4. **Ахмаров И.** О скорости сходимости в теоремах эргодичности и непрерывности для систем с отказами.— Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. XXVI, № 1, с. 182—189.
5. **Ахмаров И.** О скорости сходимости в теоремах эргодичности и непрерывности для многолинейных систем с очередью.— Теория вероятн. и ее примен., 1979, т. XXIV, № 2, с. 418—424.
6. **Ахмаров И.** Эргодичность и устойчивость многоканальных систем массового обслуживания с ограниченным временем ожидания.— Сиб. мат. журн., 1979, т. XX, № 4, с. 911—916.
7. **Золотарев В. М.** Количественные оценки в задачах непрерывности систем массового обслуживания.— Теория вероятн. и ее примен., 1975, т. XX, № 1, с. 215—218.
8. **Gut A.** On the moments and limit distributions on some first passage times.— Ann. of probability, 1974, v. II, № 2, p. 277—308.
9. **Фосс С. Г.** Об аппроксимации многоканальных систем обслуживания.— Сиб. мат. журн., 1980, т. XXI, № 6, с. 132—140.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

ДЛИННЫЕ СЕРИИ В МАРКОВСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Л. Я. САВЕЛЬЕВ

В статье исследуется распределение максимума длин серий в простой однородной марковской последовательности с конечным множеством значений.

1. Постановка задачи

1.1. Рассмотрим марковскую последовательность $\omega=(\omega_i)$ с конечным множеством значений C из m элементов, начальным распределением $P=(p_\gamma)$ и переходной матрицей $Q=(q_{\gamma\delta})$ $(\gamma,\ \delta\in C)$. Возьмем $A\subseteq C$, $B=C\setminus A$.

Пусть: $x_i(\omega)=\operatorname{ind}A(\omega_i)=1(\omega_i\in A),=0(\omega_i\in B)$;

$s_j(\omega)=\sum\limits_{0\leqslant i\leqslant j}x_i(\omega)$ — число значений $\omega_i\in A$ (*успехов*) среди $\omega_0,\ldots,\omega_j$;

$t_{jk}(\omega)=k^{-1}\cdot(s_{j+k}(\omega)-s_j(\omega))$ — доля успехов среди $\omega_{j+1},\ldots,\omega_{j+k}$ (*плотность*);

$0\leqslant a_k\leqslant b_k\leqslant 1$ — границы *допустимой плотности* отрезка $\omega_{j+1},\ldots$ $\ldots,\omega_{j+k}$ длины k;

$y_{kn}(\omega)=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant n-k}\{\operatorname{ind}[a_k,b_k](t_{jk}(\omega))\}=1$, если в последовательности $\omega_0,\ldots,\omega_n$ есть отрезок $\omega_{j+1},\ldots,\omega_{j+k}$ с допустимой плотностью $(a_k\leqslant t_{jk}(\omega)\leqslant b_k)$ и $y_{kn}(\omega)=0$, если такого *допустимого отрезка* нет;

$z_n(\omega)=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\{k\cdot y_{kn}(\omega)\}$ — максимум длин допустимых отрезков в последовательности $\omega_0,\ldots,\omega_n$.

Общая задача: исследовать распределение случайной величины z_n, найти ее среднее значение и дисперсию.

1.2. В частности, $a(k)=b(k)=1$, $t_{jk}(\omega)=1$, $s_{j+k}(\omega)-s_j(\omega)=k$, $x_{j+1}(\omega)=\ldots=x_{j+k}(\omega)=1$ описывают серию $\omega_{j+1}\in A,\ldots,\omega_{j+k}\in A$ успехов, имеющую длину k. В таком случае z_n есть максимум длин серий успехов в последовательности $\omega_0,\ldots,\omega_n$.

Для бернуллиевской последовательности этот максимум изучал В. Л. Гончаров [1].

Марковский случай исследовал Л. Я. Савельев. Им получено общее выражение для производящей функции распределения максимума длин серий, выведены некоторые асимптотические формулы и построена марковская модель переноса разряда при сложении случайных чисел. Эти результаты докладывались на Всесоюзном математическом съезде в Ленинграде в 1961 г. и на Всесоюзной конференции по вероятностным методам в дискретной математике в Петрозаводске в 1983 г. [2].

Марковскую модель переноса разряда подробно рассмотрел А. Д. Дедюхин [3]. Асимптотику максимума длин серий для марковской последовательности с двумя состояниями изучала С. С. Самарова [4].

