

7. Юринский В. В. Об усреднении эллиптической краевой задачи со случайными коэффициентами.— Сиб. мат. журн., 1980, т. 21, № 3, с. 209—223.
8. Пожидаев А. В. Об асимптотической нормальности решений краевых задач со случайными коэффициентами.— Сиб. мат. журн., 1982, т. 23, № 4, с. 142—153.
9. Жауров Ю. В. Флуктуации в схеме усреднения для параболических краевых задач.— Тезисы докладов республиканской конференции по теории стохастических дифференциальных уравнений. Донецк, 1982, с. 35—36.
10. Figari R., Orlandi E., Papanicolaou G. Mean field and gaussian approximation for partial differential equations with random coefficients.— SIAM, App. Math., 1982, v. 42, N 5, p. 1069—1077.
11. Хасьминский Р. З. О случайных процессах, определяемых дифференциальными уравнениями с малым параметром.— Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, № 2, с. 240—259.
12. Хасьминский Р. З. Предельная теорема для решений дифференциальных уравнений со случайной правой частью.— Теория вероятн. и ее примен., 1966, т. 11, № 3, с. 444—462.
13. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
14. Ладыженская О. А., Уралцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
15. Гихман И. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 567 с.
16. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966. 499 с.
17. Леоненко Н. Н. О центральной предельной теореме для m -зависимых случайных полей в схеме, родственной схеме серий.— Укр. мат. журн., 1975, т. 27, № 5, с. 674—677.
18. Лионе Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371 с.
19. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа. М.: ИЛ, 1957. 256 с.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

ОБ ОДНОЙ СХЕМЕ СУММИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ВЕТВЯЩИМСЯ ПРОЦЕССАМ С ИММИГРАЦИЕЙ

С. В. НАГАЕВ, М. Х. АСАДУЛЛИН

Настоящая работа посвящена предельным распределениям для сумм случайного числа независимых случайных величин (с. в.). Более точно, речь идет о суммах вида

$$\sum_{i=1}^{v_n} \sum_{j=1}^{v_{ni}} \xi_{ij}^{(n)}, \quad (1)$$

где с. в. $\xi_{ij}^{(n)}$, $i = 1 \div \infty$, $j = 1 \div \infty$, независимы при любом n , а с. в. v_n , v_{ni} независимы от семейства $\{\xi_{ij}^{(n)}\}$. Суммы такого вида возникают, в частности, при изучении ветвящихся процессов с иммиграцией.

Нам удобнее будет описывать схему суммирования (1) на языке случайных процессов (с. п.).

Назовем с. п. $X(t)$, $0 \leq t \leq 1$, считающим, если он принимает только целые неотрицательные значения, а траектории его не убывают, ограничены и непрерывны справа.

Рассмотрим теперь совокупность считающих с. п. $X_\lambda(t)$, $0 \leq t \leq 1$, зависящую от вещественного параметра λ . Кроме того, пусть при любом фиксированном λ задана последовательность независимых одинаково распределенных с. п. $\xi_j(\lambda, t)$, $0 \leq t \leq 1$. Будем также предполагать, что с. п. $\xi_j(\lambda, t)$ не зависят от $X_\lambda(t)$ и для любого набора $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq 1$ с. в. $\xi_1(\lambda, t_1), \dots, \xi_1(\lambda, t_n)$ независимы.

Пусть с. п. $Y_\lambda(t)$ возрастает в те же моменты времени, что и $X_\lambda(t)$, причем $X_\lambda(0) = Y_\lambda(0)$ и

$$dY_\lambda(t) = (X_\lambda(t) - X_\lambda(t-))^{-1} dX_\lambda(t), \quad (2)$$

если $X_\lambda(t) - X_\lambda(t-) > 0$. Иначе говоря, если $\{t_{\lambda j}\}_{j \geq 1}$ — точки скачков траектории $X_\lambda(t)$, то положим $Y_\lambda(t) = \sum_{t_{\lambda j} \leq t} 1$. Очевидно, $X_\lambda(t) = \int_0^t \xi_\lambda(u) \times dY_\lambda(u)$, где с.в. $\xi_\lambda(u)$, $u \in [0, 1]$, — положительные и целочисленные ($\xi_\lambda(u)$ есть величина скачка траектории $X_\lambda(t)$ в точке u). Обозначим

