ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. В. ПОЖИДАЕВ

Усреднению эллиптических операторов при различных предположениях о строении коэффициентов посвящено большое число работ. Значительная часть результатов такого рода отражена в фундаментальном обзоре [1] (см. также статьи [2—7], посвященные родственным вопросам).

В настоящей работе рассматривается предельное поведение при $\varepsilon \to 0$ решения задачи Дирихле

$$-\sum_{i,j=1}^{n} D_i (a_{ij}(x) D_j w_\varepsilon) + \sum_{i=1}^{n} b_i (x/\varepsilon, \omega) D_i w_\varepsilon + (d(x) + b_0(x/\varepsilon, \omega)) w_\varepsilon = \\ = f(x), \quad x \in V; \quad w_\varepsilon|_{\partial V} = g(x) \tag{1}$$

со случайными быстроосциллирующими коэффициентами $b_i(x/\varepsilon, \omega)$ в ограниченной области V с гладкой границей ∂V.

Показано, что при надлежащей нормировке распределение решения слабо сходится к гауссовскому, если в качестве пространства реализаций выбрать $W_2^r(V)$, $r = 2 - n/2 - \delta$, $\delta > 0$. Ранее [8] слабая сходимость была установлена лишь в пространстве $W_2^{-[n/2]-1-\delta}(V)$, в [9, 10] размерность пространства не превышает трех и случаен только коэффициент при решении.

В отличие от известных результатов Р. З. Хасьминского [11, 12] специфическим для «многомерного времени» при $n > 3$ оказывается появление детерминированных поправок к среднему решению, убывающих медленнее, чем центрированная случайная составляющая невязки.

Формулировка и доказательство теоремы даны в п. 1. В п. 2 приводятся необходимые для дальнейшего оценки сингулярных интегралов. В п. 3 усиливаются оценки погрешности усреднения работ [6, 8]. Выделение асимптотически нормальной составляющей решения проведено в п. 4, а в п. 5 разобраны примеры, показывающие неулучшаемость по порядку ε оценки скорости сходимости в теореме 3.1 ($n \geqslant 5$) и отсутствие слабой сходимости распределений решений (1) в $W_2^{2-2k+\delta}(V)$ при $n = 4k + 1$, $\delta > 0$.

1. Постановка задачи. Теорема об асимптотической нормальности решения

Применительно к целочисленному вектору $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant n$, означает, что все $\lambda_i \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Символом $\pi(k)$ обозначаем набор всевозможных целочисленных векторов $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ таких, что $0 \leqslant \lambda \leqslant n$. Для записи производной $\partial u/\partial x_i$ применяются символы $D_i u$, $u_{.i}$; $u_{.0} \equiv u$, $D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} u = \partial^{\|\alpha\|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}$, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — целочисленный мультииндекс, $\|\alpha\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

Пусть $V \subset R^n$ — ограниченная область. Тогда $W_2^k(V)$ (k — нецелое положительное число) есть пополнение множества $C_0^\infty(V)$ в норме (ср. с [13])

$$|u|^2_{W_2^k(V)} = \int_V \sum_{\|\alpha\| < k} |D^\alpha u|^2 dx + \sum_{\|\alpha\| = [k]} \int_{V^2} |D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|^2 \times \\ \times |x - y|^{-n-2(k-[k])} dx dy,$$

где $[\cdot]$ — целая часть числа.

Пусть $W_2^{-k}(V)$ — пространство, сопряженное к $W_2^k(V)$, $|u|_m \equiv |u|_{W_2^m(V)}$;

$W_2^0(V) \equiv L_2(V)$. Символом $\langle\cdot, \cdot\rangle_k$ обозначаем двойственность между $W_2^k(V)$ и $W_2^{-k}(V)$, одной буквой C — различные неслучайные, не зависящие от ε постоянные.

Предельное поведение решений задачи (1) рассматривается в работе при следующих предположениях.

Неслучайные коэффициенты удовлетворяют условию равномерной эллиптичности:

$$\forall t = (t_1, \ldots, t_n) \in R^n \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) t_i t_j \geqslant \gamma |t|^2, \quad \gamma > 0. \tag{2}$$

Кроме того, чтобы избежать технических трудностей, неслучайные коэффициенты и граница ∂V ограниченной неслучайной области V предполагаются достаточно гладкими для того, чтобы усредненная задача

$$-\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x) D_j U) + d(x) U = f(x), \quad x \in V; \quad U|_{\partial V} = g(x) \tag{3}$$

имела классическое решение.

Случайные коэффициенты $b_i(x/\varepsilon, \omega)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, предполагаются ограниченными не зависящей от случая постоянной с вероятностью 1 при всех $x \in V$

$$\sup |b_i(x/\varepsilon, \omega)| < C. \tag{4}$$

Кроме того, всюду в V выполнено условие

$$4(1-\beta)(d(x) + b_0(x/\varepsilon, \omega)) - (A^{-1}\bar{b}_\varepsilon, \bar{b}_\varepsilon) \geqslant 0, \tag{5}$$

где A^{-1} — матрица, обратная к (a_{ij}), $\bar{b}_\varepsilon = (b_i(x/\varepsilon, \omega))$, $\beta \in (0, 1)$ — неслучайная, не зависящая от ε постоянная. Предполагается также, что почти все реализации полей $b_i(x/\varepsilon, \omega)$ есть функции класса $C^1(V)$.

В этих условиях краевая задача (1) с вероятностью 1 разрешима (см. [14]) в классе $C^2(V) \cap C^1(\bar{V})$. Под случайным решением задачи (1) понимается случайное поле, почти все реализации которого удовлетворяют (1).

