

Нетрудно убедиться в том, что (30) имеет место, например, когда с. п. $T(v)$ в (26) стохастически непрерывен в 0.

С другой стороны, из условия (29) следует условие (9). Поэтому из теоремы 2 в качестве следствия вытекает основной результат работы [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Асадуллин М. Х., Нагаев С. В. Предельные теоремы для критического ветвящегося процесса с иммиграцией. — Мат. заметки, 1982, т. 32, № 4, с. 537—548.
2. Бадалбаев И. С., Зубков А. М. Предельные теоремы для последовательности ветвящихся процессов с иммиграцией. — Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, № 2, с. 382—388.
3. Севастьянов Б. А. Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971. 436 с.
4. Нагаев С. В., Мухамедханова Р. Переходные явления для ветвящихся случайных процессов с дискретным временем. — В кн.: Предельные теоремы и статистические теоремы. Ташкент: Фан, 1966, с. 83—89.
5. Нагаев С. В. Переходные явления для зависящих от возраста ветвящихся процессов с дискретным временем. I, II. — Сиб. мат. журн., 1974, т. 15, № 2, с. 368—394; № 3, с. 570—579.
6. Foster J. H., Williamson J. A. Limit theorems for the Galton — Watson process with time-dependent immigration. — Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1974, Bd 20, H. 3, p. 227—235.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

О СХЕМЕ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ЯВЛЕНИЕ ПЕРЕНОСА ЧАСТИЦ

С. В. НАГАЕВ, Н. В. ГИЗБРЕХТ

1. Введение

В настоящей работе изучаются распределения сумм случайных величин (с. в.), заданных на однородной цепи Маркова. При этом основное внимание сосредоточивается на специальном случае, когда цепь Маркова описывает симметричное блуждание на единичной сфере в R^d .

Рассматриваемая нами схема, с одной стороны, имеет прямое отношение к случайным блужданиям на группах, с другой стороны, у нее есть достаточно интересные прикладные аспекты. Об этом более подробно будет сказано несколько ниже, а пока мы перейдем к формульному описанию.

Пусть $\{\Omega_k\}_0^\infty$ — однородная цепь Маркова, фазовым пространством которой является единичная сфера в R^d , $d \geq 3$, $\mathcal{B}$ — σ -алгебра борелевских множеств на S_0 . Функция вероятностей перехода $P(x, A)$, $x \in S_0$, $A \in \mathcal{B}$, удовлетворяет следующему условию:

a) $P(x, A) = P(Dx, DA)$, где D — произвольное вращение.

С другой стороны, пусть $Y_n(x)$, $n = \overline{0, \infty}$, $x \in S_0$, — двухпараметрическое семейство с. в. со значениями в R^d такое, что $Y_0(x_0)$, $Y_1(x_1)$, ..., $Y_n(x_n)$, ... взаимно независимы для любой последовательности $\{x_k\}_0^\infty$. Кроме того, предположим, что $\forall x$ с. в. $Y_n(x)$, $n = \overline{0, \infty}$, имеют общую функцию распределения $F(x, \cdot)$, причем $F(x, y) \forall y \in R^d$ измерима, по Борелю, относительно x .

Рассмотрим случайное блуждание

$$X_n = X_{n-1} + Y_n(\Omega_n), \quad X_0 = Y_0(\Omega_0). \quad (1)$$

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что a) эквивалентно совокупности следующих двух условий:

a₁) $P(x, A) = P(x, D_x A)$, где D_x — вращение, оставляющее неподвижным x ;

a₂) $P(Dx, DB) = P(x, B)$, где D — произвольное вращение, а B таково, что $D_x B = B$.

Из a_1) следует, что $P(x, A)$ однозначно определяется функцией распределения

$$P_x(r) = P(\arccos \langle \Omega_0, \Omega_1 \rangle < r/\Omega_0 = x), \quad r \in [0, \pi]. \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение в R^d . С другой стороны, из условия a_2) вытекает, что $P_x(r)$ не зависит от x .

Блуждание X_n может служить для описания размера полимерной молекулы (см., например, [1, 2]) или процесса переноса частиц.

Так, односкоростному процессу переноса в однородной среде соответствует случай

$$Y_n(x) = \tau_n x, \quad (3)$$

где τ_n — последовательность независимых одинаково распределенных с.в. При этом τ_n интерпретируется как длина свободного пробега, Ω_n — как направление движения, а $\arccos \langle \Omega_{n-1}, \Omega_n \rangle$ — как угол отклонения после n -го столкновения.

Асимптотическая нормальность X_n при условии (3) впервые исследовалась М. Кацем [1] в случае $d=3$, $\tau_n \equiv 1$, $\langle \Omega_0, \Omega_1 \rangle \equiv 1$.

Заметим, что Ω_n можно представить в виде

$$\Omega_n = T_1 T_2 \dots T_n \Omega_0, \quad (4)$$

где T_k , $k = \overline{1, \infty}$, — случайные одинаково распределенные вращения относительно начала координат (см. п. 9). Это представление устанавливает связь между нашей работой и исследованиями по предельным теоремам на топологических группах.

Прежде всего следует упомянуть статью В. Н. Тутубалина [3], в которой доказывается центральная предельная теорема для сумм

$$W_n = \sum_1^n T_1 T_2 \dots T_k b_k. \quad (5)$$

Здесь b_k , $k = \overline{1, \infty}$, — случайные векторы в R^3 , не зависящие от T_j ($j \neq k$) и друг от друга.

Полагая $V_k(T) = T b_k$, $Z_k = T_1 T_2 \dots T_k$, мы можем записать (5) в виде

$$W_n = \sum_1^n V_k(Z_k). \quad (6)$$

С другой стороны, из (1) и (4) следует, что

$$X_n = \sum_1^n Y_k(Z_k \Omega_0).$$

Отсюда видно, что рассматриваемая нами схема близка к схеме, изучавшейся В. Н. Тутубалиным. Есть, однако, существенное различие в общности, поскольку функции $V_k(T)$ в (6) являются линейными. Зато у В. Н. Тутубалина отсутствует условие симметрии распределения $a)$, которое играет основную роль в нашей работе.

Таким образом, выигрывая в общности в одном отношении, мы проигрываем в другом, что, впрочем, случается не так уж редко.

В [4—6] результат В. Н. Тутубалина обобщается на случай произвольного d .

В статьях [7, 8] приводится оценка скорости сходимости с.в. $\langle W_n, e_j \rangle n^{-1/2}$ к нормальному закону. Здесь $\{e_j\}_1^d$ — ортонормированный базис в R^d . При прочих ограничениях авторы предполагают, что $\|b_n\| \leq M < \infty$.

В работе Т. Г. Курца [9] доказывается центральная предельная теорема для X_n в предположении, что при $d=3$ справедливо (3) с $\tau_n \equiv 1$, а цепь Маркова Ω_n такова, что выполнены следующие два условия:

$$b_1) \quad \forall x \in S_0 \quad \int_{S_0} y P(x, dy) = \rho x, \quad |\rho| < 1;$$

$$b_2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sum_1^n P^{(k)} f = \int_{S_0} f dv,$$

где f — произвольная непрерывная функция, v — некоторое распределение на S_0 , а $P^{(k)}$ — оператор, определяемый из соотношения

$$(P^{(k)} f)(x) = \int_{S_0} f(y) P^{(k)}(x, dy).$$

Здесь и в дальнейшем

$$P^{(k)}(x, A) = \int_{S_0} P^{(k-1)}(y, A) P(x, dy).$$

Условие b_1) дает возможность использовать популярный ныне мартингалный подход к доказательству центральной предельной теоремы (кстати, этот подход используется и в [7, 8]). В отличие от a) условие b_1) не гарантирует представление (4).

Сформулируем теперь наши результаты. Обозначим через μ равномерное распределение на сфере S_0 . Нетрудно видеть, что μ является стационарным распределением для цепи Маркова Ω_k . В том случае, когда речь идет о цепи Маркова, E означает математическое ожидание при условии, что начальное распределение является стационарным, а E_x — математическое ожидание при условии, что начальным состоянием служит x .

Положим для краткости $Y_j = Y_j(\Omega_j)$. Пусть оператор Q определяется соотношением

$$E \langle Y'_0, z \rangle^2 + 2 \sum_1^\infty E \langle Y'_0, z \rangle \langle Y'_j, z \rangle = \langle Qz, z \rangle,$$

где $Y'_j = Y_j - EY_0$.

Теорема 1. Пусть

$$P(|\langle \Omega_0, \Omega_1 \rangle| < 1) > 0 \quad (7)$$

и

$$E \|Y_0\|^2 < \infty. \quad (8)$$

Тогда для любого начального распределения

$$L((X_n - nEY_0)/n^{1/2}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L(X), \quad (9)$$

где X — нормальный $N(0, Q)$ вектор, причем

$$E |\langle Y'_0, z \rangle|^2 > 0 \Rightarrow \langle Qz, z \rangle > 0. \quad (10)$$

Запись $L(\xi_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L(\xi)$ означает слабую сходимость распределений ξ_n к распределению ξ .

Доказательство теоремы 1 опирается на более общую теорему 2, к формулировке которой мы теперь и переходим.

Пусть $\{z_k\}_0^\infty$ — однородная цепь Маркова со значением в произвольном измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, $\xi_k(x)$, $x \in \mathcal{X}$, $k = \overline{1, \infty}$, — семейство с.в. со значением в R^1 , причем $\xi_k(x_k)$ взаимно независимы при любом наборе x_k , $k = \overline{1, \infty}$. Кроме того, предположим, что $\forall x$ с.в. $\xi_k(x)$, $k = \overline{1, \infty}$, имеют общую функцию распределения $F(x, \cdot)$, причем $F(x, y) \forall y \in R^d$ измеримо, по Борелю, относительно x .

Положим для краткости $\xi_j = \xi_j(z_j)$.

Теорема 2. Пусть $\exists n_0$ такое, что

$$\sup_{x, y, A} |P^{(n_0)}(x, A) - P^{(n_0)}(y, A)| < 1 \quad (11)$$

(это условие обеспечивает существование стационарного распределения, см. [10]) и

$$E\xi_0^2 < \infty. \quad (12)$$

Тогда

$$L\left(n^{-1/2} \sum_1^n (\xi_k - E\xi_0)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L(\xi), \quad (13)$$

где с. в. ξ нормальна $N(0, \sigma^2)$,

$$\sigma^2 = E\xi_0'^2 + 2 \sum_1^\infty E\xi_0' \xi_k', \quad \text{а} \quad \xi_k' = \xi_k - E\xi_0.$$

Основную трудность при доказательстве теоремы 1 представляет вывод соотношения (10) и проверка условия (11). Как (10), так и (11) обычно постулируются в работах по предельным теоремам для цепей Маркова.

Соотношение (10) можно получить из работы В. М. Максимова [11], однако мы предпочли дать независимое доказательство, так как наш подход к доказательству (10) позволяет без больших дополнительных усилий получить оценку функции концентрации с. в. X_n при отсутствии каких-либо моментных ограничений.