$$\eta_\lambda(t) = \sum_{j=1}^{\xi_\lambda(t)} \xi_j(\lambda, t).$$

Нашей целью является изучение асимптотического поведения распределения с.в. $Z_\lambda = \int_0^1 \eta_\lambda(t) dY_\lambda(t)$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Обозначим характеристическую функцию с.в. $\xi_1(\lambda, t)$ через $f_\lambda(t, \theta)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть существует множество функций $B_\lambda(t)$, $0 \leq t \leq 1$, такое, что при $\lambda \rightarrow \infty$

$$(f_\lambda(t, \theta))^{B_\lambda(t)} \rightarrow f(t, \theta), \quad (3)$$

причем $\forall \theta$

$$B_\lambda(t) \ln f_\lambda(t, \theta) \rightarrow \ln f(t, \theta) \in C[0, 1]$$

равномерно по t , $0 \leq t \leq 1$. Кроме того, предположим, что конечномерные распределения с.п. $\int_0^t (B_\lambda(u))^{-1} dX_\lambda(u)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ сходятся к конечномерным распределениям некоторого с.п. $X(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда с.в. Z_λ при $\lambda \rightarrow \infty$ сходится по распределению к с.в. W с характеристической функцией

$$\varphi(\theta) = E \exp \left\{ \int_0^1 \ln f(t, \theta) dX(t) \right\}. \quad (4)$$

Замечание. Если слагаемые в (1) бесконечно малы, а предельная характеристическая функция $f(t, \theta) > 0$ при любом $t \in [0, 1]$, то необходимо $B_\lambda(t) \rightarrow \infty$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для любого $t \in [0, 1]$. В этом случае (3) остается справедливой при замене $B_\lambda(t)$ на $[B_\lambda(t)]$, где $[\cdot]$ — целая часть. Поэтому предельная функция $f(t, \theta)$ есть характеристическая функция безгранично делимого распределения. Следовательно, имеет место представление Леви — Хинчина для характеристической функции и соотношение (4) можно записать в виде

$$\varphi(\theta) = E \exp \left\{ \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\theta x} - 1) dK(t, x) dX(t) \right\}, \quad (5)$$

где $K(t, x)$ для любого фиксированного $t \in [0, 1]$ есть функция ограниченной вариации.

Доказательство. Положим

$$\varphi_\lambda(\theta) = E \exp \{i\theta Z_\lambda\}.$$

В силу взаимной независимости с.в. $\xi_j(\lambda, t_i)$

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(\theta) &= E \exp \left\{ i\theta \int_0^1 \eta_\lambda(t) dY_\lambda(t) \right\} = E \prod_{i=1}^{Y_\lambda(1)} (f_\lambda(t_i, \theta))^{\xi_\lambda(t_i)} = \\ &= E \exp \left\{ \int_0^1 \ln f_\lambda(t, \theta) \xi_\lambda(t) dY_\lambda(t) \right\} = E \exp \left\{ \int_0^1 \ln f_\lambda(t, \theta) dX_\lambda(t) \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для дальнейшего нам потребуется

Лемма. Пусть на $[0, 1]$ задано семейство функций $g_\lambda(t)$ и семейство с.п. $V_\lambda(t)$ с неубывающими траекториями, причем $g_\lambda(t) \rightarrow g(t) \in C[0, 1]$ при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно по t , а конечномерные распределения с.п. $V_\lambda(t)$ сходятся при $\lambda \rightarrow \infty$ к конечномерным распределениям некоторого с.п. $V(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда

$$\int_0^1 g_\lambda(t) dV_\lambda(t) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \int_0^1 g(t) dV(t)$$

(здесь и далее $\mathcal{D}$ означает сходимость по распределению).

Заметим, что лемма, как и теорема, справедлива и для случайных процессов с невозрастающими траекториями.

Доказательство. Пусть $T_n: 0 = t_{n0} \leq \dots \leq t_{nn} = 1$ — последовательность разбиений отрезка $[0, 1]$, причем $\max_{0 \leq j \leq n-1} (t_{nj+1} - t_{nj}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Обозначим через $m_j(M_j)$ соответственно минимум (максимум) функции $g(t)$ на $[t_{nj}, t_{nj+1}]$. Далее положим

$$\begin{aligned} \Delta_j V &= V(t_{nj+1}) - V(t_{nj}), \quad \Delta_j V_\lambda = V_\lambda(t_{nj+1}) - V_\lambda(t_{nj}); \\ \sigma &= \int_0^1 g(t) dV(t), \quad S_n = \sum_{j=0}^{n-1} M_j \Delta_j V, \quad s_n = \sum_{j=0}^{n-1} m_j \Delta_j V; \\ \sigma_\lambda &= \int_0^1 g(t) dV_\lambda(t), \quad S_{\lambda n} = \sum_{j=0}^{n-1} M_j \Delta_j V_\lambda, \quad s_{\lambda n} = \sum_{j=0}^{n-1} m_j \Delta_j V_\lambda. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$P(S_{\lambda n} < x) \leq P(\sigma_\lambda < x) \leq P(s_{\lambda n} < x).$$