Предельное поведение $w_\varepsilon(x, \omega)$ изучается ниже при дополнительных ограничениях. Векторнозначное случайное поле $\bar{b}(x, \omega) = \{b_0(x, \omega), \ldots \ldots, b_n(x, \omega)\}$ центрировано математическим ожиданием

$$\mathbf{M}\bar{b}(x, \omega) = 0 \tag{6}$$

и m-зависимо, т. е. для любых $k \in N$ и набора $x_1, \ldots, x_k$ таких, что $|x_i - x_j| > m$, $i \neq j$, случайные векторы $\bar{b}(x_1, \omega), \ldots, \bar{b}(x_k, \omega)$ независимы в совокупности. Кроме того, для любой непрерывной векторнозначной неслучайной функции $\bar{f}(x) = \{f_0(x), \ldots, f_n(x)\}$ существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n} \mathbf{M} \left(\int_V \sum_{i=0}^{n} f_i(x) b_i(x/\varepsilon, \omega)\, dx \right)^2 = \sigma^2(\bar{f}) > 0. \tag{7}$$

Условие (7) выполнено, если $\bar{b}(x, \omega)$ — однородное m-зависимое поле, причем

$$\sigma^2(\bar{f}) = \sum_{i,j=0}^{n} \int_{|u| \leqslant m} R_{ij}(u)\, du \int_V f_i(x) f_j(x)\, dx,$$

где $R_{ij}(u) = \mathbf{M} b_i(y, \omega) b_j(y+u, \omega)$.

Пусть $G(x, y)$ — функция Грина задачи Дирихле (3),

$$G_{.k}(x, y) \equiv \partial G(x, y)/\partial x_k, \quad G_{.0}(x, y) \equiv G(x, y).$$

Для произвольного индекса $\alpha = (i_1, \ldots, i_k) \in \pi(k)$

$$\Gamma^\alpha f = \int_{V^k} G(x, y_1) b_{i_1}(y_1/\varepsilon, \omega) G_{.i_1}(y_1, y_2) b_{i_2}(y_2/\varepsilon, \omega) \ldots$$
$$\ldots G_{.i_{k-1}}(y_{k-1}, y_k) b_{i_k}(y_k/\varepsilon, \omega) f_{.i_k}(y_k)\, dy_1 \ldots dy_k.$$

Основной результат работы —

Теорема 1.1. *Пусть* $p=[n/2]+1$, $\delta>0$. *При* $\varepsilon\to 0$ *решение* w_ε *задачи* (1) *с коэффициентами, подчиненными условиям* (2), (4)—(7), *асимптотически нормально в том смысле, что распределение, порожденное в пространстве* $W_2^r(V)$, $r\equiv 2-n/2-\delta$, *обобщенных функций случайным полем*

$$v_\varepsilon=\varepsilon^{-n/2}\left(w_\varepsilon-U-\sum_{k=2}^{p}\sum_{\alpha\in\pi(k)}\mathrm{M}\Gamma^\alpha U\right),$$

слабо сходится к центрированному гауссовскому распределению в $W_2^r(V)$ *с характеристическим функционалом* $\varphi(\Phi)=\exp\{-\sigma^2(\bar f)/2\}$, *где* $f_i(y)=$ $=\int\limits_V \Phi(x)\,G_{\cdot i}(x,y)\,dx\cdot U_{\cdot i}(y)$, *а* $\sigma^2(\bar f)$ *определена* (7).

Ниже для удобства изложения предполагается, что справедливы леммы 4.1—4.5. Доказательства этих лемм приведены в п. 4.

Доказательство. Шар в пространстве $W_2^s(V)$ является компактом в $W_2^r(V)$ при $s>r$, так как $W_2^s(V)$ компактно вкладывается в $W_2^r(V)$.

Из неравенства Чебышева имеем оценку

$$\mathbf{P}\{|v_\varepsilon|_s>t\}\leqslant \mathbf{M}|v_\varepsilon|_s^2\,t^{-2}.$$

В силу лемм 4.2—4.4 $\sup \mathbf{M}|v_\varepsilon|_s^2<C$ и, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty}\mathbf{P}\{|v_\varepsilon|_s>t\}=0$.

Поэтому (см. [15], с. 516) семейство распределений, порожденных в пространстве $W_2^r(V)$ случайными полями v_ε, слабо компактно.

Из лемм 4.1—4.4 следует, что для всякой непрерывной функции Φ $\langle\Phi, v_\varepsilon\rangle_{-r}$ асимптотически нормальна при $\varepsilon\to 0$ с параметрами $(0,\sigma^2(\bar f))$, где $f_i(y)=\int\limits_V\Phi(x)\,G_{\cdot i}(x,y)\,dx\cdot U_{\cdot i}(y)$, а $\sigma^2(\bar f)$ определена (7).

Теорема 1.1 доказана.

2. Некоторые оценки для сингулярных интегралов

Лемма 2.1. *Пусть* $N(x,y)=g(x,y)|x-y|^{k-n}$, *где* $0<k<n$, $g(x,y)\in$ $\in C^1(V\times V)$. *Тогда при* $0<\beta<1$

$$L\equiv|N(x,z)-N(y,z)|\leqslant C|x-y|^\beta(|x-z|^{k-\beta-n}+|y-z|^{k-\beta-n}).$$

Доказательство. Пусть $|x-z|\leqslant 2|x-y|$, тогда $|y-z|\leqslant$ $\leqslant 3|x-y|$. Отсюда

$$L\leqslant C(|x-z|^{k-n}+|y-z|^{k-n})\leqslant C|x-y|^\beta(|x-z|^{k-\beta-n}+|y-z|^{k-\beta-n}).$$

Пусть $|x-z|>2|x-y|$, тогда $|y-z|>|x-y|$. По теореме о среднем

$$L\leqslant C|\theta-z|^{k-n-1}|x-y|,$$

где $\theta=\theta(x,y)$ — точка из интервала $[x,y]$. Из неравенства треугольника получаем

$$|\theta-z|\geqslant|z-y|-|\theta-y|,\quad |\theta-z|\geqslant|z-x|-|\theta-x|.$$

