

4. Боровков А. А., Могульский А. А. О вероятностях больших отклонений в топологических пространствах. I, II.— Сиб. мат. журн., 1978, т. 19, № 5, с. 988—1004; 1980, т. 21, № 5, с. 12—26.
5. Могульский А. А. Малые отклонения в двуграничной задаче для случайных блужданий.— Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, № 3, с. 642—643.
6. Могульский А. А. Точная асимптотика в двуграничной задаче для случайных блужданий. Препринт. Новосибирск: изд. Ин-та математики СО АН СССР, 1981. 22 с.
7. Могульский А. А. Малые отклонения в пространстве траекторий.— Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, № 5, с. 755—765.
8. Новиков А. А. Об оценках и асимптотическом поведении вероятностей непересечения подвижных границ суммами независимых случайных величин.— Изв. АН СССР. Математика, 1980, т. 44, № 7, с. 868—885.
9. Jain N., Pruitt W. Maximum of partial sums of independent variables.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1973, v. 27, N 2, p. 141—151.
10. Jain N., Pruitt W. The other law of the iterated logarithm.— The Ann. of Probab., 1975, v. 3, N 6, p. 1046—1049.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. II. М.: Мир, 1967. 752 с.
12. Интегральные уравнения/Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А. М.: Наука, 1968. 448 с.
13. Гохберг И. У., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М.: Наука, 1965. 448 с.
14. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 493 с.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В МОМЕНТНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ

С. А. УТЕВ

1. Введение

В [1] отмечено, что прямым подсчетом можно получить следующие неравенства:

$$E \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right)^{2m} \leq E \tau^{2m}, \quad (1.1)$$

$$E \operatorname{ch} \left(t \sum_{i=1}^n \xi_i \right) \leq E \operatorname{ch} t \tau, \quad (1.2)$$

где $\xi_1, \dots, \xi_n$ — независимы и симметрично распределены, τ — случайная величина с характеристической функцией $\exp \left(\sum_{k=1}^n E(e^{it\xi_k} - 1) \right)$, m — натуральное.

В [2] на основе неравенства (1.1) найдена явная формула для

$$\Psi(A, D, m) = \sup_{n, \xi_k} E \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right)^{2m}, \quad (1.3)$$

где $\sup$ берется по всем независимым и симметрично распределенным

$\xi_1, \dots, \xi_n$ с фиксированными $\sum_{k=1}^n D\xi_k = D^2$, $\sum_{k=1}^n E|\xi_k|^{2m} = A$, $n \geq 1$.

В настоящей статье предложены подходы, которые позволяют:

1) распространить неравенства типа (1.1) и (1.2) на более широкий класс функционалов от сумм независимых случайных величин, не обязательно симметрично распределенных, со значением в сепарабельном банаховом пространстве;

2) решить ряд экстремальных задач, аналогичных (1.3).

В статье будет приведено доказательство результатов, анонсированных автором в [3].

В п. 2 даны основные обозначения и формулировка основных результатов. Доказательство последних приведено в пп. 4—10. В п. 3 доказан ряд вспомогательных результатов.

2. Формулировка основных результатов

I. Одно усиление неравенства Йенсена. Пусть B — сепарабельное банахово пространство, $\|x\|$ — норма в B , $\mathcal{B}(B)$ — борелевская σ -алгебра на B , B^* — пространство, сопряженное к B . Здесь и далее под производной в банаховом пространстве мы будем подразумевать производную Фреше.

Через $\mathcal{F}(B)$ обозначим пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций φ из B в $\mathbf{R}$, через $\varphi^{(k)}(x; a_1, \dots, a_k)$ — значение k -й производной φ , взятой в точке x , на $a_1, \dots, a_k \in B$. Для всякой функции φ из B в $\mathbf{R}$ через $c(\varphi)$ обозначим наименьшую константу c такую, что $|\varphi(a+b)| \leq c(1+|\varphi(a)|)(1+|\varphi(b)|)$ для всех $a, b \in B$. Через $\mathcal{U}(B)$ обозначим пространство функций φ из B в $\mathbf{R}$, для которых $c(\varphi) < \infty$.

Будем говорить, что φ'' выпукла, если при каждом $h \in B$ функция $\varphi''(x; h, h)$ выпукла по x . Положим

$$\mathcal{F}_1(B) = \{\varphi \in \mathcal{F}(B) : \varphi'' \text{ — выпукла}\}, \quad \mathcal{F}_2(B) = \mathcal{F}_1(B) \cap \mathcal{U}(B).$$

Через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, обозначим последовательность независимых случайных величин (н.с.в.) с распределением $P(\varepsilon_i = \pm 1) = 1/2, i = 1, 2, \dots$.

Теорема 1. Пусть $\varphi \in \mathcal{F}(B)$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) φ'' выпукла;
- 2) для всех $a, b, x \in B$

$$\varphi(x) + E\varphi(a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + x) \geq E\varphi(a\varepsilon_1 + x) + E\varphi(b\varepsilon_2 + x);$$

- 3) для всех ограниченных н.с.в. ξ и η с нулевыми средними и всех $x \in B$

$$\varphi(x) + E\varphi(\xi + \eta + x) \geq E\varphi(\xi + x) + E\varphi(\eta + x). \quad (2.1)$$

Теорема 2. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н.с.в. с нулевыми средними. Если выполняется одно из условий:

- А) $\varphi \in \mathcal{F}_1(B)$, ξ_i ограничены, $1 \leq i \leq n$, или
- Б) $\varphi \in \mathcal{F}_2(B)$, $E|\varphi(\xi_i)| < \infty, 1 \leq i \leq n$, то

$$E\varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi_i + x\right) \geq \sum_{i=1}^n E\varphi(\xi_i + x) - (n-1)\varphi(x). \quad (2.2)$$

Замечание 1. Очевидно, что в случае $B = \mathbf{R}$ функции $|x|^t, (x^+)^t, (x^-)^t, t \geq 3, e^{ux}, \operatorname{ch} ux \in \mathcal{F}_2(\mathbf{R})$ ($x^+ = \max(0, x), x^- = \max(0, -x)$).

Если B — сепарабельное гильбертово пространство, то будем писать $B = H$ или просто использовать обозначение H , через $\|x\|$ и (x, y) будем обозначать норму и скалярное произведение в H .

В случае сепарабельного гильбертова пространства справедлива

Теорема 3. Функции $\|x\|^t$ при $t \geq 8, t = 2, 4, 6$ и $\operatorname{ch}(u\|x\|)$ принадлежат $\mathcal{F}_2(H)$.

Следствие 1. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н.с.в., $E\|\xi_i\|^t < \infty, E\xi_i = 0, 1 \leq i \leq n$, и либо $B = \mathbf{R}, t \geq 3$, либо $B = H, t \geq 8$. Тогда

$$E\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i + x\right\|^t \geq \sum_{i=1}^n E\|\xi_i + x\|^t - (n-1)\|x\|^t, \quad (2.3)$$

$$E\left\|\sum_{i=1}^n \xi_i\right\|^t \geq \sum_{i=1}^n E\|\xi_i\|^t. \quad (2.4)$$

Замечание 2. Этот результат при $t \geq 3$ в случае $B = \mathbf{R}$ и $t \geq 8$ в случае $B = H$ усиливает соответствующие результаты работ [4, 5]. Как известно (см., например, [4]), в случае симметрично распределенных н.с.в. $\xi_1, \dots, \xi_n$ неравенство (2.4) верно при $t \geq 2$. Отметим, что в случае $B = \mathbf{R}, 2 < t < 3$, и несимметрично распределенных н.с.в. $\xi_1, \dots, \xi_n$ неравенство (2.4) не верно. В самом деле, пусть ξ_ν и η_ν независимы и одинаково распределены, $P(\xi_\nu = -1) = y/(1+y), P(\xi_\nu = y) = 1/(1+y), y > 0$. Тогда $E\xi_\nu = 0, E|\xi_\nu|^t < \infty$ и при $2 < t < 3$ мы имеем

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{2-t} (E|\xi_\nu + \eta_\nu|^t - 2E|\xi_\nu|^t) = 2^t - 2t - 2 < 0.$$

Доказательство теорем 1, 2 см. в п. 4, доказательство теоремы 3 — в п. 5.

II. Экстремальные свойства распределений сумм н.с.в. с фиксированной суммой «хвостов» распределений. Через (ξ, n) обозначим набор н.с.в. $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ с нулевыми средними. Пусть $Q(B)$ — класс конечных положительных σ -аддитивных мер на $\mathcal{B}(B)$, для которых $G(\{0\}) = 0$ и $\int_B y dG(y) = 0$. Положим

$$W_1(G) = \left\{ (\xi, n) : n \geq 1, \sum_{i=1}^n P(\xi_i \in A) = G(A), A \neq \emptyset \right\}, \quad G \in Q(B).$$

Через $W_2(G)$ обозначим подмножество $W_1(G)$, состоящее из наборов н.с.в. с одинаковым распределением. Для всякой конечной положительной σ -аддитивной меры G на $\mathcal{B}(B)$ через $T(G)$ будем обозначать с.в. с характеристическим функционалом (х.ф.) $\exp \left(\int_B (e^{i(u,x)} - 1) dG(x) \right)$, где $u \in B^*$.

Теорема 4. Пусть $\varphi \in \mathcal{F}_2(B)$, $\int_B |\varphi(x)| dG(x) < \infty$. Тогда

$$\sup_{(\xi, n) \in W_1(G)} E\varphi \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) \leq E\varphi(T(G)). \quad (2.5)$$

Если, кроме того, φ неотрицательна и $W \subset W_1(G)$, причем найдутся $(\xi_1, n, \dots, \xi_{k_n, n}) = (\xi, k_n) \in W$, для которых х.ф. $\sum_{i=1}^{k_n} \xi_{i,n}$ сходится к х.ф. $T(G)$ при $n \rightarrow \infty$, то

$$\sup_{(\xi, n) \in W} E\varphi \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) = E\varphi(T(G)). \quad (2.6)$$

Следствие 2. Пусть $B = \mathbb{R}$, $G \in Q(\mathbb{R})$, $k = 1, 2$. Имеем:

1) если $\int_{-\infty}^{\infty} |y|^t dG(y) < \infty$, $t \geq 3$, то

$$\sup_{(\xi, n) \in W_k(G)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^t = E |T(G)|^t;$$

2) если $\int_0^{\infty} y^t dG(y) < \infty$, $t \geq 3$, то

$$\sup_{(\xi, n) \in W_k(G)} E \left(\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right)^+ \right)^t = E ((T(G))^+)^t;$$

3) если $\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch} uy dG(y) < \infty$, то

$$\sup_{(\xi, n) \in W_k(G)} E \operatorname{ch} \left(u \sum_{i=1}^n \xi_i \right) = E \operatorname{ch} (u T(G)).$$

Следствие 3. Пусть $B = H$, $G \in Q(H)$, $k = 1, 2$. Имеем:

1) если $\int_H \|y\|^t dG(y) < \infty$, $t \geq 8$, то

$$\sup_{(\xi, n) \in W_k(G)} E \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^t = E \|T(G)\|^t;$$

2) если $\int_H \operatorname{ch} (u \|y\|) dG(y) < \infty$, то

$$\sup_{(\xi, n) \in W_k(G)} E \operatorname{ch} \left(u \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\| \right) = E \operatorname{ch} (u \|T(G)\|).$$

Замечание 3. Из соотношений 1), 3) следствия 2 вытекают неравенства (1.1) и (1.2). Если $G(B) > 0$, то $\sup$ в утверждениях 1) и 3) следствия 2 не достигается.