По условию леммы совместное распределение с.в. $\{\Delta_j V_\lambda\}_{j=0}^{n-1}$ сходится при $\lambda \rightarrow \infty$ к распределению $\{\Delta_j V\}_{j=0}^{n-1}$, поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P(S_{\lambda n} < x) &= P(S_n < x) \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} P(\sigma_\lambda < x) \leq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} P(\sigma_\lambda < x) \leq \\ &\leq P(s_n < x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} P(s_{\lambda n} < x) \end{aligned}$$

в точках непрерывности функций распределения $P(S_n < x)$ и $P(s_n < x)$.

Очевидно, при $n \rightarrow \infty$ $S_n \rightarrow \sigma$ и $s_n \rightarrow \sigma$ с вероятностью 1. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n < x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(s_n < x) = P(\sigma < x)$$

в точках непрерывности функции распределения $P(\sigma < x)$.

Таким образом, мы показали, что $\sigma_\lambda \xrightarrow{\mathcal{D}} \sigma$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

С другой стороны,

$$\int_0^1 g_\lambda(t) dV_\lambda(t) = \int_0^1 (g_\lambda(t) - g(t)) dV_\lambda(t) + \sigma_\lambda.$$

Далее,

$$\int_0^1 (g_\lambda(t) - g(t)) dV_\lambda(t) < \delta_\lambda \cdot |V_\lambda(1) - V_\lambda(0)|,$$

где $\delta_\lambda = \sup_{0 \leq t \leq 1} |g_\lambda(t) - g(t)|$, причем $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \delta_\lambda = 0$ в силу равномерной сходимости $g_\lambda(t)$ к $g(t)$.

Ясно, что $\delta_\lambda |V_\lambda(1) - V_\lambda(0)| \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{} 0$ по вероятности. Поэтому

$$\sigma_\lambda + \int_0^1 (g_\lambda(t) - g(t)) dV_\lambda(t) \xrightarrow[\lambda \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \sigma.$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Соотношение (6) можно записать в виде

$$\varphi_\lambda(\theta) = E \exp \left\{ \int_0^1 B_\lambda(t) \ln f_\lambda(t, \theta) (B_\lambda(t))^{-1} dX_\lambda(t) \right\}.$$

Остается применить лемму, беря в качестве $g_\lambda(t)$ и $V_\lambda(t)$ соответственно $B_\lambda(t) \ln f_\lambda(t, \theta)$ и $\int_0^t (B_\lambda(u))^{-1} dX_\lambda(u)$. В результате получаем, что

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_\lambda(\theta) = E \exp \left\{ \int_0^1 \ln f(t, \theta) dX(t) \right\},$$

а это эквивалентно утверждению теоремы.

Рассмотрим множество считающих с.п. $X_\tau(t)$ с областью определения $[0, \tau]$, зависящей от параметра τ . Ввиду этого всюду в дальнейшем будем считать, что $t \leq \tau$.

Положим

$$Z_\tau(t) = \int_0^t \eta_\tau(t, s) dY_\tau(s), \quad (7)$$

где

$$\eta_\tau(t, s) = \sum_{j=1}^{X_\tau(s) - X_\tau(s-)} \mu_\tau^{(j)}(t, s),$$

$\mu_\tau^{(j)}(\cdot, s)$ — ветвящиеся процессы, начинающиеся в момент времени s с одной частицы, а процессы $X_\tau(t)$ и $V_\tau(t)$ связаны соотношением (2) (с заменой λ на τ). Процессы $\mu_\tau^{(j)}(\cdot, s_i)$, $j = 1 \div \infty$, $0 \leq s_1 < s_2 < \dots$ независимы при любом конечном наборе $\{s_i\}_{i \geq 1}$.