1.3. Соотношения

$$a(k)=k^{-1}\bar{l},\quad b(k)=k^{-1}\bar{m}\quad (0\leqslant \bar{l}\leqslant \bar{m}\leqslant k);$$
$$k^{-1}\bar{l}\leqslant t_{jk}(\omega)\leqslant k^{-1}(\bar{m});$$
$$\bar{l}\leqslant s_{j+k}(\omega)-s_j(\omega)\leqslant \bar{m};$$
$$\bar{l}\leqslant x_{j+1}(\omega)+\ldots+x_{j+k}(\omega)\leqslant \bar{m}$$

описывают отрезок $\omega_{j+1},\ \ldots\ \omega_{j+k}$ с допустимым числом успехов, имеющий длину k. А z_n есть максимум длин таких отрезков последовательности $\omega_0,\ \ldots,\ \omega_n$.

Для бернуллиевской последовательности этот максимум рассматривали П. Ревез и П. Эрдеш [5].

1.4. В предлагаемой статье исследуется распределение максимума длин серий в марковской последовательности. Выводится выражение для производящей функции распределения и описываются некоторые частные случаи.

Общая задача о распределении максимума длин допустимых отрезков в статье не рассматривается.

1.5. Всюду далее предполагается, что $a(k)=b(k)=1$. Если вместо $\omega_i\in A$ писать A, а вместо $\omega_i\in B-B$, марковская последовательность $\omega_0,\ \ldots,\ \omega_n$ превратится в случайную последовательность букв А, В:

ABAAABBABBBBAA ... B.

k подряд идущих букв A образуют серию длины k. Исследуется распределение максимума длин таких серий.

Вместо A можно писать 1, а вместо B — 0. Получится случайная последовательность чисел 1, 0:

10111001000011 ... 0.

k подряд идущих чисел 1 образуют серию длины k. Исследуется распределение максимума длин таких серий.

2. Производящая функция

2.1. Выражение для производящей функции распределения максимума длин серий в рассматриваемой марковской последовательности получается с помощью рекуррентных соотношений. Эти соотношения выводятся из того факта, что максимум длин серий при переходе от $\omega_0,\ \ldots,\ \omega_{n-1}$ к $\omega_0,\ \ldots,\ \omega_{n-1},\ \omega_n$ увеличивается на единицу, если серия максимальной длины находится в конце $\omega_0,\ \ldots,\ \omega_{n-1}$ и $\omega_n\in A$. Во всех остальных случаях максимум остается прежним. При выводе используются только формула полной вероятности и марковское свойство.

2.2. Рассмотрим

$$f_\delta(k,\ n)=Pr\{\omega\colon\ z_n(\omega)\leqslant k,\ \omega_n=\delta\},$$
$$g_\delta(k,t)=\sum_{0\leqslant n<\infty} f_\delta(k,n)\cdot t^n,$$
$$f(k,n)=Pr\{\omega: z_n(\omega)\leqslant k\}=\sum_{\delta\in C} f_\delta(k,n),$$
$$g(k,t)=\sum_{0\leqslant n<\infty} f(k,n)\cdot t^n.$$

Заметим, что при $0<k<n$

$$\{\omega\colon\ z_n(\omega)\leqslant k,\ \omega_n=\delta\}=\Big[\bigcup_{\gamma\in C}\{\omega\colon\ z_{n-1}(\omega)\leqslant k,\ \omega_{n-1}=\gamma,\ \omega_n=\delta\}\Big]\Big\backslash\Big[\bigcup_{\gamma\in C}\{\omega\colon$$
$$:z_{n-k-1}(\omega)\leqslant k,\ \omega_{n-k-1}=\gamma,\ \omega_{n-k-1}\in B,\ \omega_{n-k}\in A,\ \ldots,\ \omega_{n-1}\in A,\ \omega_n=\delta,\ \omega_n\in A\}\Big].$$

(Если $\gamma \in A$ или $\delta \in B$, то соответствующие множества во втором объединении пустые.)