Следовательно, $2|\theta-z|\geqslant|z-y|+|z-x|-|x-y|\geqslant|x-z|$. Откуда

$$L\leqslant C|x-y|\cdot|x-z|^{k-n-1}\leqslant C|x-y|^\beta|x-z|^{k-\beta-n}.$$

Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *При* $|y|<t/2$, $|z|<t/2$, $\alpha+\beta<n$, $\alpha>0$, $\beta>0$ *справедливо неравенство*

$$I\equiv\int\limits_{|x|<t}|x-y|^{\alpha-n}|x-z|^{\beta-n}\,dx\geqslant C|y-z|^{\alpha+\beta-n}.$$

Доказательство. При вычислении левой части неравенства леммы перейдем к переменной интегрирования $\eta=x-y$. Так как при $|y|<$

$< t/2$ и $|\eta| < t/2$ $|x| = |\eta + y| < t$, рассматриваемый интеграл оценивается снизу интегралом по меньшей области

$$I \geqslant \int\limits_{|\eta|<t/2} |\eta|^{\alpha-n} |\eta + y - z|^{\beta-n} d\eta.$$

Пусть $|y - z| = r$, $y - z = rl$, $|l| = 1$. Замена переменных $\eta = r\xi$, $d\eta = r^n d\xi$ дает неравенство

$$I \geqslant r^{\alpha+\beta-n} \int\limits_{|\xi|<t/2r} |\xi|^{\alpha-n} |l - \xi|^{\beta-n} d\xi.$$

Так как $r \leqslant t$, то отсюда

$$I \geqslant r^{\alpha+\beta-n} \int\limits_{|\xi|<t/2} |\xi|^{\alpha-n} |l - \xi|^{\beta-n} d\xi \geqslant$$

$$\geqslant r^{\alpha+\beta-n} \int\limits_{|\xi|<t/2} |\xi|^{\alpha-n} (1 + |\xi|)^{\beta-n} d\xi \geqslant Cr^{\alpha+\beta-n}.$$

Лемма 2.2 доказана.

В дальнейшем удобно воспользоваться обозначениями [8].

Пусть $A(s)$ — произвольное разбиение множества $S = \{1, 2, \ldots, s\}$ на непересекающиеся классы $K_1, \ldots, K_r$, из которых каждый содержит не менее двух элементов. Запись $i \sim j$ означает, что i, j принадлежат одному классу; в противном случае $i)(j$. С разбиением $A(s)$ связывается в дальнейшем множество $V(A(s))$ точек $\{y_1, \ldots, y_s\} \subset R^{sn}$ с компонентами $y_i \in V$ таких, что при $i)(j$ $|y_i - y_j| > \varepsilon$, а в случае $i \sim j$ найдется последовательность $i = i_0 \sim i_1 \sim \ldots \sim i_p = j$, удовлетворяющая условию $|y_{i_{k-1}} - y_{i_k}| \leqslant \varepsilon$.

Лемма 2.3. *Пусть* $0 < k < n$, $d\bar{y} = dy_1 \ldots dy_s$

$$\int\limits_{V(A(s))} \prod_{i=1}^{s-1} |y_i - y_{i+1}|^{k-n} d\bar{y} \leqslant C\varepsilon^{k[(s+1)/2]}.$$

Доказательство леммы 2.3 проводится аналогично доказательству леммы 3.1 (см. [8], с. 145), лишь 2 везде следует заменить на k.

Лемма 2.4. *Пусть* $B_0(2l)$ — *разбиение* $\{1, 2, \ldots, 2l\} = K_1 \cup \ldots \cup K_l$, $K_i = \{2i - 1, 2i\}$. *Тогда*

$$\int\limits_{V(B_0(2l))} \prod_{i=1}^{2l-1} |y_i - y_{i+1}|^{2-n} d\bar{y} = C\varepsilon^{2l}.$$

Для проверки этого равенства нужно поочередно проинтегрировать по y_i, $i = 1, \ldots, 2l$.

Лемма 2.5. *Пусть* $B(2l) \neq B_0(2l)$, $l > 1$, — *разбиение* $\{1, 2, \ldots, 2l\} = K_1 \cup \ldots \cup K_l$ *с четным числом элементов в каждом классе. Тогда*

$$\int\limits_{V(B(2l))} \prod_{i=1}^{2l-1} |y_i - y_{i+1}|^{2-n} d\bar{y} \leqslant C\varepsilon^{2l+2}. \tag{8}$$

Доказательство. При $2l = 4$ в случае $1 \sim 3$, $2 \sim 4$ неравенство (8) получается после интегрирования по y_1, y_3, а затем по y_2, y_4. Действительно,

$$\iint\limits_{|y_1-y_3|<\varepsilon} \cdot \iint\limits_{|y_2-y_4|<\varepsilon} (|y_1 - y_2| \cdot |y_2 - y_3| \cdot |y_3 - y_4|)^{2-n} dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^2 \iint\limits_{|y_2-y_4|<\varepsilon} |y_2 - y_4|)^{4-n} dy_2 dy_4 \leqslant C\varepsilon^6.$$

В случае $1 \sim 4,\ 2 \sim 3$

$$\iint\limits_{|y_1-y_4|<\varepsilon} \cdot \iint\limits_{|y_2-y_3|<\varepsilon} (|y_1-y_2|\cdot|y_2-y_3|\cdot|y_3-y_4|)^{2-n}\,dy_1dy_2dy_3dy_4 \leqslant$$

$$\leqslant C \iint\limits_{|y_1-y_4|<\varepsilon} |y_1-y_4|^{6-n}\,dy_1dy_4 \leqslant C\varepsilon^6.$$

При $2l>4$ пусть $1 \sim i$. После интегрирования по y_1, y_i доказательство неравенства (8) сводится к предыдущему шагу. (Если оставшиеся индексы образуют разбиение $B_0(2l-2)$, то сначала интегрируем по y_{2l}, y_{2l-1}; при $i=2l$ сначала интегрируем по $y_2, y_3, \ldots, y_{2l-1}$.) Лемма 2.5 доказана.