З а м е ч а н и е. Если цепь Маркова z_j удовлетворяет условию (11), то этому же условию удовлетворяет цепь $z_j' = (z_j, z_{j+1}, \dots, z_{j+m})$ при любом фиксированном $m > 0$. Поэтому теорема 2 остается справедливой, когда $\xi_k = \xi_k(z_k, \dots, z_{k+m})$. В такой форме теорема 2 усиливает результат Г. Ю. Алешквичуса [12], который рассмотрел случай $m = 1$ при более сильном, чем в (12), ограничении.

2. Основные обозначения

Через D_x будем обозначать вращение в R^d , оставляющее неподвижным x . Положим $r^* = \pi/2 - |\pi/2 - r|$, где $0 \leq r \leq \pi$. Пусть $l_k = 2\pi^{k/2}/\Gamma(k/2)$ — площадь единичной сферы в R^k , а $\rho(x, y) \equiv \arccos \langle x, y \rangle$ — геодезическая метрика на S_0 .

Через $S_x(r)$ обозначим сферу радиуса r с центром в x на сфере S_0 , т. е. множество $\{y: y \in S_0, \rho(x, y) = r\}$, а через $B_x(r)$ — множество $\{y: y \in S_x(r'), r' \leq r\}$.

Равномерные распределения на сферах $S_0, S_x(r)$ обозначим соответственно через $\mu, \mu_x(\cdot, r)$. Если $r = 0$ или $r = \pi$, то по определению мера $\mu_x(\cdot, r)$ сосредоточена соответственно в x и $-x$.

Обозначим через $G(x, \cdot)$ распределение на S_0 , определяемое соотношением

$$G(x, A, r_0, r_1) = G(x, A) = \int_{S_0} \mu_y(A, r_1) \mu_x(dy, r_0),$$

где $0 < r_0, r_1 < \pi$.

В некоторых случаях будем использовать сокращенное обозначение G_x вместо $G(x, \cdot)$.

Мера $P_x(\cdot) = P(x, \cdot)$ задана на S_0 и инвариантна относительно D_x . Ей соответствует функция распределения P (мы будем обозначать ее той же буквой без нижнего индекса x) на отрезке $[0, \pi]$, которая удовлетворяет соотношению

$$P(r) = P_x(B_x(r)), \quad 0 \leq r \leq \pi. \quad (14)$$

Нетрудно видеть, что

$$P(x, A) = \int_{[0, \pi]} \mu_x(A, r) P(dr).$$

Аналогично

$$G_x(A) = G(x, A) = \int_{[0, \pi]} \mu_x(A, r) G(dr),$$

$$\mu(A) = \int_{[0, \pi]} \mu_x(A, r) \mu_1(dr),$$

где G, μ_1 заданы на отрезке $[0, \pi]$ и удовлетворяют соотношениям $G(r) = G(x, B_x(r)), \mu_1(r) = \mu(B_x(r))$.

Заметим, что мера μ_1 абсолютно непрерывна (относительно меры Лебега) с плотностью

$$\sigma(r) = \mu_1'(r) = l_{d-1} [\sin r]^{d-2}. \quad (15)$$

При фиксированных r_0, r_1 в некоторых случаях будем использовать следующие сокращенные обозначения: $S_x = S_x(r_0), S_{x,y} = S_x(r_0) \cap S_y(r_1); \mu_x(\cdot) = \mu_x(\cdot, r_0)$. В соответствии с этими обозначениями определим $\mu_{x,y}(\cdot)$ как равномерное распределение на $S_{x,y}$, а $\rho_x(\cdot, \cdot)$ — как геодезическую метрику на S_x .

Символ $\text{mod } \nu$ означает, что некоторое свойство выполняется почти всюду относительно меры ν . Абсолютную непрерывность ν_1 относительно ν_2 будем обозначать отношением $\nu_1 < \nu_2$.

3. Эргодические свойства последовательности Ω_n

Исследуем сначала распределение $G(r)$. Обозначим через ν меру Лебега.

Предложение 1. *Распределение $G(r)$ абсолютно непрерывно относительно ν с плотностью*

$$g(r) = (l_{d-2} \sin r / l_{d-1} \sin r_0 \sin r_1) \times \\ \times (1 - ((\cos r - \cos r_0 \cos r_1) / (\sin r_0 \sin r_1)^2)^{(d-4)/2} \quad (16)$$

для $r \in (\alpha, \beta)$ и $g(r) = 0$, если $r \notin [\alpha, \beta]$, где $\alpha = |r_0 - r_1|, \beta = \pi - |\pi - r_0 - r_1| = 2((r_0 + r_1)/2)^*$.

Доказательство. Выберем и зафиксируем какую-либо точку y на сфере $S_x(r_0)$ и рассмотрим сферу $S_y(r_1)$. Из соображений симметрии получим выражение

$$G(r) = \Sigma(r) / \Sigma. \quad (17)$$

Здесь $\Sigma(r)$ — площадь части сферы $S_y(r_1)$, заключенной в шаре $B_x(r)$, Σ — полная площадь $S_y(r_1)$.

Легко показать, что

$$\Sigma = l_{d-1} [\sin r_1]^{d-2}, \\ \Sigma(r) = 0 \quad \forall r \in [0, \alpha], \\ \Sigma(r) = \Sigma \quad \forall r \in (\beta, \pi]. \quad (18)$$

Найдем $\Sigma(r)$ для $r \in [\alpha, \beta]$. Пусть ω и ω_1 — гиперплоскости в R^d такие, что $S_x(r) = \omega \cap S_0, S_y(r_1) = \omega_1 \cap S_0$. Не нарушая общности, можно считать, что уравнение сферы $S_y(r_1)$ в гиперплоскости ω_1 имеет вид

$$\sum_{i=1}^{d-1} y_i^2 = \gamma^2, \quad \text{где}$$

$$\gamma = \sin r_1, \quad (19)$$

а гиперплоскость $\omega \cap \omega_1$ описывается уравнением $y_1 = \theta$.

Поэтому

$$\Sigma(r) = b(\theta). \quad (20)$$

Здесь $b(\theta)$ — площадь части сферы $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{d-1}^2 = \gamma^2$, заключенной между гиперплоскостями $y_1 = \theta, y_1 = \gamma$.

Заметим, что $|\vartheta|$ — расстояние от точки $y^* = y \cos r_1$ до гиперплоскости $\omega \cap \omega_1$, а y^* — центр сферы $S_y(r_1)$ в гиперплоскости ω_1 . Рассмотрим прямую $l(\lambda) = y^* + \lambda y'$, проходящую через y^* и ортогональную гиперплоскости $\omega \cap \omega_1$. В качестве y' можно взять единичный вектор $y' = (x - y \langle x, y \rangle) / \|x - y \langle x, y \rangle\| = (x - y \cos r_0) / \sin r_0$. Тогда $\vartheta = \lambda^*$, где λ^* таково, что $l(\lambda^*) \in \omega$, иначе говоря, $\langle (l(\lambda^*) - x \cos r), x \rangle = 0$.

Отсюда

$$\vartheta = (\cos r - \langle x, y^* \rangle) / \langle x, y' \rangle = (\cos r - \cos r_0 \cos r_1) / \sin r_0. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{db(\vartheta)}{d\vartheta} = -l_{d-2} [1 - (\vartheta/\gamma)^2]^{(d-4)/2} \gamma^{d-3}. \quad (22)$$

Далее, в силу (21)

$$\frac{d\vartheta}{dr} = -\sin r / \sin r_0. \quad (23)$$

Вследствие (17) и (20)

$$\frac{dG}{dr} \Sigma = \frac{db}{d\vartheta} \frac{d\vartheta}{dr}. \quad (24)$$

Подставляя (18), (22) и (23) в (24) и учитывая (19), (21), получим (16).

Абсолютная непрерывность G следует из (16)–(18). Предложение 1 доказано.

Следствие 1. Распределение G_x абсолютно непрерывно относительно μ с плотностью

$$\frac{dG_x}{d\mu}(y) = \frac{g(\rho(x, y))}{\sigma(\rho(x, y))}. \quad (25)$$

Доказательство. Представление (25) является следствием соотношения

$$\frac{dG}{d\mu_1}(r) = \frac{dG}{dv}(r) \frac{dv}{d\mu_1}(r) = g(r) / \sigma(r)$$

и следующего утверждения.

Лемма 1. Пусть распределения $P_{1,x} = P_1(x, \cdot)$, $P_{2,x} = P_2(x, \cdot)$ заданы на S_0 и удовлетворяют условию а), а P_1, P_2 — соответствующие им меры на $[0, \pi]$, определяемые в [14]. Если $P_1 \prec P_2$ с плотностью $q(r) = \frac{dP_1}{dP_2}(r)$, то $P_{1,x} \prec P_{2,x}$ и

$$q_x(y) = \frac{dP_{1,x}}{dP_{2,x}}(y) = q(\rho(x, y)).$$

Доказательство леммы 1 предоставляется читателю.

Положим $K_x(\alpha, \beta) = \{y : \alpha < \rho(x, y) < \beta\}$.

Следствие 2. Если $r_0 = r_1$, то $G_x \sim \mu$ на $B_x(2r_0^*)$ (символ $\sim$ означает эквивалентность мер).

Доказательство. Нам достаточно доказать, что $G_x \succ \mu$. Если $r_0 = r_1$, то вследствие (16) $g(r) > 0 \quad \forall r \in (0, 2r_0^*)$. Это означает в силу (25), что $G_x \succ \mu$ в кольце $K_x(0, 2r_0^*)$. С другой стороны, $\mu(\{x\}) = 0$ и $\mu(S_x(2r_0^*)) = 0$. Поэтому $G_x \succ \mu$ и на $B_x(2r_0^*)$, что и требовалось доказать.

Пусть $p^{(n)}(x, y)$ — плотность абсолютно непрерывной относительно μ компоненты распределения $P^{(n)}(x, \cdot)$.

Следствие 3. Если $P(r)$ непрерывна в точках 0 и π , то переходная функция

$$P^{(2)}(x, \cdot) = \int_{S_0} P(y, \cdot) P(x, dy)$$

абсолютно непрерывна относительно μ , причем $\exists \delta$ такое, что $\forall \varepsilon > 0$

$$p^{(2)}(x, y) \geq \gamma(\varepsilon) > 0$$

для $y \in K_x(\varepsilon, \delta)$ или, что то же самое, для $x \in K_y(\varepsilon, \delta)$.

Доказательство. Из соотношения (14) и определения G_x следует, что

$$P^{(2)}(x, \cdot) \equiv \int_{[0, \pi]} \int_{[0, \pi]} G(x, \cdot, r_0, r_1) P(dr_0) P(dr_1).$$

Используя теперь лемму 1, мы приходим к выводу, что распределение $P^{(2)}(x, \cdot)$ является смесью распределений, абсолютно непрерывных относительно μ , и, следовательно, само абсолютно непрерывно.

Далее, $\exists (0 < a < \pi)$ такое, что $P(a) < P(r)$ для $r > a$.

В силу предложения 1 и следствия 1 распределение $G(x, \cdot, r_0, r_1)$ при $r_0 \in (a, r)$, $r_1 \in (a, r)$ имеет положительную плотность в кольце $K_x(r - a, 2(a^* - r + a))$. Последнее не пусто, если $r - a < 2a^*/3$.

С другой стороны,

$$P^{(2)}(x, \cdot) \geq \int_{[a, r]} \int_{[a, r]} G(x, \cdot, r_0, r_1) P(dr_0) P(dr_1).$$

Поэтому $p^{(2)}(x, y) > \gamma(r, a) > 0$ в кольце $K_x(r - a, 2(a^* - r + a))$.