Доказательство теоремы 4 см. в п. 6.

III. Точные верхние и нижние оценки для некоторого класса функционалов, заданных на суммах независимых симметрично распределенных случайных величин (н.с.р.с.в.), принимающих значения в сепарабельном гильбертовом пространстве H .

В этом подпункте мы будем рассматривать наборы только из н.с.р.с.в. Зафиксируем некоторые неотрицательные $a_i, b_i, t, A, D, i \geq 1$, причем $a_i^t \leq b_i$. Положим

$$M_1(n, H) = \{(\xi, n) : E \|\xi_i\|^2 = a_i^2, E \|\xi_i\|^t = b_i, 1 \leq i \leq n\},$$

$$M_2(n, H) = \{(\xi, n) : E \|\xi_i\|^2 \leq a_i^2, E \|\xi_i\|^t \leq b_i, 1 \leq i \leq n\},$$

$$\mathcal{U}_1(H) = \left\{(\xi, n) : n \geq 1, \sum_{i=1}^n E \|\xi_i\|^2 = D^2, \sum_{i=1}^n E \|\xi_i\|^t = A\right\},$$

$$\mathcal{U}_2(H) = \left\{(\xi, n) : n \geq 1, \sum_{i=1}^n E \|\xi_i\|^2 \leq D^2, \sum_{i=1}^n E \|\xi_i\|^t \leq A\right\}.$$

Через $\mathcal{U}_3(H)$ ($\mathcal{U}_4(H)$) обозначим подкласс $\mathcal{U}_1(H)$ (соответственно $\mathcal{U}_2(H)$), состоящий из наборов н.с.р.с.в. с одинаковым распределением.

A. Точные верхние и нижние оценки в моментном неравенстве Розенталя для н.с.р.с.в. Пусть $H = R$.

Теорема 5. При $t \geq 4$ справедливы утверждения:

$$\sup_{(\xi, n) \in M_1(n, R)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^t = E \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(a_i, b_i, t) \right|^t, \quad (2.7)$$

$$\sup_{(\xi, n) \in \mathcal{U}_1(R)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^t = (A^t/D^2)^{1/(t-2)} E |\xi_1(A, D) - \xi_2(A, D)|^t, \quad (2.8)$$

$$\inf_{(\xi, n) \in M_1(n, R)} E \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^t = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i^t) + E \left| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right|^t, \quad (2.9)$$

где $\xi_1(A, D), \xi_2(A, D)$ — пуассоновские н.с.в. с параметром $(1/2) \times \times (A/D^t)^{-2/(t-2)}$; $\varepsilon_1(a_1, b_1, t), \dots, \varepsilon_n(a_n, b_n, t)$ — н.с.в. с распределением $P(\varepsilon(a, b, t) = 0) = 1 - (a^t/b)^{2/(t-2)}$, $P(\varepsilon(a, b, t) = \pm(b/a^2)^{1/(t-2)}) = (1/2)(a^t/b)^{2/(t-2)}$.

Замечание 4. При целом четном t правые части формул (2.7) — (2.9) можно явно вычислить через соответствующие коэффициенты $a_i, b_i, A, D, 1 \leq i \leq n$. В частности, из (2.8) мы получим (1.3).

Доказательство теоремы 5 см. в п. 7.

Б. Сведение вычисления $\sup$ для некоторых функционалов от сумм н.с.р.с.в. со значением в сепарабельном гильбертовом пространстве H к одномерному случаю. Пусть $\dim H \geq 2$.

Теорема 6. Пусть $\varphi \in \mathcal{F}(R)$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) φ'' выпукла;
- 2) для всех $a, b \in H$ и $x \in R$ выполняется

$$E\varphi(\|a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2\|_{\varepsilon_3} + x) \leq E\varphi(\|a\|_{\varepsilon_1} + \|b\|_{\varepsilon_2} + x);$$

3) для всех натуральных n и $a_1, \dots, a_n \in H, x \in R$ справедливо неравенство

$$E\varphi \left(\left\| \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right\|_{\varepsilon_{n+1}} + x \right) \leq E\varphi \left(\sum_{i=1}^n \|a_i\|_{\varepsilon_i} + x \right). \quad (2.10)$$

Следствие 4. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н.с.р.с.в. и не зависят от $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$. Тогда при $t \geq 3$ справедливо неравенство

$$\mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^t \leq \mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n \|\xi_i\| \varepsilon_i \right\|^t. \quad (2.11)$$

Следствие 5. Утверждения (2.7) и (2.8) теоремы 5 верны и в случае сепарабельного гильбертова пространства.

В. Вычисление $\inf$ в моментном неравенстве Розенталя для сумм н.с.р.с.в. со значением в сепарабельном гильбертовом пространстве H .

Теорема 7. При $t \geq 4$ справедливы утверждения:

1) если $\dim H \geq n$, то

$$\inf_{(\xi, n) \in M_1(n, H)} \mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^t = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i^t) + \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{t/2}; \quad (2.12)$$

2) если $\dim H = \infty$, то

$$\inf_{(\xi, n) \in \mathcal{U}_1(H)} \mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^t = \max(D^t, A); \quad (2.13)$$

$$\inf_{(\xi, n) \in \mathcal{U}_3(H)} \mathbf{E} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^t = \max(A, A + D^t - D^t[(A/D^t)^{-2/(t-2)}]^{(2-t)/2}). \quad (2.14)$$

Замечание 5. Правая часть (2.12) заведомо меньше, чем правая часть (2.9). Отметим, что в отличие от отыскания $\sup$ (см. теорему 5) $\inf$ по классу $\mathcal{U}_3(H)$, где рассматриваются только одинаково распределенные слагаемые, больше $\inf$ по всему классу $\mathcal{U}_1(H)$.

Доказательство теоремы 7 см. в п. 9.

IV. Выпуклость некоторых функционалов на классе симметричных сложных пуассоновских распределений. Будем говорить, что мера G симметрична, если $G(A) = G(-A)$ для всех $A \in \mathcal{B}(B)$.

Теорема 8. Пусть $\varphi \in \mathcal{F}(B)$. Для того чтобы при всех $a, b, x \in B$ выполнялось неравенство

$$2\mathbf{E}\varphi(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + x) \leq \mathbf{E}\varphi(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 a + x) + \mathbf{E}\varphi(\varepsilon_1 b + \varepsilon_2 b + x),$$

необходимо и достаточно, чтобы φ'' была выпукла. В частности, если $\varphi \in \mathcal{F}_2(B)$, $\int_B |\varphi(x)| dG_i(x) < \infty$, $i = 1, 2$, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, G_1, G_2 — симметричные меры, то

$$\mathbf{E}\varphi(T(\alpha G_1 + \beta G_2)) \leq \alpha \mathbf{E}\varphi(T(G_1)) + \beta \mathbf{E}\varphi(T(G_2)).$$

Зафиксируем $\varphi \in \mathcal{F}_2(B)$ и измеримые функции $g_1, \dots, g_s$ из B в $\mathbb{R}$. Через W обозначим множество таких симметричных конечных положительных мер на $\mathcal{B}(B)$, что

$$\int_B |\varphi(x)| dG(x) < \infty, \quad \int_B q_i(x) dG(x) = \alpha_i, \quad 1 \leq i \leq s.$$

Через W_0 обозначим подмножество мер G из W , имеющих не более $2s$ точек роста.

Из теоремы 8 и результатов Хёфдинга [6] вытекает

$$\text{Следствие 6.} \quad \sup_{G \in W} \mathbf{E}\varphi(T(G)) = \sup_{G \in W_0} \mathbf{E}\varphi(T(G)).$$

Доказательство теоремы 8 будет приведено в п. 10.

3. Вспомогательные результаты

Пусть φ — дважды непрерывно дифференцируемая функция из $\mathcal{F}$ в $\mathbb{R}$. Здесь и далее через ε будем обозначать с.в. с распределением $P(\varepsilon = \pm 1) = 1/2$. Положим

$$\Psi(x, a) = \mathbf{E}\varphi(a + \varepsilon x^{1/2}), \quad a \in \mathbb{R}, \quad x \geq 0.$$

Лемма 3.1. Для того чтобы для всех $a \in \mathbf{R}$, $x > 0$ имело место $\partial^2 \Psi(x, a)/\partial x^2 \geq 0$, необходимо и достаточно, чтобы φ'' была выпукла.

Доказательство. Имеем

$$\partial^2 \Psi(x, a)/\partial x^2 = \mathbf{E}(\varphi''(a + \varepsilon x^{1/2})x^{1/2} - \varphi'(a + \varepsilon x^{1/2})\varepsilon)/4x^{3/2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \partial^2 \Psi(x, a)/\partial x^2 \geq 0 \quad \forall a \in \mathbf{R}, \quad \forall x > 0, \quad \Leftrightarrow, \\ \mathbf{E}\varphi''(a + \varepsilon u)u \geq \mathbf{E}\varphi'(a + \varepsilon u)\varepsilon \quad \forall a \in \mathbf{R}, \quad \forall u \geq 0. \end{aligned}$$

Пусть $z < y$. Положим $a = (y + z)/2$, $u = (y - z)/2$, $R(x) = \varphi''(x)$. По построению

$$\mathbf{E}\varphi''(a + \varepsilon u)u = (1/2)(y - z)(R(z) + R(y)), \quad \mathbf{E}\varphi'(a + \varepsilon u)\varepsilon = \int_z^y R(t) dt.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \partial^2 \Psi(x, a)/\partial x^2 \geq 0 \quad \forall a \in \mathbf{R}, \quad \forall x > 0, \quad \Leftrightarrow, \\ \int_z^y R(t) dt \leq (1/2)(y - z)(R(z) + R(y)) \quad \forall y, z, \quad z < y. \end{aligned}$$

Для доказательства леммы нужно показать, что последнее утверждение эквивалентно выпуклости функций R .