Считающий с.п. $X_\tau(t)$ можно интерпретировать как число частиц, поступивших извне в некоторую популяцию за время t . Каждая из $X_\tau(s) - X_\tau(s-)$ частиц, поступивших в момент времени s , дает начало некоторому ветвящемуся процессу $\mu_\tau^{(j)}(\cdot, s)$. С этой точки зрения $Z_\tau(t)$ есть общее число частиц в популяции в момент времени t .

Основное место в теории ветвящихся процессов с иммиграцией занимают предельные теоремы для $Z_\tau(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$ (см. библиографию, например, в [1—2]). Доказанная выше теорема дает возможность подойти к данной проблеме с общей позиции. Мы перейдем теперь к обоснованию этого тезиса.

Относительно ветвящихся процессов $\mu_\tau^{(j)}(\cdot, s)$ мы предположим, что $\mu_\tau^{(j)}(t, s) = \mu_\tau(t - s)$, где $\mu_\tau(\cdot)$ — некоторый ветвящийся процесс, начинающийся в момент времени 0 с одной частицы.

Пусть существует семейство функций $A_\tau(t)$ с областью определения $[0, \tau]$, монотонно возрастающих и непрерывных по t , такое, что $A_\tau(0) < \infty$, $A_\tau(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow \infty$ и для $\forall x \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty, \tau \rightarrow \infty} P\{(\mu_\tau(t)/A_\tau(t)) > x \mid \mu_\tau(t) > 0\} = e^{-x}. \quad (8)$$

Кроме того, пусть для некоторого $q < \infty$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sup_{\tau} \sup_{0 < t < q} P(\mu_\tau(t) > r) = 0. \quad (9)$$

Условие (8) выполняется, например, для критических (см. [3], с. 72, 212, 332) или близких к критическим (случай переходных явлений) ветвящихся процессов (см., например, [3], с. 95; [4], теор. 2; [5], теор. 5, 6).

Из (7) и определения с. п. $Y_\tau(t)$ ясно, что распределение с. в. $Z_\tau(\tau)/A_\tau$ совпадает с распределением

$$I \equiv \int_0^\tau \sum_{j=1}^{X_\tau(\tau-s)-X_\tau(\tau-s-)} (\mu_\tau^{(j)}(s)/A_\tau) dY_\tau(\tau-s),$$

где $A_\tau = A_\tau(\tau)$.

Пусть $u = A_\tau(t)/A_\tau$, тогда $t = A_\tau^{-1}(u \cdot A_\tau) \equiv \psi(u, \tau)$ (здесь $A_\tau^{-1}(\cdot)$ — функция, обратная к $A_\tau(\cdot)$). Очевидно, что $\psi(0, \tau) = 0$ и $\psi(1, \tau) = \tau$. Для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ положим $\tau_\varepsilon = \psi(\varepsilon, \tau)$. Производя замену t на u , с. в. I можно записать в виде

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_0^{\tau_\varepsilon} + \int_{\tau_\varepsilon}^\tau \right) \sum_{j=1}^{X_\tau(\tau-s)-X_\tau(\tau-s-)} (\mu_\tau^{(j)}(s)/A_\tau) dY_\tau(\tau-s) = \\ &= \left(\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^1 \right) \sum_{j=1}^{X_\tau(\tau-\psi(u, \tau))-X_\tau(\tau-\psi(u, \tau)-)} (\mu_\tau^{(j)}(\psi(u, \tau))/A_\tau) \times \\ &\quad \times dY_\tau(\tau-\psi(u, \tau)) \equiv I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon). \end{aligned} \quad (10)$$

Вначале рассмотрим $I_2(\varepsilon)$. Положим

$$g_\tau(\theta, t) = \mathbf{E} \exp \{i\theta \mu_\tau(t)/A_\tau\}.$$

Нетрудно видеть, что

$$g_\tau(\theta, t) = 1 - Q_\tau(t) + Q_\tau(t) h_\tau(\theta/A_\tau, t), \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} Q_\tau(t) &= \mathbf{P}(\mu_\tau(t) > 0), \\ h_\tau(\theta, t) &= \mathbf{E} \exp \{i\theta \mu_\tau(t) | \mu_\tau(t) > 0\}. \end{aligned}$$