Полагая $\varepsilon = r - a$ и фиксируя $\delta < 2a^*$, получаем требуемую оценку снизу для $p^{(2)}(x, y)$.

Следствие 4. Если $P(|\langle \Omega_0, \Omega_1 \rangle| < 1) > 0$, то $\exists n_0$ такое, что

$$p^{(n_0)}(x, y) > \lambda > 0.$$

Доказательство. В силу следствия 3 $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall (\varepsilon < \delta)$

$$\begin{aligned} p^{(4)}(x, y) &\geq \int_{K_x(\varepsilon, \delta) \cap K_y(\varepsilon, \delta)} p^{(2)}(z, y) p^{(2)}(x, z) \mu(dz) \geq \\ &\geq \gamma^2(\varepsilon) \mu(K_x(\varepsilon, \delta) \cap K_y(\varepsilon, \delta)). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\mu(K_x(\varepsilon, \delta) \cap K_y(\varepsilon, \delta)) > \mu(B_x(\delta) \cap B_y(\delta)) - 2\mu(B_x(\varepsilon)).$$

Пусть $z = S_x(\rho(x, y)/2) \cap S_y(\rho(x, y)/2)$. Если $\rho(x, y) < 2\delta$, то

$$B_z(\delta - \rho(x, y)/2) \subset B_x(\delta) \cap B_y(\delta).$$

Полагая $\eta = \delta - \rho(x, y)/2$, получаем при $3\varepsilon < \eta$ оценку

$$\mu(K_x(\varepsilon, \delta) \cap K_y(\varepsilon, \delta)) > \mu(B_z(\eta)) - 2\mu(B_z(\varepsilon)) > \mu(B_z(\eta/3)).$$

Следовательно, $\forall \eta > 0$ $p^{(4)}(x, y) \geq \gamma_1(\eta) > 0$,
если $\rho(x, y) < 2\delta - \eta$.

Повторяя эти рассуждения, приходим к выводу, что $\forall x, y$

$$p^{(4k_0)}(x, y) > \gamma_2 > 0,$$

где k_0 удовлетворяет условию $2\delta k_0 > \pi$. Остается положить $4k_0 = n_0$.

4. Некоторые свойства измеримых, по Борелю, функций, заданных на S_0

Пусть h — борелевская функция на S_0 .

Лемма 2. Если $h \geq 0$ и $h = 0 \pmod{\mu_x}$ $\forall x \in S_{x_0} \pmod{\mu_{x_0}}$, то $h = 0 \pmod{\mu}$ на $B_{x_0}(2r_0^*)$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что в условиях леммы

$$\int_{B_{x_0}(2r_0^*)} h(y) G(x_0, dy) = \int_{S_{x_0}} \mu_{x_0}(dx) \int_{S_x} h(y) \mu_x(dy) = 0,$$

где $G(x_0, \cdot)$ вычисляется при $r_1 = r_0$.

Значит, $h = 0 \pmod{G(x_0, \cdot)}$ на $B_{x_0}(2r_0^*)$. С другой стороны, в силу следствия 2 $G(x_0, \cdot) > \mu(\cdot)$ на $B_{x_0}(2r_0^*)$. Таким образом, $h = 0 \pmod{\mu}$ на $B_{x_0}(2r_0^*)$.

Лемма 3. Пусть A — борелевское множество на S_0 , $A \subseteq B_{x_0}(t_0)$, $t_0 \leq \pi/4$. Тогда $\forall r < \pi/2$

$$\mu(A) \leq \mu^* \left(\bigcup_{x \in A} S_x(r) \right),$$

где μ^* — внешняя мера, порождающая μ .

Доказательство. Для $y \in S_{x_0}(\alpha)$ определим $u_r(y) = S_{x_0}(\alpha + r) \cap S_y(r)$ и положим $U_r(A) = \{u_r(y) : y \in A\}$.

Нетрудно видеть, что

$$\mu(A) = \int_{[0, t_0]} \mu_{x_0}(A, \alpha) \sigma(\alpha) d\alpha.$$

Если A открыто или компактно, то $U_r(A)$ также открыто или компактно. В этом случае $U_r(A)$ измеримо и

$$\mu(U_r(A)) = \int_{[0, t_0]} \mu_{x_0}(U_r(A), r + \alpha) \sigma(r + \alpha) d\alpha.$$

Очевидно, $\mu_{x_0}(U_r(A), r + \alpha) = \mu_{x_0}(A, \alpha)$. Поскольку $\sigma(\alpha + r) > \sigma(\alpha)$, когда $\alpha < \pi/4$, $r < \pi/2$, мы заключаем, что

$$\mu(U_r(A)) \geq \mu(A),$$

если A компактно или открыто.

Следовательно, для борелевского A

$$\mu^* \left(\bigcup_{x \in A} S_x(r) \right) \geq \mu^*(U_r(A)) \geq \mu(A).$$

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Пусть компакт $A \subset B_{x_0}(2r_0^*)$ и $x_0 \in A$ является точкой плотности A относительно μ . Если h непрерывна на A и $h = c_x \pmod{\mu_x}$ на $S_x \cap A \forall x \in S_{x_0}$, где c_x зависит только от x , то

$$h = h(x_0) \pmod{\mu} \text{ на } A.$$

Доказательство. Пусть $A_x = \{y : h(y) = c_x, y \in A \cap S_x\}$, $A_0 = \bigcup_{x \in S_{x_0}} A_x$. В силу леммы 2 $\mu(A \setminus A_0) = 0$. Поэтому x_0 — точка плотности для A_0 .

Если x_0 — предельная точка для A_x , то в силу непрерывности h на A $c_x = h(x_0)$.

Пусть E — множество $x \in S_{x_0}$ таких, что x_0 не является предельной точкой для A_x . Предположим, что E непусто, и положим

$$E_m = \{x : x \in E, B_{x_0}(1/m) \cap A_x \neq \emptyset\}.$$

Так как x_0 — точка плотности,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[0, \varepsilon]} \mu_{x_0}(A_0, t) \sigma(t) dt \Big/ \int_{[0, \varepsilon]} \sigma(t) dt = 1.$$

Поэтому найдется последовательность $\alpha_n \downarrow 0$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{x_0}(A_0, \alpha_n) = 1. \quad (26)$$

Положим $A_m = \bigcup_{x \in E_m} S_x$. Нетрудно видеть, что

$$A_0^c \cap S_{x_0}(\alpha_n) \supset A_m \cap S_{x_0}(\alpha_n), \quad (27)$$

где $A_0^c = B_{x_0}(2r_0^*) \setminus A_0$, $\alpha_n \leq 1/m$. Далее, $A_m \cap S_{x_0}(\alpha_n) = \bigcup_{y \in D_{n,m}} S'_y(\varepsilon_n)$.

Здесь $S'_y(\varepsilon_n) = \{z : z \in S_{x_0}(\alpha_n), \rho'(y, z) = \varepsilon_n\}$, $\rho'(\cdot, \cdot)$ — геодезическая метрика на $S_{x_0}(\alpha_n)$, ε_n — радиус $S_{x_0}(\alpha_n) \cap S_x$ как сферы на $S_{x_0}(\alpha_n)$;

$$D_{n,m} = \bigcup_{x \in E_m} S_{x_0}(\alpha_n) \cap S_x(r_0 - \alpha_n).$$

Применяя теперь лемму 3, имеем

$$\mu_{x_0}^*(A_m, \alpha_n) \geq \mu_{x_0}^*(D_{n,m}, \alpha_n), \quad (28)$$

где $\mu_x^*(\cdot, r)$ — внешняя мера, определяемая мерой $\mu_x(\cdot, r)$.

С другой стороны, в силу (27)

$$\mu_{x_0}(A_0^c, \alpha_n) \geq \mu_{x_0}^*(A_m, \alpha_n), \quad \alpha_n < 1/m. \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что

$$\mu_{x_0}^*(D_{n,m}, \alpha_n) = \mu_{x_0}^*(E_m, r_0). \quad (30)$$

Из (28) — (30) и (26) следует, что $\forall m$

$$\mu_{x_0}^*(E_m, r_0) = 0.$$

Следовательно,

$$\mu_{x_0}(E, r_0) = 0.$$

Используя снова лемму 2, получаем

$$\mu\left(\bigcup_{x \in E} A_x\right) = 0.$$

С другой стороны, $c_x = h(x_0)$, если $x \in S_{x_0} \setminus E$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. Пусть компакт $A \subset S_0$ и h непрерывна на A . Если r_0 таково, что

$$\mu(B_x(2r_0^*)) > 1 - \mu(A), \quad (31)$$

то следующие условия эквивалентны:

1) $h \neq \text{const} \pmod{\mu}$ на A ,

2) $\mu\{x : h \neq c_x \pmod{\mu_x} \text{ на } S_x \cap A\} > 0$,

3) $\int_{S_0} \left(\int_{A \cap S_x} \int_{A \cap S_x} (h(y) - h(y'))^2 q(y, y') \mu_x(dy) \mu_x(dy') \right) \mu(dx) > 0$

для любой функции q такой, что

$$q(\cdot, \cdot) > 0 \pmod{\mu_x \times \mu_x} \text{ на } S_x \times S_x.$$

Доказательство. Покажем, что 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть 2) не выполняется. Из леммы 4 тогда следует, что $h = \text{const} \pmod{\mu}$ на $A \cap B_x(2r_0^*)$.

С другой стороны, на S_0 существует конечное покрытие $B_k = B_{x_k}(2r_0^*)$, $k = 1, m$, такое, что $\mu(B_k \cap B_{k+1}) > 1 - \mu(A)$. Поэтому $\mu(A \cap B_k \cap B_{k+1}) > 0$, следовательно, $h = \text{const} \pmod{\mu}$ на S_0 . Отсюда заключаем, что 1) $\Rightarrow$ 2).

Пусть имеет место 2). Тогда на $S_x \cap A$ существуют множества $A_{x,1}$, $A_{x,2}$ такие, что $\mu_x(A_{x,i}) > 0$ и $h < d_1$ на $A_{x,1}$, $h \geq d_2$ на $A_{x,2}$, где $d_1 < d_2$. Поэтому $|h(y) - h(y')| > 0$ на $A_{x,1} \times A_{x,2}$ и, следовательно, 2) $\Rightarrow$ 3).

Пусть $h = \text{const} \pmod{\mu}$ на A . Тогда $|h(y) - h(y')|^2 = 0 \pmod{\mu_x \times \mu_x}$ на $A \cap S_x \times A \cap S_x$ для $x \in S_0 \pmod{\mu}$. Поэтому 3) $\Rightarrow$ 1). Лемма 5 доказана.

Предложение 2. Пусть $A \subset \mathcal{B}$ и r_0 удовлетворяет условию (31). Тогда, как и в лемме 5, условия 1), 2), 3) эквивалентны.

Доказательство. Пусть выполнено условие 1). Воспользовавшись теоремой Лузина, выберем компакт $A' \subset A$ так, что h непрерывна на A' , $\mu(B_x(2r_0^*)) > 1 - \mu(A')$ и, кроме того,

$$h \neq \text{const} \pmod{\mu} \text{ на } A.$$

Отсюда и из леммы 5 следует, что для множества A' выполнены условия 2), 3), но тогда условия 2), 3) выполнены и для множества A . Если условие 1) не выполняется, то не выполняются, очевидно, и условия 2), 3). Предложение 2 доказано.

