

1. Введение

Пусть $\xi^{(n)}(k)$, $k = 0, 1, \dots$, — последовательность однородных марковских цепей, зависящих от параметра n , с общим фазовым пространством X . Пусть задано параметрическое семейство G_t измеримых множеств из X , $0 \leq t \leq 1$. Тогда задача изучения асимптотического поведения вероятности $P_x(\xi^{(n)}(k) \in G_{k/n}, 0 \leq k \leq n)$ того, что цепь $\xi^{(n)}$ за n шагов не покинет «криволинейную полосу» G_t , естественно формулируется как задача изучения поведения суперпозиции операторов

$$(R^{(n)}1)(x) \equiv (T^{(1/n)}T^{(2/n)} \dots T^{(n/n)}1)(x), \quad (1.1)$$

которые очевидным образом строятся для любых k и n по множеству $G_{k/n}$. Значительная часть граничных задач для случайных процессов (т. е. задач, связанных с выходом траектории процесса на границу множества) формулируется в терминах суперпозиции специально подобранных серий операторов. Примером такого сорта задач может служить вторая граничная задача для случайных блужданий, порожденных суммами независимых случайных величин [1].

Будем изучать малые отклонения цепи $\xi^{(n)}(k)$; это соответствует тому, что каждый из операторов $T^{(k/n)}$ сходится к тождественному оператору, в то время как оператор $R^{(n)}$ стремится к нулевому. Следующие нестрогие рассуждения наметят контуры доказательства.

Пусть для любого k все операторы в (1.1) совпадают и равны $T^{(1/n)}$, так что $R^{(n)} = (T^{(1/n)})^n$; пусть, кроме того, оператор $T^{(1/n)}$ является самосопряженным и вполне непрерывным; тогда по теореме Гильберта — Шмидта собственные функции $\varphi_k^{(1/n)}$ оператора $T^{(1/n)}$ образуют ортобазис и

$$(R^{(n)}1)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k^{(1/n)} \cdot n} \varphi_k^{(1/n)}(x) \varphi_k^{(1/n)}(1), \quad (1.2)$$

где $e^{\lambda_1} > e^{\lambda_2} > \dots$ — собственные числа оператора $T^{(1/n)}$. Стремление оператора $R^{(n)}$ к нулевому соответствует сходимости к нулю его максимального собственного числа $e^{\lambda_1 \cdot n}$; в этом случае естественно ожидать, что главную роль в поведении суммы (1.2) будет играть первое слагаемое, что и приводит нас к ответу

$$(R^{(n)}1)(x) \sim \varphi_1^{(1/n)}(x) \varphi_1^{(1/n)}(1) e^{\lambda_1^{(1/n)} \cdot n}. \quad (1.3)$$

В том случае, когда оператор $T^{(1/n)}$ не является самосопряженным и в силу этого отсутствует представление (1.2), соотношение (1.3), как правило, продолжает выполняться. Более того, в некоторых случаях (см. [2, 3]), когда операторы в (1.1) не являются одинаковыми, вместо (1.3) выполняется соотношение

$$(R^{(n)}1)(x) \sim \varphi_1^{(1/n)}(x) \varphi_1^{(n/n)}(1) e^{\sum_{i=1}^n \lambda_1^{(i/n)}}. \quad (1.4)$$

Понятно, что (1.3) есть частный случай формулы (1.4). Поскольку доказательство соотношения (1.4) требует значительных усилий и возможно при довольно жестких ограничениях, интерес представляет следующий «грубый» вариант (1.4):

$$\ln(R^n 1)(x) \sim \sum_{i=1}^n \lambda_1^{(i/n)}. \quad (1.5)$$

Как правило, «грубые» теоремы справедливы в очень широких предположениях и являются весьма универсальными (см., например, [1, 4]).

В настоящей работе рассматриваются случайные блуждания, порожденные суммами независимых случайных векторов, сходящиеся к симметричному строго устойчивому процессу. В п. 2 доказана теорема о точной асимптотике (1.3) для однородного случая, которая обобщает результат автора [5, 6] для одномерного случая при конечной дисперсии. В п. 3 получена «грубая» асимптотика вида (1.5) для вероятности пребывания в криволинейной полосе. Тут в основном обобщаются результаты автора [7]; уместно упомянуть при этом близкие результаты А. А. Новикова [8]. В п. 4 из «грубой» теоремы о малых отклонениях выводятся варианты законов повторного логарифма в форме Чжуна для многомерных блужданий. По-видимому, законы повторного логарифма в форме Чжуна в многомерном случае получены впервые; в одномерном случае окончательные формулировки принадлежат Н. Джейну и Н. Прунтту [9, 10].

2. Точная асимптотика малых отклонений

Рассмотрим последовательность $(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных в s -мерном пространстве Евклида R^s случайных векторов. Пусть далее случайный вектор η имеет симметричное невырожденное в R^s строго устойчивое распределение $F_{\alpha}(A)$, $0 < \alpha \leq 2$. Это значит, что для любого измеримого множества $A \subset R^s$ и любого целого k

$$P((\eta_1 + \dots + \eta_k)/k^{1/\alpha} \in A) = P(\eta \in A) = P(-\eta \in A),$$

где η_i — независимые копии η . Пусть для некоторой последовательности $B(n) \rightarrow \infty$ имеет место слабая сходимость

$$P((\xi_1 + \dots + \xi_n)/B(n) \in A) \Rightarrow F_{\alpha}(A) \quad (2.1)$$

при $n \rightarrow \infty$. Очевидно, что (2.1) эквивалентно тому, что для любого вектора $\lambda \in R^s$ имеет место слабая сходимость функций распределения

$$P(\langle \lambda, \xi_1 + \dots + \xi_n \rangle < xB(n)) \Rightarrow P(\langle \lambda, \eta \rangle < x).$$

