дартное отклонение $\sigma(n)$:

n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$	n	$\mu(n)$	$\sigma(n)$
24	2,86	1,67	40	3,62	1,73
28	3,09	1,69	56	4,12	1,76
31	3,24	1,70	63	4,29	1,77
36	3,46	1,72			

Если добавить начало или конец переноса разряда, полученные результаты для средних совпадут с результатами Л. Е. Ящука [3]: $\mu(n)+ +(1-(3/4)^{n+1})$. Если добавить начало и конец переноса разряда, полученные результаты для средних совпадут с результатами В. Гильхриста, Т. Померене, С. Вонга [9]: $\mu(n)+2(1-3/4)^{n+1})$.

Длина наибольшего переноса разряда при сложении случайных чисел исследовалась еще Э. З. Любимским [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гончаров В. Л.** Из области комбинаторики.— Изв. АН СССР. Математика, 1944, т. 8, № 1, с. 3—49.
2. **Савельев Л. Я.** Распределение максимума длин серий.— В кн.: Вероятностные методы в дискретной математике. Петрозаводск: Карельский филиал АН СССР, 1983, с. 75—76.
3. **Дедюхин А. Д.** Перенос разряда при сложении случайных чисел.— В кн.: Материалы XVII Всесоюз. научной студенческой конференции (математика). Новосибирск: изд. НГУ, 1979, с. 25—30.
4. **Самарова С. С.** О длине максимальной серии успехов для марковской цепи с двумя состояниями.— Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, № 3, с. 510—520.
5. **Revesz P., Erdos P.** On the length of the longest head-run.— Col. Math. J. Bolyai, 1975, v. 16, p. 219—228.
6. **Като Т.** Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972. 740 с.
7. **Ланкастер П.** Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
8. **Кемени Дж., Снелл Дж.** Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970. 271 с.
9. **Gilchrist B., Pomerene T. H., Wong S. Y.** Fast carrying logic for digital computers.— IRE Trans. Electr. comp. ES-4, 1955, N 4, p. 51—55.
10. **Любимский Э. З.** Статистические исследования на машине «Стрела».— В кн.: Материалы Всесоюз. совещ. по вычислительной математике и вычислительной технике. М.: МГУ, 1959, с. 21—26.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ СУММЫ И МАКСИМУМА НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

И. Ф. ПИНЕЛИС

1. Введение

Рассмотрим сначала последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимых одинаково распределенных случайных величин (с. в.) с функцией распределения (ф. р.) F; положим $\zeta_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$.

Как устроена «типичная» траектория сумм $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, сильно отклоняющаяся от 0 в том смысле, например, что происходит событие $\{\zeta_n \geqslant x\}$, имеющее малую вероятность?

Если выполняется условие Крамера

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp h\,|x|\,dF(x) < \infty, \quad 0 < h < h_0, \qquad (1.1)$$

траектория сумм, как и траектория соответствующего винеровского процесса, «выпрямляется», вклады различных слагаемых $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в образование большого уклонения суммы сравнимы между собой.

При нарушении условия Крамера механизм образования больших уклонений существенно меняется. Если «хвост» $1-F(x)$ не слишком нерегулярен и (1.1) не выполняется, возникает асимптотическое представление

$$\mathbf{P}(\zeta_n \geqslant x) \sim \mathbf{P}\left(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \xi_j \geqslant x\right) \quad (x \to \infty,\ x \geqslant \Lambda(n)), \tag{1.2}$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{P}(\zeta_n \geqslant x) \sim n\mathbf{P}(\xi_1 \geqslant x). \tag{1.3}$$

(Здесь и в дальнейшем эквивалентность $\sim$ понимается в смысле равенства 1 соответствующего предела отношения.) Это представление означает, что большое уклонение суммы происходит в основном за счет в точности одного из слагаемых. Подчеркнем, что в (1.2) не обязательно $n \to \infty$.

Нетрудно понять причины отмеченных явлений. Пусть, например, существует ограниченная плотность $F'(x) = p(x) = \exp\{-l(x)\}$. Возьмем достаточно большое число $u > 0$. Нас интересуют наборы чисел $u_1, \ldots, u_n$, доставляющие максимум совместной плотности $p(u_1) \ldots p(u_n)$, или, что равносильно, минимум $l(u_1) + \ldots + l(u_n)$ при условии $u_1 + \ldots + u_n \geqslant u$.

Предложение 1.1. Обозначим

$$F_n(u) = \inf\{l(u_1) + \ldots + l(u_n):\ u_1 + \ldots + u_n \geqslant u\}.$$

Пусть верно одно из двух: либо

1) функция l всюду выпукла, либо

2) функция l вогнута на $[a, \infty]$ при некотором a и $l(u) = o(u)$ $(u \to \infty)$.

Тогда в первом случае $F_n(u) = nl(u/n)$ для достаточно больших u, во втором — $F_n(u) \sim l(u-(n-1)a) + (n-1)l(a) \sim l(u)$ при $u \to \infty$ и фиксированном n.

(Доказательство дано в приложении, в конце статьи.)

Мы видим, таким образом, что если функция l выпукла, то (условие Крамера выполнено и) максимум совместной плотности достигается при $u_1 = \ldots = u_n = u/n$.

Если же имеет место альтернатива, то (условие Крамера нарушено и) близкие к максимуму значения совместной целостности достигаются при $u_1 = u-(n-1)a$, $u_2 = \ldots = u_n = a$.