Используя формулу полной вероятности и марковское свойство, получаем

$$f_\delta(k,n) = \sum_{\gamma \in C} f_\gamma(k,n-1)\cdot q_{\gamma\delta} - \sum_{\gamma \in C} f_\gamma(k,n-k-1)\cdot \mathrm{ind}\, B(\gamma)\cdot q^k_{\gamma\delta}(A)\cdot \mathrm{ind} A(\delta). \tag{1}$$

Здесь

$$q^k_{\gamma\delta}(A) = Pr\{\omega : \omega_{n-k-1} = \gamma,\ \omega_{n-k} \in A, \ldots, \omega_{n-1} \in A,\ \omega_n = \delta\}$$

— вероятность перехода γ в δ через k значений из A (серию успехов длины k). В частности, $q^0_{\gamma\delta}(A) = q_{\gamma\delta}$. (Если $\delta \in B$, то вычитаемое в равенстве (1) равно нулю.)

Аналогично получаем

$$\begin{aligned}
&f_\delta(n,n) = \sum_{\gamma \in C} f_\gamma(n,n-1)\cdot q_{\gamma\delta} - \sum_{\gamma \in C} p_\gamma\cdot \mathrm{ind}\, A(\gamma)\cdot q^n_{\gamma\delta}(A)\cdot \mathrm{ind}\, A(\delta) && (0<k=n),\\
&f_\delta(k,n) = \sum_{\gamma \in C} f_\gamma(k,n-1)\cdot q_{\gamma\delta} && (k>n>0),\\
&f_\delta(k,\ 0) = p_\delta && (k>n=0),\\
&f_\delta(0,n) = \sum_{\gamma \in C} f_\gamma(0,n-1)\cdot q_{\gamma\delta}\cdot \mathrm{ind}\, B(\delta) && (0=k<n),\\
&f_\delta(0,\ 0) = p_\delta\, \mathrm{ind}\, B(\delta) && (0=k=n).
\end{aligned} \tag{1'}$$

Равенства (1) можно использовать для последовательного вычисления вероятностей $f_\delta(k,\ n)$ и $f(k,\ n)$.

2.3. Введем векторные вероятности и производящую функцию для них:

$$F(k,n) = (f_\delta(k,n))_{\delta \in C},\quad G(k,t) = \sum_{0 \leqslant n < \infty} F(k,n)\cdot t^n = (g_\delta(k,t))_{\delta \in C}.$$

Пусть I — единичная $m \times m$-матрица; $I(M)$ — диагональная $m \times m$-матрица, у которой единицы на пересечении строк и столбцов с индексами из множества $M \subseteq C$ и нули на остальных местах; $E' - m \times 1$-матрица (столбец) из единиц, $0 - 1 \times m$-матрица (строка) из нулей.

Там, где это не вызовет путаницу, матрицу $I(M)$, как и определяющее ее множество, будем обозначать буквой M. Заметим, что $f(k,\ n) = F(k,\ n)\cdot E'$, $g(k,\ t) = G(k,\ t)\cdot E'$. Равенства (1)—(1′) эквивалентны матричным равенствам

$$\begin{aligned}
&F(k,\ n) = F(k,\ n-1)\cdot Q - F(k,\ n-k-1)\cdot B(QA)^{k+1} && (0<k<n),\\
&F(n,\ n) = F(n,\ n-1)\cdot Q - PA(QA)^n && (0<k=n),\\
&F(k,\ n) = F(k,\ n-1)\cdot Q && (k>n>0),\\
&F(k,\ 0) = P && (k>n=0),\\
&F(0,\ n) = F(0,\ n-1)\cdot QB && (0=k<n),\\
&F(0,\ 0) = PB && (0=k=n).
\end{aligned} \tag{2}$$

Чтобы найти $F(k,\ n)$, нужно решить систему (2) разностных матричных уравнений.

2.4. С помощью производящих функций это нетрудно сделать. Умножив равенства (2) на t^n и сложив результаты, получим (для $k>0$ и $k=0$)

$$G(k,\ t) = P + G(k,\ t)\cdot Qt - PA(QA)^k t^k - G(k,\ t)\cdot B(QA)^{k+1}t^{k+1},$$

$$G(k,\ t)\cdot(I-Qt+B(QA)^{k+1}t^{k+1})=P-PA(QA)^{k}t^{k},$$
$$G(0,\ t)=PB+G(0,\ t)\cdot QBt, \tag{3}$$
$$G(0,\ t)\cdot(I-QBt)=PB.$$

Откуда

$$G(k,\ t)=(P-PA(QA)^{k}t^{k})\cdot(I-Qt-B(QA)^{k+1}t^{k+1})^{-1},$$
$$G(0,\ t)=PB\cdot(I-QBt)^{-1}. \tag{4}$$