Последнее же эквивалентно тому, что для любого $\lambda \in R^s$ функция распределения $F^{\lambda}(x) \equiv P(\langle \lambda, \xi \rangle < x)$ принадлежит области притяжения строго устойчивого распределения $F_{\alpha}^{\lambda}(x) \equiv P(\langle \lambda, \eta \rangle < x)$, нормирующая последовательность $B(n)$ не зависит от λ и, кроме того, для $\alpha = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tB^{-1}(n)) F^{\lambda}(dt) = o(1/n)$$

при $n \rightarrow \infty$ (см. теорему 2, § 5 гл. XVII в [11]). При этом функция

$$L_{\lambda}^*(u) \equiv u^{\alpha-2} \int_{-u}^u t^2 F^{\lambda}(dt)$$

медленно меняется и последовательность $B(n)$ отличается от $n^{1/\alpha}$ медленно меняющимся множителем; для любого $\lambda \in R^s$ определено число $0 < d_{\lambda} < \infty$ такое, что при $n \rightarrow \infty$

$$B_{\lambda}^*(B(n)) \sim d_{\lambda} n,$$

где $B_{\lambda}^*(u) = u^{\alpha}/L_{\lambda}^*(u)$. Положим для определенности $\lambda_0 = (1, 0, \dots, 0)$,

$$L^*(u) = d_{\lambda_0} L_{\lambda_0}^*(u). \quad (2.2)$$

Пусть $G \subset R^s$ — произвольное ограниченное открытое выпуклое множество; через L_2 обозначим гильбертово пространство интегрируемых с квадратом вещественных функций $\varphi(x)$, $x \in G$. Норму и скалярное произведение в L_2 обозначим, как обычно, $\|\varphi\|$ и (φ, ψ) . Для числа $a > 0$ определим оператор

$$T_a \varphi(x) = M(\varphi(\xi_1/a + x), \quad \xi_1/a + x \in G)$$

и сопряженный оператор

$$T_a^* \varphi(x) = M(\varphi(-\xi_1/a + x); -\xi_1/a + x \in G).$$

В силу известных теорем (см., например, [12], с. 81) максимальное по модулю собственное число $\lambda(a)$ операторов T_a и T_a^* (оно общее для них) положительно; нормированные собственные функции $\psi_a(x)$ и $\psi_a^*(x)$, отвечающие этому числу

$$T_a \psi_a(x) = \lambda(a) \psi_a(x), \quad T_a^* \psi_a^*(x) = \lambda(a) \psi_a^*(x), \quad (2.3)$$

можно выбрать неотрицательными.

Пусть далее $\xi(t)$ — однородный процесс с независимыми приращениями такой, что распределение вектора $\xi(t+1) - \xi(t)$ совпадает с распределением $F_a(A)$ вектора η . Введем полугруппу самосопряженных операторов

$$T_t \varphi(x) = M(\varphi(\xi(t) + x), \quad \xi(u) + x \in G, \quad 0 \leq u \leq t),$$

и обозначим λ и $\varphi(x)$ максимальное собственное число и соответствующую нормированную функцию оператора T_1 . Чтобы подчеркнуть зависимость от области G , обозначим

$$\lambda = \lambda_G, \quad \varphi(x) = \varphi_G(x). \quad (2.4)$$

Хорошо известно, что λ имеет кратность 1, функция $\varphi(x)$ непрерывна и положительна во всех точках открытого множества G .

Пусть распределение вектора ξ_1 либо абсолютно непрерывно, и тогда плотность суммы $(\xi_1 + \dots + \xi_n)/B(n)$ обозначим $p^{(n)}(x)$, либо сосредоточено в множестве Z^s векторов с целочисленными координатами, и тогда

$$\bar{p}^{(n)}(x) = P((\xi_1 + \dots + \xi_n)/B(n) = x)B(n)$$

для $x \in B^{-1}(n)Z^s$.

Пусть $f(x)$ — плотность случайного вектора η . В настоящем пункте будем считать выполненной локальную предельную теорему в следующей форме:

$$A_1: \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in R^s} |p^{(n)}(x) - f(x)| = 0;$$

$$A_2: \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in Z^s} |\bar{p}^{(n)}(x) - f(x)| = 0.$$

Теорема 1. Пусть для последовательности (ξ_n) выполнено условие (2.1) и либо A_1 , либо A_2 ; последовательность $a(n) \rightarrow \infty$, $a(n)/B(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; граница ∂H измеримого множества $H \subseteq G$ имеет нулевую меру Лебега. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in G} \left| \lambda^{-n}(a(n)) P(S_k/a(n) + x \in G; k=1, 2, \dots, n, S_n/a(n) + x \in H) - \right. \\ \left. - \varphi(x) \int_H \varphi(y) dy \right| = 0,$$

где функции $\lambda(a) > 0$ и $\varphi(x) \in L_2$ определены (2.3) и (2.4); при этом для $a \rightarrow \infty$

$$\ln \lambda(a) \sim a^{-\alpha} L^*(a) \ln \lambda,$$

где число $\lambda > 0$ определено (2.4), функция $L^*(u)$ определена (2.2).