Пусть R выпукла. Тогда при $z \leq t \leq y$ мы имеем $t = z(y - t)/(y - z) + y(t - z)/(y - z)$, $R(t) \leq R(z)(y - t)/(y - z) + R(y)(t - z)/(y - z)$. Значит,

$$\begin{aligned} \int_z^y R(t) dt &\leq R(z) \int_z^y (y - t)/(y - z) dt + R(y) \int_z^y (t - z)/(y - z) dt = \\ &= (1/2)(y - z)(R(z) + R(y)). \end{aligned}$$

Предположим теперь, что при всех $z < y$ справедливо неравенство

$$\int_z^y R(t) dt \leq (1/2)(y - z)(R(z) + R(y)). \quad (3.1)$$

Докажем, что R выпукла. Если это неверно, то найдутся $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha < b$ такие, что $R(\alpha a + \beta b) > \alpha R(a) + \beta R(b)$. Положим $\Psi(u) = R(ua + (1 - u)b) - uR(a) - (1 - u)R(b)$. По построению функция Ψ непрерывна и $\Psi(0) = \Psi(1) = 0$, $\Psi(\alpha) > 0$. Следовательно, найдутся u_1, u_2 , для которых $\Psi(u_1) = \Psi(u_2) = 0$, $0 \leq u_1 < u_2 \leq 1$, $\Psi(u) > 0$ при $u_1 < u < u_2$. Положим $y = u_1 a + (1 - u_1)b$, $z = u_2 a + (1 - u_2)b$. В силу построения $y - z = (u_2 - u_1)(b - a) > 0$, $R(y) = u_1 R(a) + (1 - u_1)R(b)$, $R(z) = u_2 R(a) + (1 - u_2)R(b)$. Далее, при $z < t < y$ имеем $t = a(b - t)/(b - a) + b(1 - (b - t)/(b - a))$, где $u_1 = (b - y)/(b - a) < (b - t)/(b - a) < (b - z)/(b - a) = u_2$. Следовательно,

$$R(t) > R(a)(b - t)/(b - a) + R(b)(1 - (b - t)/(b - a)),$$

$$\begin{aligned} \int_z^y R(t) dt &> R(a) \int_z^y (b - t)/(b - a) dt + R(b) \int_z^y (1 - (b - t)/(b - a)) dt = \\ &= (1/2)(y - z)(R(z) + R(y)), \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_z^y R(t) dt > (1/2)(y - z)(R(z) + R(y)).$$

Последнее неравенство противоречит (3.1). Лемма доказана.

Положим

$$H(x, t, z) = \mathbf{E}|\varepsilon x^{1/2} + z|^t - x^{t/2} - z^t,$$

$$R(x, t, z) = x^{-2p}(\mathbf{E}|\varepsilon x^p + z|^t - z^t), \quad p = 1/(t - 2), \quad x > 0, \quad z > 0.$$

Лемма 3.2. При $t \geq 4$ функции $H(x, t, z)$ неотрицательны и выпуклы по x .

Лемма 3.3. При $t \geq 4$ функции $R(x, t, z)$ неотрицательны и вогнуты по x .

Доказательство леммы 3.2. Покажем, что

$$\partial^2 H(x, t, z) / \partial x^2 \geq 0, \quad t \geq 4, \quad x > 0. \quad (3.2)$$

Имеем

$$\partial^2 H(x, t, z) / \partial x^2 = 1/4 t x^{t/2-2} ((t-2) E|\varepsilon + u|^{t-2} - E|\varepsilon + u|^{t-2} \varepsilon u - (t-2)),$$

где $u = x^{-1/2} z$. Значит, для доказательства (3.2) достаточно показать, что при $t > 4$, $u > 0$ справедливо

$$g(u) = (t-2) E|\varepsilon + u|^{t-2} - E|\varepsilon + u|^{t-2} \varepsilon u - (t-2) \geq 0. \quad (3.3)$$

Положим $q = t - 2$. Имеем

$$q(0) = 0, \quad q'(u) = (q+1) u^q ((q-1) E|\varepsilon v + 1|^{q-2} (\varepsilon v + 1) v - E|\varepsilon v + 1|^{q-2} (\varepsilon v + 1) \varepsilon), \quad v = 1/u.$$

Следовательно, для доказательства (3.3) достаточно показать, что

$$R(v) = (q-1) E|\varepsilon v + 1|^{q-2} (\varepsilon v + 1) v - E|\varepsilon v + 1|^{q-2} (\varepsilon v + 1) \geq 0, \quad v \geq 1. \quad (3.4)$$

Нетрудно видеть, что

$$R(0) = 0, \quad R'(v) = q(q-1) E|\varepsilon v + 1|^{q-2} \varepsilon v \geq 0$$

при $q - 2 \geq 0$, т. е. $t \geq 4$. Следовательно, (3.4), а вместе с ним и выпуклость функций $H(x, t, z)$ по x при $t \geq 4$ доказаны. Неотрицательность функций $H(x, t, z)$ при $t \geq 3$ следует из неравенства (2.4) следствия 1 и симметричности распределения ε .

Доказательство леммы 3.3. Неотрицательность $R(x, t, z)$ при $t \geq 1$ следует из неравенства Йенсена. Докажем вогнутость. Для этого достаточно показать, что

$$\partial^2 R(x, t, z) / \partial x^2 \leq 0, \quad x > 0, \quad t \geq 4. \quad (3.5)$$

Имеем

$$\partial^2 R(x, t, z) / \partial x^2 = 2p(2p+1)x^{-2p-2} (E|\varepsilon x^p + z|^{t-2} - z^t) - tp(p+1)x^{-p-2} E|\varepsilon x^p + z|^{t-2} (\varepsilon x^p + z) \varepsilon + t(t-1)p^2 x^{-2} E|\varepsilon x^p + z|^{t-2}.$$

После элементарных преобразований находим, что (3.5) эквивалентно

$$M(u) = (t-3) E|\varepsilon u + 1|^{t-2} (\varepsilon u + 1) - (t-1) E|\varepsilon u + 1|^{t-2} + 2 \geq 0 \quad (3.6)$$

при $t > 4$, $u \geq 0$. Нетрудно видеть, что

$$M(0) = 0, \quad M'(0) = 0, \quad M''(u) = (t-1)(t-2)(t-3) \times \\ \times (E|\varepsilon u + 1|^{t-4} (\varepsilon u + 1) - E|\varepsilon u + 1|^{t-4}) \geq \\ \geq (t-1)(t-2)(t-3)(|1+u|^{t-4} - |1-u|^{t-4})u \geq 0$$

при $t > 4$, $u \geq 0$. Следовательно, (3.6), а вместе с ним и лемма доказаны.

Пусть ω — измеримая функция из B в $\mathbb{R}$ и $\omega \in \mathcal{U}(B)$, т. е. $|\omega(a+b)| \leq c(\omega)(1+|\omega(a)|)(1+|\omega(b)|)$ для всех $a, b \in B$, где $c(\omega) < \infty$.

Лемма 3.4. Для всех $a_1, \dots, a_n \in B$ справедливо неравенство

$$\left| \omega \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \right| \leq q^{(n-1)} \prod_{i=1}^n (1 + |\omega(a_i)|),$$

где $q = \max(1, 2c(\omega))$.

Доказательство элементарно.

Лемма 3.5. Пусть $\xi_{k,n}$, $k = 1, \dots, s$, $n = 1, 2, \dots$, — независимые при каждом n с.в. и последовательности $\{\omega(\xi_{k,n})\}_{n=1}^\infty$ равномерно интегри-

руемы. Тогда последовательность $\left\{ \omega \left(\sum_{k=1}^s \xi_{k,n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно интегрируема.

Доказательство. В силу леммы 3.4 имеем

$$\beta_n(M) = E \left(\left| \omega \left(\sum_{k=1}^s \xi_{k,n} \right) \right| I \left(\left\| \sum_{k=1}^s \xi_{k,n} \right\| \geq sM \right) \right) \leq \\ \leq q^{s-1} \sum_{k=1}^s E \left((1 + |\omega(\xi_{k,n})|) I(\|\xi_{k,n}\| \geq M) \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n (1 + E|\omega(\xi_{i,n})|).$$

Следовательно, $\sup_n \beta_n(M) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$. Лемма доказана.

Пусть $\{\xi_{i,k}\}_{i=1,k=1}^{\infty,n}$ — двойная последовательность н.с.в., причем $\xi_{i,k}$ имеют распределение μ_k . Через τ обозначим с.в. с х.ф.

$$\exp \left(\sum_{k=1}^n \int_B (e^{i(u,x)} - 1) d\mu_k(x) \right), \quad u \in B^*,$$

через η — с.в., которая не зависит от τ и $\{\xi_{i,k}\}_{i=1,k=1}^{\infty,n}$. Пусть $\nu_1, \nu_2, \dots$ — последовательность пуассоновских н.с.в. с параметром 1.

Лемма 3.6. Предположим, что $\sum_{k=1}^n \int_B (1 + |\omega(x)|) d\mu_k(x) + E|\omega(\eta)| < \infty$. Тогда

$$E\omega(\tau + \eta) = \sum_{z_1, \dots, z_n=0}^{\infty} E\omega \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{z_k} \xi_{i,k} + \eta \right) \prod_{k=1}^n P(\nu_1 = z_k),$$

причем ряд сходится абсолютно.