3. Оценки погрешности усреднения

Ниже используются обозначения п. 1 и оговоренные там ограничения на коэффициенты (1). Кроме того, пусть

$$L_k(x, y) = \int\limits_V G_{\cdot k}(x, z) G_{\cdot k}(z, y)\,dz, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{9}$$

Справедливы неравенства [16]

$$|L_k(x, y)| \leqslant C|x-y|^{\delta-n}, \quad \delta=\delta(k, n), \tag{10}$$

где при $k \geqslant 1$, $n>2$ $\delta=2$; $\delta(0, n)=4$ при $n \geqslant 5$, $\delta(0, n)=n$ при $n=2, 3$, $\delta(0, 4)=4-\alpha$ для $\alpha>0$. В последнем случае постоянная C в (10) зависит от α.

Теорема 3.1. *Пусть* $u_\varepsilon = w_\varepsilon - U$.

$$\text{а)}\ \mathbf{M}|u_\varepsilon|_0^2 \leqslant C\varepsilon^\delta, \quad \text{б)}\ \mathbf{M}|u_\varepsilon|_1^2 \leqslant C\varepsilon^2 \quad \text{при} \quad n>2,$$

где $\delta=\delta(k, n)$ *— то же, что и в* (10). *При* $n=4$ *в утверждении* а) *постоянная* C *зависит от* α.

Обе оценки выводятся одинаково. Для определенности рассмотрим вывод а).

Доказательство. Из (1), (3) имеем

$$u_\varepsilon = \sum_{i=0}^{n} Gb_i u_{\varepsilon\cdot i} + \sum_{i=0}^{n} Gb_i U_{\cdot i}, \tag{11}$$

где оператор G определен по функции Грина задачи (3) равенством

$$Gf(x) = \int\limits_V G(x, y) f(y)\,dy.$$

Проинтегрируем $m = 2[n/2]+2$ раз равенство (11)

$$u_\varepsilon = \sum_{\alpha\in\pi(m)} \Gamma^\alpha u_\varepsilon + \sum_{k=1}^{m} \sum_{\alpha\in\pi(k)} \Gamma^\alpha U. \tag{12}$$

Рассмотрим произвольный индекс $\alpha=(i_1, \ldots, i_m) \in \pi(m)$. Применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$|\Gamma^\alpha u_\varepsilon|^2 = \Big|\int\limits_{V^m} G(x, y_1)\, b_{i_1}(y_1/\varepsilon, \omega)\, G_{\cdot i_1}(y_1, y_2) \ldots G_{\cdot i_{m-1}}(y_{m-1}, y_m) \times$$

$$\times\, b_{i_m}(y_m/\varepsilon, \omega)\, u_{\varepsilon\cdot i_m}(y_m)\,dy_1 \ldots dy_m\Big|^2 \leqslant C|u_\varepsilon|_1^2 \int\limits_{V^{2(m-1)}} G(x, y_1) \times$$

$$\times\, b_{i_1}(y_1/\varepsilon, \omega)\, G_{\cdot i_1}(y_1, y_2) \ldots L_{i_{m-1}}(y_{m-1}, z_{m-1}) \ldots G_{\cdot i_1}(z_2, z_1) \times$$

$$\times\, b_{i_1}(z_1/\varepsilon, \omega)\, G(z_1, x)\,dy_1 \ldots dy_{m-1}dz_{m-1} \ldots dz_1.$$

Из энергетической оценки следует, что с вероятностью 1 $|u_\varepsilon|_1 < C$. Поэтому

$$|\Gamma^\alpha u_\varepsilon|_0^2 \leqslant C \int\limits_{V^{2(m-1)}} L_0(y_1, z_1)\, b_{i_1}(y_1/\varepsilon, \omega)\, G_{\cdot i_1}(y_1, y_2) \ldots L_{i_{m-1}}(y_{m-1}, z_{m-1}) \ldots$$

$$\ldots G_{\cdot i_1}(z_2, z_1)\, b_{i_1}(z_1/\varepsilon, \omega)\, dy_1 \ldots dy_{m-1} dz_{m-1} \ldots dz_1.$$

Из оценок (10) получаем

$$H_\alpha \equiv \mathbf{M}\,|\Gamma^\alpha u_\varepsilon|_0^2 \leqslant C \int\limits_{V(A(2m-2))} |z_1 - z_2|^{\delta - n} \prod_{i=1}^{2m-3} |z_i - z_{i+1}|^{1-n}\, d\bar{z},$$

где $d\bar{z} = dz_1 \ldots dz_{2m-2}$. При $|z_1 - z_{2m-2}| > \varepsilon$ в силу леммы 2.3

$$H_\alpha \leqslant C\varepsilon^{\delta - n} \int\limits_{V(A(2m-2))} \prod_{i=1}^{2m-3} |z_i - z_{i+1}|^{1-n}\, d\bar{z} \leqslant C\varepsilon^{\delta-n}\varepsilon^n = C\varepsilon^\delta.$$

В противном случае $H_\alpha \leqslant C \iint\limits_{|z_1 - z_{2m-2}| < \varepsilon} |z_1 - z_{2m-2}|^{\delta - n} dz_1 dz_{2m-2} \leqslant C\varepsilon^\delta.$

Математическое ожидание $|Gb_iU_{\cdot i}|_0^2$ оценивается по (10) величиной порядка $C\varepsilon^\delta$.

Полученные оценки и (12) показывают, что

$$\mathbf{M}\,|u_\varepsilon|_0^2 \leqslant C\Big(\max_{\alpha \equiv \pi(m)} H_\alpha + \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{M}\,|Gb_iU_{\cdot i}|_0^2\Big) \leqslant C\varepsilon^\delta.$$

Теорема 3.1 доказана.