Доказательство теоремы 1 проведем для случая A_1 и в предположении, что $M|\xi_1|^2 < \infty$. Доказательство в остальных случаях совершенно идентично приведенному. Обозначим $P_{k,a}(x, y)$, $P_t(x, y)$; $(x, y) \in G \times G$ ядра операторов T_a^k и T_t соответственно. Очевидно, что при $t > 0$ функция $P_t(x, y)$ непрерывна и ограничена для $(x, y) \in G \times G$; в силу A_1 функция $P_{k,a}(x, y)$ ограничена в $G \times G$ для всех достаточно больших k . Для экономии места m -кратный интеграл от функции $H(x_1, \dots, x_m)$ по переменным $x_1 \in G$, $x_2 \in G$, $\dots$, $x_m \in G$ будем обозначать $[H(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)]$; при этом кратность интеграла равна числу различных переменных, снаб-

женных верхней чертой. Через C будем обозначать различные константы, не зависящие от n, x, y, t .

Лемма 2.1. Для $T > 0, k = [a^2 T]$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{x, y \in G} |P_{k,a}(x, y) - P_T(x, y)| = 0.$$

Доказательство. Пусть $k' = [a^2 T']$, где $T/2 \leq T' < T$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta(a) \equiv & |P_{k,a}(x, y) - P_T(x, y)| = |[P_{k',a}(x, \bar{y}) P_{k-k',a}(\bar{y}, y) - \\ & - P_{T'}(x, \bar{y}) P_{T-T'}(\bar{y}, y)]| = |[P_{k',a}(x, \bar{y}) P_{k-k',a}(\bar{y}, y) - \\ & - P_{T'}(x, \bar{y}) P_{T-T'}(\bar{y}, y)] I_{G^\delta}(\bar{y})| + R(T'; x, y), \end{aligned}$$

где $G^\delta = G \setminus S_\delta(\partial G)$, $I_A(x)$ — индикатор множества A . Для заданного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы для всех $T/2 \leq T' = T$, $x, y \in G$ выполнялось

$$P_{T'}(x, y) [I_{G^\delta}(\bar{z})] \leq \varepsilon, \quad P_{k',a}(x, y) [I_{G^\delta}(z)] \leq \varepsilon. \quad (2.5)$$

Для этого δ в силу (2.5) будет иметь место неравенство $|R(T'; x, y)| \leq 2\varepsilon$ для всех $T/2 \leq T' < T$, $x, y \in G$. Выбирая далее число T' достаточно близким к T , добьемся того, чтобы для всех $x, y \in G$

$$\begin{aligned} |P_{k-k',a}(x, y) - p_a^{(k-k')}(y-x)| &\leq \varepsilon/C; \\ |P_{T-T'}(x, y) - f^{(T-T')}(y-x)| &\leq \varepsilon/C, \end{aligned}$$

где $p_a^{(k-k')}(x)$ — плотность вектора $(\xi_1 + \dots + \xi_{k-k'})/a$, $f^{(T-T')}(x)$ — плотность соответствующего ему нормального вектора, $C < \infty$ таково, что для всех $x, y \in G$, $T/2 \leq T' \leq T$

$$P_{T'}(x, y) \leq C, \quad P_{k',a}(x, y) \leq C.$$

Для этих выбранных $\delta > 0$ и $T' < T$ имеем

$$\begin{aligned} \Delta(a) &\leq 4\varepsilon + |[P_{k',a}(x, \bar{z}) P_a^{(k-k')}(y-\bar{z}) - P_{T'}(x, \bar{z}) f^{(T-T')}(y-\bar{z})] I_{G^\delta}(z)| \leq \\ &\leq 6\varepsilon + I_1 + I_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv |[P_{k',a}(x, \bar{z}) (p_a^{(k-k')}(y-\bar{z}) - f^{(T-T')}(y-\bar{z}))]|, \\ I_2 &\equiv |[P_{k',a}(x, \bar{z}) - P_{T'}(x, \bar{z})] f^{(T-T')}(y-\bar{z})|. \end{aligned}$$

Величина I_1 исчезает при $a \rightarrow \infty$ равномерно по $x, y \in G$ в силу условия A_1 . Для оценки I_2 с помощью принципа инвариантности введем случайную ломаную $\xi^{(a)}(t)$, $0 \leq t \leq T'$, построенную по точкам

$$(i\alpha, S_i/a), \quad i = 0, 1, \dots, k',$$

где $\alpha = T'/k'$, $S_0 = 0$, $S_i = \xi_1 + \dots + \xi_i$. Будем считать, что процессы $\xi^{(a)}(t)$ и $\xi(t)$ заданы на одном вероятностном пространстве таким образом, что с вероятностью 1

$$\rho(\xi^{(a)} - \xi) \equiv \sup_{0 \leq t \leq T'} |\xi^{(a)}(t) - \xi(t)| \rightarrow 0.$$

Пусть

$$\Phi_y(\varphi) = f^{(T-T')}(y - \varphi(T')) I_G^\delta(\varphi),$$

где функционал $I_G^\delta(\varphi)$ равен 1, если $\varphi(t) \in G$ для всех $0 \leq t \leq T'$, и равен 0 в противном случае. Тогда, очевидно,

$$I_2 = |M_x(\Phi_y(\xi^{(a)}) - \Phi_y(\xi))|, \quad (2.6)$$

где нижний индекс x означает, как обычно, что процессы $\xi^{(a)}$ и ξ начинаются в точке x . Пусть $\omega_y^g(u)$ — модуль непрерывности функционала $\Phi_y(\varphi)$ на дополнении множества $S^p(R)$, где R — множество разрывов