Доказательство. Распределение с.в. τ совпадает с распределением с.в. $\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{v_k} \xi_{i,k}$. Положим $a = \sum_{k=1}^n \int_B (1 + |\omega(x)|) d\mu_k(x)$. В силу леммы 3.4

$$\left| E\omega \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{z_k} \xi_{i,k} + \eta \right) \right| \leq \exp \left(\sum_{i=1}^n z_i \ln q \right) (1 + E|\omega(\eta)|) \prod_{k=1}^n \times \\ \times \prod_{i=1}^{z_k} (1 + E|\omega(\xi_{i,k})|) \leq \exp \left(\sum_{i=1}^n z_i \ln(aq) \right) (1 + E|\omega(\eta)|).$$

Следовательно,

$$\sum_{z_1, \dots, z_n=0}^{\infty} \left| E\omega \left(\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{z_k} \xi_{i,k} + \eta \right) \right| \prod_{k=1}^n P(\nu_1 = z_k) \leq \\ \leq (1 + E|\omega(\eta)|) \sum_{z_1, \dots, z_n=0}^{\infty} \exp \left(\sum_{i=1}^n z_i \ln(aq) \right) \prod_{k=1}^n P(\nu_1 = z_k) = \\ = (1 + E|\omega(\eta)|) \left(e^{-1} \sum_{s=0}^{\infty} (aq)^s / s! \right)^n < \infty.$$

Лемма доказана.

Пусть $S(B)$ — пространство вероятностных распределений, заданных на борелевской σ -алгебре $\mathcal{B}(B)$. Будем считать, что основное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ столь широкое, что существует последовательность $\{\mathcal{F}_i\}_{i=0}^{\infty}$ независимых σ -подалгебр $\mathcal{F}_i$, для которой $\forall G \in S(B)$ и $i \geq 0$ $\exists$ с.в. ξ с распределением G и измеримая относительно $\mathcal{F}_i$. Пусть $\mathcal{A}_i$ — некоторые семейства с.в., измеримых относительно $\mathcal{F}_i$, $i \geq 0$. Через

$\mathcal{U}_k$ обозначим аддитивную оболочку множества $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i \setminus \mathcal{A}_k, k \geq 1$, через

W_k — аддитивную оболочку $\mathcal{A}_0 \cup \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \mathcal{A}_i, k \geq 1$, через $\mathcal{U}$ — аддитивную

оболочку $\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i$. Пусть f, g — некоторые функции из $\mathcal{U}$ в $\mathbb{R}$.

Лемма 3.7. Если существуют такие $\omega_i \in \mathcal{A}_i, i \geq 1$, что для всякого $y \in \mathcal{U}_i, i \geq 1$, справедливо

$$\inf_{x \in \mathcal{A}_i} (f(x+y) + g(x)) = f(\omega_i + y) + g(\omega_i),$$

то для всякого $y \in W_k, k \geq 1$, справедливо

$$\inf_{x_i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq k} \left(f\left(\sum_{i=1}^k x_i + y\right) + \sum_{i=1}^k g(x_i) \right) = f\left(\sum_{i=1}^k \omega_i + y\right) + \sum_{i=1}^k g(\omega_i).$$

Лемма 3.8. Если существуют $\omega_i \in \mathcal{A}_i, i \geq 1$, такие, что для всех $x \in \mathcal{A}_i, y \in \mathcal{U}_i, i \geq 1$, справедливо $f(x+y) + g(x) \geq f(\omega_i + y) + g(\omega_i)$, то для всех $y \in W_k, x_i \in \mathcal{A}_i, k \geq 1, 1 \leq i \leq k$, справедливо

$$f\left(\sum_{i=1}^k x_i + y\right) + \sum_{i=1}^k g(x_i) \geq f\left(\sum_{i=1}^k \omega_i + y\right) + \sum_{i=1}^k g(\omega_i).$$

Доказательство леммы 3.7 ведем по индукции. Из условий леммы следует, что достаточно обосновать индуктивный переход. Воспользуемся элементарным тождеством $\inf_{x \in C, y \in D} H(x, y) = \inf_{x \in C} \inf_{y \in D} H(x, y)$. За-

фиксируем $y \in W_{k+1}$. По построению $x+y \in W_{k+1}$ для всякого $x \in \mathcal{A}_{k+1}$. Следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned} & \inf_{x_i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq k+1} \left(f\left(\sum_{i=1}^{k+1} x_i + y\right) + \sum_{i=1}^{k+1} g(x_i) \right) = \inf_{x \in \mathcal{A}_{k+1}} \left(g(x) + \right. \\ & + \inf_{x_i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq k} \left(f\left(\sum_{i=1}^k x_i + x + y\right) + \sum_{i=1}^k g(x_i) \right) \Big) = \inf_{x \in \mathcal{A}_{k+1}} \left(g(x) + \right. \\ & + f\left(\sum_{i=1}^k \omega_i + x + y\right) + \sum_{i=1}^k g(\omega_i) \Big) = f\left(\sum_{i=1}^{k+1} \omega_i + y\right) + \sum_{i=1}^{k+1} g(\omega_i), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 3.8 аналогично предыдущему.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, φ — выпуклая функция из $\mathbb{R}^+$ в $\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ — неотрицательные вещественные числа).

Лемма 3.9. Если $\xi_1, \dots, \xi_n$ независимы и симметрично распределены, то

$$\mathbb{E} \varphi \left(\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^2 \right) \geq \mathbb{E} \varphi \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 \right).$$

Доказательство. Из условий леммы следует, что

$$\mathbb{E} \varphi \left(\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^2 \right) = \mathbb{E} \varphi \left(\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \varepsilon_i \right\|^2 \right),$$

где $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ не зависят от $\xi_1, \dots, \xi_n$. Через $\mathcal{U}$ обозначим σ -алгебру, порожденную с.в. $\xi_1, \dots, \xi_n$. В силу неравенства Йенсена

$$\mathbb{E} \left(\varphi \left(\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \varepsilon_i \right\|^2 \right) \middle| \mathcal{U} \right) \geq \varphi \left(\mathbb{E} \left(\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \varepsilon_i \right\|^2 \middle| \mathcal{U} \right) \right) = \varphi \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 \right).$$

Следовательно, мы имеем

$$\mathbb{E} \varphi \left(\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^2 \right) = \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left(\varphi \left(\left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \varepsilon_i \right\|^2 \right) \middle| \mathcal{U} \right) \right) \geq \mathbb{E} \varphi \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 \right).$$

Лемма доказана.

4. Доказательство теорем 1, 2

Доказательство теоремы 1. Зафиксируем дважды непрерывно дифференцируемую функцию φ из B в $\mathbb{R}$. Пусть ξ и η — ограниченные н. с. в. со значением в B и нулевыми средними. Положим

$$\Psi(t) = \Psi(t; x, \xi, \eta) = \varphi(x) + E\varphi(\xi + t\eta + x) - E\varphi(\xi + x) - E\varphi(t\eta + x).$$

По построению Ψ — дважды непрерывно дифференцируемая функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ и

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi'(t) = E\varphi'(\xi + t\eta + x; \eta) - E\varphi'(t\eta + x; \eta), \quad (4.1)$$

$$\Psi'(0) = 0, \quad \Psi''(t) = E\varphi''(\xi + t\eta + x; \eta, \eta) - E\varphi''(t\eta + x; \eta, \eta).$$

Покажем, что из утверждения 1 следует утверждение 3. Если φ'' выпукла, то в силу неравенства Йенсена $\Psi''(t) = E(E(\varphi''(\xi + \eta + x; \eta, \eta) - \varphi''(t\eta + x; \eta, \eta)) | \eta)) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\Psi(t) \geq 0$ для всех t и

$$\varphi(x) + E\varphi(\xi + \eta + x) - E\varphi(\xi + x) - E\varphi(\eta + x) \geq 0, \quad (4.2)$$

т. е. утверждение 3 справедливо. Если верно (4.2) для всех ограниченных н. с. в. ξ и η с нулевыми средними, то для всех $a, b, x \in B, t \in \mathbb{R}$

$$\varphi(x) + E\varphi(a\xi_1 + tb\xi_2 + x) - E\varphi(a\xi_1 + x) - E\varphi(tb\xi_2 + x) \geq 0,$$

т. е. из утверждения 3 следует утверждение 2. В силу (4.1) из последнего неравенства вытекает

$$E\varphi''(a\xi_1 + x; b, b) - E\varphi''(x; b, b) \geq 0 \quad (4.3)$$

для всех $a, b, x \in B$. Положим $a = (y - z)/2, x = (y + z)/2, y, z \in B$. Из (4.3) вытекает, что для всех $y, z, b \in B$

$$(1/2)(\varphi''(y; b, b) + \varphi''(z; b, b)) \geq \varphi''((y + z)/2; b, b).$$

Последнее неравенство влечет выпуклость φ'' . Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. с. в. с нулевыми средними. Рассмотрим сначала случай условия А, т. е. $\xi_1, \dots, \xi_n$ ограничены и φ'' выпукла. В силу теоремы 1 в этом случае достаточно доказать справедливость индуктивного перехода с $n = k$ на $n = k + 1$ при $k \geq 2$. Из теоремы 1 вытекает

$$E\varphi\left(\sum_{i=1}^{k+1} \xi_i + x\right) = E\varphi\left(\left(\sum_{i=1}^k \xi_i\right) + \xi_{k+1} + x\right) \geq E\varphi\left(\sum_{i=1}^k \xi_i + x\right) + E\varphi(\xi_{k+1} + x) - \varphi(x).$$

По предположению индукции

$$E\varphi\left(\sum_{i=1}^k \xi_i + x\right) \geq \sum_{i=1}^k E\varphi(\xi_i + x) - (k - 1)\varphi(x).$$

Следовательно,

$$E\varphi\left(\sum_{i=1}^{k+1} \xi_i + x\right) \geq \sum_{i=1}^{k+1} E\varphi(\xi_i + x) - k\varphi(x),$$

что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим случай условия Б, т. е. $E|\varphi(\xi_i)| < \infty, 1 \leq i \leq n$, и $\varphi \in \mathcal{F}_2(B)$. Положим $\xi_{i,m} = \xi_i I(\|\xi_i\| \leq m) - E(\xi_i I(\|\xi_i\| \leq m))$. Так как $\xi_{i,m}$ — ограниченные н. с. в. с нулевыми средними, то

$$E\varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi_{i,m} + x\right) \geq \sum_{i=1}^n E\varphi(\xi_{i,m} + x) - (n - 1)\varphi(x).$$

Переходя в предыдущем неравенстве в предел по $m \rightarrow \infty$, применяя лемму 3.5 и учитывая непрерывность функции φ , получим требуемое неравенство. Теорема доказана.