Из условия (8) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty, \tau \rightarrow \infty} \sup_{\theta} |h_\tau(\theta/A_\tau(t), t) - (1 - i\theta)^{-1}| = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{\substack{s \rightarrow \infty, \tau \rightarrow \infty \\ s < t < \tau}} \sup_{\theta} |h_\tau(\theta/A_\tau, t) - (1 - i\theta A_\tau(t)/A_\tau)^{-1}| = 0.$$

Отсюда в силу (11)

$$g_\tau(\theta, t) - 1 = Q_\tau(t) \cdot \left\{ \frac{i\theta A_\tau(t)/A_\tau}{1 - i\theta A_\tau(t)/A_\tau} + \alpha_\tau(t) \right\}, \quad (12)$$

где $\lim_{\substack{s \rightarrow \infty, \tau \rightarrow \infty \\ s < t < \tau}} \sup_{\theta} \alpha_\tau(t) = 0$.

Из (12) и определения u получаем

$$g_\tau(\theta, \psi(u, \tau)) - 1 = Q_\tau(\psi(u, \tau)) \cdot \left\{ \frac{i\theta u}{1 - i\theta u} + \beta_\tau(u) \right\},$$

где $\beta_\tau(u) = \alpha_\tau(\psi(u, \tau))$.

Очевидно, что $\beta_\tau(u) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0$ равномерно относительно $u \in [A_\tau(s)/A_\tau, 1]$,

где $s \rightarrow \infty$ при $\tau \rightarrow \infty$.

В частности, $\beta_\tau(u) \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} 0$ равномерно относительно $u \in [\varepsilon, 1]$, поскольку

$$(A_\tau(s)/A_\tau = \varepsilon) \Rightarrow s \xrightarrow{\tau \rightarrow \infty} \infty.$$

Полагая $B_\tau(u) = 1/(u \cdot Q_\tau(\psi(u, \tau)))$, получаем, что при $Q_\tau(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty, \tau \rightarrow \infty} 0$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_\tau(u) \ln g_\tau(\theta, \psi(u, \tau)) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} B_\tau(u) (g_\tau(\theta, \psi(u, \tau)) - 1) = i\theta/(1 - i\theta u) \quad (13)$$

равномерно относительно $u \in [\varepsilon, 1]$.

Пусть

$$\int_v^1 (B_\tau(u))^{-1} dX_\tau(\tau - \psi(u, \tau)) \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{} T(v), \quad v \in [\varepsilon, 1] \quad (14)$$

в смысле конечномерных распределений, где $T(v)$ — с. п. с неубывающими траекториями на $[\varepsilon, 1]$. Тогда из (13) и (14) с помощью теоремы 1 получаем, что при любом $\varepsilon > 0$

$$I_2(\varepsilon) \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathfrak{W}_\varepsilon, \quad (15)$$

где с. в. $\mathfrak{W}_\varepsilon$ имеет характеристическую функцию

$$\mathbf{E} \exp \left\{ i\theta \int_\varepsilon^1 (1 - i\theta u)^{-1} dT(u) \right\}.$$

Рассмотрим теперь $I_1(\varepsilon)$. Аналогично выводу соотношения (6) находим, что характеристическая функция с. в. $I_1(\varepsilon)$ имеет вид

$$\mathbf{E} e^{i\theta I_1(\varepsilon)} = \mathbf{E} \exp \left\{ \int_0^{\tau_\varepsilon} \ln g_\tau(\theta, t) dX_\tau(\tau - t) \right\}. \quad (16)$$

Напомним, что $\tau_\varepsilon = \psi(\varepsilon, \tau)$. Пусть

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{\tau \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\tau_\varepsilon} |g_\tau(\theta, t) - 1| dX_\tau(\tau - t) = 0 \quad (17)$$

(здесь и далее $\mathbf{P} = \lim$ означает предел по вероятности).

Покажем, что для любого фиксированного θ существуют ε и τ_ε такие, что

$$|g_\tau(\theta, t) - 1| < 1/2 \quad (18)$$

при $0 < t < \tau_\varepsilon$ и $\tau > \tau_0$.