4. Выделение асимптотически нормальной составляющей решения

Воспользуемся (12) при $m = p = [n/2] + 1$

$$u_\varepsilon = \sum_{\alpha \in \pi(p)} \Gamma^\alpha u_\varepsilon + \sum_{k=1}^{p} \sum_{\alpha \equiv \pi(k)} \Gamma^\alpha U.$$

Цель последующих вычислений — убедиться в том, что основной вклад в случайную составляющую u_ε дает слагаемое $\sum\limits_{\alpha \equiv \pi(1)} \Gamma^\alpha U$.

Лемма 4.1. *Если* $\Phi \in W_2^{-s}(V)$, *то случайная величина* $\varepsilon^{-n/2}\Big\langle \Phi, \sum\limits_{\alpha \in \pi(1)} \Gamma^\alpha U \Big\rangle_{-s}$ *асимптотически нормальна с параметрами* $(0, \sigma^2(\bar{f}))$, *где* $f_i(y) = \int\limits_V \Phi(x)\, G_{\cdot i}(x, y)\, dx \cdot U_{\cdot i}(y)$, *а* $\sigma^2(\bar{f})$ *определена* (7). Здесь и ниже $s = 2 - n/2 - \beta_1$, $0 < \beta_1 < \delta$.

Это предложение есть частный случай доказанной в [17] теоремы.

Лемма 4.2. *Справедливо неравенство*

$$\varepsilon^{-n}\mathbf{M}\,\Big|\sum_{\alpha \equiv \pi(1)} \Gamma^\alpha U\Big|_s^2 < C.$$

Лемма 4.3. *Имеют место оценки*

$$\Big|\sum_{\alpha \equiv \pi(k)} \mathbf{M}\Gamma^\alpha U\Big|_s^2 \leqslant C\varepsilon^{2[k+1/2]},$$

$$\mathbf{M}\,\Big|\sum_{k=2}^{p} \sum_{\alpha \in \pi(k)} \big(\Gamma^\alpha U - \mathbf{M}\Gamma^\alpha U\big)\Big|_s^2 \leqslant C\varepsilon^{n+1}.$$

Лемма 4.4. *Справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}\,\Big|\sum_{\alpha \equiv \pi(p)} \Gamma^\alpha u_\varepsilon\Big|_s^2 \leqslant C\varepsilon^{n+1}.$$

Доказательства этих утверждений используют следствие теоремы 8.3 (см. [18], с. 223), которое формулируется в виде леммы 4.5.

Лемма 4.5. *Пусть* $h(x) \in W_2^{-k}(V)$, $k > 0$. *Тогда существуют не зависящие от* $h(x)$ *положительные постоянные* C_1, C_2 *такие, что*

$$C_1 |h|_{-k} \leqslant |F_m(x, y) h(y) dy|_{2m-k} \leqslant C_2 |h|_{-k},$$

где $F_1(x, y)$ — *функция Грина краевой задачи* $\Delta u = h(x)$, $x \in V$; $u|_{\partial V} = 0$, *а*

$$F_m(x, y) = \int_V F_{m-1}(x, z) F_1(z, y) dz, \quad m \geqslant 2.$$

Выберем натуральное число m из условия $0 < s + 2m < 2$ и положим

$$F(x, y) = \int_V F_m(x, z) G(z, y) dz. \tag{13}$$

Лемма 4.6. *При* $\|\beta\| < s + 2m$ $I_1 \equiv \left| \int_V D^\beta F(x, y) D^\beta F(x, z) dx \right| < C.$

Доказательство. При $\|\beta\| = 1$ в силу выбора m

$$I_1 \leqslant C \int_V (|x - y| \cdot |x - z|)^{2+2m-n-1} dx < C.$$

Кроме того, $\left| \int_V F(x, y) F(y, z) dy \right| \leqslant \int_V (|x - y| |y - z|)^{2+2m-n} dy < C.$

Лемма 4.6 доказана.

Лемма 4.7. *При* $\|\beta\| = [s + 2m]$, $\widetilde{\beta} = s + 2m$

$$T \equiv \Big| \int_{V^2} D^\beta (F(x, z) - F(y, z)) D^\beta (F(x, z_1) - F(y, z_1)) \times$$
$$\times |x - y|^{2([\widetilde{\beta}] - \widetilde{\beta}) - n} dx dy \Big| < C.$$

Доказательство. Пусть $\gamma < \beta_1$ выбрано из условия $0 < \widetilde{\beta} - [\widetilde{\beta}] + \gamma \equiv \alpha < 1$. Тогда в силу леммы 2.1

$$T \leqslant C \int_{V^2} |x - y|^{2\alpha} (|x - z|^{\tau-\gamma} + |y - z|^{\tau-\gamma}) \times$$
$$\times (|x - z_1|^{\tau-\gamma} + |y - z_1|^{\tau-\gamma}) |x - y|^{2([\widetilde{\beta}] - \widetilde{\beta}) - n} dx dy, \quad \tau \equiv 2 - s - n.$$

Для оценки последнего интеграла достаточно оценить интегралы вида

$$N = \int_{V^2} H(x) dx dy, \quad K = \int_{V^2} H(y) dx dy,$$
$$H(u) = |x - y|^{2\gamma - n} \cdot (|u - z| \cdot |x - z_1|)^{\tau - \gamma}.$$

Неравенства $N < C$, $K < C$ очевидны в силу выбора γ, m. Лемма 4.7 доказана.

Леммы 2.3, 4.5—4.7 позволяют провести доказательство лемм 4.2—4.4 так же, как и лемм 4.2—4.4 в [8]. Докажем, например, лемму 4.2. При любом $i = 0, 1, \ldots, n$ в силу леммы 4.5

$$|G b_i U_{.i}|_s^2 \leqslant C |F b_i U_{.i}|_{s+2m}^2 = \sum_{\|\beta\| < s+2m} |D^\beta F b_i U_{.i}|_0^2 +$$
$$+ \sum_{\|\beta\| = [s+2m]} \int_{V^2} \left| D^\beta \int_V (F(x, z) - F(y, z)) b_i(z/\varepsilon, \omega) U_{.i}(z) dz \right|^2 \times$$
$$\times |x - y|^{2([\widetilde{\beta}] - \widetilde{\beta}) - n} dx dy,$$

где $F(x, y)$ определена (13).