$\Phi_v(\varphi)$, $S_\varepsilon(R)$ — ε -окрестность множества R в равномерной метрике. Из (2.6) следует неравенство

$$I_2 \leq \int_0^1 \omega_y^\varepsilon(u) P_x(\rho(\xi^{(a)} - \xi) \in du) + C(P_x(\rho(\xi^{(a)} - \xi) > 1) + P_x(\xi \in S_\varepsilon^0(R))), \quad (2.7)$$

поскольку очевидно, что модуль непрерывности допускает следующую оценку для всех $y \in G$, $\varepsilon > 0$: $w_y^\varepsilon(u) \leq C \cdot u$, из (2.7) получаем, устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$I_2 \leq C \left(\int_0^1 u P_x(\rho(\xi^{(a)} - \xi) \in du) + P_x(\rho(\xi^{(a)} - \xi) > 1) + P_x(\xi \in \bar{R}) \right), \quad (2.8)$$

где $\bar{R} = \bigcap_{\varepsilon > 0} S_\varepsilon^0(R)$. Так как множество $\bar{R}$ имеет вид

$$\bar{R} = \{\varphi : \forall 0 \leq t \leq T' \varphi(t) \in \bar{G}, \exists 0 \leq t' \leq T' \varphi(t') \in \partial G\},$$

для $\tau = \inf \{t > 0 : \xi(t) \in \partial G\}$ справедливо соотношение

$$P_x(\xi \in \bar{R}) = \int_0^1 [P_x(\tau \in du, \xi(u) \in d\bar{y}) \cdot I_{\partial G}(\bar{y}) P_{\bar{y}}(\xi(t) \in \bar{G}; 0 \leq t \leq T' - u)].$$

Поскольку множество G выпукло, для любого $y \in \partial G$ найдется вектор z_y такой, что $\bar{G} \subseteq \{\tilde{y} : \langle \tilde{y}, z_y \rangle \leq 1\}$; поэтому для $y \in \partial G$ справедливо неравенство

$$P_y(\xi(t) \in \bar{G}; 0 \leq t \leq T' - u) \leq P_y(\langle \xi(t), z_y \rangle \leq 1; 0 \leq t \leq T' - u).$$

Так как правая часть последнего неравенства равна нулю в силу симметричности и невырожденности в R^s распределения процесса $\xi(u)$, третье слагаемое в неравенстве (2.8) также равно нулю. А так как остальные два слагаемые в (2.8) стремятся к нулю равномерно по x , лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. Для $a \rightarrow \infty$, $k = a^2$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \lambda^k(a) = \lambda,$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in G} (|\psi_a(x) - \varphi(x)|) + \left(\sup_{x \in G} (|\psi_a^*(x) - \varphi(x)|) \right) \right) = 0.$$

Доказательство. Из леммы 2.1 следует, что операторы T_a^k сходятся к оператору T_1 по операторной норме. Из последнего в силу известных теорем (см., например, теорему 4.1 из [13], с. 35) вытекает сходимость соответствующих максимальных по модулю собственных чисел. Поэтому первое утверждение леммы 2.2 доказано и попутно установлено, что при $a \rightarrow \infty$ $\ln \lambda(a) \sim (1/a^2) \ln \lambda$. Покажем далее, что

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \|\psi_a - \varphi\| = 0, \quad (2.9)$$

где, как и ранее $\|\varphi\|^2 = [\varphi^2(\bar{y})]$ — норма в L_2 . Для этого заметим, что

$$\lambda^k(a) \psi_a(x) = (T_a^k - T_1) \psi_a(x) + T_1 \psi_a(x). \quad (2.10)$$

В силу леммы 2.1 первое слагаемое в (2.10) стремится к нулю равномерно по $x \in G$, поэтому

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{x \in G} |\lambda^k(a) \psi_a(x) - T_1 \psi_a(x)| = 0.$$

В силу уже доказанного первого утверждения леммы 2.2 из последнего получаем

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{x \in G} |\lambda \psi_a(x) - T_1 \psi_a(x)| = 0. \quad (2.11)$$

Из полной непрерывности оператора T_1 следует, что множество $(T_1 \psi_a)_{a>1}$ компактно в L_2 ; поэтому согласно (2.11) любая предельная функция ψ для этого компакта удовлетворяет соотношению $\lambda \psi = T_1 \psi$. Поскольку максимальное собственное число оператора T_1 простое, функция ψ совпадает с функцией φ , т. е. (2.9) доказано. Из сходимости в L_2 следует и равномерная сходимость, так как

$$\begin{aligned} T_1 \psi_a(x) &= T_1 \varphi(x) + T_1(\psi_a(x) - \varphi(x)) = \\ &= \lambda \varphi(x) + [P_1(x, \bar{y})(\psi_a(\bar{y}) - \varphi(\bar{y}))] \end{aligned}$$

и ядро $P_1(x, y)$ оператора T_1 равномерно ограничено. Поскольку третье соотношение в лемме 2.2 доказывается совершенно аналогично, лемма 2.2 доказана.

Лемма 2.3. *Имеет место равенство*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x, y \in G} |\lambda^{-t} P_t(x, y) - \varphi(x) \varphi(y)| = 0.$$

Доказательство. Из полной непрерывности и самосопряженности оператора T_t по теореме Гильберта — Шмидта (см., например, [14]) имеем

$$P_t(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^t \varphi_k(x) \varphi_k(y), \quad (2.12)$$

где λ_k, φ_k — k -е собственное число и соответствующая ему нормированная собственная функция, $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$. Из (2.12) следует неравенство

$$|P_t(x, y) - \lambda^t \varphi_1(x) \varphi_1(y)| \leq \lambda_1^t \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_2} \right)^t |\varphi_k(x) \varphi_k(y)|;$$

поскольку

$$|\varphi_k(x)| = \frac{1}{\lambda_k} [P_1(x, \bar{y}) \varphi_k(\bar{y})] \leq C/\lambda_k,$$

получаем

$$|\lambda^{-t} P_t(x, y) - \varphi(x) \varphi(y)| \leq \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t \frac{1}{\lambda_2^2} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{\lambda_2} \right)^{t-2} C^2 \leq \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t C.$$

Так как $\lambda_1 > \lambda_2$, т. е. максимальное собственное число имеет кратность 1, лемма 2.3 доказана.