5. Доказательство теоремы 3

Положим $\varphi_t(x) = \|x\|^{2t}$, $g_t(y) = y^t$, $x \in H$, $y \geq 0$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что при $t \geq 4$ или $t = 1, 2, 3$ справедливо

$$\varphi_t^{(4)}(x; h, h, e, e) \geq 0, \quad (5.1)$$

где h, e — произвольные элементы H с единичной нормой. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_t^{(4)}(x; h, h, e, e) &= 16g_t^{(4)}(\|x\|^2)(x, h)^2(x, e)^2 + 8g_t^{(3)}(\|x\|^2)(x, e)^3 + (x, h)^2 + \\ &+ 4(h, e)(x, e)(x, h) + 4g_t''(\|x\|^2)(1 + 2(h, e)^2). \end{aligned} \quad (5.2)$$

В частности, очевидно, что при $t = 1$ и $t = 2$ утверждение (5.1) выполнено. Положим

$$\begin{aligned} x &= \|x\|\omega, \quad p = (\omega, h), \quad y = (\omega, e), \quad z = (h, e), \quad a = 4(t-2)(t-3), \\ b &= 2(t-2). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Перепишывая (5.2) согласно новым обозначениям, получим

$$\begin{aligned} \varphi_3^{(4)}(x; h, h, e, e) &= 24\|x\|^2(1 + 2z^2 + 2p^2 + 2y^2 + 8pyz), \\ \varphi_t^{(4)}(x; h, h, e, e) &= 4t(t-1)\|x\|^{2(t-2)}(ap^2y^2 + b(p^2 + y^2 + 4pyz) + \\ &+ 1 + 2z^2), \quad t \geq 4. \end{aligned} \quad (5.4)$$

По построению $|p|, |y|, |z| \leq 1$. Учитывая симметрию (5.4) относительно p и y , находим, что для доказательства (5.1) достаточно показать

$$1 + 2z^2 + 2p^2 + 2y^2 + 8pyz \geq 0, \quad t = 3; \quad (5.5)$$

$$\omega(p, y, z) = ap^2y^2 + b(p^2 + y^2 + 4pyz) + 1 + 2z^2 \geq 0, \quad t \geq 4, \quad (5.6)$$

где $0 \leq p, y \leq 1, |z| \leq 1$.

Докажем (5.5). Имеем

$$1 + 2z^2 + 2p^2 + 2y^2 + 8pyz \geq 8((1/3)(z^2 + p^2 + y^2) - py|z|).$$

Так как $0 \leq p, y, |z| \leq 1$, из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим вытекает $py|z| \leq (1/3)(|z|^3 + p^3 + y^3) \leq (1/3)(z^2 + p^2 + y^2)$. Следовательно, (5.5) доказано.

Перейдем к доказательству (5.6). Так как $\omega(p, y, z)$ — полином второго порядка по z , достаточно проверить справедливость (5.6) при $z = -bpy$, если $bpy \leq 1$, и при $z = -1$, если $bpy > 1$.

Пусть $z = -bpy$, $bpy \leq 1$, $0 \leq p, y \leq 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \omega(p, y, z) &= ap^2y^2 + b(p^2 + y^2 - 4b^2p^2y^2) + 1 + 2b^2p^2y^2 = \\ &= (a - 2b^2)p^2y^2 + b(p^2 + y^2) + 1 \geq (a - 2b^2 + 2b)p^2y^2 + 1. \end{aligned}$$

Имеем (см. (5.3)) $a - 2b^2 + 2b = -4(t-2)^2 = -b^2$. Следовательно, $\omega(p, y, z) \geq 1 - (bpy)^2 \geq 0$, т. е. в этом случае (5.6) доказано.

Пусть $z = -1$, $bpy > 1$, $0 \leq p, y \leq 1$. В этом случае

$$\omega(p, y, z) = ap^2y^2 + b(p^2 + y^2 - 4py) + 3 \geq ap^2y^2 - 2bpy + 3 \geq 0,$$

так как $b^2 = 4(t-2)^2 \leq 12(t-2)(t-3) = 3a$ при $t \geq 7/2$. Следовательно, (5.6), а вместе с ним и теорема доказаны.

6. Доказательство теоремы 4

Обозначим через $L(\xi)$ распределение с. в. ξ .

Лемма 6.1. Пусть $G \in Q(B)$, $\{\xi_{i,n}\}_{i=1}^{k_n}$, $n = 1, 2, \dots$, — последовательность серий н. с. в. с фиксированной суммой хвостов распределений, т. е.

$$G(A) = \sum_{i=1}^{k_n} P(\xi_{i,n} \in A)$$

для всякого борелевского $A \neq \emptyset$. Тогда последовательность $\left\{ L \left(\sum_{i=1}^{k_n} \xi_{i,n} \right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ плотна.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $s = s(\varepsilon)$ — такое натуральное число, что

$$s > G(B), \quad G(B) \leq (\varepsilon/2)(s - G(B))^2 \quad (6.1)$$

(например, $s = [(2G(B)/\varepsilon)^{1/2} + G(B)] + 1$).

Пусть K_ε — такой выпуклый компакт в B , содержащий нуль, что

$$G(B \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon/2. \quad (6.2)$$

Положим $K = sK_\varepsilon$, $A = \{\omega : \text{среди } \xi_{1,n}(\omega), \dots, \xi_{k_n,n}(\omega) \text{ не более } s, \text{ отличных от нуля}\}$, $U = \{\omega : \xi_{i,n}(\omega) \in K_\varepsilon, i = 1, \dots, k_n\}$. Нетрудно видеть, что

$$P \left(\sum_{i=1}^{k_n} \xi_{i,n} \notin K \right) \leq P(A^c) + P(U^c). \quad (6.3)$$

Оценим правую часть в (6.3). Положим $\tau_{i,n} = I(\xi_{i,n} \neq 0)$, $i = 1, \dots, k_n$. По построению $\tau_{1,n}, \dots, \tau_{k_n,n}$ — н. с. в. и

$$\sum_{i=1}^{k_n} E\tau_{i,n} = G(B), \quad \sum_{i=1}^{k_n} D\tau_{i,n} \leq G(B),$$

$$P(A^c) = P \left(\sum_{i=1}^{k_n} \tau_{i,n} > s \right).$$

Применяя неравенство Чебышева и учитывая (6.1), находим

$$P(A^c) \leq \sum_{i=1}^{k_n} D\tau_{i,n} / (s - G(B))^2 \leq \varepsilon/2. \quad (6.4)$$

С другой стороны, из определения U и (6.2) вытекает

$$P(U^c) \leq \sum_{i=1}^{k_n} P(\xi_{i,n} \notin K_\varepsilon) = G(B \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon/2.$$

Из последнего неравенства, (6.3) и (6.4) находим

$$P \left(\sum_{i=1}^{k_n} \xi_{i,n} \notin K \right) \leq \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 6.2. Пусть ξ — с. в. с распределением G и нулевым средним; ξ , η и $T(G)$ независимы. Если $E|\varphi(\xi)| < \infty$, $E|\varphi(\eta)| < \infty$, то $E\varphi(\xi + \eta) \leq E\varphi(T(G) + \eta)$.

Доказательство. В силу леммы 3.6

$$E\varphi(T(G) + \eta) = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} E\varphi \left(\sum_{i=1}^k \varepsilon_i + \eta \right) / k! \quad (6.5)$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность н. с. в. с распределением G , η не зависит от $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ и ряд в (6.5) сходится абсолютно. Применяя теорему 2, находим

$$\begin{aligned} e^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} 1/k! E\varphi \left(\sum_{i=1}^k \xi_i + \eta \right) &\geq e^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} 1/k! \left(\sum_{i=1}^k E\varphi(\xi_i + \eta) - \right. \\ &\quad \left. - (k-1) E\varphi(\eta) \right) = E\varphi(\xi + \eta) - e^{-1} E\varphi(\eta). \end{aligned}$$

Следовательно, $E\varphi(\xi + \eta) \leq E\varphi(T(G) + \eta)$, что и требовалось доказать.

Лемма 6.3. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n$ — н. с. в., причем $E\xi_i = 0$, $E|\varphi(\xi_i)| < \infty$, $1 \leq i \leq n$. Тогда

$$E\varphi\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) \leq E\varphi(\tau),$$

где τ — с. в. с х. ф. $\exp\left(\sum_{i=1}^n E(e^{i(u, \xi_i)} - 1)\right)$, $u \in B^*$.

Доказательство. Справедливость этой леммы следует из лемм 6.2 и 3.6. (Не ограничивая общности, можно считать, что $\xi_i, T(G_i)$ измеримы относительно $\mathcal{F}_i$, и взять $\mathcal{A}_i = \{\xi_i, T(G_i)\}$, $1 \leq i \leq n$; $\mathcal{A}_0$ — семейство всех таких с. в. ξ , измеримых относительно $\mathcal{F}_0$, что $E|\varphi(\xi)| < \infty$; $\omega_i = T(G_i)$, $1 \leq i \leq n$; $g(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv -\varphi(x)$.)

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 4. Неравенство (2.5) следует из леммы 6.3. Докажем утверждение (2.6). Пусть φ неотрицательна и $(\xi_{1,n}, \dots, \xi_{k_n,n})$, $n = 1, 2, \dots$, — такая последовательность серий н. с. в., что

$$E\xi_{i,n} = 0, \quad 1 \leq i \leq k_n, \quad n \geq 1,$$

$$\sum_{i=1}^{k_n} P(\xi_{i,n} \in A) = G(A), \quad A \neq \emptyset, \quad (6.6)$$

$$E \exp\left(i\left(u, \sum_{s=1}^{k_n} \xi_{s,n}\right)\right) \rightarrow \exp\left(\sum_{s=1}^{k_n} E(e^{i(u, \xi_{s,n})} - 1)\right)$$

при $n \rightarrow \infty$ для любого $u \in B^*$.

Для доказательства 2.6 достаточно показать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} E\varphi\left(\sum_{i=1}^{k_n} \xi_{i,n}\right) \geq E\varphi(\tau), \quad (6.7)$$

где τ — с. в. с х. ф. $\exp\left(\int_B e^{i(u, x)} - 1) dG(x)\right)$.

Из (6.6) и леммы 6.1 следует, что

$$\sum_{i=1}^{k_n} \xi_{i,n} \Rightarrow \tau \text{ (по распределению).}$$

Следовательно, по лемме Фату справедливо (6.7). Теорема доказана.