Отсюда, из оценок лемм 4.6, 4.7 $\mathrm{M}\,|Gb_iU_{.i}|_s^2 \leqslant C \iint\limits_{|y_1-y_2|<\varepsilon} dy_1dy_2 \leqslant C\varepsilon^n$.

Замечание. Если поля $b_i(x/\varepsilon, \omega)=0$, $i=1, 2, \ldots, n$, а случайные поля $b_0(x/\varepsilon, \omega)$ однородны в узком смысле и симметричны, то предельное поведение детерминированных поправок можно описать более явно. (Условие симметрии устраняет все поправки нечетного порядка.)

Ниже $R(u)=\mathrm{M}b_0(u+s)b_0(s)$. В вычислениях используется представление (см. [19], с. 24) $G(x, y)=r(x, y)\cdot|x-y|^{2-n}$, где вид гладкой функции $r(x, y)$ определяют коэффициенты (3).

Лемма 4.8. *Пусть* $\alpha=(0, 0, \ldots, 0)\in\pi(2l)$, $\Phi(x)$ — *произвольная гладкая функция. Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-2l}(\Phi, \mathrm{M}\Gamma^\alpha U)=\left(\int\limits_{|u|\leqslant m} R(u)\,|u|^{2-n}du\right)^l\times$$

$$\times\int\limits_{V^{l+1}}\Phi(x)\,G(x, y_1)\prod_{i=1}^{l-1} r(y_i, y_i)\,G(y_i, y_{i+1})\,r(y_l, y_l)\,U(y_l)\,dxdy_1\ldots dy_l\equiv\Psi.$$

Доказательство. Заметим, что

$$(\Phi, \mathrm{M}\Gamma^\alpha U)=\mathrm{M}\int\limits_{V^{2l+1}}\Phi(x)\,G(x, y_1)\,b_0(y_1/\varepsilon, \omega)\,G(y_1, y_2)\,b_0(y_2/\varepsilon, \omega)\,G(y_2, y_3)\ldots$$

$$\ldots b_0(y_{2l}/\varepsilon, \omega)\,U(y_{2l})\,dxdy_1\ldots dy_{2l}.$$

Нужным порядком по ε (см. леммы 2.2, 2.3) обладает лишь слагаемое, в котором $1\sim 2$, $3\sim 4$, $\ldots$, $2l-1\sim 2l$. Проведем замену переменных $y_1-y_2=\varepsilon u_1$, $y_3-y_4=\varepsilon u_2$, $\ldots$, $y_{2l-1}-y_{2l}=\varepsilon u_l$. Тогда

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-2l}(\Phi, \mathrm{M}\Gamma^\alpha U)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{V(B_0(2l))}\Phi(x)\,G(x, y_2+\varepsilon u_1)\times$$

$$\times r(y_2+\varepsilon u_1, y_2)\,|u_1|^{2-n}R(u_1)\,G(y_2, y_4+\varepsilon u_2)\,r(y_4+\varepsilon u_2, y_4)\,|u_2|^{2-n}R(u_2)\ldots$$

$$\ldots R(u_l)U(y_{2l})\,dxdu_1\ldots du_ldy_2dy_4\ldots dy_{2l}=\Psi.$$

Лемма 4.8 доказана.

Случай $b_i(x/\varepsilon, \omega)\neq 0$, $i=1, 2, \ldots, n$, может быть рассмотрен аналогично, но соответствующие вычисления более громоздки.

5. Примеры к теоремам 1.1, 3.1

В этом пункте показана необходимость рассмотрения пространств с негативной нормой при установлении слабой сходимости мер, порожденных решениями задачи (1), а также установлено, что оценку скорости сходимости в теореме 3.1 нельзя улучшить по ε при $n\geqslant 5$.

Пусть

$$-\Delta w_\varepsilon+(2+b(x/\varepsilon, \omega))w_\varepsilon=2;\quad w_\varepsilon|_{\partial V}=1, \tag{14}$$

где $V=\{x\colon |x|\leqslant 1\}$, а $b(x, \omega)$ — однородное поле с единичным радиусом зависимости и $\mathrm{M}b(x, \omega)=0$, $\mathrm{M}b^2(x, \omega)=1$. Тогда решение усредненной задачи $U\equiv 1$, а функция Грина усредненной задачи $G(x, y)>C|x-y|^{2-n}$ при $|x|<1/2$, $|y|<1/2$.

1°. Убедимся, что оценку скорости сходимости в теореме 3.1 нельзя улучшить по порядку ε при $n\geqslant 5$.

Воспользовавшись соотношением (11), получим

$$u_\varepsilon=Gbu_\varepsilon+GbU.$$

По неравенству треугольника

$$|u_\varepsilon|_0\geqslant|GbU|_0-|Gbu_\varepsilon|_0.$$

Следовательно, $|u_\varepsilon|_0 \geqslant C|GbU|_0$. Тогда по лемме 2.2 и (10) при $n \geqslant 5$, $k=0$

$$\mathbf{M}\,|u_\varepsilon|_0^2 \geqslant C \int_{V^3} G(x, y_1)\, G(x, y_2)\, \mathbf{M} b(y_1/\varepsilon, \omega)\, b(y_2/\varepsilon, \omega)\, dx dy_1 dy_2 \geqslant C\varepsilon^4.$$

2°. Рассмотрим (14) при $n = 4k+1$. Пусть оператор Q^s определен равенством

$$Q^s f(x) = \int_{V^s} G(x, y_1) \prod_{i=1}^{s-1} b(y_i/\varepsilon, \omega)\, G(y_i, y_{i+1})\, b(y_s/\varepsilon, \omega)\, f(y_s)\, dy_1 \ldots dy_s.$$

Докажем, что семейство мер, порожденных случайным полем

$$v_\varepsilon = \varepsilon^{-n/2}\left(u_\varepsilon - \sum_{s=2}^{p} \mathbf{M}\, Q^s U\right), \tag{15}$$

в $W_2^{2-2k+\delta}(V)$ не является слабокомпактным при $\delta > 0$, $p = [n/2]+2$. Это следует из лемм 5.1—5.5.

