1}{6}\in\Phi$, *то для любого натурального $n\geqslant2$ выполняется неравенство $N_n(A)\neq N_{n+1}(A)$. В частности, $N_n(A)\neq N(A)$ ни для какого n.*

Доказательство. Для $n\leqslant3$ это утверждение выполняется в силу теоремы Артина и результатов [1, 12]. Пусть $n=4$. По теореме 6, тождествам (66) и (56) в алгебре A_4 имеем тождество $(h(y,\ z,\ t,\ x,\ x),$ $w,\ v)=0$, где $h(y,\ z,\ t,\ x,\ x)=2[\{[y,\ z],\ t,\ x\},\ x]+2[\{[y,\ x],\ z,\ x\},\ t]$. С другой стороны, в силу (67) и леммы 3 [9] $6(h(y,\ z,\ t,\ x,x),t,v)=$ $=-g([t,\ y],\ z,\ t,\ v,\ x,\ x)\neq0$ в A_5. Следовательно, $N_4(A)\neq N_5(A)$. Для $n>4$ утверждение теоремы следует из теоремы 7, леммы 3 и тождества (56). Теорема доказана.

Докажем, что в алгебре A_n $(n \geqslant 5)$ выполняется

$$v = ((\ldots(g(x_1, \ldots, x_5, x_6), x_7, x_8), \ldots), x_{2n-3}, x_{2n-2}) = 0. \tag{85}$$

По теореме 7 в алгебре A_n выполняется тождество $([\ldots[g(x_1, \ldots, x_5, x_5), y_1], \ldots, y_{n-5}], z, t) = 0$, линеаризация которого по x_5 дает тождество $([\ldots[g(x_1, \ldots, x_5, x_6), y_1], \ldots, y_{n-5}], z, t) = 0$. По следствию 1 [2, с. 168] для любых $m \in N(A_n)$, $x \in A_n$ имеем $[m, x] \in N(A_n)$. Отсюда и из последнего тождества следует

$$([\ldots[g(x_1, \ldots, x_5, x_6), y_1], \ldots, y_k], z, t) = 0 \tag{86}$$

для любого $k \geqslant n-5$. Используя тождество (56) и развернув якобианы, мы можем представить $6^{n-5}v$ в виде

$$6^{n-5}v = (\mathcal{J}(\ldots\mathcal{J}(g(x_1, \ldots, x_5, x_6), x_7, x_8), \ldots, x_{2n-5}, x_{2n-4}), x_{2n-3}, x_{2n-2}) =$$
$$= \sum_i \left(\left[\cdots\left[g(x_1, \ldots, x_5, x_6), y_{i_1}\right], \ldots, y_{i_{k(i)}}\right], x_{2n-3}, x_{2n-2}\right),$$

где $k(i) \geqslant n-5$. В силу (86) правая часть последнего тождества равна нулю. Следовательно, $v = 0$. Тождество (85) доказано.

Теорема 10. *Пусть* $\frac{1}{6} \in \Phi$. *Тогда всякая разрешимая алгебра из многообразия* Alt_n *нильпотентна.*

Доказательство. Предварительно докажем, что любая разрешимая индекса 2 алгебра A из многообразия Alt_n нильпотентна. В дальнейшем можно считать, что $n \geqslant 5$. По определению в A выполняется

$$xy(zt) = 0. \tag{87}$$

В силу (85) в алгебре A выполняется

$$g(x_1, \ldots, x_5, x_6)x_7 \ldots x_{2n-2} = 0. \tag{88}$$

По тождествам (60) и (87)

$$g(x_2, x_3, x_5, x_6, [u, x_1], x_4) = 6^2[([x_2, x_3]x_5[u, x_1], x_4, x_6) +$$
$$+ ([x_2, x_3]x_5x_4, [u, x_1], x_6) + ([x_2, x_4]x_3[u, x_1], x_5, x_6) +$$
$$+ ([x_2, [u, x_1]]x_3x_4, x_5, x_6)] = -6^2([[u, x_1], x_2]x_3x_4, x_5, x_6) =$$
$$= -6^2[[u, x_1], x_2]x_3x_4x_5x_6.$$

Отсюда и из (56) следует

$$g(x_2, x_3, x_5, x_6, [u, x_1], x_4) + g(x_1, x_3, x_5, x_6, [x_2, u], x_4) +$$
$$+ g(u, x_3, x_5, x_6, [x_1, x_2], x_4) = -6^2\{[[u, x_1], x_2] +$$
$$+ [[x_2, u], x_1] + [[x_1, x_2], u]\}x_3x_4x_5x_6 = -6^2\mathcal{J}(u, x_1, x_2)x_3x_4x_5x_6 =$$
$$= -6^3(u, x_1, x_2)x_3x_4x_5x_6.$$

Из (88) и последнего тождества получим $(u, x_1, x_2)x_3 \ldots x_{2n-2} = 0$. Положив $u = ab$ в последнем тождестве и применив (87), имеем $abx_1 \ldots \ldots x_{2n-2} = 0$. Следовательно, алгебра A правонильпотентна индекса $2n$. Дальше доказательство теоремы проводится дословным повторением рассуждений из доказательства теоремы 3 [11]. Теорема доказана.

Следствие. *Всякая разрешимая подалгебра конечно порожденной альтернативной* Φ*-алгебры* $\left(\frac{1}{6} \in \Phi\right)$ *нильпотентна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дорофеев Г. В.** Альтернативные кольца с тремя образующими.— Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 5, с. 1029—1048.
2. **Кольца,** близкие к ассоциативным/Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. М.: Наука, 1978. 431 с.
3. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы М.: Наука, 1970. 392 с.

4. **Медведев Ю. А.** Пример многообразия разрешимых альтернативных алгебр над полем характеристики два, не имеющего конечного базиса тождеств.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 3, с. 300—313.
5. **Пчелинцев С. В.** Разрешимость и нильпотентность альтернативных алгебр и алгебр типа (—1, 1) (см.: настоящий сборник).
6. **Филиппов В. Т.** Об энгелевых алгебрах Мальцева.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 4, с. 89—109.
7. **Филиппов В. Т.** О нильпотентных идеалах в алгебрах Мальцева.— Алгебра и логика, 1979, т. 18, № 5, с. 599—613.
8. **Филиппов В. Т.** К теории конечно порожденных алгебр Мальцева.— Алгебра и логика, 1980, т. 19, № 4, с. 480—499.
9. **Филиппов В. Т.** О свободных алгебрах Мальцева и альтернативных алгебрах.— Алгебра и логика, 1982, т. 21, № 1, с. 84—107.
10. **Шестаков И. П.** Центры альтернативных алгебр.— Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 3, с. 343—362.
11. **Шестаков И. П.** Об одной проблеме Ширшова.— Алгебра и логика, 1977, т. 16, № 2, с. 227—246.
12. **Humm M. H., Kleinfeld E.** On free alternative rings.— J. Comb. Theory, 1967, v. 2, p. 140—144.
13. **Sagle A. A.** Malcev algebras.— Trans. Amer. Math. Soc., 1961, v. 101, N 3, p. 426—458.

Поступила в редколлегию 18 февраля 1981 г.