Доказательство теоремы 1. В силу лемм 2.1—2.3 найдется такая целозначная функция $k_0(a)$, $k_0(a)/a^2 \rightarrow \infty$, что для всех $T_a \rightarrow \infty$ таких, что $k = [a^2 T(a)] \leq k_0(a)$, выполняется

$$\sup_{x, y \in G} |P_{k,a}(x, y) - \lambda^k(a) \psi_a(x) \varphi(y)| \leq \lambda^k(a) \delta(a),$$

и $\delta(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$. В условиях теоремы 1 последовательность $a(n)$ стремится к ∞ и $a(n)/\sqrt{n}$ стремится к 0. Построим последовательность $N(n)$ такую, что $k(n) \leq n - N(n)k(n) < 2k(n)$, где $k(n) = [k_0(a(n))/3]$. Пусть $\tilde{k} = n - Nk$, так что $n = kN + \tilde{k}$.

Из соотношения

$$P_{n,a}(x, y) = [P_{n-k,a}(x, \bar{y}) P_{k,a}(\bar{y})]$$

следует, что

$$\begin{aligned} \Delta_n \equiv \sup_{x, y \in G} |\lambda^{-n} P_{n,a}(x, y) - \varphi(x) \varphi(y)| &\leq \sup_{x, y \in G} |[\lambda^{-n+k}(a) P_{n-k,a}(x, \bar{y}) \times \\ &\times (\lambda^{-k}(a) P_{k,a}(\bar{y}, y) - \psi_a(\bar{y}) \varphi(y))]| + \sup_{x, y \in G} |\lambda^{-n+k}(a) \times \\ &\times [P_{n-k,a}(x, \bar{y}) \psi_a(\bar{y}) \varphi(y)] - \varphi(x) \varphi(y)| \leq \delta(a(n)) A_{n,n-k} + \\ &+ \sup_{x, y \in G} |\varphi(y) \psi_a(x) - \varphi(x) \varphi(y)|, \end{aligned}$$

где

$$A_{n,m} \equiv \sup_{x \in G} \lambda^{-m}(a) [P_{m,a(n)}(x, \bar{y})].$$

Поскольку в силу леммы 2.2 второе слагаемое в правой части последнего неравенства стремится к нулю, для доказательства теоремы достаточно убедиться в том, что

$$A_{n,n-k} \leq C. \quad (2.13)$$

Из соотношения

$$A_{n,n-ik} = \lambda^{n-ik}(a(n)) \sup_{x \in G} [P_{n-ik-k,a}(x, \bar{z}) P_{k,a}(\bar{z}, y)]$$

следует, что для $i = 1, \dots, N-1$ выполняется

$$A_{n,n-ik} \leq C(1 + \delta(a(n))A_{n,n-ik-k}), \quad A_{n,n-Nk} \leq C.$$

Поэтому

$$A_{n,n-k} \leq C(1 + \delta(a) + \delta^2(a) + \dots) \leq C.$$

Соотношение (2.13) и теорема 1 доказаны.

3. Грубая асимптотика малых уклонений

Обозначим $D(0, 1)$ класс функций $h(t): [0, 1] \rightarrow R^s$ без разрывов второго рода, непрерывных справа для $0 \leq t < 1$ и непрерывных слева для $t = 1$. Пусть для любого $0 \leq t \leq 1$ задано множество $G_t \subseteq R^s$, которое является ограниченным, выпуклым и открытым. Будем говорить, что непустое множество $U \subseteq D(0, 1)$ принадлежит классу $\mathfrak{M}_1$, если оно представляется в виде

$$U = \{h \in D(0, 1) : h(t) \in G_t; \quad 0 \leq t \leq 1\} \quad (3.1)$$

и содержит по крайней мере одну непрерывную функцию. Через $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$ обозначим класс тех множеств из $\mathfrak{M}_1$, для которых в представлении (3.1) отображение G_t состоит из конечного числа ступенек: $G_t = G_{t_i}$ при $t \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$, где $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k = 1$, $k < \infty$. Для каждого множества $U \in \mathfrak{M}_2$ определим число

$$W(U) = \int_0^1 \ln \lambda_t dt,$$

где $\lambda_t = \lambda_{G_t}$ и число λ_G определено формулой (2.4). Будем говорить, что множество $U \in \mathfrak{M}_1$ принадлежит классу $\mathfrak{M}$, если можно построить множества $U_n^-, U_n^+ \in \mathfrak{M}_2$ такие, что $U_n^- \subseteq U \subseteq U_n^+$, и $|W(U_n^-) - W(U_n^+)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Для множеств $U \in \mathfrak{M}$ функционал W определим как предел $W(U) = \lim_{n \rightarrow \infty} W(U_n^\pm)$. Поскольку из включения $G_{n,t}^- \subseteq G_t \subseteq G_{n,t}^+$ сле-

дует неравенство $\lambda_{G_{n,t}^-} \leq \lambda_{G_t} \leq \lambda_{G_{n,t}^+}$, то очевидно, что $W(U) = \int_0^1 \lambda_t dt$.