Иначе говоря, предложение 1.1 показывает, что критическая роль условия Крамера при изучении вероятностей больших уклонений связана с тем, что «правильно устроенные» плотности, удовлетворяющие условию Крамера, логарифмически вогнуты, а не удовлетворяющие ему — логарифмически выпуклы в окрестности ∞, и, в свою очередь, направление выпуклости логарифма плотности характеризует механизм образования больших уклонений*. Разумеется, определенного направления выпуклости, какое присутствует в таких упрощенных, модельных представлениях, может и не быть. Роль выпуклости может сыграть, например, условие достаточной удаленности распределения слагаемых от показательного. Так, в нижеследующих теоремах 5.1, 7.1, где «хвосты» убывают не быстрее, чем $\exp(-x^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, условия типа выпуклости отсутствуют. С другой стороны, такое условие содержится в теореме 6.1, где исследуются, в частности, «хвосты», сколь угодно близкие к показательным; пример 4.1 показывает, что там условие выпуклости существенно. Наконец, обращаем внимание читателя на предложение 4.2 и пример 4.2.

При фиксированном n представление (1.3) было изучено в [25] в связи с приложениями к некоторому уравнению восстановления. Как показано в [25], для положительных почти наверное (п. н.) слагаемых

---

* Аналогичные соображения о механизмах образования больших уклонений для плотностей вида $Ce^{-|x|^\alpha}$ содержатся в работе С. В. Нагаева «Предельные теоремы для больших уклонений». Зимняя школа по теории вероятностей и математической статистике. Киев, 1964, с. 147—163.

ξ_i представление (1.3) имеет место для любого фиксированного n тогда и только тогда, когда оно справедливо для $n=2$, т. е. когда

$$1-F*F(x)\sim 2(1-F(x))\ (x\to\infty). \tag{1.4}$$

Ф. р., удовлетворяющие этому условию, были впоследствии названы субэкспоненциальными благодаря свойству

$$\ln(1-F(x))=o(x)\ \ (x\to\infty), \tag{1.5}$$

вытекающему из соотношения

$$1-F(x+y)\sim 1-F(x)\ \ (x\to\infty) \tag{1.6}$$

для любого фиксированного y. Эти и другие свойства класса $\mathscr{S}$ субэкспоненциальных ф. р. были установлены в [25]. Класс $\mathscr{S}$ привлек внимание ряда авторов (см., например, [30] и данную там библиографию).

Если представление (1.3) имеет место для любого фиксированного n, оно остается справедливым и при $n\to\infty$ равномерно в некоторой зоне вида $x\geqslant\Lambda(n)$, где $\Lambda(n)\to\infty$; о характере роста $\Lambda(n)$, в общем, сказать ничего нельзя. С изучением условий справедливости представления (1.3) при $n\to\infty$, включая оценки $\Lambda(n)$, связано большое число публикаций [2, 5, 7—12, 14—19, 28, 32, 33, 35, 37].

Настоящая работа посвящена в основном нахождению общих условий существования представлений типа (1.2). Дано также применение к асимптотике безгранично делимых распределений в банаховом пространстве, обобщающее результаты работ [6, 29, 30].

В чем отличия предлагаемой работы от предшествующих?

Во-первых, мы отказываемся от условия одинаковой распределенности слагаемых. Отказ выглядит довольно естественно: если, в крайнем случае, все слагаемые, кроме одного, нулевые, то (1.2) тривиально. Кроме того, если ранее изучались либо случай фиксированного n, либо начальные суммы последовательности с. в., либо ряд независимых с. в., мы рассматриваем схему серий, объединяя эти подходы. Отметим, что случай фиксированного n рассмотрен и отдельно, так как здесь удается получить более простые критерии и проследить некоторые закономерности, присущие и общему случаю.

Во-вторых, предполагается, что слагаемые принимают значения в произвольном сепарабельном банаховом пространстве. Более того, полученные результаты тривиально переносятся, например, на группы с инвариантной метрикой (определение и характеризацию таких групп см. в [24]). Следует отметить, что эффект бесконечномерности зачастую скорее способствует проявлению механизма образования больших уклонений за счет одного из слагаемых — если пространство «похоже» на L_∞. (Рассмотрим пример: пусть ξ_1, η_1, ..., ξ_n, η_n — произвольные независимые (одномерные) с. в., причем распределения η_i непрерывны. Положим $f(s;\ t)=I\{s=t\}$. Здесь и в дальнейшем $I\{\ldots\}$ обозначает индикатор, т. е. $I\{\ldots\}=1$, если утверждение в фигурных скобках верно, и 0 в противном случае. Положим $X_i(t)=\xi_i f(\eta_i;\ t)$, $S_n=X_1+\ldots+X_n$. Тогда X_i представляют независимые с. в. в пространстве ограниченных функций $x=x(t)$, $-\infty<t<\infty$, с нормой $\|x\|=\sup|x(t)|$, и $\|S_n\|=\max\limits_{i\leqslant n}\|X_i\|$ п.н. С другой стороны, если пространство «похоже» на L_1, то зона, в которой справедливо представление (1.2), может быть уже, чем в одномерном случае. Сравнение с результатами в [9, 35] показывает, что найденные в настоящей работе границы этой зоны, вообще говоря, неулучшаемы.

В-третьих, уменьшаются требования к правильности изменения ф. р. слагаемых, в особенности при отсутствии второго момента. Для растущего n в этом случае предполагалось, что ф. р. принадлежит области притяжения устойчивого закона (см., например, [32]). Оказалось же, что допустимы колебания «хвоста» ф. р. между двумя степенными функциями с разными показателями (см. следствие 5.1). Впрочем, гораздо важнее то, что требования правильности изменения накладываются не на «хвосты» отдельных слагаемых, а на сумму таких «хвостов». В частности, как показывают следствия 5.2 и 6.1, слагаемые могут иметь даже двухточечные распределения.