Лемма 5.1. *Справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}\,|Q^s U - \mathbf{M} Q^s U|_{2-2k}^2 < C\varepsilon^{n+1}, \quad 2 \leqslant s \leqslant p.$$

Лемма 5.2. *Имеет место оценка*

$$\mathbf{M}\,|Q^p u_\varepsilon|_{2-2k}^2 < C\varepsilon^{n+1}.$$

Данные оценки следуют из лемм 4.3, 4.4 (см. [8], с. 146).

Лемма 5.3. *Справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}\,|QU|_{2-2k}^2 \geqslant C\varepsilon^{n-1}.$$

Доказательство. Применяя k раз лемму 2.2, получим

$$\mathbf{M}\,|QU|_{2-2k}^2 > C \int\int_E |y_1 - y_2|^{-1}\, dy_1 dy_2 \geqslant C\varepsilon^{n-1},$$

где область $E = \{(y_1, y_2) \in V^2;\ |y_1| < 2^{-k},\ |y_2| < 2^{-k},\ |y_1 - y_2| < \varepsilon\}$. Лемма 5.3 доказана.

Лемма 5.4. *Имеет место неравенство*

$$D \equiv \mathbf{M}\left(|QU|_{2-2k}^2 - \mathbf{M}\,|QU|_{2-2k}^2\right)^2 < C\varepsilon^{2n-1}.$$

Доказательство. В силу леммы 4.5

$$|QU|_{2-2k}^2 = \int_{V^3} S(x, y_1)\, S(x, y_2)\, b(y_1/\varepsilon, \omega)\, b(y_2/\varepsilon, \omega)\, dy_1 dy_2 dx,$$

где $S(x, y) = \int_V F_{2k-2}(x, z) G(z, y)\, dz$.

Согласно [16],

$$N_1(x, y) = \int_V S(x, z) S(z, y)\, dz \leqslant C\,|x - y|^{-1}. \tag{16}$$

Пусть

$$\mu(\bar y) = \mathbf{M} b(y_1/\varepsilon, \omega) b(y_2/\varepsilon, \omega),$$
$$\mu(\bar y, \bar z) = \mathbf{M} b(y_1/\varepsilon, \omega) b(y_2/\varepsilon, \omega) b(z_1/\varepsilon, \omega) b(z_2/\varepsilon, \omega).$$

Тогда $D = \mathbf{M}\,|QU|_{2-2k}^4 - \left(\mathbf{M}\,|QU|_{2-2k}^2\right)^2 = \int_{V^4} N_1(y_1, y_2)\, N_1(z_1, z_2)\, \mu(\bar y, \bar z) \times$

$$\times\, d\bar y d\bar z - \int_{V^4} N_1(y_1, y_2)\, N_1(z_1, z_2) \mu(\bar y)\, \mu(\bar z)\, d\bar y d\bar z.$$

Введем области

$$\Psi_1 = \{(\bar y, \bar z) \in V^4;\ \mu(\bar y, \bar z) \neq 0,\ \exists (i, j) : |y_i - z_j| < \varepsilon\},$$
$$\Psi_2 = \{(\bar y, \bar z) \in V^4;\ \mu(\bar y, \bar z) \neq 0,\ \bar\exists (i, j) : |y_i - z_j| < \varepsilon\}.$$

Заметим, что в области Ψ_2 $\mu(\bar{y}, \bar{z}) = \mu(\bar{y})\mu(\bar{z})$. Оценим разность

$$\left| \int_{V^4} N_1(y_1, y_2) N_1(z_1, z_2) \mu(\bar{y}) \mu(\bar{z}) \, d\bar{y} d\bar{z} - \int_{\Psi_2} N_1(y_1, y_2) N_1(z_1, z_2) \mu(\bar{y}, \bar{z}) \, d\bar{y} d\bar{z} \right| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{(i,j)} \int_{V^2} N_1(y_1, y_2) \mu(\bar{y}) \, d\bar{y} \cdot \int_{|y_i - z_j| < \varepsilon} N_1(z_1, z_2) \mu(\bar{z}) \, d\bar{z} \leqslant$$

$$\leqslant C\varepsilon^{n-1}\varepsilon^n = C\varepsilon^{2n-1}.$$

При оценке интеграла по области Ψ_1 можно, не ограничивая общности, считать, что в области интегрирования $|y_1 - z_1| < \varepsilon$, $|y_2 - z_2| < \varepsilon$. Применяя оценку (16), получим

$$\int_{\Psi_1} N_1(y_1, y_2) N_1(z_1, z_2) \, d\bar{y} d\bar{z} \leqslant C\varepsilon^{n-1}\varepsilon^n = C\varepsilon^{2n-1}.$$

Лемма 5.4 доказана.