Пусть случайная функция $S_n(t) \in D(0, 1)$ определяется как $\xi_1 + \dots + \xi_{[t/n]}$, где (ξ_i) — последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов.

Теорема 2. Пусть последовательность (ξ_i) удовлетворяет условию (2.1), множество $U \in \mathfrak{M}$ имеет вид

$$U = \{\varphi \in D(0, 1) : \varphi(t) \in G_t, \quad 0 \leq t \leq 1\},$$

последовательность $a(n) \rightarrow \infty$, $a(n)/B(n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого $x \in G_0$

$$\ln P(S_n/a(n) + x \in U) \sim \frac{n}{a^\alpha(n)} L^*(a(n)) \int_0^1 \lambda_{G_t} dt,$$

где функция $L^*(u)$ и числа λ_a определены формулами (2.2) и (2.4) соответственно.

Доказательство теоремы 2 мы проведем для случая $M|\xi_1|^2 < \infty$; в остальных случаях доказательства полностью идентичны приведенному.

Предположим сначала, что множество $U \in \mathfrak{M}$ имеет вид

$$U = \{\varphi \in D(0, 1) : \varphi(t) \in G; 0 \leq t \leq 1\}. \quad (3.2)$$

Для целых n и k пусть N таково, что $n = kN + \tilde{k}$, где $k \leq \tilde{k} < 2k$. Тогда, очевидно, выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} P(S_n/a + x \in U) &\leq A_{n,k}^N \cdot A_{n,\tilde{k}}, \\ P(S_n/a + x \in U) &\geq B_{n,k}^N \cdot B_{n,\tilde{k}}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где

$$A_{n,k} \equiv \sup_{x \in G} P(S_n(t)/a + x \in G; 0 \leq t \leq k/n),$$

$$B_{n,k} \equiv \inf_{x \in S_\delta(y)} P(S_n(t)/a + x \in G, 0 \leq t \leq k/n, S_n(k/n)/a + x \in S_\delta(y))$$

и число $\delta > 0$ и вектор $y \in G$ таковы, что $S_\delta(y) \subseteq G$. Пусть далее $\xi(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — предельный для $S_n/B(n)$ процесс (в нашем случае однородный гауссовский процесс с независимыми приращениями такой, что первые и вторые моменты у ξ_1 и $\xi(1)$ совпадают). Обозначим

$$\begin{aligned} A_{n,k}^{(0)} &\equiv \sup_{x \in G} P(\xi(t)/(a\sqrt{n}) + x \in G; 0 \leq t \leq k/n); \\ B_{n,k}^{(0)} &\equiv \inf_{x \in S_\delta(y)} P(\xi(t)/(a\sqrt{n}) + x \in G; 0 \leq t \leq k/n, \\ &\quad \xi(k/n)/(a\sqrt{n}) + x \in S_\delta(y)). \end{aligned}$$

Из леммы 2.3 следует, что при $k = [a^2 T]$, $T \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \ln A_{n,k}^{(0)} &\sim \frac{k}{a^2} \ln \lambda, \\ \ln B_{n,k}^{(0)} &\sim \frac{k}{a^2} \ln \lambda, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\lambda = \lambda_a$ определено (2.4). В силу принципа инвариантности (см. доказательство леммы 2.1) для любого $T < \infty$, $k = [a^2 T]$ справедливо

$$\ln A_{n,k} \rightarrow \ln A_{n,k}^{(0)}, \quad \ln B_{n,k} \rightarrow \ln B_{n,k}^{(0)}.$$

Поэтому найдется последовательность $T = T(n) \rightarrow \infty$ такая, что для $k = [a^2 T]$

$$\ln A_{n,k} \sim \ln A_{n,k}^{(0)}, \quad \ln B_{n,k} \sim \ln B_{n,k}^{(0)}.$$

Из последнего в силу (3.4) получаем

$$\ln A_{n,k} \sim \frac{k}{a^2} \ln \lambda, \quad \ln B_{n,k} \sim \frac{k}{a^2} \ln \lambda,$$

и то же верно и для $\tilde{k} = n - kN$. Обращаясь далее к неравенствам (3.3), получаем окончательно

$$\ln P(S_n/a + x \in U) \sim \frac{Nk + \tilde{k}}{a^2} \ln \lambda = \frac{n}{a^2} \ln \lambda.$$

Таким образом, требуемое соотношение для множеств U вида (3.2) доказано. Аналогично доказывается теорема 2 для множеств U из класса $\mathfrak{M}_2$. Поскольку переход от $\mathfrak{M}_2$ к $\mathfrak{M}$ очевиден, теорема 2 доказана.

4. Закон повторного логарифма в форме Чжуна для многомерных случайных блужданий

Для произвольной полунормы $p(x)$ в R^s рассмотрим множество

$$G = \{x : p(x) < 1\}$$

и этому множеству поставим в соответствие число $\lambda = \lambda_G$ (см. (2.4)). Пусть, как и ранее, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

Теорема 3. Пусть для последовательности (ξ_i) выполнено условие (2.1). Тогда с вероятностью 1

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq n} \frac{p(S_k)}{B([n/\ln \ln n])} = |\ln \lambda|^{1/\alpha}.$$

Доказательство. Предположим, что $M|\xi_1|^2 < \infty$.

I. Покажем сначала, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{p}_n}{\psi(n)} \geq C, \quad (4.1)$$

где $C = |\ln \lambda|^{1/2}$, $\bar{p}_n = \max_{1 \leq k \leq n} p(S_k)$, $\psi(n) = \sqrt{n/\ln \ln n}$. Пусть $a > 1$, $r_n = [a^n]$.