5. Вычисление производной Радона — Никодима для одного класса мер абсолютно непрерывных относительно G_x

Лемма 6. Пусть $\lambda < \gamma$ — меры на измеримом пространстве $(S_0, \mathcal{B})$ и

$$q(x) = \frac{d\lambda}{d\gamma}(x), \quad x \in S_0.$$

Тогда для любой последовательности $\alpha_n \rightarrow 0$

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda(B_x(\alpha_n))}{\gamma(B_x(\alpha_n))} \pmod{\gamma}.$$

Доказательство. Последовательность множеств $U_n = B_x(\alpha_n)$, $x \in S_0$, удовлетворяет условию теоремы 44.18 в монографии [13, с. 768]. Из этой теоремы и следует утверждение леммы 6.

Лемма 7. Пусть λ_n — последовательность мер на измеримом пространстве $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$, $\lambda_n < \gamma$, $\lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \lambda$ по вариации и существует

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} d\lambda_n/d\gamma \pmod{\gamma}.$$

Тогда $q = \frac{d\lambda}{d\gamma} \pmod{\gamma}$.

Доказательство. Очевидно, $\gamma(A) = 0 \Rightarrow \lambda_n(A) = 0 \Rightarrow \lambda(A) = 0$. Таким образом, $\lambda < \gamma$. Положим $f_1 = \frac{d\lambda}{d\gamma}$. Нетрудно видеть, что

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{X}} \left| \frac{d\lambda_n}{d\gamma} - f_1 \right| d\gamma \geq \int_{\mathcal{X}} |f - f_1| d\gamma.$$

Отсюда $f = f_1 \pmod{\gamma}$. Лемма 7 доказана.

Для любой ограниченной борелевской функции f положим

$$\mu_x(f, \cdot) = \int_{S_0} f(z) \mu_z(\cdot, r_1) \mu_x(dz, r_0). \quad (32)$$

Заметим, что при фиксированных f и x $\mu_x(f) = \mu_x(f, \cdot)$ является мерой, абсолютно непрерывной относительно G_x .

Лемма 8. При любой непрерывной f

$$\frac{d\mu_x(f)}{dG_x}(y) = \int_{S_{x,y}} f(z) \mu_{x,y}(dz). \quad (33)$$

Доказательство. Положим для краткости $S_{x,y}(r) = S_x(r_0) \cap S_y(r)$ (разумеется, $S_{x,y}(r)$ может быть пустым).

Фиксируем $y \in S_0$ и представим меру $\mu_x(\cdot, r_0)$ в виде

$$\mu_x(\cdot, r_0) = \int_{[0, \pi]} \mu_{x,y}^r(\cdot) \sigma_y(r) dr. \quad (34)$$

Здесь $\mu_{x,y}^r(\cdot)$ — равномерное распределение на множестве $S_{x,y}(r)$, если последнее непусто:

$$\sigma_y(r) = \frac{d}{dr} \mu_x(B_y(r), r_0).$$

Подставляя (34) в (32), получаем

$$\mu_x(f, \cdot) = \int_{[0, \pi]} \sigma_y(r) dr \int_{S_{x, y(r)}} f(z) \mu_z(\cdot, r_1) \mu_{x, y}^r(dz). \quad (35)$$

Вычислим теперь $\mu_x(f, B_y(\alpha))$. Заметим, что $\mu_z(B_y(\alpha), r_1) = \text{const}$ на $S_{x, y(r)}$. Обозначая это постоянное значение через $\mu(r, \alpha)$, имеем

$$\int_{S_{x, y(r)}} f(z) \mu_z(B_y(\alpha), r_1) \mu_{x, y}^r(dr) = \mu(r, \alpha) \int_{S_{x, y(r)}} f(z) \mu_{x, y}^r(dz). \quad (36)$$

Положим для краткости

$$t(y) = \int_{S_{x, y}} f(z) \mu_{x, y}(dz).$$

Если множество $S_{x, y}$ непусто, то оно состоит либо из одной точки z_0 , либо является сферой размерности $d-2$.

Рассмотрим первый случай. Тогда $t(y) = f(z_0)$. Отсюда в силу непрерывности f

$$\lim_{r \rightarrow r_1} \int_{S_{x, y(r)}} f(z) \mu_{x, y}^r(dz) = f(z_0) = t(y). \quad (37)$$

Рассмотрим теперь второй случай. Нетрудно видеть, что

$$\int_{S_{x, y(r)}} f(z) \mu_{x, y}^r(dz) = \int_{S_{x, y}} f_r(z) \mu_{x, y}(dz),$$

где $f_r(z) = f(z_r)$, $z_r = S_z(|r - r_1|) \cap S_{x, y(r_1)}$. Поэтому в силу непрерывности f

$$\lim_{r \rightarrow r_1} \int_{S_{x, y(r)}} f(z) \mu_{x, y}^r(dz) = t(y). \quad (38)$$

Далее,

$$\mu_z(B_y(\alpha), r_1) = 0, \quad (39)$$

если $|\rho(y, z) - r_1| \geq \alpha$.

Из (35)–(39) получаем

$$\mu_x(f, B_y(\alpha)) = t(y) \left(\int_{|r-r_1| < \alpha} \sigma_y(r) \mu(r, \alpha) dr (1 + \psi(\alpha)) \right), \quad (40)$$

где $\psi(\alpha) \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$.

Заметим, что

$$G(x, B_y(\alpha)) = \int_{|r-r_1| < \alpha} \sigma_y(r) \mu(r, \alpha) dr. \quad (41)$$

Из (40), (41) следует выражение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mu_x(f, B_y(\alpha))}{G(x, B_y(\alpha))} = t(y).$$

Для того чтобы получить представление (33), достаточно теперь воспользоваться леммой 6.

Предложение 3. Пусть f — ограниченная борелевская функция. Тогда справедливо соотношение (33) для $x \in S_0 \setminus E$, где $\mu(E) = 0$.

Доказательство. Выберем последовательность непрерывных функций f_n так, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\dot{S}_0} |f(z) - f_n(z)| \mu(dz) = 0. \quad (42)$$

Тогда из представления

$$\int_{\dot{S}_0} |f(z) - f_n(z)| \mu(dz) = \int_{\dot{S}_0} \mu(dx) \int_{\dot{S}_x} |f(z) - f_n(z)| \mu_x(dz)$$

следует существование подпоследовательности n_j , для которой

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{S_x} |f(z) - f_{n_j}(z)| \mu_x(dz) = 0 \quad (43)$$

для всех $x \in S_0 \setminus E$, где E таково, что $\mu(E) = 0$.

Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность $\{n_j\}$ совпадает с последовательностью $\{n\}$. Нетрудно видеть, что

$$\int_{S_0} |t(y) - t_n(y)| \mu(dy) \leq \int_{S_0} \mu(dy) \int |f(z) - f_n(z)| \mu_{x,y}(dz), \quad (44)$$

$$\text{где } t(y) = \int_{S_{x,y}} f(z) \mu_{x,y}(dz), \quad t_n(y) = \int_{S_{x,y}} f_n(z) \mu_{x,y}(dz).$$

Используя (15) и представление

$$\mu_x(\cdot, r_0) = \int_{S_x(r)} \mu_{x,y}(\cdot) \mu_x(dy, r),$$

имеем соотношение

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \mu_{x,y}(\cdot) \mu(dy) &= \int_{[0,\pi]} \sigma(r) dr \int_{S_x(r)} \mu_{x,y}(\cdot) \mu_x(dy, r) = \\ &= \int_{[0,\pi]} \mu_x(\cdot, r_0) \sigma(r) dr = \mu_x(\cdot, r_0) = \mu_x(\cdot). \end{aligned} \quad (45)$$

Из (43)–(45) следует неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_0} |t(y) - t_n(y)| \mu(dy) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{S_x} |f(z) - f_n(z)| \mu_x(dz) = 0$$

для $x \in S_x \setminus E$. Поэтому для каждого $x \in S_0 \setminus E$ существует подпоследовательность n_k такая, что

$$t(y) = \lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k}(y) \pmod{\mu_x(\cdot)}. \quad (46)$$

В силу леммы 8

$$t_n(y) = \frac{d\mu_x(f)}{dG_x}(y). \quad (47)$$

Далее, из (43) следует, что для $x \in S_0 \setminus E$

$$\mu_x(f_n, \cdot) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu_x(f, \cdot)$$

по вариации.

Применяя теперь лемму 7 и учитывая (46) и (47), получаем

$$t(y) = \frac{d\mu_x(f)}{dG_x}(y).$$

Предложение 3 доказано.

6. Оценка характеристической функции суммы $\sum_1^n \xi_k(\Omega_k)$

Пусть $\xi_k(x)$, $x \in S_0$, — двухпараметрическое семейство с. в., введенное в п. 1. Обозначим через $\varphi_n(\theta)$ характеристическую функцию суммы

$\sum_1^n \xi_k(\Omega_k)$. Подчиним семейство $\xi_k(x)$ дополнительному условию, а именно будем предполагать, что

с) функция распределения

$$F(\cdot) = \int_0 F(x, \cdot) \mu(dx)$$

невыврождена.

При этом ограничении выведем экспоненциальную оценку

$$|\varphi_n(\theta)| \leq e^{-\delta \theta^2 n}, \quad |\theta| < \Delta, \quad n \geq n_0, \quad (48)$$

где $n_0, \delta, \Delta > 0$, которая аналогична оценке для характеристической функции суммы независимых одинаково распределенных с.в. с невырожденным распределением.

Оценка типа (48) была получена для цепей с произвольным множеством состояний в работе С. В. Нагаева [14], однако условие, при котором выводится (48) в [14], в нашем случае не выполняется.

Чтобы получить (48), оценим полные вариации $V^{(n)}(\theta, x)$ вполне конечных мер $P^{(n)}(\theta, x, \cdot)$, определяемых следующим образом:

$$P^{(1)}(\theta, x, A) = P(\theta, x, A) = \int_A \varphi_y(\theta) P(x, dy),$$

$$P^{(n)}(\theta, x, A) = \int_{S_0} P^{(n-1)}(\theta, y, A) P(\theta, x, dy),$$

где $\varphi_y(\theta) = E e^{i\theta \xi(y)} = \int_{(-\infty, \infty)} e^{i\theta t} F(y, dt).$

При выполнении условия с) существуют две логические возможности:

$c_1)$ $\mu\{x: F(x, \cdot) \text{ невырождена}\} > 0;$

$c_2)$ $F(x, \cdot) = E_{h(x)}(\cdot) \pmod{\mu}$, где $E_a(\cdot)$ — сосредоточенное в a распределение, а $h(\cdot)$ — борелевская функция, заданная на S_0 , такая, что $h \neq \text{const} \pmod{\mu}$.