В-четвертых, что хотелось бы отметить особо, исследована зона, в которой вероятности больших уклонений суммы и максимума с. в. асимптотически эквивалентны для «хвостов», сколь угодно близких к показательным (теорема 6.1). В данном направлении автору известна лишь работа С. В. Нагаева [11], где предполагается, что слагаемые принимают действительные значения и одинаково распределены, и накладываются условия регулярности «хвостов», более трудные для проверки, чем данные в настоящей работе. Метод, примененный в [11], чисто аналитический и не переносится на интересующий нас случай. Представляется, что теорема 6.1 — наиболее важный и трудный результат предлагаемой работы.

Уместно напомнить, что при изучении условий существования представления (1.3) для одномерных слагаемых применялось преобразование Крамера ф. р. В предлагаемой здесь работе использованы только прямые вероятностные методы, основанные на представлениях вероятностей больших уклонений, аналогичных соответствующим представлениям в [7—10, 32], и на экспоненциальных неравенствах для больших уклонений. Решающая роль в задаче о получении таких неравенств в бесконечномерном случае принадлежит работам В. В. Юринского, см., например, [41]. Метод В. В. Юринского был усовершенствован А. И. Саханенко (теорема 2.2), а также в [13, 17].

Необходимо сделать следующие замечания. Результаты, наиболее близкие к этой работе, получены независимо от нас Л. В. Розовским, рассматривавшим случай одномерных, но неодинаково распределенных слагаемых, и А. Д. Сластниковым, изучавшим одинаково распределенные бесконечномерные с. в. (устные сообщения). Представление (1.2) для конечного числа слагаемых ξ_i с «хвостами» ф. р. $\sim c_i x^{-\alpha} l(x)$ ($\alpha > 0$, l здесь и далее, если не оговорено противное, обозначает медленно меняющуюся функцию в смысле Карамата) по существу приведено в [20, с. 338]. Другой частный случай неодинаково распределенных слагаемых содержится в [30] ($n = 2$, $\mathbf{P}(\xi_2 > x) = o\ (P(\xi_1 > x))$). В [34] изучается сходящийся ряд вида $\sum \eta_j x_j$, где η_j — независимые одномерные с. в., $\mathbf{P}(|\eta_j| \geqslant x) \sim Cx^{-p}$ $(0 < p < 2)$, x_j — элементы квазинормированного пространства. В [2] рассмотрены двумерные слагаемые с общей плотностью распределения $f(x) \sim \|x\|^{-\beta}(\|x\| \to \infty,\ \beta > 4)$, а в [19] — конечномерные слагаемые с общей ф. р., принадлежащей области притяжения ненормального устойчивого закона.

Настоящая статья представляет полностью переработанный вариант депонированной работы [17]: значительно преобразованы почти все формулировки и доказательства, причем общность приносилась подчас в жертву простоте. Некоторые выкладки удалось упростить с помощью отмеченной выше теоремы 2.2 (А. И. Саханенко). В результате, несмотря на добавленное применение к безгранично делимым распределениям и другие дополнения, первоначальный объем существенно сократился. Кроме того, статья стала более удобной для чтения. Основные результаты работы анонсированы в [14—16].

В дальнейшем понадобятся следующие обозначения. Пусть $\{X_{i,n}\colon i = 1, \ldots, i_n;\ n = 1, 2, \ldots\}$ — схема серий с. в., принимающих значения в некотором сепарабельном банаховом пространстве $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|)$, причем с. в. в каждой серии $\{X_{1,n}, \ldots, X_{i_n,n}\}$ независимы. Положим $X_{i,n}(y) = X_{i,n} I\{\|X_{i,n}\| < y\}$, $S_{j,n}(y) = X_{1,n}(y) + \ldots + X_{j,n}(y)$, $S_{j,n} = S_{j,n}(\infty)$, $S_n(y) = S_{i_n,n}(y)$, $S_n = S_n(\infty)$.

Положим

$$G_n(x) = \sum_i \mathbf{P}(\|X_{i.n}\| \geqslant x),\quad B_n(y) = \left(-\int_0^y u^2 dG_n(u)\right)^{1/2},$$

$B_n = B_n(\infty)$. Нас будут интересовать условия, в которых справедливы представления

$$\mathbf{P}(\|S_n\| \geqslant x) \sim G_n(x), \tag{1.7}$$

$$\mathbf{P}(\sup_j \|S_{j,n}\| \geqslant x) \sim G_n(x). \tag{1.8}$$

Здесь и в дальнейшем все предельные соотношения выполняются при $n \to \infty$, если не оговорено противное.

Замечание 1.1. Выше молчаливо предполагалось, что $i_n < \infty$ для всех n. Однако в пп. 5—7 можно считать, что $i_n \equiv \infty$, как только приняты следующие соглашения. Положим $\|S_n\| = \lim_{j\to\infty} \|S_{j,n}\|$ (по распределению), если этот предел существует; в противном случае (1.7) необходимо заменить парой соотношений

$$\liminf_{j\to\infty} \mathbf{P}(\|S_{j,n}\| \geqslant x) \sim \limsup_{j\to\infty} \mathbf{P}(\|S_{j,n}\| \geqslant x) \sim G_n(x).$$

Все доказательства тем не менее проведем только для конечных i_n; распространение на общую ситуацию (осуществить его совсем нетрудно) предоставляется читателю.

Замечание 1.2. В случае $\mathfrak{X} = \mathscr{R}^1$ справедливы односторонние аналоги полученных результатов. Довольно детально они рассмотрены в п. 4, т. е. для фиксированного числа слагаемых. Что же касается пп. 5—7, читатель без особого труда найдет отсутствующие «односторонние» варианты содержащихся там теорем.

В заключение условимся еще о некоторых обозначениях:

1) будем писать $a \asymp b$,
если $a = O(b)$, $b = O(a)$;

2) $f(u)\uparrow (f(u)\downarrow)$ означает, что $f(u)$ не убывает (не возрастает) при достаточно больших u; $f(u)\uparrow a$ $(f(u)\downarrow a)$ означает, что при этом $\lim_{u\to\infty} f(u) = a$; обозначим $f(a\pm) = \lim f(u)$ при $u\downarrow a$, $u\uparrow a$ соответственно.