7. Доказательство теоремы 5

Через $\varepsilon(a, b, t)$ обозначим с. в. с распределением

$$P(\varepsilon(a, b, t) = 0) = 1 - (a^t/b)^{2/(t-2)}, \quad a, b \geq 0, \quad b \geq a^t;$$

$$P(\varepsilon(a, b, t) = \pm(b/a^2)^{1/(t-2)}) = (1/2)(a^t/b)^{2/(t-2)}.$$

Лемма 7.1. Пусть ξ симметрична распределена, $E\xi^2 = a^2$, $E|\xi|^t = b$, $b \geq a^t$, $t \geq 4$, $z \geq 0$. Тогда

$$E|\xi + z|^t \leq E|\varepsilon(a, b, t) + z|^t. \quad (7.1)$$

Доказательство. В силу результатов Хёффдинга [6] достаточно доказать (7.1) для таких симметрично распределенных с. в. ξ , функция распределения которых имеет не более 5 точек роста, т. е. $P(\xi = \pm x) = p$, $P(\xi = \pm y) = q$, $x, y > 0$, $x < y$, $p + q \leq 1$, $x^2 p + y^2 q = a^2$, $x^t p + y^t q = b$. Положим

$$b = a^2 u^{t-2}, \quad p(x, y, u) = (y^{t-2} - u^{t-2}) / (y^{t-2} - x^{t-2}),$$

$$q(x, y, u) = (u^{t-2} - x^{t-2}) / (y^{t-2} - x^{t-2}).$$

По построению $E|\xi|^t = E|\varepsilon(a, b, t)|^t$, $x \leq u \leq y$. Следовательно, можно считать $z > 0$.

После элементарных преобразований находим, что (7.1) эквивалентно

$$x^{-2}(\mathbf{E}|ex + z|^t - z^t)p(x, y, u) + y^{-2}(\mathbf{E}|ey + z|^t)q(x, y, u) \leq \leq u^{-2}(\mathbf{E}|eu + z|^t - z^t). \quad (7.2)$$

Положим

$$\begin{aligned} x &= x_1^p, \quad y = y_1^p, \quad u = u_1^p, \quad p = 1/(t-2), \\ p_1(x_1, y_1, u_1) &= p(x, y, u), \quad q_1(x_1, y_1, u_1) = q(x, y, u), \\ \Psi(\omega) &= \omega^{-2p}(\mathbf{E}|e\omega^p + z|^t - z^t), \quad \omega > 0. \end{aligned}$$

Переписывая (7.2) в соответствии с новыми обозначениями, находим, что нужно доказать справедливость следующего неравенства:

$$\Psi(x_1)p_1(x_1, y_1, u_1) + \Psi(y_1)q_1(x_1, y_1, u_1) \leq \Psi(u_1). \quad (7.3)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} p_1(x_1, y_1, u_1) &\geq 0, \quad q_1(x_1, y_1, u_1) \geq 0, \\ p_1(x_1, y_1, u_1) + q_1(x_1, y_1, u_1) &= p(x, y, u) + q(x, y, u) = 1, \\ x_1p_1(x_1, y_1, u_1) + y_1q_1(x_1, y_1, u_1) &= x^{t-2}p(x, y, u) + y^{t-2}q(x, y, u) = u^{t-2} = u_1. \end{aligned}$$

В силу леммы 3.2 функция Ψ вогнута. Следовательно, (7.3), а вместе с ним и лемма доказаны.

Лемма 7.2. Пусть $t \geq 4$, $0 \leq a_1 \leq a_2$, $0 \leq b_1 \leq b_2$, $a_i^t \leq b_i$, $i = 1, 2$, $z \geq 0$. Тогда

$$\mathbf{E}|e(a_1, b_1, t) + z|^t \leq \mathbf{E}|e(a_2, b_2, t) + z|^t. \quad (7.4)$$

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать (7.4) в случае $0 < a_1 < a_2$, $0 < b_1 < b_2$, $z > 0$. Положим

$$\begin{aligned} b_i &= a_i^2 u_i^{t-2}, \quad p = 1/(t-2), \quad q = a_1^2/a_2^2, \\ \Psi(\omega) &= \omega^{-2p}(\mathbf{E}|e\omega^p + z|^t - z^t), \quad u_i = y_i^p, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

По построению (7.4) эквивалентно $\Psi(y_1)q \leq \Psi(y_2)$, где $0 < q < y_2$, $y_1q < y_2$, $y_1, y_2 > 0$.

Положим $x = (y_2 - qy_1)/(1 - q)$. В силу леммы 3.2 функция Ψ неотрицательна и вогнута. Следовательно,

$$\Psi(y_1)q \leq \Psi(y_1)q + \Psi(x)(1 - q) \leq \Psi(y_1q + x(1 - q)) = \Psi(y_2).$$

Лемма доказана.

Лемма 7.3. Пусть $\xi, \eta, e(a, b, t)$ независимы, ξ симметрично распределена, $\mathbf{E}|\eta|^t < \infty$, $\mathbf{E}\xi^2 \leq a^2$, $\mathbf{E}|\xi|^t \leq b$, $a^t \leq b$, $a, b \geq 0$, $t \geq 4$. Тогда

$$\mathbf{E}|\xi + \eta|^t \leq \mathbf{E}|e(a, b, t) + \eta|^t.$$

Доказательство. Справедливость леммы 7.3 следует из симметричности распределений с.в. $\xi, e(a, b, t)$ и лемм 7.1, 7.2.

Лемма 7.4. Пусть ξ симметрично распределена; ξ, η и e независимы, $\mathbf{E}\xi^2 = a^2$, $\mathbf{E}|\xi|^t < \infty$, $a > 0$, $\mathbf{E}|\eta|^t < \infty$, $t \geq 4$. Тогда

$$\mathbf{E}|\xi + \eta|^t - \mathbf{E}|\xi|^t \geq \mathbf{E}|ea + \eta|^t - a^t.$$

Доказательство. В силу симметричности распределений ξ и e достаточно рассмотреть случай $\eta = z > 0$, т. е. доказать неравенство

$$\mathbf{E}|\xi + z|^t - \mathbf{E}|\xi|^t \geq \mathbf{E}|ea + z|^t - a^t. \quad (7.5)$$

В свою очередь, так же как и при доказательстве леммы 7.1, можно ограничиться симметрично распределенными с.в. ξ , функции распределения которых имеют не более 5 точек роста, т. е. $P(\xi = \pm x) = p$, $P(\xi = \pm y) = q$, $x^2p + y^2q = a^2$, $x, y, p, q \geq 0$, $p + q \leq 1$. Положим

$$v = u^{1/2}, \quad y = v^{1/2}, \quad H(\omega) = \mathbf{E}|e\omega^{1/2} + z|^t - \omega^{t/2} - z^t, \quad \omega \geq 0.$$

Нетрудно видеть, что (7.5) в этом случае эквивалентно

$$H(u^2)p + H(v^2)q \geq H(a^2), \quad (7.6)$$

где $p + q \leq 1$, $p, q \geq 0$, $pu^2 + qv^2 = a^2$. В силу леммы 3.3 функция H неотрицательна и выпукла. Очевидно, что $H(0) = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} H(u^2)p + H(v^2)q &= (p + q)(H(u^2)p/(p + q) + H(v^2)q/(p + q)) \geq \\ &\geq (p + q)H(a^2/(p + q)) = H(a^2/(p + q))(p + q) + H(0)(1 - p - q) \geq H(a^2). \end{aligned}$$

Тем самым (7.6), а вместе с ним и лемма доказаны.

Лемма 7.5. При $t \geq 1$ и всех x справедливо неравенство

$$||1 + x|^t - 1| \leq 2^t t (|x| + |x|^t).$$

Доказательство. При $x \leq -1$ доказываемое неравенство очевидно. Пусть $x > -1$. Имеем

$$0 \leq (1 + x)^t - 1 \leq t \int_0^x (1 + y)^{t-1} dy.$$

Учитывая выпуклость функции x^t по x при $t \geq 1$, получим $(1 + y)^{t-1} = (1 + y)^t/(1 + y) \leq 2^t(1 - y^t)/(1 + y) \leq 2^t(1 + y^{t-1})$. Следовательно, в случае $x > -1$ имеем

$$0 \leq (1 + x)^t - 1 \leq 2^t t \int_0^{|x|} (1 + y^{t-1}) dy \leq 2^t t (|x| + |x|^t).$$

Лемма доказана.

Лемма 7.6. Пусть ε и η независимы, $E|\eta|^t < \infty$, $t \geq 4$, $a, b \geq 0$, $a^t \leq b$. Тогда

$$\inf_{\xi} E|\xi + \eta|^t = b + E|\varepsilon a + \eta|^t - a^t,$$

где $\inf$ берется по всем симметрично распределенным с. в. ξ , независимым от η , с фиксированными $E\xi^2 = a^2$ и $E|\xi|^t = b$.

Доказательство. Из леммы 7.4 вытекает, что достаточно найти симметрично распределенные с. в. ξ_n , независимые от η и такие, что

$$E\xi_n^2 = a^2, \quad E|\xi_n|^t = b; \quad (7.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E|\xi_n + \eta|^t = E|\xi a + \eta|^t + b - a^t. \quad (7.8)$$

Если $b = a^t$, то можно взять $\xi_n = \varepsilon_1 a$, где $P(\varepsilon_1 = \pm 1) = 1/2$ и ε_1 не зависит от η , ε . Пусть $a^t < b$. Положим

$$\delta_n = 1/n, \quad P(\xi_n = \pm a) = (1/2)(1 - \delta_n),$$

$$P(\xi_n = \pm b_n) = (1/2)\delta_n^*, \quad \delta_n^* = a_n^2 \delta_n / b_n^2,$$

$$P(\xi_n = 0) = \delta_n - \delta_n^*,$$

$$b_n = ((b - a^t(1 - \delta_n))/a^2 \delta_n)^{1/(t-2)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

По построению

$$\begin{aligned} b_n &\geq a, \quad 0 \leq \delta_n^* \leq \delta_n, \quad E\xi_n^2 = a^2, \quad E|\xi_n|^t = b, \quad n \geq 1, \\ \delta_n &\rightarrow 0, \quad b_n \rightarrow \infty, \quad b_n^t \delta_n^* \rightarrow b - a^t, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (7.9)$$

т. е. (7.7) выполнено. Покажем, что верно (7.8). Имеем

$$\begin{aligned} E|\xi_n + \eta|^t &= E|\varepsilon a + \eta|^t (1 - \delta_n) + E|\eta|^t (\delta_n - \delta_n^*) + \\ &+ (E|\varepsilon b_n + \eta|^t - b_n^t) \delta_n^* + b_n^t \delta_n^*. \end{aligned}$$