Мы остановимся сначала на более сложном случае c_2). Для множества $B \subset \mathcal{B}$ и фиксированных r_0, r_1 ($0 < r_0, r_1 < \pi$) определим меры

$$G(\theta, x, A, r_0, r_1) = G(\theta, x, A) = \int_{S_0} \mu_x(dy', r_0) \int_A \varphi_y(\theta) \varphi_{y'}(\theta) \mu_{y'}(dy, r_1),$$

$$G_0^*(\theta, x, A) = \int_{S_0} e^{i\theta h(y')} I(y') \mu_{y'}(A, r_1) \mu_x(dy', r_0),$$

$$G_0(\theta, x, A) = \int_A \varphi_y(\theta) G_0^*(\theta, x, dy),$$

$$G_0^c(\theta, x, \cdot) = G(\theta, x, \cdot) - G_0(\theta, x, \cdot),$$

где $I(\cdot)$ — индикатор множества B .

Меры $G_0(\theta, x, \cdot)$, $G_0^*(\theta, x, \cdot)$ мажорируются мерой $G(x, \cdot) = G(0, x, \cdot)$ и поэтому являются абсолютно непрерывными относительно $G(x, \cdot)$. Имеет место следующая

Лемма 9. Для почти всех x ($x \in S_0 \setminus E$, $\mu(E) = 0$) справедливо представление

$$\frac{dG_0(\theta, x, \cdot)}{dG(x, \cdot)}(y) = \varphi_y(\theta) t(\theta, x, y), \quad (49)$$

где
$$t(\theta, x, y) = \frac{dG_0^*(\theta, x, \cdot)}{dG(x, \cdot)}(y) = \int_{S_{x,y}} e^{i\theta h(z)} I(z) \mu_{x,y}(dz). \quad (50)$$

Доказательство. Соотношение (49) непосредственно следует из равенства

$$\frac{dG_0}{dG} \equiv \frac{dG_0}{dG_0^*} \cdot \frac{dG_0^*}{dG}.$$

Для доказательства (50) заметим, что в силу предложения 3 при $x \in S_0 \setminus E$ ($\mu(E) = 0$) справедливо представление

$$\frac{dG_0^*(\theta, x, \cdot)}{dG(x, \cdot)}(y) = \int_{S_{x,y}} e^{i\theta h(z)} I(z) \mu_{x,y}(dz).$$

Лемма 9 доказана. Обозначим через $W(\theta, x)$ полную вариацию меры $G(\theta, x, \cdot)$.

Лемма 10. Пусть выполнено условие c_2) и $0 < r_0^* \leq r_1^*$, причем при $d=3$ исключается случай $r_0 = r_1 = \pi/2$. Тогда существует постоянная $\Delta > 0$ такая, что при $|\theta| < \Delta$

$$W(0, x) \leq 1 - \theta^2 b(x), \quad (51)$$

где неотрицательная функция b такова, что

$$\int_{S_0} b(x) \mu(dx) > 0. \quad (52)$$

Доказательство. Выберем компактное множество B так, что $\forall x \in B F(x, \cdot) = E_{h(x)}(\cdot)$, функция h ограничена на B ,

$$\int_B \int_B (h(x) - h(y))^2 \mu(dx) \mu(dy) > 0 \quad (53)$$

и, кроме того,

$$\mu(B) > 1 - \mu(B_x(2r_0^*)). \quad (54)$$

Положим

$$\Delta = 1/2 \sup_{x \in B} |h(x)|.$$

Обозначим через $W_0(\theta, x)$, $W_0^c(\theta, x)$ соответственно полные вариации мер $G_0(\theta, x, \cdot)$, $G_0^c(\theta, x, \cdot)$.

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} W(\theta, x) &\leq W(\theta, x) + W_0^c(\theta, x), \\ W_0^c(\theta, x) &\leq W_0^c(0, x) = 1 - W(0, x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$W(\theta, x) \leq 1 - W_0(0, x) + W_0(\theta, x). \quad (55)$$

Воспользовавшись представлением (49), заключаем, что

$$W_0(\theta, x) = \int_{S_0} |t(\theta, x, y)| G(x, dy). \quad (56)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \int_{S_0} |t(\theta, x, y)| G(x, dy) &= \int_{S_0} \mathbf{E}\{|t(\theta, x, y)| / \mathcal{F}_\tau\} G(x, dy) = \\ &= \int_{S_0} \mathbf{E}\{|t(\theta, x, y)| / y \in S_x(r)\} G(dr) = \int_{[0, \pi]} g(r) dr \int_{S_x(r)} |t(\theta, x, y)| \mu_x(dy, r). \end{aligned} \quad (57)$$

Здесь $\mathcal{F}_\tau$ — σ -алгебра, порожденная сферами $S_x(r)$. Поскольку распределение $G(x, \cdot)$ инвариантно относительно вращений, оставляющих неподвижным x , то условное математическое ожидание $\mathbf{E}\{|t(\theta, x, y)| / y \in S_x(r)\}$ совпадает с $\int_{S_x(r)} |t(\theta, x, y)| \mu_x(dy, r)$.

Найдем геодезический радиус ρ множества $S_{x,y} = S_x(r_0) \cap S_y(r_1)$ как сферы на S_x . Множество $S_{x,y}$ непусто, если $r \in [\alpha, \beta]$, где $\alpha = |r_0 - r_1|$, $\beta = \pi - |\pi - r_0 - r_1|$.

Пусть ω_0 и ω_1 — гиперплоскости, в которых лежат соответственно $S_x(r_0)$ и $S_y(r_1)$, x^* — центр сферы $S_x(r_0)$ на ω_0 , d^* — евклидово расстояние от x^* до $\omega_0 \cap \omega_1$. Вследствие (21)

$$d^* = |(\cos r_1 - \cos r \cdot \cos r_0) / \sin r|, \quad (58)$$

где $r = \rho(x, y)$. Чтобы получить (58) из (21), нужно сделать подстановку $r_1 \rightarrow r_0 \rightarrow r \rightarrow r_1$.

Сфера $S_{x, y}$ имеет два радиуса. Меньший из них

$$\rho_1 = \arccos(d^*/\sin r_0) \sin r_0.$$

Второй радиус $\rho_2 = \pi \sin r_0 - \rho_1$.

Полагая теперь $\omega(r) = (\cos r_1 - \cos r \cos r_0)/\sin r \sin r_0 = 1 + (\cos r_1 - \cos(r - r_0))/\sin r \sin r_0$, $\rho(r) = (\arccos \omega(r)) \sin r_0$, имеем

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_1, & \omega(r) > 0, \\ \rho_2, & \omega(r) \leq 0. \end{cases}$$

Функцию $\rho(r)$ мы примем для определенности за геодезический радиус сферы $S_{x, y}$. Исследуем функцию $\omega(r)$. Нетрудно видеть, что

$$\omega'(r) = (\cos r_0 - \cos r_1 \cos r)/\sin^2 r \sin r_0. \quad (59)$$

По определению

$$r^* = \min(r, \pi - r). \quad (60)$$

Следовательно, $\cos r^* = \max(\cos r, -\cos r) = |\cos r|$. Поэтому

$$r_0^* \leq r_1^* \Rightarrow \cos r_1 \leq \cos r_0. \quad (61)$$

Из (59) и (61) следует, что $\omega'(r) \neq 0 \quad \forall r$, если $r_0 \neq r_1$, и $\omega'(r) = 0$, $r = 0, \pi$; $\omega'(r) \neq 0$, $0 < r < \pi$, если $r_0 = r_1 \neq \pi/2$. Таким образом, функция $\omega(r)$ в условиях леммы строго монотонна на отрезке $[0, \pi]$.

Вычислим теперь $\omega(\alpha)$ и $\omega(\beta)$. Очевидно,

$$r_0 < r_1 \Rightarrow \pi - r_0 > \pi - r_1.$$

Поэтому в силу (60)

$$(r_0^* \leq r_1^*) \& (r_0 < r_1) \Rightarrow r_0^* = r_0 \Rightarrow r_0 \leq \pi - r_1.$$

Аналогично

$$r_0 > r_1 \Rightarrow \pi - r_0 < \pi - r_1$$

и, следовательно,

$$(r_0^* \leq r_1^*) \& (r_0 > r_1) \Rightarrow r_0^* = \pi - r_0 \Rightarrow \pi - r_0 \leq r_1.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (r_0 < r_1) &\Rightarrow (\alpha = r_1 - r_0) \& (\beta = r_0 + r_1), \\ (r_0 > r_1) &\Rightarrow (\alpha = r_0 - r_1) \& (\beta = 2\pi - r_0 - r_1). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\omega(r_0 - r_1) = 1, \quad r_0 > r_1, \quad (62)$$

$$\omega(r_0 + r_1) = 1, \quad r_0 + r_1 \neq \pi.$$

Далее, $\omega(r) = -\omega(-r)$ и $\omega(2\pi + r) = \omega(r)$. Поэтому

$$\omega(r_1 - r_0) = -\omega(r_0 - r_1) = -1, \quad r_0 \neq r_1, \quad (63)$$

$$\omega(2\pi - r_0 - r_1) = -\omega(r_0 + r_1) = -1, \quad r_0 + r_1 \neq \pi.$$

Итак,

$$(r_0 > r_1) \& (r_0 + r_1 \neq \pi) \Rightarrow (\omega(\alpha) = 1) \& (\omega(\beta) = -1), \quad (64)$$

$$(r_0 < r_1) \& (r_0 + r_1 \neq \pi) \Rightarrow (\omega(\alpha) = -1) \& (\omega(\beta) = 1).$$

Рассмотрим теперь случай $r_0 = r_1 \neq \pi/2$. Очевидно $(r_0 = r_1) \rightarrow (\alpha = 0)$. С другой стороны, $(r_0 = r_1) \rightarrow (\omega(0) = 0)$. Таким образом,

$$r_0 = r_1 \rightarrow (\omega(\alpha) = 0). \quad (65)$$

Вследствие (62) и (63)

$$(r_0 = r_1) \& (r_0 + r_1 < \pi) \rightarrow (\omega(\beta) = 1), \quad (66)$$

$$(r_0 = r_1) \& (r_0 + r_1 > \pi) \rightarrow (\omega(\beta) = -1).$$

Нам осталось исследовать случай $r_0 + r_1 = \pi$. Прежде всего $(r_0 + r_1 = \pi) \rightarrow (\beta = \pi)$. Далее, $(r_0 + r_1 = \pi) \rightarrow (\omega(\pi) = 0)$. Следовательно,

$$(r_0 + r_1 = \pi) \rightarrow (\omega(\beta) = 0). \quad (67)$$

В силу (62) и (63)

$$\begin{aligned} (r_0 + r_1 = \pi) \& (r_0 < r_1) \rightarrow (\omega(\alpha) = -1), \\ (r_0 + r_1 = \pi) \& (r_1 > r_0) \rightarrow (\omega(\alpha) = 1). \end{aligned} \quad (68)$$

Пусть $S_x(u, \alpha)$ — сфера радиуса α на сфере S_x с центром в точке u . Иначе говоря,

$$S_x(u, \alpha) = \{z : z \in S_x, \rho_x(u, z) = \alpha\}.$$

Положим

$$t(\theta, x, u, \alpha) = \int_{S_x(u, \alpha)} e^{i\theta h(z)} I(z) \mu_x(u, \alpha, dz),$$

где $\mu_x(u, \alpha, \cdot)$ — равномерное распределение на сфере $S_x(u, \alpha)$.