Действительно, для любого $\delta > 0$

$$\begin{aligned} |g_\tau(\theta, t) - 1| &= Q_\tau(t) \cdot |h_\tau(\theta/A_\tau, t) - 1| < \\ < Q_\tau(t) \cdot \{\delta \cdot |\theta| + \mathbf{P}(\mu_\tau(t) > \delta A_\tau | \mu_\tau(t) > 0)\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Далее, для любых ε, δ и $t < \tau_\varepsilon$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\mu_\tau(t) > \delta A_\tau | \mu_\tau(t) > 0) &= \mathbf{P}(\mu_\tau(t)/A_\tau(t) > \delta A_\tau/A_\tau(t) | \mu_\tau(t) > 0) < \\ < \mathbf{P}(\mu_\tau(t)/A_\tau(t) > \delta/\varepsilon | \mu_\tau(t) > 0) < 2 \cdot e^{-\delta/\varepsilon}, \end{aligned}$$

лишь только t достаточно велико. Здесь мы использовали условие (8) и неравенство $A_\tau/A_\tau(t) > 1/\varepsilon$, справедливое для $t < \tau_\varepsilon$. Следовательно, для любого $\delta > 0$ существуют ε и t_0 такие, что

$$\mathbf{P}(\mu_\tau(t) > \delta A_\tau | \mu_\tau(t) > 0) < 1/4 \quad (20)$$

для $t_0 < t < \tau_\varepsilon$.

Кроме того, в силу условия (9)

$$\mathbf{P}(\mu_\tau(t) > \delta A_\tau | \mu_\tau(t) > 0) < 1/4 \quad (21)$$

для $0 < t < t_0$ при достаточно большом τ .

Полагая теперь в (19) $\delta < 1/(4 \cdot |\theta|)$ и принимая во внимание (20), (21), приходим к неравенству (18).

Заметим, что при $|x - 1| < 1/2$

$$|\ln x| < 2 \cdot |x - 1|. \quad (22)$$

Из условия (17) в силу (18) и (22) следует

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{\tau \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\tau_\varepsilon} \ln g_\tau(\theta, t) dX_\tau(\tau - t) = 0. \quad (23)$$

Из (16) и (23) получаем, что

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E} e^{i\theta I_1(\varepsilon)} = 1.$$

Это означает, что

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{\tau \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} I_1(\varepsilon) = 0. \quad (24)$$

С другой стороны, в силу (15)

$$I_2(\varepsilon) \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0]{\mathcal{D}} \mathfrak{M}_0, \varepsilon > \varepsilon(\tau), \quad (25)$$

где с. в. $\mathfrak{M}_0$ имеет характеристическую функцию

$$\mathbf{E} \exp \left\{ i\theta \int_{0+}^1 (1 - i\theta u)^{-1} dT(u) \right\}.$$

Комбинируя (10), (24) и (25), получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть семейство ветвящихся с. п. $\mu_\tau^{(j)}(t)$, $0 < t \leq \tau$, удовлетворяет условиям (8) и (9), а для процессов иммиграции $X_\tau(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, имеет место сходимость

$$\int_v^1 Q_\tau(\psi(u, \tau)) (A_\tau(\psi(u, \tau))/A_\tau) dX_\tau(\tau - \psi(u, \tau)) \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{} T(v) \quad (26)$$

в смысле конечномерных распределений, где $\psi(u, \tau) = A_\tau^{-1}(uA_\tau)$, $u \in [0, 1]$, $Q_\tau(t) = \mathbf{P}(\mu_\tau(t) > 0) \xrightarrow[t \rightarrow \infty, \tau \rightarrow \infty]{} 0$ и $T(v)$ — с. п. с неубывающими траекториями. Кроме того, пусть для любого фиксированного θ и $\tau_\varepsilon = \psi(\varepsilon, \tau)$

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{\tau \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\tau_\varepsilon} |\mathbf{E} \exp \{ i\theta \mu_\tau(t)/A_\tau \} - 1| dX_\tau(\tau - t) = 0. \quad (27)$$

Тогда с. в. $Z_\tau(\tau)/A_\tau$ сходится по распределению при $\tau \rightarrow \infty$ к с. в. $\mathfrak{M}_0$ с характеристической функцией

$$\mathbf{E} \exp \left\{ i\theta \int_{0+}^1 (1 - i\theta u)^{-1} dT(u) \right\}.$$

Замечание. Пусть $\mathbf{P}(\mu_\tau(t) > 0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow \infty$. Тогда, очевидно, $B_\tau(u) \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty]{} \infty$, $u \in [0, 1]$. Поэтому в силу замечания к теореме 1 характеристическую функцию предельной с. в. $\mathfrak{M}$ можно записать в виде

$$\mathbf{E} \exp \left\{ \int_{0+}^1 \int_0^\infty (e^{i\theta x} - 1) x^{-1} e^{-x/u} dx dT(u) \right\}.$$

Подобное представление через характеристическую функцию безгранично делимого распределения впервые, видимо, было получено в [6].