Из условий леммы и (7.9) следует, что для доказательства (7.8) достаточно показать

$$(E|\varepsilon b_n + \eta|^t - b_n^t) \delta_n^* \rightarrow 0.$$

В силу леммы 7.5

$$\begin{aligned} |(\mathbf{E}|\varepsilon b_n + \eta|^t - b_n^t) \delta_n^*| &= b_n^t \delta_n^* |\mathbf{E}|\varepsilon + \eta/b_n|^t - 1| \leq \\ &\leq b_n^t \delta_n^* 2^t (\mathbf{E}|\eta|/b_n + \mathbf{E}|\eta|^t/b_n^t) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 5. Утверждение (2.7) следует из лемм 7.3 и 3.7. (Нужно в качестве $\mathcal{A}_i$ взять семейство симметричных с. в. ξ_i , измеримых относительно $\mathcal{F}_i$ и таких, что $\mathbf{E}\xi_i^2 \leq a_i^2$, $\mathbf{E}|\xi_i|^t \leq b_i$, $1 \leq i \leq n$, а в качестве $\mathcal{A}_0$ — семейство таких с. в. η , измеримых относительно $\mathcal{F}_0$, что $\mathbf{E}|\eta|^t < \infty$. Здесь $g(x) \equiv 0$, $f(x) \equiv -x^t$.) Аналогично утверждение (2.9) следует из лемм 7.6 и 3.7. Докажем (2.8). По построению

$$\mathcal{U}_3(\mathbf{R}) \subset \mathcal{U}_1(\mathbf{R}) \subset \mathcal{U}_2(\mathbf{R}), \quad \mathcal{U}_4(\mathbf{R}) \subset \mathcal{U}_2(\mathbf{R}). \quad (7.10)$$

Пусть $G_0(\{x\}) = G_0(\{-x\}) = p/2$, $G_0(B) = p$, $x = (A/D^2)^{1/(t-2)}$, $p = (A/D^t)^{-2/(t-2)}$, т. е. G_0 — симметричная мера и $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dG_0(x) = D^2$,

$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^t dG_0(x) = A$. Распределение с. в. $T(G_0)$ совпадает с распределением с. в. $(A/D^2)^{1/(t-2)}(\xi_1(A, D) - \xi_2(A, D))$, где $\xi_1(A, D)$ и $\xi_2(A, D)$ — пуассоновские п. с. в. с параметром $(1/2)(A/D^t)^{-2/(t-2)}$. В силу теоремы 4

$$\sup_{(\xi, n) \in \mathcal{U}_3(\mathbf{R})} \mathbf{E} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^t \geq \mathbf{E} |T(G_0)|^t. \quad (7.11)$$

С другой стороны, из той же теоремы и уже доказанного утверждения (2.7) вытекает

$$\begin{aligned} \sup_{(\xi, n) \in \mathcal{U}_2(\mathbf{R})} \mathbf{E} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^t &= \sup_{(\xi, n) \in \mathcal{U}_4(\mathbf{R})} \mathbf{E} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^t = \\ &= \sup_n \mathbf{E} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(Dn^{-1/2}, An^{-1}, t) \right|^t. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(\varepsilon_i(Dn^{-1/2}, An^{-1}, t) \in \Gamma) = G_0(\Gamma), \quad \Gamma \neq \emptyset.$$

Следовательно, еще раз применяя теорему 4, находим

$$\sup_{(\xi, n) \in \mathcal{U}_2(\mathbf{R})} \mathbf{E} \left| \sum_{i=1}^n \xi_i \right|^t = \sup_n \mathbf{E} \left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i(Dn^{-1/2}, An^{-1}, t) \right|^t \leq \mathbf{E} |T(G_0)|^t.$$

Из последнего неравенства, (7.10) и (7.11) вытекает справедливость утверждения (2.8). Теорема доказана.

8. Доказательство теоремы 6

Лемма 8.1. Для того чтобы при всех $a, b \in H$ и $c \in \mathbf{R}$ выполнялось неравенство

$$\mathbf{E}\varphi(\|a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2\|_{\varepsilon_3} + c) \leq \mathbf{E}\varphi(\|a\|_{\varepsilon_1} + \|b\|_{\varepsilon_2} + c), \quad (8.1)$$

необходимо и достаточно, чтобы φ'' была выпукла.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $\|a\| \geq \|b\| > 0$. Имеем

$$\mathbf{E}\varphi(\|a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2\|_{\varepsilon_3} + c) = \Psi(\omega(1 + hz), c) + \Psi(\omega(1 - hz), c);$$

$$\mathbf{E}\varphi(\|a\|_{\varepsilon_1} + \|b\|_{\varepsilon_2} + c) = \Psi(\omega(1 + z), c) + \Psi(\omega(1 - z), c),$$

где $\Psi(x, c) = \mathbf{E}\varphi(c + \varepsilon x^{1/2})$, $x > 0$, и

$$\omega = \|a\|^2 + \|b\|^2, \quad z = 2\|a\|\|b\|/\omega, \quad h = |(a, b)|/(\|a\|\|b\|). \quad (8.2)$$

Если $\dim H \geq 2$, то для всех $\omega > 0$, $0 \leq z$, $h \leq 1$, найдутся $a, b \in H$, для которых выполнено (8.2). Следовательно, (8.1) эквивалентно

$$\Psi(\omega(1+hz), c) + \Psi(\omega(1-hz), c) \leq \Psi(\omega(1+z), c) + \Psi(\omega(1-z), c) \quad (8.3)$$

для всех $\omega > 0$, $0 \leq h$, $z \leq 1$. По построению $\Psi(x, c)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция по x . Нетрудно видеть, что (8.3) эквивалентно

$$\partial^2 \Psi(x, c) / \partial^2 x \geq 0 \quad \forall x > 0, \quad \forall c \in \mathbf{R}.$$

В силу леммы 3.1 последнее утверждение эквивалентно выпуклости функции φ'' . Лемма доказана.

Докажем теорему 6. В силу леммы 8.1 достаточно доказать, что

$$\mathbf{E}\varphi\left(\left\|\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i\right\| \varepsilon_{n+1} + x\right) \leq \mathbf{E}\varphi\left(\sum_{i=1}^n \|a_i\| \varepsilon_i + x\right), \quad (8.4)$$

где φ'' выпукла, $a_1, \dots, a_n \in H$, $x \in \mathbf{R}$. В силу леммы 8.1 для доказательства (8.4) также достаточно обосновать индуктивный переход с $n = k$ на $n = k + 1$ при $k \geq 2$. Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\varphi\left(\left\|\sum_{i=1}^{k+1} a_i \varepsilon_i\right\| \varepsilon_{k+2} + x\right) &= \mathbf{E}\varphi\left(\left\|\sum_{i=1}^{k-1} a_i \varepsilon_i + (a_k \varepsilon_k + a_{k+1} \varepsilon_{k+1})\right\| \varepsilon_{k+2} + x\right) \leq \\ &\leq \mathbf{E}\varphi\left(\|a_k \varepsilon_k + a_{k+1} \varepsilon_{k+1}\| \varepsilon_{k+2} + \left(x + \sum_{i=1}^{k-1} \|a_i\| \varepsilon_i\right)\right) \leq \mathbf{E}\varphi\left(\sum_{i=1}^{k+1} \|a_i\| \varepsilon_i + x\right). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

9. Доказательство теоремы 7

Лемма 9.1. Пусть ξ и η — неотрицательные н. с. в., $\mathbf{E}\eta = a$, $\mathbf{E}\xi^r < \infty$, $\mathbf{E}\eta^r < \infty$, $r \geq 2$. Тогда

$$\mathbf{E}(\eta + \xi)^r \geq \mathbf{E}\eta^r + \mathbf{E}(a + \xi)^r - a^r. \quad (9.1)$$

Доказательство. В силу результатов Хёфдинга [6] достаточно доказать (9.1) для неотрицательных η , функция распределения которых имеет не более двух точек роста, т. е. $\mathbf{P}(\eta = y) = q$, $\mathbf{P}(\eta = x) = p$, $x, y, p, q \geq 0$, $p + q = 1$, $xp + yq = a$. Следовательно, (9.1) эквивалентно неравенству

$$(\mathbf{E}(x + \xi)^r - x^r)p + (\mathbf{E}(y + \xi)^r - y^r)q \geq \mathbf{E}(a + \xi)^r - a^r.$$

Последнее неравенство следует из выпуклости функции $\varphi(x) = \mathbf{E}(x + \xi)^r - x^r$ по $r \geq 2$ при $r \geq 2$, $\xi \geq 0$, $\mathbf{E}\xi^r < \infty$. Лемма доказана.

Лемма 9.2. Пусть с. в. $\xi \geq 0$; $r \geq 2$, $\mathbf{E}\xi^r < \infty$, $a, b \geq 0$, $b \geq a^r$. Тогда

$$\inf_{\eta} \mathbf{E}(\xi + \eta)^r = b + \mathbf{E}(a + \xi)^r - a^r,$$

где $\inf$ берется по всем неотрицательным с. в. η с фиксированными $\mathbf{E}\eta = a$, $\mathbf{E}\eta^r = b$ и независимым от с. в. ξ .

Доказательство аналогично доказательству леммы 7.6.

Зафиксируем $r \geq 2$, $a_i, b_i \geq 0$, $b_i \geq a_i^{2r}$, $i = 1, 2, \dots$. Через $W(n, r)$ обозначим множество таких наборов н. с. в. $(\eta, n) = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, что $\eta_i \geq 0$, $\mathbf{E}\eta_i = a_i^2$, $\mathbf{E}\eta_i^r = b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Лемма 9.3.

$$\inf_{(\eta, n) \in W(n, r)} \mathbf{E}\left(\sum_{i=1}^n \eta_i\right)^r = \sum_{i=1}^n b_i - a_i^2 + \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^r.$$

Доказательство следует из лемм 9.2 и 3.7. (Нужно взять в качестве $\mathcal{A}_i$ семейства таких неотрицательных с. в. η , измеримых относительно

$\mathcal{F}_i$, что $E\eta = a_i^2$, $E\eta^r = b_i$, $1 \leq i \leq n$, а в качестве $\mathcal{A}_0$ — семейство неотрицательных с.в. ξ , измеримых относительно $\mathcal{F}_0$, для которых $E\xi^r < \infty$; $f(x) = g(x) = x^r$.)