Пусть $y \in S_x(r)$ и $u = u(y)$ таково, что $S_x(u, \rho(r)) = S_{x,y}$. Тогда $t(\theta, x, u(y), \rho(r)) = t(\theta, x, y)$. Следовательно,

$$\int_{S_x(r)} |t(\theta, x, y)| \mu_x(dy, r) = \int_{S_x} |t(\theta, x, u, \rho(r))| \mu_x(du).$$

Возвращаясь теперь к (57), заключаем, что

$$W_0(\theta, x) = \int_{[0, \pi]} g(r) dr \int_{S_x} |t(\theta, x, u, \rho(r))| \mu_x(du). \quad (69)$$

Дальнейшую оценку вариации $W_0(\theta, x)$ проведем отдельно для $d = 3$ и $d \geq 4$.

Пусть $d = 3$. В этом случае $S_x(u, \alpha)$ состоит из двух точек $D_\alpha u$ и $D_{-\alpha} u$ на окружности S_x , где D_α — поворот S_x на угол $\alpha/\sin r_0$. Следовательно,

$$t(\theta, x, u, \alpha) = l(\theta, D_\alpha u, D_{-\alpha} u),$$

где $l(\theta, y, y') = (1/2)(e^{i\theta h(y)} I(y) + e^{i\theta h(y')} I(y'))$.

Далее,

$$|l(\theta, y, y')| \leq l(0, y, y') - (\theta^2/4)(h(y) - h(y'))^2 I(y, y'), \quad (70)$$

если $|\theta| \leq \Delta$.

Из (69) и (70), используя инвариантность μ_x относительно поворотов, получаем

$$\begin{aligned} W_0(\theta, x) \leq W_0(0, x) - (\theta^2/4) \int_{[0, \pi]} g(r) dr \int_{S_x} (h(D_{2\rho(r)}u) - h(u))^2 \times \\ \times I(D_{2\rho(r)}u, u) \mu_x(du). \end{aligned} \quad (71)$$

В силу предложения 1 $g(r) = 0$ вне промежутка $[\alpha, \beta]$. Поэтому интегрирование по r в правой части (71) фактически производится именно в этом промежутке. Пользуясь монотонностью $\rho(r)$ в $[\alpha, \beta]$, сделаем замену переменной $\rho(r) = \rho$. При этом нужно вычислить $\rho(\alpha)$ и $\rho(\beta)$. Значения $\rho(\alpha)$ и $\rho(\beta)$, как было выяснено выше, зависят от соотношения r_0 и r_1 . Предположим, что $r_0 = r_1 \neq \pi/2$ и $r_0 + r_1 < \pi$. В этом случае вследствие (66) $\rho(\alpha) = (\pi/2) \sin r_0$, $\rho(\beta) = 0$, т. е. функция $\rho(r)$ монотонно убывает. В результате замены $\rho(r) = \rho$ внутренний интеграл принимает вид

$$J(u) = - \int_{[0, \pi/2]} (h(D_{2\rho}u) - h(u))^2 I(D_{2\rho}u, u) g(r(\rho)) r'(\rho) d\rho, \quad (72)$$

где $r(s) = \rho^{-1}(s)$.

Полагая теперь $D_{2\rho}u = v$, имеем

$$J(u) = - \int_{S_{1,x}} (h(u) - h(v))^2 I(u, v) g(r(2^{-1}\rho_x(u, v))) r'(2^{-1}\rho_x(u, v)) \mu_x(dv),$$

где $S_{1,x} = \{v : v \in S_x, \rho_x(v, D_{\pi/2}u) \leq \pi/2\}$.

Положим $S_{2,x} = \{v : v \in S_x, \rho_x(v, D_{-\pi/2}u) < \pi/2\}$. Так как $\rho_x(v, D_{-\pi/2}u) = \rho_x(D_{\pi/2}v, u)$,

$$\begin{aligned} \int_{S_x} \mu_x(du) \int_{S_{2,x}} (h(u) - h(v))^2 I(u, v) g(r(2^{-1}\rho_x(u, v))) r'(2^{-1}(\rho_x(u, v))) \times \\ \times \mu_x(dv) = \int_{S_x} J(v) \mu_x(dv). \end{aligned}$$

С другой стороны, $S_x = S_{1,x} + S_{2,x}$. Следовательно,

$$\int_{S_x} J(u) \mu_x(du) = 2^{-1} \int_{S_x} \int_{S_x} (h(u) - h(v))^2 I(u, v) q(u, v) \mu_x(du) \mu_x(dv), \quad (73)$$

где $q(u, v) = -g(r(\rho_x(u, v)/2))r'(\rho_x(u, v)/2)$.

Поскольку $g(r) > 0$ на $[\alpha, \beta]$, а функция $r(s)$ строго монотонна на $[0, \pi/2]$,

$$q(u, v) > 0 \pmod{\mu_x \times \mu_x} \quad (74)$$

на $S_x \times S_x$.

Из (55) и (71)–(74) согласно предложению 2 следует (51), причем $b(x)$ удовлетворяет условию (52). В остальных случаях (см. (64)–(68)) доказательство аналогично.

Обратимся теперь к случаю $d \geq 4$. Нетрудно видеть, что

$$|t(\theta, x, y)|^2 = \int_{S_{x,y}} \int_{S_{x,y}} \cos[\theta(h(z) - h(z'))] I(z, z') \mu_{x,y}(dz) \mu_{x,y}(dz').$$

Отсюда, используя неравенства $\cos \gamma \leq 1 - \gamma^2/4$, $|\gamma| \leq 1$; $1 - \gamma \leq (1 - \gamma/2)^2$, находим, что при $|\theta| < \Delta$

$$\begin{aligned} |t(\theta, x, y)| \leq \mu_{x,y}(B) - 8^{-1}\theta^2\gamma(x, y) \int_{S_{x,y}} \int_{S_{x,y}} (h(z) - h(z'))^2 \times \\ \times I(z, z') \mu_{x,y}(dz) \mu_{x,y}(dz'), \end{aligned} \quad (75)$$

где $\gamma(x, y) = 1/\mu_{x,y}(B)$.

Пусть $h \not\equiv \text{const} \pmod{\mu_x}$ на $S_x \cap B$. Тогда в силу предложения 2

$$\int_{S_{x,y}} \int_{S_{x,y}} (h(z) - h(z'))^2 I(z, z') \mu_{x,y}(dz) \mu_{x,y}(dz') > 0 \quad (76)$$

для $y \in E \subset S_x(r)$, $\mu_x(E, r) > 0$, если

$$\mu_x(B_x(2\rho^*(r))) > 1 - \mu_x(S_x \cap B), \quad (77)$$

где $B(\rho)$ — произвольный шар на S_x , имеющий радиус ρ .

Нетрудно видеть, что неравенство (77) выполняется, если

$$|\rho(r)/\sin r_0 - \pi/2| < \varepsilon, \quad (78)$$

где ε достаточно мало.

Соотношения (64)–(68) гарантируют выполнение (78) для некоторого отрезка значений для всех r_1, r_2 , кроме $r_1 = r_2 = \pi/2$. Однако в последнем случае $\rho(r)/\sin r_0 \equiv \pi/2$, так что (78) справедливо $\forall r$.

Из (76) с учетом сделанных выше замечаний следует

$$\int_{[0,\pi]} g(r) dr \int_{S_x} \mu_x(dy, r) \int_{S_{x,y}} \int_{S_{x,y}} (h(z) - h(z'))^2 I(z, z') \mu_{x,y}(dz) \mu_{x,y}(dz') > 0, \quad (79)$$

если $h \not\equiv \text{const} \pmod{\mu_x}$ на $S_x \cap B$.

Комбинируя (55)–(57), (75) и (79), получаем (51) и (52). При этом мы должны еще воспользоваться тем, что согласно предложению 2

$$\mu\{x : h \equiv c_x \pmod{\mu_x} \text{ на } S_x \cap B\} > 0.$$

Лемма 10 доказана.

Лемма 11. Пусть $d = 3$, $P(x, \cdot) = \mu_x(\cdot, \pi/2)$ и выполнено условие c_2 . Тогда существуют постоянные b , $\Delta > 0$ и множество K с $\mu(K) > 0$ такие, что при $x \in K$, $|\theta| < \Delta$

$$V^{(3)}(\theta, x) < 1 - \theta^2 b. \quad (80)$$

Доказательство. Выберем множество B так же, как при доказательстве леммы 10. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} P^{(3)}(\theta, x, \cdot) &= \int_{S_x} \varphi_y(\theta) G(\theta, y, \cdot) \mu_x(dy) = \int_{S_x} \varphi_y(\theta) G_0(\theta, y, \cdot) \mu_x(dy) + \\ &+ \int_{S_x} \varphi_y(\theta) G_0^c(\theta, y, \cdot) \mu_x(dy) = P_0^{(3)}(\theta, x, \cdot) + P_1^{(3)}(\theta, x, \cdot). \end{aligned} \quad (81)$$

Принимая во внимание лемму 9, получаем

$$p(0, x, z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dP_0^{(3)}}{dG_x}(\theta, x, z) = \int_{S_x} \varphi_y(\theta) t(\theta, y, z) \mu_x(dy). \quad (82)$$

Здесь

$$t(\theta, y, z) = (1/2) (I(u_1(y, z)) e^{i\theta h(u_1(y, z))} + I(u_2(y, z)) e^{i\theta h(u_2(y, z))},$$

где $\{u_1(y, z), u_2(y, z)\} = S_{x,z}$.

Будем считать, что функция $u_1(y, z)$ непрерывна. Если фиксировать какую-нибудь точку $u \in S_z$, то в силу непрерывности $u_1(y, z)$ либо $u_1(y, z) \equiv u \quad \forall (y \in S_u)$, либо $u_1(y, z) = u_c \quad \forall (y \in S_u)$, где u_c — точка на S_0 , диаметрально противоположная u .

Положим $\psi_z(y) = h(y) + h(y, z)$, где $h(y, z) = h(u_1(y, z))$. Покажем, что $\forall z \pmod{\mu}$

$$\psi_z(y) \not\equiv \text{const} \pmod{\mu}. \quad (83)$$

Пусть $\exists z_0$ такое, что

$$\psi_{z_0}(y) \equiv \text{const} \pmod{\mu}. \quad (84)$$

Заметим, что

$$h(y, z_0) \not\equiv \text{const} \pmod{\mu_{z_0}}, \quad (85)$$

поскольку в противном случае $h(y) \equiv \text{const} \pmod{\mu}$.

В силу (84) существует постоянная c такая, что

$$h(y) = c - h(y, z_0) \pmod{\mu}.$$

Следовательно,

$$\psi_z(y) = c - h(y, z_0) + h(y, z) \pmod{\mu}. \quad (86)$$

Как уже отмечалось выше, $\forall u \in S_z \quad u_1(y, z) = \text{const}$, когда y пробегает S_y . В то же время $u_1(y, z_0)$ осуществляет гомеоморфизм S_u на S_{z_0} , если $z_0 \neq z$. Поэтому

$$h(y, z_0) \not\equiv \text{const} \pmod{\mu_u} \text{ на } S_u.$$

Таким образом,

$$h(y, z) - h(y, z_0) \not\equiv \text{const} \pmod{\mu_u}$$

на $S_u \quad \forall u \in S_z$. Это означает, что при фиксированном z

$$h(y, z) - h(y, z_0) \not\equiv \text{const} \pmod{\mu}. \quad (87)$$

Из (86) и (87) следует (83).