3) символом $\Box$ будем отмечать конец доказательства.

2. Неравенства для вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве

Положим $\quad P(z) = \mathbf{P}(\|S_n\| - \mathbf{M}\|S_n\| \geqslant z), \;\; A_n(\varphi;\lambda) = -\int\limits_{\lambda+}^{\infty} \varphi(u)\, dG_n(u),$

где φ — неотрицательная борелевская функция.

Для любой функции f определим обобщенную обратную функцию $f^{-1}(t;\ a,\ b) = \sup\{u \in (a,\ b]\colon f(u) \leqslant t\}$, полагая при этом $\sup \varnothing = 0$. Условимся считать $\exp\{-a/0\} = 0$ при $a > 0$.

Теорема 2.1. *Пусть функция φ логарифмически вогнута на интервале $(\lambda,\ \infty)$ для некоторого $\lambda \geqslant 0$. Пусть $\|X_{i,n}\| \leqslant v$ $(i = 1,\ \ldots,\ i_n)$ п. н., где v — некоторое положительное число. Тогда при $z,\ a,\ \alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2 > 0$, $\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$*

$$P(z) \leqslant \max\{P_i(z)\colon\ i = 0,\ 1,\ 2,\ 3\}, \tag{2.1}$$

где

$$P_0(z) = \exp(-\alpha a z/\lambda),$$

$$P_1(z) = \exp\{-\alpha\alpha_1 z^2/\beta(a) B_n^2\}, \;\; \beta(a) = (e^a - 1 - a)/a^2,$$

$$P_2(z) = \exp\{-\alpha a z/\widehat{\varphi}^{-1}(e^a A_n(\varphi;\ \lambda)/\alpha_2 a z;\ \lambda,\ v)\} \;\; \widehat{\varphi}(u) = \varphi(u)/u,$$

$$P_3(z) = [A_n(\varphi;\ \lambda)/\alpha_2 a z \widehat{\varphi}(v)]^{\alpha z/v}.$$

Оценка (2.1) является небольшим видоизменением неравенства, анонсированного в [13].

При $\varphi(x) = x^t$, $t > 0$, полагая

$$u_0 = \widehat{\varphi}^{-1}(e^a A_n(\varphi;\ \lambda)/\alpha_2 a z;\ \lambda,\ v),$$

нетрудно видеть, что

$$u_0^{t-1} \leqslant e^a A_n(\varphi; \lambda)/\alpha_2 az, \quad u_0 \leqslant v,$$

откуда

$$u_0 \leqslant (e^a v A_n(\varphi; \lambda)/\alpha_2 az)^{1/t},$$

$$P_2(z) \leqslant \exp\{-C_1(a, t)\alpha z v^{-1}(\alpha_2 z v^{t-1}/A_n(\varphi; \lambda))^{1/t}\}.$$

Поэтому ввиду неравенства $\exp(-u^{1/t}) \leqslant (t/e)^t/u$,

$$\max[P_2(z), P_3(z)] \leqslant C(A_n(\varphi; \lambda)/\alpha_2 z v^{t-1})^{\alpha z/v}, \tag{2.2}$$

где $C = C(a, t) > 0$.

Теорема 2.2. (*А. И. Саханенко*). *Для любого* $h > 0$

$$P(z) \leqslant \exp\left\{-hz - \int_0^\infty (e^{hu} - 1 - hu)\, dG_n(u)\right\}.$$

Теорема 2.3. *При* $x, y > 0$

$$\mathbf{P}(\sup_j \|S_{j,n}\| \geqslant x + y) \leqslant \mathbf{P}(\|S_n\| \geqslant x)/[1 - \sup_j \mathbf{P}(\|S_n - S_{j,n}\| \geqslant y)].$$

Последнее неравенство принадлежит Т. А. Азларову и Н. А. Володину [1].

Доказательство теоремы 2.1. Возьмем любое $h > 0$. Имеем

$$-\int_0^\infty (e^{hu} - 1 - hu)\, dG_n(u) = I_1 + I_2, \tag{2.3}$$

где $I_1 = -\int\limits_{u\leqslant a/h} \ldots,\ I_2 = -\int\limits_{a/h<u\leqslant v} \ldots$ Так как $\beta(u) = (e^u - 1 - u^2)/u^2$ возрастает, то

$$I_1 \leqslant h^2 \beta(a) B_n^2. \tag{2.4}$$

Положим $R(h) = \max[e^a/\varphi(ah^{-1}),\ e^{hv}/\varphi(v)] I\{ah^{-1} < v\}$. Тогда

$$I_2 \leqslant -\int\limits_{a/h<u\leqslant v} \exp\{hu - \ln\varphi(u)\}\, \varphi(u)\, dG_n(u) \leqslant R(h) A_n(\varphi; ah^{-1}) \tag{2.5}$$

ввиду выпуклости функции $hu - \ln\varphi(u)$. Из (2.3)—(2.5), в силу теоремы 2.2, вытекает оценка

$$\mathbf{P}(z) \leqslant \exp\{-h(z - L(h))\}, \tag{2.6}$$

где $L(h) = h\beta(a) B_n^2 + h^{-1} R(h) A_n(\varphi; ah^{-1})$. Положим $h_0 = L^{-1}((1-\alpha)z; 0, \infty)$. Тогда из (2.6) находим

$$P(z) \leqslant \exp\{-\alpha h_0 z\}. \tag{2.7}$$

Если $ah_0^{-1} \leqslant \lambda$, отсюда следует, что $P(z) \leqslant P_0(z)$. Остается предположить, что $ah_0^{-1} > \lambda$. Имеем $L(h_0 + \varepsilon) > (1-\alpha)z$ при $\varepsilon > 0$, поэтому либо

$$(h_0 + \varepsilon)\, \beta(a) B_n^2 > \alpha_1 z, \tag{2.8}$$

либо, если $\varepsilon > 0$ настолько мало, что $a(h_0 + \varepsilon)^{-1} > \lambda$,

$$(h_0 + \varepsilon)^{-1} R(h_0 + \varepsilon) A_n(\varphi; \lambda) > \alpha_2 z, \tag{2.9}$$