Пусть (для $k>0$ и $k=0$)

$$R(k,\ t)=P-PA(QA)^{k}t^{k}=P-P\cdot Q^{k}(A)\cdot t^{k},$$
$$S(k,\ t)=Qt-B(QA)^{k+1}t^{k+1}=Qt-BQ\cdot Q^{k}(A)\cdot t^{k+1},$$
$$R(0,\ t)=PB,\quad S(0,\ t)=QBt.\quad [Q(A)=AQA].$$

Тогда, разлагая $(I-S(k,\ t))^{-1}$ при достаточно малых t в ряд Неймана, находим

$$G(k,\ t)=R(k,\ t)\cdot(I-S(k,\ t))^{-1}=R(k,\ t)\cdot(I+S(k,\ t)+S^{2}(k,\ t)+\ldots). \tag{5}$$

2.5. Добавив к (3) равенство для $g(k,\ t)$, получим систему матричных уравнений

$$G\cdot(I-S)+g\cdot O=R,$$
$$-G\cdot E'+g\cdot 1=O;$$
$$(G,g)\cdot\begin{pmatrix} I-S & -E' \\ o & 1\end{pmatrix}=(R,0).$$

Откуда, по правилу Крамера,

$$g\,(k,t)=\frac{\det\begin{pmatrix} I-S\,(k,t) & -E' \\ R\,(k,t) & o\end{pmatrix}}{\det\,(I-S\,(k,t))}. \tag{6}$$

3. Распределение максимума длин серий

3.1. Равенства (5) позволяют найти значения $f(k,\ n)$ функции распределения случайной величины z_n.

Заметим, что $S^{l}(k,\ t)$ равно сумме всех возможных произведений, составленных из l матриц,

$$T=Qt,\ U=-B(QA)^{k+1}t^{k+1}=-BQ\cdot Q^{k}(A)\cdot t^{k+1}.$$

Если в таком произведении j матриц U и $l-j$ матриц T, то оно содержит числовой множитель $(-1)^{j}t^{jk+l}$.

Пусть $V(j,\ n)$ есть сумма всех возможных произведений j матриц $-U$ и $n-jk$ матриц T, а

$$C\,(k,n)=\sum_{0\leqslant j\leqslant n/k}(-1)^{j}\,V\,(j,n)$$

при $k\leqslant n$ и равно нулевой $m\times m$-матрице при $k>n$. Тогда равенства (5) дают

$$F(k,\ n)=P\cdot[C(k,\ n)-Q^{k}(A)\cdot C(k,\ n-k)],$$
$$f(k,\ n)=F(k,\ n)\cdot E'. \tag{7}$$

В некоторых частных случаях по этим формулам легко вычислить значения $f(k,\ n)$.

3.2. Равенство (6) тоже позволяет найти значения $f(k,\ n)$ функции распределения случайной величины z_n.

Пусть

$$g\,(k,t)=\sum_{1\leqslant j\leqslant n(k)}\ \sum_{1\leqslant i\leqslant m(j)} b\,(i,j,k)\,(t-\lambda\,(j,k))^{-i}$$

— разложение рациональной функции $g(k,\ \cdot)$ на элементарные дроби, причем $0<|\lambda(1,\ k)|\leqslant\ldots\leqslant|\lambda(n(k),\ k)|$. Здесь $n(k)$ обозначает число различных корней $\lambda(j,\ k)$ полинома $\det(I-S(k,\ t))$, а $m(j)$ — кратность корня $\lambda(j,\ k)$.

Заметим, что при $|\lambda^{-1}(j,\ k)\cdot t|<1$

$$(t-\lambda(j,k))^{-1}=(-1)^i\lambda^{-i}(j,k)\cdot(1-\lambda^{-1}(j,k)\cdot t)^{-i}=(-1)^i\lambda^{-i}(j,k)\times$$
$$\times\sum_{0\leqslant n<\infty}\cdot c(-i,n)\cdot\lambda^n(j,k)\cdot t^n,$$

где $c(-i,\ n)=(-1)^n\cdot i(i+1)\ldots(i+n-1)/(n!)$.