Положим $B(z) = \{y : I(u_1(y, z)) = 1\}$. Нетрудно видеть, что

$$\mu(B(z)) = \mu_z(\{y : y \in S_z \cap B\}) = \mu_z(B).$$

Так как

$$\mu(B) = \int_{S_0} \mu_z(B) \mu(dz),$$

из условия (54) следует соотношение

$$\mu(\{z: \mu_z(B) > 1 - \mu(B_x(2r_0^*))\}) > 0. \quad (88)$$

Обозначим через E_B множество, которое стоит в (88) под знаком μ . Положим

$$D_B = \{z: \psi_z(y) \neq \text{const} \pmod{\mu} \text{ на } B\}$$

и подчиним B дополнительному условию

$$\mu(E_B D_B) > 0. \quad (89)$$

Поскольку $\varphi_y(\theta) = e^{i\theta h(y)}$ на B ,

$$\int_{S_x} \varphi_y(\theta) e^{i\theta h(y,z)} I(y, z) \mu_x(dy) = \int_{S_x \cap B(z)} e^{i\theta \psi_z(y)} \mu_x(dy). \quad (90)$$

Пусть $z \in E_B D_B$. Тогда мы можем применить предложение 2. В результате получаем

$$\psi_z(y) \neq \text{const} \pmod{\mu_x} \quad (91)$$

на $S_x \cap B(z)$ для $x \in C(z)$ с $\mu(C(z)) > 0$.

Вследствие (91) при $|\theta| < \Delta \quad \forall x \in C(z)$

$$\left| \int_{S_x \cap B(z)} e^{i\theta \psi_z(y)} \mu_x(dy) \right| < \mu_x(B(z)) - b(x, z) \theta^2, \quad (92)$$

причем $b(x, z) > 0$.

Из (82), (90) и (92) следует, что для $z \in E_B D_B$, $x \in C(z)$, $|\theta| < \Delta$

$$|p(\theta, x, z)| < p(0, x, z) - b(x, z) \theta^2 / 2. \quad (93)$$

Комбинируя (81), (88), (89) и (93), мы получаем (80). Лемма 11 доказана.

Лемма 12. Пусть $P(|\langle \Omega_0, \Omega_1 \rangle| \langle 1 \rangle) > 0$, причем $P(x, \cdot) \neq \mu_x(\cdot, \pi/2)$, если $d=3$ и выполнено условие c_2 , тогда существует множество $K \subset \mathcal{B}$ с $\mu(K) > 0$ и постоянные $\Delta, b > 0$ такие, что при $x \in K$, $|\theta| < \Delta$

$$V^{(1)}(\theta, x) \leq 1 - b\theta^2,$$

если выполнено c_1 , и

$$V^{(2)}(\theta, x) \leq 1 - b\theta^2,$$

если выполнено c_2 .

Доказательство. Пусть выполнено c_1 . Тогда существует множество D и положительные постоянные b, Δ такие, что

$$|\varphi_x(\theta)| \leq 1 - b_0 \theta^2$$

для $x \in D$, $|\theta| \leq \Delta$. Поэтому для $|\theta| \leq \Delta$

$$V^{(1)}(\theta, x) = \int_{S_0} |\varphi_y(\theta)| P(x, dy) \leq 1 - b_0 \theta^2 \int_D P(x, dy) \leq 1 - \theta^2 b_0 P(x, D).$$

Выбрав множество K с $\mu(K) > 0$ и постоянную $b_1 > 0$ так, что для $x \in K$ $P(x, K) > b_1 > 0$, получим требуемое неравенство с $b = b_1 b_0$.

Пусть теперь выполнено c_2 . Вследствие (14)

$$P(\theta, x, A) = \int_{[0, \pi]} P(dr) \int_A e^{i\theta h(y)} \mu_x(dy, r).$$

Предположим для простоты, что $P(\cdot)$ не имеет атомов в 0 и π . Тогда по определению $G(\theta, x, \cdot, r_0, r_1)$,

$$\begin{aligned} P^{(2)}(\theta, x, A) &= \int_{[0, \pi]} \int_{[0, \pi]} P(dr_0) P(dr_1) \int_{s_0} \mu_x(dy, r_0) \int_A \varphi_y(\theta) \varphi_{y'}(\theta) \mu_y(dy', r_1) = \\ &= \int_{[0, \pi]} \int_{[0, \pi]} G(\theta, x, A, r_0, r_1) P(dr_0) P(dr_1). \end{aligned}$$

Пусть $C_\varepsilon = \{(r_0, r_1): 0 < \varepsilon \leq r_0^* \leq r_1^*\}$.

Фиксируем r и выберем множество B так, что $h \not\equiv \text{const} \pmod{\mu}$ на B и $\mu(B_x(\varepsilon)) > 1 - \mu(B)$. Это дает нам возможность применить к $G(\theta, x, \cdot, r_0, r_1)$ лемму 10. В результате получаем оценку

$$V^{(2)}(\theta, x) \leq 1 - \theta^2 \int \int_{C_\varepsilon} b(x, r_0, r_1) P(dr_0) P(dr_1), \quad (94)$$

где $|\theta| < \Delta$, а функция $b(\cdot, r_0, r_1)$ удовлетворяет условию

$$\int_{s_0} b(x, r_0, r_1) \mu(dx) > 0$$

для любых $(r_0, r_1) \in C_\varepsilon$.

С другой стороны, не нарушая общности, можно считать, что

$$\int \int_{C_\varepsilon} P(dr_0) P(dr_1) > 0.$$

Интегрируя теперь обе части (94) по μ , мы получаем, что при $|\theta| < \Delta$

$$\int_{s_0} V^{(2)}(\theta, x) \mu(dx) \leq 1 - b_0 \theta^2,$$

$$\text{где } b_0 = \int \int_{C_\varepsilon} P(dr_0) P(dr_1) \int_{s_0} b(x, r_0, r_1) \mu(dx) > 0.$$

Отсюда легко следует утверждение леммы в выделенном нами частном случае. В общем случае нужно рассмотреть меру

$$P'(\theta, x, A) = \int_{[0, \pi]} P'(dr) \int_A e^{i\theta h(y)} \mu_x(dy, r),$$

где P' получается из P удалением атомов в 0 и π .

Лемма 12 доказана.

Предложение 4. Пусть $P(|\langle \Omega_0, \Omega_1 \rangle| < 1) > 0$ и выполнено условие с). Тогда справедлива оценка (48).

Доказательство. Используя следствие 4, выберем m так, чтобы $P^{(m)}(x, K) > (1/2)\mu(K)$. Предположим, что $P(x, \cdot) \neq \mu_x(\cdot, \pi/2)$, если $d=3$, тогда полная вариация $V^{(m+2)}(\theta, x)$ меры $P^{(m+2)}(\theta, x, \cdot)$ в силу леммы 12 удовлетворяет неравенству

$$\begin{aligned} V^{(m+2)}(\theta, x) &\leq \int_{s_0} V^{(2)}(\theta, y) P^{(m)}(x, dy) \leq 1 - \int_K [1 - V^{(2)}(\theta, y)] P^{(m)}(x, dy) \leq \\ &\leq 1 - (1/2) \mu(K) \left[1 - \sup_{x \in K} V^{(2)}(\theta, x) \right] \leq 1 - (1/2) \mu(K) b \theta^2 \end{aligned}$$

для $|\theta| < \Delta$.

Из последнего неравенства, полагая $n_0 = m + 2$, заключаем, что

$$\begin{aligned} |\varphi_n(\theta)| &\leq \sup_x V^{(n)}(\theta, x) \leq \left(\sup_x V^{(n_0)}(\theta, x) \right)^{[n/n_0]} \leq \\ &\leq (1 - (1/2) \mu(K) b \theta^2)^{[n/n_0]} \leq e^{-(1/2) \mu(K) b \theta^2 [n/n_0]}. \end{aligned}$$

В случае, когда $d=3$ и $P(x, \cdot) = \mu_x(\cdot, \pi/2)$, доказательство вполне аналогично, нужно только вместо леммы 12 использовать лемму 11.

7. Доказательство теоремы 2

Доказательство теоремы 2 основывается на том факте, что последовательность $\xi_k = \xi_k(z_k)$ удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания (см. например, [15, с. 391]).

Лемма 13. Пусть выполнено условие (11) и цепь Маркова $\{z_k\}_0^\infty$ стационарна. Тогда

$$\sup_{\substack{A \in \mathcal{B}_n \\ B \in \mathcal{B}^{n+k}}} |P(\xi_n \in A, \xi_{n+k} \in B) / P(\xi_n \in A) - P(\xi_{n+k} \in B)| < \gamma \rho^k,$$

где $0 < \rho < 1$, $\mathcal{B}_n, \mathcal{B}^{n+k}$ — σ -алгебры, образованные соответственно последовательностями $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ и $\xi_{n+k}, \xi_{n+k+1}, \dots$.

Доказательство. Заметим, что

$$P(\xi_n \in A, \xi_{n+k} \in B) = \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}} P(\xi_n(x) \in A) P(\xi_{n+k}(y) \in B) P^{(k)}(x, dy) p(dx)$$

$$P(\xi_m \in A) = \int_{\mathcal{X}} P(\xi_m(x) \in A) p(dx),$$

где p — стационарное распределение цепи $\{z_k\}_0^\infty$. Отсюда

$$P(\xi_n \in A, \xi_{n+k} \in B) - P(\xi_n \in A) P(\xi_{n+k} \in B) =$$

$$= \int_{\mathcal{X}} P(\xi_n(x) \in A) p(dx) \int_{\mathcal{X}} P(\xi_{n+k}(y) \in B) (P^{(k)}(x, dy) - p(dy)).$$

С другой стороны, в силу (11)

$$\left| \int_{\mathcal{X}} P(\xi_n(y) \in B) (P^{(k)}(x, dy) - p(dy)) \right| \leq \gamma \rho^k$$

равномерно по x .

В результате получаем

$$|P(\xi_n \in A, \xi_{n+k} \in B) - P(\xi_n \in A) P(\xi_{n+k} \in B)| < \gamma \rho^k P(\xi_n \in A).$$

Лемма 13 доказана.

Используя теперь теорему 18.5.2 из [15], мы убеждаемся в том, что теорема 2 справедлива, если цепь $\{z_k\}_0^\infty$ стационарна.

Докажем, что центральная предельная теорема остается справедливой и в нестационарном случае. Пусть Ω_0 имеет произвольное начальное распределение $\pi(\cdot)$. Нетрудно видеть, что

$$\left| E_\pi \left\{ e^{i\theta n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \xi_k} \right\} - E \left\{ e^{i\theta n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \xi_k} \right\} \right| \leq E_\pi \left\{ \left| e^{i\theta n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \xi_k} - 1 \right| \right\} +$$

$$+ E \left\{ \left| e^{i\theta n^{-1/2} \sum_{k=1}^m \xi_k} - 1 \right| \right\} + \left| E_\pi \left\{ e^{i\theta n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \xi_k} \right\} - E \left\{ e^{i\theta n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \xi_k} \right\} \right| = I_1 + I_2 + I_3.$$

Из (11) следует оценка

$$I_3 = \left| \int_{\mathcal{X}} \pi(dx) \int_{\mathcal{X}} f(y) (P^{(m)}(x, dy) - p(dx)) \right| \leq \gamma \rho^m.$$

$$\text{Здесь } f(y) = E \left\{ e^{i\theta n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \xi_k} \middle| x_m = y \right\}.$$

С другой стороны, для каждого фиксированного m и $\theta \lim_{n \rightarrow \infty} I_i = 0$, $i = 1, 2$. В результате мы получаем соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\pi} e^{i\theta m^{-1/2} \sum_{k=1}^n \xi_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} E e^{i\theta n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \xi_k} = e^{-\theta^2 \sigma^2 / 2}.$$

Теорема 2 доказана.