Из теоремы 2 следует, что для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и достаточно больших n

$$P(\bar{p}_{r_n} < (1 - \varepsilon) C \psi(n)) \leq \exp\left(-\frac{1 - \delta}{(1 - \varepsilon)^2} \ln \ln r_n\right),$$

т. е.

$$P(\bar{p}_{r_n} < C(1 - \varepsilon) \psi(r_n)) = O(n^{-(1-\delta)/(1-\varepsilon)^2}).$$

Выбирая для заданного $\varepsilon > 0$ значение $\delta > 0$ достаточно малым, по лемме Бореля — Кантелли получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1, начиная с некоторого n ,

$$\bar{p}_{r_n} \geq (1 - \varepsilon) C \psi(r_n).$$

Пусть далее $r_{n-1} \leq r < r_n$. Легко видеть, что для достаточно больших n

$$\bar{p}_r \geq \bar{p}_{r_{n-1}} \geq (1 - \varepsilon) C \psi(r_{n-1}) \geq (1 - 2\varepsilon) a^{-1/2} C \psi(r);$$

поскольку $(1 - 2\varepsilon)/\sqrt{a}$ можно сделать сколь угодно близким к 1, то (4.1) доказано.

II. Покажем теперь, что с вероятностью 1

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{p}_n}{\psi(n)} \leq C. \quad (4.2)$$

Пусть $k_n = (n!) \left[\prod_{i=2}^n (\ln i)^3 \right]$, так что

$$\ln k_n \sim n \ln n, \quad \ln \ln k_n \sim \ln n. \quad (4.3)$$

Пусть

$$X_n = \max_{k_{n-1} \leq k \leq k_n} p(S_k - S_{k_{n-1}}).$$

Поскольку

$$P(X_n < x) = P(\bar{p}_{k_n - k_{n-1}} < x),$$

то в силу теоремы 2 для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и достаточно больших n

$$P(X_n < C(1 + \delta) \psi(k_n)) \geq \exp\left\{-\frac{(1 + \varepsilon)}{(1 + \delta)^2} \ln \ln (k_n - k_{n-1})\right\},$$

т. е. для всех достаточно больших n

$$P(X_n \leq C(1+\delta)\psi(k_n)) \geq n^{-(1+\varepsilon)/(1+\delta)^2}.$$

Для $\delta > 0$ выбираем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $(1+\varepsilon)(1+\delta)^{-2} < 1$; это позволит получить расходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n < C(1+\delta)\psi(k_n)) = \infty.$$

Поскольку величины X_n независимы, то по лемме Бореля — Кантелли получаем, что для любого $\delta > 0$ с вероятностью 1

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n/\psi(k_n) \leq (1+\delta)C. \quad (4.4)$$

Заметим далее, что $\bar{p}_{k_n} \leq X_n + \bar{p}_{k_{n-1}}$, поэтому

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{p}_{k_n}}{\psi(k_n)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{\psi(k_n)} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{p}_{k_{n-1}}}{\psi(k_n)}. \quad (4.5)$$

В силу обычного закона повторного логарифма справедливо

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{p}_{k_{n-1}}}{\sqrt{k_{n-1} \ln \ln k_{n-1}}} < \infty$$

с вероятностью 1; поскольку в силу выбора k_n имеем

$$\sqrt{k_{n-1} \ln \ln k_{n-1}}/\psi(k_n) = o(1),$$

получаем, что второе слагаемое в правой части (4.5) стремится к нулю с вероятностью 1. Поэтому получим в силу (4.4)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{p}_{k_n}}{\psi(k_n)} \leq (1+\delta)C,$$

откуда и следует (4.2). Теорема 3 в случае $M|\xi_1|^2 < \infty$ доказана. В общем случае первая часть доказательства совершенно идентична изложенному выше; вторая часть отличается только в разделе после формулы (4.5), где используется закон повторного логарифма в обычной форме. Тут будет полезна следующая

Лемма 4.1. С вероятностью 1

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq k \leq k_n} \frac{p(S_k)}{\psi(k_n)} = 0.$$

Доказательство. Поскольку найдется $0 < A < \infty$ такое, что для любого $x \in R^s$

$$p(x) \leq A \max(|X_1|, \dots, |X_s|),$$

утверждение леммы 4.1 будет следовать из соотношения

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{S}_{k_{n-1}}}{\psi(k_n)} = 0$$

с вероятностью 1, где

$$\bar{S}_k = \max_{1 \leq i \leq k} \max_{1 \leq j \leq s} |S_{ij}|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

и S_{ij} — j -я координата вектора S_i . Пусть

$$Z_0 = \bar{Z}_0 = 0, \quad Z_k = S_{kj}, \quad \bar{Z}_k = \max_{0 \leq i \leq k} |Z_i|;$$

для $y > 0$

$$\begin{aligned} P(Z_n \geq y) &= \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\infty P(\bar{Z}_{k-1} < y, \bar{Z}_k - y \in dt) P(\bar{Z}_{n-k} \geq -t) \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{n-1} P(Z_{n-k} \geq 0) \int_0^\infty P(\bar{Z}_{k-1} < y, \bar{Z}_k - y \in dt) \geq \\ &\geq \inf_{1 \leq k \leq n-1} P(Z_{n-k} \geq 0) P(\bar{Z}_n \geq y). \end{aligned}$$

Так как в силу (2.1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Z_{n-k} \geq 0) = P(\eta_j \geq 0) = 1/2,$$