Поэтому

$$g(k,t)=\sum_{0\leqslant n<\infty}\ \sum_{1\leqslant j\leqslant n(k)}\ \sum_{1\leqslant i\leqslant m(j)}(-1)^i\lambda^{-i}(j,k)\,b(i,j,k)\cdot c(-i,n)\cdot\lambda^{-n}(j,k)\cdot t^n.$$

Следовательно,

$$f(k,n)=\sum_{1\leqslant j\leqslant n(k)}a(j,k,n)\cdot\lambda^{-n}(j,k),$$
$$a(j,k,n)=\sum_{1\leqslant i\leqslant m(j)}(-1)^i\lambda^{-i}(j,k)\cdot b(i,j,k)\cdot c(-i,n). \qquad (8)$$

Корни $\lambda(j,\ k)$ и коэффициенты $b(i,\ j,\ k)$ находятся стандартными методами. Зная $\lambda(j,\ k)$ и $b(i,\ j,\ k)$ с помощью равенств (8) легко вычислить $a(j,\ k,\ n)$ и $f(k,\ n)$.

Полученное для $g(k,\ t)$ разложение есть модификация второго ряда Неймана для резольвенты [6, 7].

4. Частные случаи

4.1. Пусть $m\geqslant 2$ и $C=\{1,\ 2,\ \ldots,\ m\}$, $A=\{1\}, B=\{2,\ \ldots,\ m\}$. Тогда z_n описывает максимум длин серий единиц. В этом случае при $k>0$

$$R(k,t)=P-P\cdot\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\left[Q\cdot\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\right]^k\cdot t^k=$$

$$=(p_1,p_2,\ldots,p_m)-(p_1,0,\ldots,0)\cdot q_{11}^k\cdot t^k,$$

$$S(k,t)=Q\cdot t-\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\left[Q\cdot\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\right]^{k+1}\cdot t^{k+1}=$$

$$=Q\cdot t-\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0\\q_{21}&0&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\q_{m1}&0&\cdots&0\end{pmatrix}q_{11}^k\cdot t^{k+1}.$$

И, следовательно,

$$g(k,t)=\frac{\det\begin{pmatrix}I-Qt&-E'\\P&o\end{pmatrix}-\det\begin{pmatrix}I-Q_{11}(t)&-E'\\P&o\end{pmatrix}\cdot q_{11}^k\cdot t^k}{\det(I-Qt)-\det(I-Q_{11}(t))\cdot q_{11}^k\cdot t^k}, \qquad (9)$$

где $Q_{11}(t)$ получается из Qt заменой элемента $q_{11}(t)$ на 1:

$$Q_{11}(t)=\begin{pmatrix}1&q_{12}t&\cdots&q_{1m}t\\q_{21}t&q_{22}t&\cdots&q_{2m}t\\\vdots&\vdots&&\vdots\\q_{m1}t&q_{m2}t&\cdots&q_{mm}t\end{pmatrix}$$

4.2. Пусть еще $q_{\gamma\delta} = p_\delta$ ($\gamma, \delta = 1, 2, \ldots, m$), $p_1 = p$, $1 - p_1 = q$. В этом случае

$$\det\begin{pmatrix} I - Qt & -E' \\ P & o \end{pmatrix} = 1,$$

$$\det\begin{pmatrix} I - Q_{11}(t) & -E' \\ P & o \end{pmatrix} = p + qp\cdot t,$$

$$\det(I - Qt) = 1 - t, \quad \det(I - Q_{11}(t)) = -qp\cdot t^2.$$

Используя равенство (9), получаем ($k > 0$)

$$g(k, t) = \frac{1 - p^{k+1}\cdot t^k - qp^{k+1}\cdot t^{k+1}}{1 - t + qp^{k+1}\cdot t^{k+2}}. \tag{10}$$

Это совпадает с результатом В. Л. Гончарова, полученным другим методом [1].

Кроме того,

$$\det\begin{pmatrix} I - S(0, t) & -E' \\ R(0, t) & o \end{pmatrix} = q,$$

$$\det(I - S(0, t)) = 1 - qt.$$

Поэтому $g(0, t) = q\cdot(1 - qt)^{-1} = \sum\limits_{0 \leqslant n < \infty} q^{n+1}t^n.$

Разлагая функцию $g(k, \cdot)$ в степенной ряд, легко найти $f(k, n)$ и при $k > 0$: $\quad f(k, n) = \sum\limits_{0 \leqslant j < \infty} [c(n - j(k+1), j) - c(n - k - j(k+1), j)\times$

$\times p^{k+1} - c(n - k - 1 - j(k+1), j)\cdot qp^{k+1}] \times q^j p^{j(k+1)}$, где $c(l, j) = l(l-1)\ldots$ $\ldots(l - j + 1)/(j!)$.