При существовании математических ожиданий с. п. $\mu_\tau^{(j)}(t)$ условие (27) следует из условия

$$\mathbf{P}\text{-}\lim_{\tau \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\tau_\varepsilon} \mathbf{E}(\mu_\tau(t)/A_\tau) dX_\tau(\tau - t) = 0. \quad (28)$$

В частности, если для некоторого $\varepsilon > 0$

$$\sup_{\tau} \sup_{0 < t < \psi(\varepsilon, \tau)} \mathbf{E} \mu_\tau(t) < C < \infty, \quad (29)$$

то условие (28) выполняется при

$$\frac{X_\tau(\tau) - X_\tau(\tau - \tau_\varepsilon)}{A_\tau} \xrightarrow[\tau \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0]{\mathbf{P}} 0. \quad (30)$$

Нетрудно убедиться в том, что (30) имеет место, например, когда с. п. $T(v)$ в (26) стохастически непрерывен в 0.

С другой стороны, из условия (29) следует условие (9). Поэтому из теоремы 2 в качестве следствия вытекает основной результат работы [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Асадуллин М. Х., Нагаев С. В. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса с иммиграцией. — Мат. заметки, 1982, т. 32, № 4, с. 537—548.
2. Бадалбаев И. С., Зубков А. М. Предельные теоремы для последовательности ветвящихся процессов с иммиграцией. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, № 2, с. 382—388.
3. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.
4. Нагаев С. В., Мухамедханова Р. Переходные явления для ветвящихся случайных процессов с дискретным временем. — В кн.: Предельные теоремы и статистические теоремы. Ташкент: Фан, 1966, с. 83—89.
5. Нагаев С. В. Переходные явления для зависящих от возраста ветвящихся процессов с дискретным временем. I, II. — Сиб. мат. журн., 1974, т. 15, № 2, с. 368—394; № 3, с. 570—579.
6. Foster J. H., Williamson J. A. Limit theorems for the Galton — Watson process with time-dependent immigration. — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1971, Bd 20, H. 3, p. 227—235.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

О СХЕМЕ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ЯВЛЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ

С. В. НАГАЕВ, Н. В. ГИЗБРЕХТ

1. Введение

В настоящей работе изучаются распределения сумм случайных величин (с. в.), заданных на однородной цепи Маркова. При этом основное внимание сосредоточивается на специальном случае, когда цепь Маркова описывает симметричное блуждание на единичной сфере в R^d .

Рассматриваемая нами схема, с одной стороны, имеет прямое отношение к случайным блужданиям на группах, с другой стороны, у нее есть достаточно интересные прикладные аспекты. Об этом более подробно будет сказано несколько ниже, а пока мы перейдем к формульному описанию.

Пусть $\{\Omega_k\}_0^\infty$ — однородная цепь Маркова, фазовым пространством которой является единичная сфера в R^d , $d \geq 3$, $\mathcal{B}$ — σ -алгебра борелевских множеств на S_0 . Функция вероятностей перехода $P(x, A)$, $x \in S_0$, $A \in \mathcal{B}$, удовлетворяет следующему условию:

a) $P(x, A) = P(Dx, DA)$, где D — произвольное вращение.

С другой стороны, пусть $Y_n(x)$, $n = 0, \infty$, $x \in S_0$, — двухпараметрическое семейство с. в. со значениями в R^d такое, что $Y_0(x_0)$, $Y_1(x_1)$, ..., $Y_n(x_n)$, ... взаимно независимы для любой последовательности $\{x_k\}_0^\infty$. Кроме того, предположим, что $\forall x$ с. в. $Y_n(x)$, $n = 0, \infty$, имеют общую функцию распределения $F(x, \cdot)$, причем $F(x, y) \forall y \in R^d$ измерима, по Борелю, относительно x .

Рассмотрим случайное блуждание

$$X_n = X_{n-1} + Y_n(\Omega_n), \quad X_0 = Y_0(\Omega_0). \quad (1)$$

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что a) эквивалентно совокупности следующих двух условий:

a₁) $P(x, A) = P(x, D_x A)$, где D_x — вращение, оставляющее неподвижным x ;

a₂) $P(Dx, DB) = P(x, B)$, где D — произвольное вращение, а B таково, что $D_x B = B$.