так как $\alpha_2 = 1 - \alpha - \alpha_1$. При выполнении (2.9) $h_0 + \varepsilon > av^{-1}$, и, кроме того, либо

$$A_n(\varphi; \lambda) e^a/\varphi(a(h_0 + \varepsilon)^{-1}) > \alpha_2 z (h_0 + \varepsilon), \tag{2.10}$$

либо

$$A_n(\varphi; \lambda) \exp\{(h_0 + \varepsilon) v\}/\varphi(v) \geqslant \alpha_2 z (h_0 + \varepsilon) > \alpha_2 a z v^{-1}. \tag{2.11}$$

Выбирая $\varepsilon > 0$ сколь угодно малым и собирая соотношения (2.7), (2.8), (2.10), (2.11), получаем оценку (2.1). □

Для полноты изложения приведем доказательство теоремы 2.2. Оно основано на методе, предложенном В. В. Юринским [26]. Пусть $\mathbf{M}_j$ обозначает условное математическое ожидание при фиксированных $X_{1,n}, \ldots, X_{j,n}$ $(j=1, \ldots, i_n)$, $\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}$ — безусловное математическое ожидание. Положим $\xi_j = \mathbf{M}_j\|S_n\| - \mathbf{M}_{j-1}\|S_n\|$, $j = 1, \ldots, i_n$. Тогда

$$\mathbf{M}\exp(\|S_n\| - \mathbf{M}\|S_n\|) = \mathbf{M}\exp(\xi_1 + \ldots + \xi_{i_n}) = \\ = \mathbf{M}_0\{(\exp\xi_1)\mathbf{M}_1\{(\exp\xi_2)\ldots\mathbf{M}_{i_n-1}\exp\xi_{i_n}\}\ldots\}. \tag{2.12}$$

Обозначим $\eta_j = \mathbf{M}_j(\|S_n\| - \|S_n - X_{j,n}\|)$; тогда, ввиду независимости $X_{j,n}$ от $S_n - X_{j,n}$, $\xi_j = \eta_j - \mathbf{M}_{j-1}\eta_j$ п. н. При этом в силу неравенства треугольника $|\eta_j| \leqslant \|X_{j,n}\|$ п. н. Используя неравенства $a \leqslant \exp(a-1)$, $e^u - u \leqslant e^v - v$ $(|u| \leqslant v)$, получим

$$\mathbf{M}_{j-1}\exp\xi_j = \exp(-\mathbf{M}_{j-1}\eta_j)\mathbf{M}_{j-1}\exp\eta_j \leqslant \\ \leqslant \exp\mathbf{M}_{j-1}(\exp\eta_j - 1 - \eta_j) \leqslant \exp\mathbf{M}(\exp\|X_{j,n}\| - 1 - \|X_{j,n}\|).$$

Отсюда и из (2.12) находим

$$\mathbf{M}\exp(\|S_n\| - \mathbf{M}\|S_n\|) \leqslant \exp\sum_1^n \mathbf{M}(\exp\|X_{j,n}\| - 1 - \|X_{j,n}\|).$$

Не умаляя общности, можно считать $h=1$. Поэтому остается воспользоваться неравенством Чебышева

$$P(z) \leqslant e^{-z}\mathbf{M}\exp(\|S_n\| - \mathbf{M}\|S_n\|). \quad \square$$

3. Исходные вероятностные представления и одна лемма

Рассмотрим для каждого n события:

$$A^{(1)} = \{\|S_n\| \geqslant x\}, \quad A^{(2)} = \{\sup_j \|S_{j,n}\| \geqslant x\},$$
$$B = \{(\forall i)\|X_{i,n}\| < y\},$$
$$C = \bigcup_i \{\|X_{i,n}\| \geqslant y;\ \|X_{j,n}\| < y\ (\forall j \neq i)\},$$
$$D = \bigcup_{i \neq j} \{\|X_{i,n}\| \geqslant y;\ \|X_{j,n}\| \geqslant y\}.$$

Обозначим $\Pi_0 = \mathbf{P}(A^{(2)}B)$, $\Pi_1^{(j)} = \mathbf{P}(A^{(j)}C)$, $\Pi_2 = \mathbf{P}(D)$. Тогда для $j = 1, 2$

$$\mathbf{P}(A^{(j)}) = \Pi_1^{(j)} + O(\Pi_0 + \Pi_2). \tag{3.1}$$

Пусть E_q — событие, состоящее в том, что событие $\{v \leqslant \|X_{i,n}\| < y\}$ происходит ровно для q различных значений i, причем для всех остальных значений i происходит событие $\{\|X_{i,n}\| < v\}$ $(v \leqslant y,\ q = 0, 1, 2\ldots)$. Обозначим $\pi_q = \mathbf{P}(A^{(2)}E_q)$. Тогда

$$\Pi_0 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \ldots \tag{3.2}$$

Положим

$$\overline{\Pi}_{0,q}(z) = \sup\Big\{\mathbf{P}\Big(\sup_j\|S_{j,n}(H;\,v)\| \geqslant z\Big): \\ H \subseteq \{1, \ldots, i_n\},\ \sum_{j=1}^{i_n} I\{j \notin H\} = q\Big\}, \tag{3.3}$$

$$\Pi_0(z) = \sup_q \overline{\Pi}_{0,q}(z), \tag{3.4}$$

где $S_{j,n}(H;\,t) = \sum_{\substack{i \in H \\ i \leqslant j}} X_{i,n}(t)$. Нетрудно видеть, что

$$\pi_q \leqslant (-1)^q \int_v^{y-} dG_n(u_1) \ldots \int_v^{y-} dG_n(u_q)\,\overline{\Pi}_{0,q}(x - u_1 - \ldots u_q). \tag{3.5}$$