4.3. Пусть теперь $m = 2$ и $P = (p, q)$, $Q = \begin{pmatrix} \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \beta & \beta \end{pmatrix}$.

В этом случае

$$\det\begin{pmatrix} I - Qt & -E' \\ P & o \end{pmatrix} = 1 + (1 - (\alpha + \beta))\,t,$$

$$\det\begin{pmatrix} I - Q_{11}(t) & -E' \\ P & o \end{pmatrix} = p + [p(1 - (\alpha + \beta)) + q(1 - \beta)]\cdot t,$$

$$\det(I - Qt) = 1 - (\alpha + \beta)t - (1 - (\alpha + \beta))t^2,$$

$$\det(I - Q_{11}(t)) = -(1 - \alpha)(1 - \beta)t^2.$$

Используя равенство (9), получаем ($k > 0$)

$$g(k, t) = \frac{1 + (1 - (\alpha + \beta))\,t - p\alpha^k t^k - [p(1 - (\alpha + \beta)) + q(1 - \beta)]\,\alpha^k t^{k+1}}{1 - (\alpha + \beta)\,t - (1 - (\alpha + \beta))\,t^2 + (1 - \alpha)(1 - \beta)\alpha^k t^{k+2}}. \tag{11}$$

Кроме того, $g(0, t) = q\cdot(1 - \beta t)^{-1} = \sum\limits_{0 \leqslant n < \infty} q\beta^n\cdot t^n.$

Если $\alpha = p$, $\beta = q$, то равенство (11) превращается в равенство (10).

5. Сложение случайных чисел

5.1. Исследование максимума длин серий в марковской последовательности было проведено для решения задачи о максимальном переносе разряда при сложении случайных двоичных чисел. Этот перенос определяет скорость вычисления суммы.

Возьмем двоичные числа a, b и добавим двоичное число c, описывающее переносы разрядов при сложении a с b. Тройка (a, b, c) описывается последовательностью двоичных чисел. Числа $101 = 5$, $011 = 6$ описывают переносы разряда, а числа $110 = 3$ и $001 = 4$ — начало и конец переноса. Например:

$$
\begin{array}{c|cccccccccccccccccccccccc}
c & 0&1&1&0&0&0&1&1&1&1&0&1&1&0&0&0&0&1&1&1&0&0&0&0\\
b & 1&1&0&0&1&1&0&1&1&0&1&1&0&0&0&0&1&1&0&0&1&0&0&0\\
a & 1&1&0&1&0&1&1&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&1&0&0&0&0&0\\
\hline
\omega & 3&7&4&1&2&3&\underline{5}&\underline{6}&\underline{6}&4&3&\underline{6}&4&0&0&0&3&\underline{6}&\underline{5}&4&2&0&0&0
\end{array}
$$

Здесь максимальный перенос описывается серией 566.

5.2. Пусть складываемые числа a, b выбираются независимо и случайно. Тогда можно считать, что сложение описывается марковской последовательностью $\omega = (\omega_i)$ с множеством состояний $C = \{0, 1, \ldots, 7\}$, начальным распределением и переходной матрицей

$$P = (1/4,\ 1/4,\ 1/4,\ 1/4,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0),$$

$$
Q = \begin{pmatrix}
1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\
1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4
\end{pmatrix}
$$

Возьмем $A = \{5, 6\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$. Переносы разряда представляются сериями значений из A. Случайная величина z_n, равная максимуму длин таких серий, описывает максимальный перенос.

5.3. Рассматриваемую марковскую последовательность можно укрупнить [3, 8]. Сложение двоичных чисел описывается и марковской последовательностью $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_i)$ с множеством состояний $\bar{C} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$, начальным распределением и переходной матрицей

$$\bar{P} = (0,\ 3/4,\ 1/4),$$

$$
\bar{Q} = \begin{pmatrix}
1/2 & 1/4 & 1/4\\
0 & 3/4 & 1/4\\
1/2 & 1/4 & 1/4
\end{pmatrix}.
$$

В новой последовательности значения $\bar{1}, \bar{2}$, $\bar{3}$ соответствуют множествам $\{5, 6\}$, $\{0, 1, 2, 4\}$, $\{3, 7\}$ значений старой. Переносы разряда описываются теперь сериями единиц.