Перейдем к доказательству теоремы 7. Докажем (2.12). В силу леммы 3.9

$$E \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^t \geq E \left(\sum_{i=1}^n \|\xi_i\|^2 \right)^{t/2}.$$

Следовательно, если $\dim H \geq n$, то $\inf$ в (2.12) нужно искать среди ортогональных ξ_i , $1 \leq i \leq n$. Значит,

$$\inf_{(\xi, n) \in M_1(n, H)} E \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i \right\|^t = \inf_{(\eta, n) \in W(n, t/2)} E \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \right)^{t/2}.$$

В силу леммы 9.3

$$\inf_{(\eta, n) \in W(n, t/2)} E \left(\sum_{i=1}^n \eta_i \right)^{t/2} = \sum_{i=1}^n b_i - a_i^t + \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{t/2},$$

т. е. утверждение (2.12) доказано.

Докажем (2.13). Положим

$$\mathcal{P}(A, D) = \inf_{n, a_i, b_i} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i^t),$$

где $\inf$ берется по всем неотрицательным a_i, b_i , $1 \leq i \leq n$, и натуральным n таким, что

$$b_i \geq a_i^t, \quad \sum_{i=1}^n b_i = A, \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 = D^2. \quad (9.2)$$

В силу уже доказанного утверждения (2.12) для доказательства (2.13) нужно показать, что

$$\mathcal{P}(A, D) = \max(0, A - D^t).$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i^t) &\geq 0, \\ \sum_{i=1}^n (b_i - a_i^t) &\geq \sum_{i=1}^n b_i - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{t/2} \geq A - D^t. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathcal{P}(A, D) \geq \max(0, A - D^t). \quad (9.3)$$

Пусть $A < D^t$. Зафиксируем ε , $0 < \varepsilon < A$. Положим

$$\begin{aligned} a_k^2 &= (D^2 - (A - \varepsilon)^{2/t}) / (n - 1), \quad b_k = \varepsilon / (n - 1), \quad k = 2, \dots, n, \\ a_1^2 &= (A - \varepsilon)^{2/t}, \quad b_1 = A - \varepsilon, \quad a_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Начиная с некоторого $n_0 = n_0(\varepsilon)$, данные $a_1, \dots, a_n$ и $b_1, \dots, b_n$ удовлетворяют (9.2). Следовательно,

$$\mathcal{P}(A, D) \leq \sum_{i=1}^n (b_i - a_i^t) = \sum_{i=2}^n (b_i - a_i^t) \leq \sum_{i=2}^n b_i = \varepsilon,$$

т. е. $\mathcal{P}(A, D) \leq \varepsilon$. В силу произвольности ε из последнего неравенства и (9.3) вытекает $\mathcal{P}(A, D) = 0$ в случае $A < D^t$. Пусть $A \geq D^t$. Положим $n = 1$, $a_1 = D$, $b_1 = A$. Тогда (9.2) выполнено и

$$\mathcal{P}(A, D) \leq b_1 - a_1^t = A - D^t.$$

Из последнего неравенства и (9.3) вытекает $\mathcal{P}(A, D) = A - D^t$ в случае $A \geq D^t$.

Следовательно, $\mathcal{P}(A, D) = \max(0, A - D^t)$, что и требовалось доказать.

Докажем (2.14). Для этого достаточно показать, что

$$\inf_n (A - D^t n^{1-t/2}) = \max(A - D^t, A - D^t [(A/D^t)^{2/(t-2)}]^{(2-t)/2}), \quad (9.4)$$

где $\inf$ берется по всем натуральным n , для которых $A \geq D^t n^{1-t/2}$. Проверка (9.4) элементарна. Теорема доказана.

10. Доказательство теоремы 8

Докажем первую часть теоремы. Пусть φ — дважды непрерывно дифференцируемая функция. Нетрудно проверить, что неравенство

$$2E\varphi(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + x) \leq E\varphi(\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 a + x) + E\varphi(\varepsilon_1 b + \varepsilon_2 b + x) \quad (10.1)$$

для любых $a, b, x \in B$ эквивалентно неравенству

$$\begin{aligned} \Psi(t) = \Psi(t; x, y, z) &= (E\varphi(x + tz + \varepsilon y) - \varphi(x + tz)) + \\ &+ (E\varphi(x - tz + \varepsilon y) - \varphi(x - tz)) - 2E\varphi(x + \varepsilon y) \geq 0 \end{aligned}$$

для любых $x, y, z \in B$ и $t \in \mathbb{R}$. По построению Ψ — дважды непрерывно дифференцируемая функция по t и

$$\begin{aligned} \Psi(0) = 0, \quad \Psi'(0) = 0, \quad \Psi''(t) &= E\varphi''(x + tz + \varepsilon y; z, z) - \varphi''(x + tz; z, z) + \\ &+ E\varphi''(x - tz + \varepsilon y; z, z) - \varphi''(x - tz; z, z). \end{aligned}$$

Пусть φ'' выпукла. Тогда $\Psi''(t) \geq 0$ для всех t . Значит, $\Psi(t) \geq 0$ для всех t и (10.1) выполнено. Пусть выполнено (10.1). Тогда

$$(1/2)(\varphi''(x + y; z, z) + \varphi''(x - y; z, z)) \geq \varphi''(x; z, z)$$

для всех $x, y, z \in B$, так как $\Psi''(0) \geq 0$. Следовательно, φ'' выпукла.

Докажем вторую часть теоремы. Пусть G_1 и G_2 — симметричные меры на $\mathcal{B}(B)$, $\varphi \in \mathcal{F}_2(B)$, $\int_B |\varphi(x)| dG_i(x) < \infty$, $i = 1, 2$. Из уже доказанного утверждения и леммы 3.6 вытекает неравенство

$$E\varphi(T(1/2(G_1 + G_2))) \leq (1/2)(E\varphi(T(G_1)) + E\varphi(T(G_2))).$$

Следовательно, для доказательства требуемого утверждения достаточно показать полунепрерывность функций $K(\alpha) = E\varphi(T(G + \alpha G_0))$ по α , т. е. доказать

$$\lim_{\alpha > 0, \alpha \rightarrow 0} |E\varphi(\eta + T(\alpha G)) - E\varphi(\eta)| = 0, \quad (10.2)$$

где $E|\varphi(\eta)| < \infty$, $\int_B (1 + |\varphi(x)|) dG(x) < \infty$, $G(\{0\}) = 0$, η и $T(\alpha G)$ независимы.

Докажем (10.2). Не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi(0) = 0$. Положим

$$a = \alpha \int_B (1 + |\varphi(x)|) dG(x).$$

Из леммы 3.6 следует, что при достаточно малых α

$$E\varphi(\eta + T(\alpha G)) - E\varphi(\eta) = e^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} E \left(\varphi \left(\sum_{i=1}^k \xi_i + \eta \right) - \varphi(\eta) \right) / k!,$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность н. с. в. с одинаковым распределением $P(\xi_1 \in A) = \alpha G(A)$, $A \neq 0$, $P(\xi_1 = 0) = 1 - \alpha G(A)$ и не зависит от η . Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \left| E \left(\varphi \left(\sum_{i=1}^k \xi_i + \eta \right) - \varphi(\eta) \right) \right| &\leq k E\varphi(\eta) P(\xi_1 \neq 0) + \\ &+ \sum_{i=1}^k E \left(\left| \varphi \left(\sum_{j=1}^k \xi_j + \eta \right) \right| I(\xi_i \neq 0) \right). \end{aligned}$$

В силу леммы 3.4

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \mathbf{E} \left(\left| \varphi \left(\sum_{j=1}^k \xi_j + \eta \right) \right| I(\xi_i \neq 0) \right) &\leq q^k (1 + \mathbf{E} |\varphi(\eta)|) \times \\ &\times \sum_{i=1}^k \mathbf{E} ((1 + |\varphi(\xi_i)|) I(\xi_i \neq 0)) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^k \mathbf{E} (1 + |\varphi(\xi_j)|) \leq \\ &\leq kq^k (1 + \mathbf{E} |\varphi(\eta)|) (1 + a)^{k-1} a, \end{aligned}$$

где $q = \max(1, 2c(\varphi)) < \infty$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\mathbf{E} \varphi(\eta + T(\alpha G)) - \mathbf{E} \varphi(\eta)| &\leq e^{-1} a (1 + \mathbf{E} |\varphi(\eta)|) \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} (k + kq^k (1 + a)^{k-1}) / k! \leq ca, \end{aligned}$$

где $c < \infty$ и зависит лишь от η и q . Следовательно, (10.2), а с ним и теорема доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Прохоров Ю. В. Экстремальные задачи в предельных теоремах. — Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике. Вильнюс, 1962, с. 77—84.
2. Пинелис И. Ф., Утев С. А. Оценки моментов сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, № 3, с. 554—557.
3. Утев С. А. Экстремальные задачи в моментных неравенствах. — Теория вероятн. и ее примен., 1984, т. 29, № 2, с. 411—412.
4. Rosenthal H. P. On the span in L^p of sequences of independent random variables. — In: Proceedings of the sixth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability. V. 2, Berkeley, 1972, p. 149—167.
5. Нараев С. В. О вероятностях больших отклонений в банаховых пространствах. — Мат. заметки, 1983, т. 34, № 2, с. 309—313.
6. Hoeffding W. The extrema of the expected value of a function of independent random variables. — Ann. Math. Statistics, 1955, v. 26, N 2, p. 268—275.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

ОБ УСРЕДНЕНИИ ДИФФУЗИИ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

В. В. ЮРИНСКИЙ

В этой работе рассматривается предельное поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ дифференциальных операторов вида

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u &\equiv (1/2) \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x/\varepsilon) D_i D_j u + \sum_{i=1}^d b_i(x/\varepsilon) D_i u - b_0(x/\varepsilon) u, \\ D_i &= \partial / \partial x^{(i)}, \quad x = \{x^{(i)}\} \in R^d. \end{aligned}$$

Возможность усреднения L_ε , т. е. сходимость L_ε в определенном смысле к оператору того же вида с постоянными коэффициентами (усредненному оператору), была при достаточно общих предположениях установлена ранее (см., например, [1—3]).

Ниже оцениваются погрешность усреднения в задаче Дирихле для оператора L_ε и скорость сходимости некоторых процедур вычисления коэффициентов усредненного оператора в предположении, что коэффициенты $a_{ij}(y, \omega)$, $b_i(y, \omega)$ являются однородными случайными полями.

Всюду в дальнейшем размерность подчинена условию $d \geq 3$. Поле коэффициентов $\{a_{ij}, b_i\}$ имеет конечный радиус зависимости, разброс собственных чисел матрицы $\|a_{ij}\|$ достаточно мал.

Предположение о том, что поле коэффициентов имеет конечный радиус зависимости, позволяет утверждать, что погрешность от замены