Лемма 3.1. *Пусть x, y, Δ изменяются так, что* $0<y<x$,

$$0<\Delta=o(x), \tag{3.6}$$

$$G_n(x-\Delta)\sim G_n(x+\Delta), \tag{3.7}$$

$$\sup_j \mathbf{P}(\|S_{j,n}\|\geqslant \Delta/16)\to 0, \tag{3.8}$$

$$G_n(y)=O(G_n(x)), \tag{3.9}$$

$$G_n(x)\to 0. \tag{3.10}$$

Тогда при $j=1, 2$

$$\Pi_1^{(j)}\sim G_n(x). \tag{3.11}$$

Замечание. Если, например, $G_n(x)=n(1-F(x))$, где ф. р. F субэкспоненциальна, т. е. удовлетворяет условию (1.4), то, ввиду (1.6), можно подобрать $\Delta\to\infty$ так, что при этом будет выполнено (3.7).

Доказательство леммы 3.1. Обозначим

$$R=\sum_i \mathbf{P}\Big(\|X_{i,n}\|\geqslant y;\ \sup_{1\leqslant j<i}\|S_{j,n}\|\geqslant \Delta/2$$

или $\sup\limits_{j>i}\|S_{j,n}-S_{i,n}\|\geqslant \Delta/2\Big)$. Тогда

$$\sum_i \mathbf{P}\left(\|X_{i,n}\|\geqslant x+\Delta;\ \|X_{j,n}\|<y\ (j\neq i)\right)\leqslant \sum_i \mathbf{P}\left(\|S_n\|\geqslant x;\ \|X_{i,n}\|\geqslant y;\right.$$

$$\left.\|X_{j,n}\|<y\ (j\neq i)\right)+R\leqslant \sum_i \mathbf{P}\Big(\sup_j\|S_{j,n}\|\geqslant x;\ \|X_{i,n}\|\geqslant y;\ \|X_{j,n}\|<y$$

$$(j\neq i)\Big)+R\leqslant \sum_i \mathbf{P}(\|X_{i,n}\|\geqslant x-\Delta;\ \|X_{j,n}\|<y\ (j\neq i))+2R. \tag{3.12}$$

Далее,

$$R\leqslant G_n(y)\mathbf{P}(\sup_j\|S_{j,n}\|\geqslant \Delta/4). \tag{3.13}$$

В силу теоремы 2.3 и условия (3.8)

$$\mathbf{P}(\sup_j\|S_{j,n}\|\geqslant\Delta/4)\leqslant \mathbf{P}(\|S_n\|\geqslant\Delta/8)[1-\sup_j\mathbf{P}(\|S_n-S_{j,n}\|\geqslant\Delta/8)]^{-1}\to 0. \tag{3.14}$$

Очевидно, что

$$\mathbf{P}(\|X_{j,n}\|<y,\ j\neq i)\geqslant \mathbf{P}((\forall j)\|X_{j,n}\|<y)\geqslant 1-G_n(y). \tag{3.15}$$

Оценка (3.11) следует из (3.12)—(3.15), (3.7), (3.9), (3.10). □

4. Предельные теоремы для вероятностей больших уклонений суммы фиксированного числа независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве. Применение к асимптотике безгранично делимых бесконечномерных распределений

Здесь положим $i_n=n$ и число n фиксируем. Вместо термина „субэкспоненциальный" и тому подобных будем писать с. э.

Теорема 4.1. Если ф. р. $F(x)=1-n^{-1}G_n(x)$ с. э. (т. е. удовлетворяет условию (1.4), то при $x\to\infty$ справедливо соотношение (1.7).

Доказательство. Ввиду (1.6) можно выбрать $\Delta=\Delta(x)\to\infty$, $\Delta=o(x)$ так, что выполнено (3.7), если $x\to\infty$. Поэтому, полагая $y=x-\Delta$, видим, что и (3.9) выполнено. Так как n фиксировано, то (3.8), (3.10) тривиальны. В силу леммы 3.1

$$\Pi_1^{(1)}\sim G_n(x). \tag{4.1}$$

Далее, вновь учитывая (3.9), (3.10), находим

$$\Pi_2=O(G_n(y)^2)=o(G_n(x)). \tag{4.2}$$

Легко усмотреть, что

$$\Pi_0\leqslant\int_E\prod_{i=1}^n \mathbf{P}(\|X_{i,n}\|\in du_i),$$

где $E=\{(u_1, \ldots, u_n)\colon u_1+\ldots+u_n\geqslant x;\ 0\leqslant u_i<y,\ i=1, \ldots, n\}$. Отсюда

$$\Pi_0\leqslant(-1)^n\int\limits_E dG_n(u_1)\ldots dG_n(u_n)=G_n(0)^n\int\limits_E dF(u_1)\ldots dF(u_n)=n^n\Pi_0^*, \tag{4.3}$$

где $\Pi_0^*=\mathbf{P}(\xi_1+\ldots+\xi_n\geqslant x;\ \xi_i<y,\ i=1,\ldots,n)$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые с. в. с общей с. э. ф. р. F. Поэтому

$$\mathbf{P}(\xi_1+\ldots+\xi_n\geqslant x)\sim n(1-F(x))=G_n(x). \tag{4.4}$$

Подставляя в (3.1), (4.1), (4.2) ξ_i вместо $X_{i,n}$ и учитывая (4.4), находим, что $\Pi_0^*=o(G_n(x))$, откуда, из (4.3), $\Pi_0=o(G_n(x))$. Вновь пользуясь соотношениями (3.1), (4.1), (4.2), получаем (1.7). □

Предлагается следующее легко проверяемое достаточное условие субэкспоненциальности.