то

$$\kappa = \inf P(Z_n \geq 0) > 0.$$

Поэтому

$$P(\bar{Z}_n \geq y) \leq \kappa^{-1} P(Z_n \geq y). \quad (4.6)$$

По лемме Бореля — Кантелли для доказательства леммы достаточно убедиться в том, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\bar{Z}_{k_{n-1}} \geq \varepsilon \psi(k_n))$$

конечен для любого $\varepsilon > 0$; в силу (4.6) для этого достаточно доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(Z_{k_{n-1}} \geq \varepsilon \psi(k_n)). \quad (4.7)$$

Воспользуемся следующим неравенством Нагаева — Фука:

$$P(Z_k > x) \leq kP(Z_1 > y) + \exp\left(\frac{x}{y} - \left(\frac{x}{y} + \frac{ka}{y} - \frac{kb}{y^2}\right) \ln\left(\frac{xy}{kb} + 1\right)\right), \quad (4.8)$$

где $a = M(Z_1; |Z_1| \leq y)$, $b = M(Z_1^2; |Z_1| \leq y)$. Положим в (4.8) $k = k_{n-1}$, $x = \varepsilon \psi(k_n)$, $y = 2x$, так что

$$y^\alpha k L^*(y) = O(n^{-1} (\ln \ln n)^{-2}). \quad (4.9)$$

Легко видеть далее, что $b \sim Ay^\alpha / L^*(y)$, $a = O(y^{1+\varepsilon-\alpha})$, если $\alpha \leq 1$, и $a = o(1)$, если $\alpha > 1$, так что

$$\frac{ka}{y} = o(1), \quad \frac{kb}{y^2} = o(1), \quad \ln\left(\frac{xy}{kb} + 1\right) \sim \ln n. \quad (4.10)$$

Поскольку далее

$$kP(Z_1 > y) = O(kL^*(y)/y^\alpha),$$

то, используя (4.9) и (4.10), получаем из неравенства (4.8) соотношение

$$P(\bar{Z}_{k_{n-1}} > \varepsilon \psi(k_n)) = O(n^{-1} \ln^{-2} n + n^{-2}).$$

Таким образом, ряд (4.7) сходится. Лемма 4.1 и теорема 3 доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Боровков А. А. Граничные задачи для случайных блужданий и большие отклонения в функциональных пространствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1967, т. 12, № 4, с. 635—654.
2. Могульский А. А. Метод Фурье для нахождения асимптотики малых отклонений винеровского процесса. — Сиб. мат. журн., 1982, т. 22, № 3, с. 161—170.
3. Могульский А. А. Вероятности больших отклонений для случайных блужданий. — В кн.: Предельные теоремы для сумм случайных величин. Новосибирск: Наука, 1984.

4. Боровков А. А., Могоульский А. А. О вероятностях больших отклонений в топологических пространствах. I, II.— Сиб. мат. журн., 1978, т. 19, № 5, с. 988—1004; 1980, т. 21, № 5, с. 12—26.
5. Могоульский А. А. Малые отклонения в двуграничной задаче для случайных блужданий.— Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, № 3, с. 642—643.
6. Могоульский А. А. Точная асимптотика в двуграничной задаче для случайных блужданий. Препринт. Новосибирск: изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1981. 22 с.
7. Могоульский А. А. Малые отклонения в пространстве траекторий.— Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, № 5, с. 755—765.
8. Новиков А. А. Об оценках и асимптотическом поведении вероятностей пересечения подвижных границ суммами независимых случайных величин.— Изв. АН СССР. Математика, 1980, т. 44, № 7, с. 868—885.
9. Jain N., Pruitt W. Maximum of partial sums of independent variables.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1973, v. 27, N 2, p. 141—151.
10. Jain N., Pruitt W. The other law of the iterated logarithm.— The Ann. of Probab., 1975, v. 3, N 6, p. 1046—1049.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. II. М.: Мир, 1967. 752 с.
12. Интегральные уравнения/Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. М.: Наука, 1968. 448 с.
13. Гохберг И. У., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 448 с.
14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 493 с.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В МОМЕНТНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

С. А. УТЕВ

1. Введение

В [1] отмечено, что прямым подсчетом можно получить следующие неравенства:

$$E \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right)^{2m} \leq E \tau^{2m}, \quad (1.1)$$

$$E \operatorname{ch} \left(t \sum_{i=1}^n \xi_i \right) \leq E \operatorname{ch} t \tau, \quad (1.2)$$

где $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимы и симметрично распределены, τ — случайная величина с характеристической функцией $\exp \left(\sum_{k=1}^n E(e^{it\xi_k} - 1) \right)$, m — натуральное.

В [2] на основе неравенства (1.1) найдена явная формула для

$$\Psi(A, D, m) = \sup_{n, \xi_k} E \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right)^{2m}, \quad (1.3)$$

где $\sup$ берется по всем независимым и симметрично распределенным

$\xi_1, \dots, \xi_n$ с фиксированными $\sum_{k=1}^n D\xi_k = D^2$, $\sum_{k=1}^n E|\xi_k|^{2m} = A$, $n \geq 1$.

В настоящей статье предложены подходы, которые позволяют:

1) распространить неравенства типа (1.1) и (1.2) на более широкий класс функционалов от сумм независимых случайных величин, не обязательно симметрично распределенных, со значением в сепарабельном банаховом пространстве;

2) решить ряд экстремальных задач, аналогичных (1.3).

В статье будет приведено доказательство результатов, анонсированных автором в [3].

В п. 2 даны основные обозначения и формулировка основных результатов. Доказательство последних приведено в пп. 4—10. В п. 3 доказан ряд вспомогательных результатов.