Лемма 5.5. *Пусть* $t > 0$; *тогда случайное поле* ν_ε, *определенное* (15), *удовлетворяет условию*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{P}\{|\nu_\varepsilon|_{2-2k} > t\} = 1.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\mathbf{P}\{|\nu_\varepsilon|_{2-2k} > t\} \geqslant \mathbf{P}\Big\{\varepsilon^{-n/2} |QU|_{2-2k} - \varepsilon^{-n/2} \sum_{s=2}^{p} |Q^s U - \mathbf{M}Q^s U|_{2-2k} -$$

$$- \varepsilon^{-n/2} |Q^p u_\varepsilon|_{2-2k} > t\Big\} \geqslant \mathbf{P}\Big\{(\varepsilon^{-n/2} |QU|_{2-2k} - (p+1)t) -$$

$$- \sum_{s=2}^{p} \varepsilon^{-n/2} \big(|Q^s U - \mathbf{M}Q^s U|_{2-2k} - t\big) - \big(\varepsilon^{-n/2} |Q^p u_\varepsilon|_{2-2k} - t\big) > 0\Big\}.$$

Для любых случайных величин ξ, η и положительных чисел r, s

$$\mathbf{P}\{(\xi - r) - (\eta - s) > 0\} \geqslant \mathbf{P}(\xi > r) - \mathbf{P}(\eta > s).$$

Отсюда, из лемм 5.1—5.4 и неравенства Чебышева

$$\mathbf{P}\{|\nu_\varepsilon|_{2-2k} > t\} \geqslant \mathbf{P}\{\varepsilon^{-n} |QU|^2_{2-2k} > (p+1)^2 t^2\} - C\varepsilon \geqslant 1 - C\varepsilon - C\varepsilon = 1 - C\varepsilon.$$

Лемма 5.5 доказана.

Вложение $W_2^{2-2k+\delta}(V) \to W_2^{2-2k}(V)$ при $\delta > 0$ вполне непрерывно. Поэтому для любого компакта K в $W_2^{2-2k+\delta}(V)$ при достаточно большом t $K \subset \{y : y \in W_2^{2-2k+\delta}(V);\ |y|_{2-2k} < t\}$. По лемме 5.5 $\mathbf{P}\{\nu_\varepsilon \in K\} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно (см. [15], с. 516), семейство мер, порожденных полем ν_ε, не является слабокомпактным в $W_2^{2-2k+\delta}(V)$ при $\delta > 0$.

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую признательность моему научному руководителю В. В. Юринскому за постановку задачи, постоянную поддержку и помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Ха Тьен Нгоан.** Усреднение и G-сходимость.— Успехи мат. наук, 1979, т. 34, вып. 5, с. 65—133.
2. **Козлов С. М.** Осреднение случайных операторов.— Мат. сб., 1979, т. 109, № 2, с. 188—202.
3. **Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.** О G-сходимости параболических операторов.— Успехи мат. наук, 1981, т. 36, вып. 1, с. 11—58.
4. **Розовский Б. Л.** О стохастических дифференциальных уравнениях в частных производных.— Мат. сб., 1975, т. 96, № 2, с. 319—341.
5. **Юринский В. В.** Об усреднении недивергентных уравнений второго порядка со случайными коэффициентами.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 2, с. 176—188.
6. **Юринский В. В.** О применении метода усреднения к эллиптическим уравнениям со случайными коэффициентами.— В кн.: Математический анализ и смежные вопросы математики.— Новосибирск: Наука, 1978, с. 330—339.

7. **Юринский В. В.** Об усреднении эллиптической краевой задачи со случайными коэффициентами.— Сиб. мат. журн., 1980, т. 21, № 3, с. 209—223.
8. **Пожидаев А. В.** Об асимптотической нормальности решений краевых задач со случайными коэффициентами.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 4, с. 142—153.
9. **Жауров Ю. В.** Флуктуации в схеме усреднения для параболических краевых задач.— Тезисы докладов республиканской конференции по теории стохастических дифференциальных уравнений. Донецк, 1982, с. 35—36.
10. **Figari R., Orlandi E., Papanicolaou G.** Mean field and gaussian approximation for partial differential equations with random coefficients.— SIAM, App. Math., 1982, v. 42, N 5, p. 1069—1077.
11. **Хасьминский Р. З.** О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром.— Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, № 2, с. 240—259.
12. **Хасьминский Р. З.** Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью.— Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, № 3, с. 444—462.
13. **Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
14. **Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.** Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
15. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 567 с.
16. **Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.** Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.
17. **Леоненко Н. Н.** О центральной предельной теореме для m-зависимых случайных полей в схеме, родственной схеме серий.— Укр. мат. журн., 1975, т. 27, № 5, с. 674—677.
18. **Лионс Ж.-Л., Madженес Э.** Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
19. **Миранда К.** Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957. 256 с.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ СУММИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ВЕТВЯЩИМСЯ ПРОЦЕССАМ С ИММИГРАЦИЕЙ

С. В. НАГАЕВ, М. Х. АСАДУЛЛИН

Настоящая работа посвящена предельным распределениям для сумм случайного числа независимых случайных величин (с. в.). Более точно, речь идет о суммах вида

$$\sum_{i=1}^{\nu_n}\sum_{j=1}^{\nu_{ni}}\xi_{ij}^{(n)}, \tag{1}$$

где с. в. $\xi_{ij}^{(n)}$, $i=1\div\infty$, $j=1\div\infty$, независимы при любом n, а с. в. ν_n, ν_{ni} независимы от семейства $\{\xi_{ij}^{(n)}\}$. Суммы такого вида возникают, в частности, при изучении ветвящихся процессов с иммиграцией.

Нам удобнее будет описывать схему суммирования (1) на языке случайных процессов (с. п.).

Назовем с. п. $X(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, считающим, если он принимает только целые неотрицательные значения, а траектории его не убывают, ограничены и непрерывны справа.

Рассмотрим теперь совокупность считающих с. п. $X_\lambda(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$, зависящую от вещественного параметра λ. Кроме того, пусть при любом фиксированном λ задана последовательность независимых одинаково распределенных с. п. $\xi_j(\lambda, t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Будем также предполагать, что с. п. $\xi_j(\lambda, t)$ не зависят от $X_\lambda(t)$ и для любого набора $0\leqslant t_1<t_2<\ldots<t_n\leqslant 1$ с. в. $\xi_1(\lambda, t_1), \ldots, \xi_1(\lambda, t_n)$ независимы.

Пусть с. п. $Y_\lambda(t)$ возрастает в те же моменты времени, что и $X_\lambda(t)$, причем $X_\lambda(0)=Y_\lambda(0)$ и

$$dY_\lambda(t)=(X_\lambda(t)-X_\lambda(t-))^{-1}dX_\lambda(t), \tag{2}$$