Теорема 4.2. *Если для ф. р. F с $F(0)=0$ имеет место (1.6) и, кроме того, существуют такие числа $p>1$, $x_0>0$ и функция $g(x)$, что $1-F(x)\asymp\exp\{-g(x)\}$ $(x\to\infty)$, и функция $r(x)=g(x)-p\ln x$ вогнута при $x\geqslant x_0$, то F — с. э. ф. р.*

Доказательство. Пусть в нашей схеме серий $i_n\equiv 2$, $\mathbf{P}(X_{i,n}<x)\equiv F(x)$. Надо доказать, что

$$\mathbf{P}(S_2\geqslant x)\sim 2(1-F(x))\quad(x\to\infty).$$

Ввиду (3.1), а также следующих из (1.6) оценок (4.1), (4.2) достаточно убедиться, что при $y=x-\Delta$, $\Delta\to\infty$, $\Delta=o(x)$ $(n=2)$

$$\Pi_0=o(\exp\{-g(x)\})\quad(x\to\infty). \tag{4.5}$$

Обозначая g' левую производную g, имеем

$$\Pi_0=\int\limits_\Delta^{x-\Delta}(1-F(x-u))\,dF(u)\asymp\int\limits_\Delta^{x-\Delta}e^{-g(x-u)}dF(u)=e^{-g(x-\Delta)}(1-F(\Delta))-$$

$$-e^{-g(\Delta)}(1-F(x-\Delta))+\int\limits_\Delta^{x-\Delta}e^{-g(x-u)}(1-F(u))\,g'(x-u)\,du=$$

$$=O(\exp\{-g(x-\Delta)-g(\Delta)\})+o\left(\int\limits_\Delta^{x-\Delta}\exp\{-g(x-u)-g(u)\}\,du\right),$$

так как из (1.5) и вогнутости g следует, что $g'(x)\to 0$ $(x\to\infty)$. В силу (1.6), не умаляя общности, можно полагать $1-F(x-\Delta)\sim 1-F(x+\Delta)$, поэтому

$$\Pi_0=o\left(e^{-g(x)}+\int\limits_\Delta^{x-\Delta}\exp\{-r(x-u)-r(u)\}((x-u)\,u)^{-p}\,du\right). \tag{4.6}$$

В силу вогнутости r при $(x_0\leqslant)\,\Delta\leqslant u\leqslant x-\Delta\,(\leqslant x-x_0)$

$$r(x-u)+r(u)\geqslant r(x-x_0)+r(x_0)$$

(см., например, [22, теорема 110]), поэтому ввиду (1.6), (4.6)

$$\Pi_0=o\left(e^{-g(x)}+e^{-r(x)}\int\limits_\Delta^{x-\Delta}((x-u)\,u)^{-p}\,du\right). \tag{4.7}$$

Далее,

$$\int\limits_\Delta^{x-\Delta}((x-u)\,u)^{-p}\,du\leqslant 2\int\limits_\Delta^{x/2}(x/2)^{-p}u^{-p}\,du=O\left(x^{-p}\Delta^{1-p}\right)=o\left(x^{-p}\right).$$

Отсюда и из (4.7) следует (4.5). □

Теорема 4.2 показывает, что «хвост» с. э. ф. р. может изменяться достаточно произвольно между $x^{-p}(p>1)$ и $e^{o(x)}$, см. также предложение 6.1, приведенное ниже; в частности, если $1-F(x)\sim$

$\sim \exp(-x/\ln^\beta x)$ ($\beta > 0$, $x \to \infty$); $F(0) = 0$, то ф. р. F с. э. Это опровергает утверждение Тойгельса [38, с. 1001], полагавшего, что при $\beta < 1$ ф. р. F не будет с. э. Ошибочность утверждения Тойгельса продемонстрировал другим способом Питмен [36], получивший (при дополнительном ограничении $(\ln(1 - F(x)))'$ возрастает) необходимое и достаточное условие субэкспоненциальности; на наш взгляд, это условие мало отличается от определения и затруднительно для проверки. С другой стороны, достаточное условие, данное в теореме 4.2, довольно близко к необходимому. В частности, в нем нельзя заменить p на 1, как показывает

Пример 4.1. Пусть $x_0 = 0$, $x_{j+1} > 2x_j$, $\alpha_j \geqslant \alpha_{j+1} > 0$, $\alpha_j \to 0$, $\varphi(x) = \varphi_j(x)$ при $x_j \leqslant x < x_{j+1}$, $\varphi_j(x) = \alpha_j x + b_j$, где b_j выбраны так, что график φ есть непрерывная ломаная, $\varphi(0) = 0$. Положим $g(x) = \varphi(x) + \ln x$, $1 - F(x) = e^{-g(x)} (x \geqslant 1)$. Тогда

$$1 - F * F(x_{j+1}) \geqslant \int_{x_j}^{x_{j+1}-x_j} (1 - F(x_{j+1} - u))\, dF(u) = \int_{x_j}^{x_{j+1}-x_j} \exp(-\alpha_j x_{j+1} - 2b_j) \frac{\alpha_j + 1/u}{(x_{j+1} - u)\, u}\, du \geqslant \frac{\alpha_j}{x_{j+1}} \exp(-\alpha_j x_{j+1} - 2b_j) \int_{x_j}^{x_{j+1}-x_j} \frac{du}{u} \geqslant$$

$$\geqslant (1 - F(x_{j+1}))\, \alpha_j e^{-b_j} \ln(x_{j+1}/x_j - 1).$$

Считая $\{\alpha_j\}_{j=0}^\infty$, $x_0 = 0$, $x_1 > 0$ заданными, строим $\{x_j\}_{j=2}^\infty$ по индукции. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_j$ построены. Тогда известно значение $\varphi(x_j) = \varphi_j(x_j) = \alpha_j x_j + b_j$, т. е. известно b_j. Теперь выбираем x_{j+1} так, чтобы ${}_j\alpha e^{-b_j} \ln(x_{j+1}/x_j - 1) \geqslant 3$, и, следовательно, $1 - F * F(x_{j+1}) \geqslant 3(1 - F(x_{j+1}))$. Значит, ф. р. F не с. э.