5.4. В рассматриваемом случае

$$\det \begin{pmatrix} I - \bar{Q}t & -E' \\ \bar{P} & o \end{pmatrix} = 1 - (1/2)\,t,$$

$$\det \begin{pmatrix} I - \bar{Q}_{11}(t) & -E' \\ \bar{P} & o \end{pmatrix} = (1/2)^3 t - (1/2)^4 t^2,$$

$$\det (I - \bar{Q}t) = 1 - (3/2)t + (1/2)t^2,$$

$$\det (I - \bar{Q}_{11}(t)) = -(1/2)^3 t^2 + (1/2)^4 t^3.$$

Используя неравенство (9), получаем ($k > 0$)

$$g(k, t) = \frac{1 - (1/2)\,t - (1/2)^{k+3} t^{k+1} + (1/2)^{k+4} t^{k+2}}{1 - (3/2)\,t + (1/2)\,t^2 + (1/2)^{k+3} t^{k+2} - (1/2)^{k+4} t^{k+3}}. \qquad (12)$$

Равенство (12) получил А. Д. Дедюхин [3].

5.5. С помощью равенств (1), (8), (12) А. Д. Дедюхин на БЭСМ-6 последовательно вычислил вероятности $f_1(k, n)$, $f_2(k, n)$, $f_3(k, n)$ и $f(k, n)$ для $n \leqslant 64$.

Кроме того, с помощью вероятностей $p(k, n) = f(k, n) - f(k-1, n)$ он вычислил среднее значение $\mu(n)$ случайной величины z_n и ее стандартное отклонение $\sigma(n)$:

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
24	2,86	1,67	40	3,62	1,73
28	3,09	1,69	56	4,12	1,76
31	3,24	1,70	63	4,29	1,77
36	3,46	1,72			

Если добавить начало или конец переноса разряда, полученные результаты для средних совпадут с результатами Л. Е. Ящука [3]: $\mu(n)+(1-(3/4)^{n+1})$. Если добавить начало и конец переноса разряда, полученные результаты для средних совпадут с результатами В. Гильхриста, Т. Померене, С. Вонга [9]: $\mu(n)+2(1-3/4)^{n+1})$.

Длина наибольшего переноса разряда при сложении случайных чисел исследовалась еще Э. З. Любимским [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гончаров В. Л.** Из области комбинаторики.— Изв. АН СССР. Математика, 1944, т. 8, № 1, с. 3—49.
2. **Савельев Л. Я.** Распределение максимума длин серий.— В кн.: Вероятностные методы в дискретной математике. Петрозаводск: Карельский филиал АН СССР, 1983, с. 75—76.
3. **Дедюхин А. Д.** Перенос разряда при сложении случайных чисел.— В кн.: Материалы XVII Всесоюз. научной студенческой конференции (математика). Новосибирск: изд. НГУ, 1979, с. 25—30.
4. **Самарова С. С.** О длине максимальной серии успехов для марковской цепи с двумя состояниями.— Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, № 3, с. 510—520.
5. **Revesz P., Erdos P.** On the length of the longest head-run.— Col. Math. J. Bolyai, 1975, v. 16, p. 219—228.
6. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
7. **Ланкастер П.** Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
8. **Кемени Дж., Снелл Дж.** Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970. 271 с.
9. **Gilchrist B., Pomerene T. H., Wong S. Y.** Fast carrying logic for digital computers.— IRE Trans. Electr. comp. ES-4, 1955, N 4, p. 51—55.
10. **Любимский Э. З.** Статистические исследования на машине «Стрела».— В кн.: Материалы Всесоюз. совещ. по вычислительной математике и вычислительной технике. М.: МГУ, 1959, с. 21—26.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММЫ И МАКСИМУМА НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

И. Ф. ПИНЕЛИС

1. Введение

Рассмотрим сначала последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимых одинаково распределенных случайных величин (с. в.) с функцией распределения (ф. р.) F; положим $\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Как устроена «типичная» траектория сумм $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, сильно отклоняющаяся от 0 в том смысле, например, что происходит событие $\{\zeta_n \geqslant x\}$, имеющее малую вероятность?

Если выполняется условие Крамера

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp h|x|\,dF(x) < \infty, \quad 0 < h < h_0, \tag{1.1}$$

траектория сумм, как и траектория соответствующего винеровского процесса, «выпрямляется», вклады различных слагаемых $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в образование большого уклонения суммы сравнимы между собой.