8. Доказательство теоремы 1

Для любого $z \in R^d$ определим последовательность с.в.

$$\xi_n^z(x) = \langle (Y_n(x) - EY_0), z \rangle.$$

Из условия (7) в силу следствия 4 (см. п. 3) вытекает, что цепь Маркова Ω_n удовлетворяет условию (11). С другой стороны, из условия (8) следует, что $E((\xi_0^z(\Omega_0))^2) < \infty$.

Поэтому к последовательности $\xi_n^z(\Omega_n)$ применима теорема 2, т. е., полагая $\eta_n(z) = n^{-1/2} \sum_{k=1}^n \xi_k^z(\Omega_k)$, мы можем утверждать, что

$$L(\eta_n(z)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L(\eta(z)),$$

где с.в. $\eta(z)$ нормальна $N(0, \sigma^2(z))$,

$$\sigma^2(z) = E(\xi_0^z(\Omega_0))^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} E \xi_0^z(\Omega_0) \xi_k^z(\Omega_k).$$

Так как $\sigma^2(z)$ является неотрицательной билинейной формой от z , она допускает представление $\sigma^2(z) = \langle Qz, z \rangle$, где Q — неотрицательно определенная матрица. Это означает, что $\eta(z) = \langle X, z \rangle$, где X — нормальная с.в. в R^d с ковариационной матрицей Q .

Таким образом, для любого линейного функционала

$$L(f(X_n - nY_0)n^{-1/2}) \rightarrow L(f(X)),$$

а это эквивалентно (9).

Для цепи Ω_n стационарное распределение совпадает с μ . Поэтому условие $E|\langle Y_0, z \rangle|^2 > 0$ влечет условие $c)$ (см. п. 6). Применяя предложение 4, мы приходим к выводу, что для $E \exp\{i\theta \eta_n(z)n^{1/2}\}$ справедлива экспоненциальная оценка (48). Следовательно, $\forall \theta \exp\{-\sigma^2(z)\theta^2/2\} = \lim_{n \rightarrow \infty} E \exp\{i\theta \eta_n(z)\} \leq \exp\{-\delta(z)\theta^2\}$, где $\delta(z) > 0$, если $E(\xi_0^z(\Omega_0))^2 > 0$.

Таким образом,

$$E|\langle Y'_0, z \rangle|^2 > 0 \Rightarrow \langle Qz, z \rangle > 0,$$

т. е. выполняется соотношение (10). Теорема 1 полностью доказана.

9. Связь с блужданиями на группах

Пусть U — группа вращений евклидова пространства R^d . Покажем прежде всего, что цепь Ω_n допускает представление (4). Предположим для простоты, что $\Omega_0 = x_0$. Пусть распределение с.в. T_1 удовлетворяет условию

$$a_0) \quad P(D_{x_0} T_1 x_0 \in A) = P(T_1 x_0 \in A)$$

для любого $D_{x_0} \in U$, оставляющего инвариантным x_0 , т. е. $D_{x_0} x_0 = x_0$.

Положим $V_n = T_1 T_2 \dots T_n$. Очевидно, V_n является цепью Маркова. Рассмотрим условное распределение

$$P(V_n x_0 \in A / V_{n-1} = D) \equiv P(DT_n x_0 \in A).$$

В силу условия a_0)

$$P(Dx_0 T_n x_0 \in A) = P(T_n x_0 \in A). \quad (95)$$

Пусть $Dx_0 = D_1 x_0$. Тогда $D^{-1} D_1 x_0 = x_0$ и вследствие (95)

$$\begin{aligned} P(D_1 T_n x_0 \in A) &= P(D^{-1} D_1 T_n x_0 \in A) = \\ &= P(T_n x_0 \in D^{-1} A) = P(D T_n x_0 \in A). \end{aligned} \quad (96)$$

Мы показали, таким образом, что

$$P(V_n x_0 \in A / V_{n-1} = D) = P(V_n x_0 \in A / V_{n-1} = D_1), \quad (97)$$

если $Dx_0 = D_1 x_0$.

Очевидно, событие $\{V_n x_0 = y\}$ можно отождествить с событием $\{V_n : V_n x_0 = y\}$. Другими словами, процесс $V_n x_0$ получается в результате укрупнения состояний процесса V_n . Вследствие (97) укрупненный процесс $V_n x_0$ остается цепью Маркова.

В силу (95) и (96)

$$P(V_n x_0 \in DA / V_{n-1} x_0 = Dx_0) = P(V_n x_0 \in A / V_{n-1} x_0 = x_0).$$

Таким образом, процесс $V_n x_0$ удовлетворяет условию a).

Можно получить представление (4) другим путем. Пусть на U задано семейство распределений P_x , зависящих от параметра $x \in S_0$. Рассмотрим последовательность случайных вращений W_n , определяемую рекуррентным соотношением

$$W_n = S_n W_{n-1}, \quad n > 1, \quad W_1 = S_1,$$

где S_n — случайное вращение с распределением $P_{W_{n-1} x_0}$. Здесь x_0 — фиксированная точка на S_0 .

Подчиним семейство P_x условию

$$P_y(D : Dy \in TA) = P_x(D : Dx \in A), \quad (98)$$

если y и x связаны соотношением $y = Tx$, где $T \in U$. Условие (98) можно записать в виде $P_y(D : Dy \in A) = P_x(D : TDT^{-1}y \in A)$, где $y = Tx$.

В силу (98) $P(W_n x_0 \in A / W_{n-1} x_0 = x) = P_x(D : Dx \in A) = P_{Tx}(D : Dy \in TA) = P(W_n x_0 \in TA / W_{n-1} x_0 = Tx)$.

Мы видим, что блуждание $W_n x_0$ при условии (98) удовлетворяет условию a).

Пусть случайные вращения в (4) имеют распределение P_{x_0} .

В силу (98)

$$\begin{aligned} P(V_n x_0 \in A / V_{n-1} = D) &= P(D T_n x_0 \in A) = \\ &= P_{x_0}(T : T x_0 \in D^{-1} A) = P_{Dx_0}(T : T D x_0 \in A). \end{aligned}$$

Это означает, что

$$P(V_n x_0 \in A / V_{n-1} = D) = P(W_n x_0 \in A / W_{n-1} \in D).$$

Поскольку оба процесса $V_n x_0$ и $W_n x_0$ обладают марковским свойством и, кроме того,

$$P(V_1 x_0 \in A) = P(W_1 x_0 \in A),$$

мы можем утверждать, что распределения процессов $V_n x_0$ и $W_n x_0$ совпадают.

Представление (4) может показаться несколько вычурным. Более естественным выглядит представление

$$\Omega_n = T_n T_{n-1} \dots T_1 \Omega_0, \quad (99)$$

где по-прежнему случайные вращения T_k независимы и одинаково распределены.

Однако такое представление, как показывают следующие рассуждения, не всегда возможно при нечетном d . Действительно, пусть распре-

деление G_x сосредоточено на сфере $S_x(r_0)$. Предположим, что справедливо представление (99). Обозначим через λ распределение T_1 . Очевидно, $\forall(x \in S_0) \lambda(D: \rho(x, Dx) = r_0) = 1$. Следовательно, существует счетная всюду плотная последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ такая, что $\lambda\left(\bigcap_1^\infty E_n\right) = 1$, где $E_n = \{D: \rho(x_n, Dx_n) = r_0\}$.

Если $D \in \bigcap_1^\infty E_n$, то $\forall x \in S_0 \rho(x, Dx) = r_0$. Поэтому $\lambda(D: \rho(x, Dx) = r_0 \forall x) = 1$.

С другой стороны, при нечетном d равенство $\rho(x, Dx) = r_0$ не может выполняться для всех x ни при одном D .

Что касается четных d , то в этом случае представление (99) возможно при любом G_x .

ЛИТЕРАТУРА

1. Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: ИЛ, 1965. 407 с.
2. Freed K. F. Polymers as self-avoiding walks.—Ann. Probab., 1981, v. 9, N 1, p. 537—556.
3. Тутубалин В. Н. Центральная предельная теорема для случайных движений евклидова пространства.—Вестн. МГУ, 1967, т. 22, № 6, с. 100—108.
4. Gorostiza L. G. A central limit theorem for a class of d -dimensional random motions with constant speed.—Bull. Amer. Math. Soc., 1972, v. 78, N 4, p. 575—577.
5. Gorostiza L. G. The central limit theorem for random motions of d -dimensional euclidean space.—Ann. Probab., 1973, v. 1, N 4, p. 603—612.
6. Gorostiza L. G. An invariance principle for a class of d -dimensional polyconal random functions.—Trans. Amer. Math. Soc., 1973, v. 177, N 450, p. 413—445.
7. Сираждинов С. Х., Сафарбаев И. Об оценке скорости сходимости в одной схеме случайного блуждания.—В кн.: Третья Вильнюсская конференция по теории вероятности и математической статистике. Т. 2. (Тезисы докладов). Вильнюс, 1981, с. 155.
8. Сафарбаев И. Оценка скорости сходимости в одной схеме случайного блуждания в k -мерном пространстве.—Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1982, вып. 2, с. 62.
9. Kyrztz T. G. The central limit theorem for markov chains.—Ann. Probab., 1981, v. 9, N 1, p. 577—560.
10. Нагаев С. В. Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова.—Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, № 4, с. 389—416.
11. Максимов В. М. О применимости центральной предельной теоремы к суммам вида $\sum f(\xi_1 \dots \xi_i)$. — Изв. вузов. Математика, 1970, № 12, с. 61—71.
12. Алешкивичус Г. Ю. Некоторые предельные теоремы для сумм случайных величин, заданных на однородной регулярной цепи Маркова.—Литов. матем. сб., 1966, т. 6, № 3, с. 397—411.
13. Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 2. М.: Мир. 901 с.
14. Нагаев С. В. Уточнение предельных теорем для однородных цепей Маркова.—Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, № 1, с. 67—86.
15. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука. 524 с.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ ОЦЕНИВАНИЯ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ТЕОРЕМАХ ЭРГОДИЧНОСТИ И НЕПРЕРЫВНОСТИ ДЛЯ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ

С. Г. ФОСС

В работе излагается один способ, при помощи которого можно получать оценки скорости сходимости в теоремах эргодичности (и, как следствие, в теоремах непрерывности) единообразно для различных типов многоканальных систем обслуживания. Этот способ основан на методе обновляющих событий, изложенном в [1], и возможности использования максимальной координаты вектора времени ожидания в многоканальной системе с очередью и циклическим порядком обслуживания в качестве мажоранты для соответствующих характеристик рассматриваемых многоканальных систем.