В то же время если $x_j \leqslant x \leqslant x + y \leqslant x_{j+1}$, $y \leqslant y_0$, то $0 \leqslant g(x+y) - g(x) = \alpha_j y + \ln(1 + y/x) \leqslant y_0(\alpha_j + 1/x) \to 0$ $(x \to 0)$, т. е. необходимое условие (1.6) соблюдено. Отметим еще, что функция $r(x)$ $(= g(x) - p\ln x)$ вогнута при $p \leqslant 1$ и не является таковой при $p > 1$. □

В то же время выбор вычитаемого $p \ln x$ в теореме 4.2 достаточно произволен. Вместо $p \ln x$ можно взять, например, любую вогнутую функцию $\varphi(x)$ такую, что $\varphi(x) = o(x)$ и

$$\int_{\Delta}^{x-\Delta} \exp\{-\varphi(x-y) - \varphi(y)\}\, dy = O(\exp\{-\varphi(x)\}) \qquad (4.8)$$

при $x \to \infty$, $\Delta \to \infty$, $\Delta = o(x)$. (Это легко увидеть из доказательства.) Обозначим Φ класс всех таких функций φ. Применяя уже использованную теорему 110 из [22], нетрудно убедиться, что если $\varphi_0 \in \Phi$, а $\varphi - \varphi_0$ — вогнутая функция и, кроме того, $\varphi(x) = o(x)$, то $\varphi \in \Phi$.

Предложение 4.1. Если функция φ вогнута, $x = O(\exp\{\varphi \times (1/\varphi'(x))\})$ и функция $\psi(x) = \exp\{-\varphi(x)\}$ интегрируема в некоторой окрестности ∞, то $\varphi \in \Phi$.

Доказательство. Положим $\Delta_0 = \min[x/2, 1/\varphi'(x/2)]$. Тогда при $\Delta_0 \leqslant \Delta \leqslant x/2$, в силу той же теоремы 110 из [22],

$$\int_{\Delta}^{x-\Delta} \psi(x-y)\,\psi(y)\, dy \leqslant x\psi(x - \Delta_0)\,\psi(\Delta_0) \leqslant \psi(x) \exp\{\Delta_0 \varphi'(x - \Delta_0)\}\, \psi(\Delta_0)\, x \leqslant e\psi(x)\,\psi(\Delta_0)\, x = O(\psi(x)).$$

В случае же $\Delta < \Delta_0$, $\Delta \to \infty$, остается заметить, что, с учетом интегрируемости ψ,

$$\int_{\Delta}^{\Delta_0} \psi(x-y)\,\psi(y)\, dy \leqslant \psi(x - \Delta_0) \int_{\Delta}^{\infty} \psi(y)\, dy = o(\psi(x)).$$

Таким образом, в обоих случаях верно (4.8). □

С помощью предложения 4.1 легко показать, что, в частности, функции $p\ln x$, $\ln x+p\ln\ln x$, $\ln x+\ln\ln x+p\ln\ln\ln x$, ... $(p>1)$, $x^{\alpha}(0<\alpha<1)$, $x/\ln^{\beta}x\ (\beta<1)$ принадлежат Φ.

Как отмечалось, теорема 4.2 приспособлена для «хвостов» в диапазоне от $x^{-p}(p>1)$ до $e^{o}(x)$.

Для «хвостов», убывающих не быстрее степенной функции, удобен следующий критерий, принадлежащий А. А. Боровкову [4, с. 173, формула (46)], см. также [31]; этот результат был анонсирован в работе [3].

Теорема 4.3. (А. А. Боровков). *Если для ф. р. F с $F(0)=0$ выполнено* (1.6) *и, кроме того,* $1-F(x)=O(1-F(2x))\ (x\to\infty)$, *то F — с. э. ф. р.*

Рассмотрим теперь применение к асимптотике безгранично делимых (б. д.) распределений. Будем называть мерами на $(\mathfrak{X},\ \|\cdot\|)$ σ — конечные неотрицательные меры. Распределение вероятностей μ на $\mathfrak{X}$ называется безгранично делимым, если для любого натурального n оно представляется в виде свертки n одинаковых распределений. Если λ — мера с конечной вариацией $[\lambda]=\lambda(\mathfrak{X})$, можно определить сложное пуассоновское распределение

$$\operatorname{Pois}\lambda=e^{-[\lambda]}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{*n}/n!$$

с мерой Леви λ. Обозначим δ_a распределение, сосредоточенное в точке a. Для любой меры λ положим $\lambda_{\alpha,\beta}(A)=\lambda(A\cap(U_{\beta}\backslash U_{\alpha}))$, где $U_{\alpha}=\{x\in\mathfrak{X}:\|x\|<\alpha\}$, A — борелевское; $\lambda_{\alpha}=\lambda_{\alpha,\infty}$.

Мера λ называется мерой Леви, если $\lambda(\{0\})=0$, $(\forall\varepsilon>0)[\lambda_{\varepsilon}]<\infty$, и для некоторых $a_{\varepsilon}\in\mathfrak{X}$ существует $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0}\delta_{a_{\varepsilon}}*\operatorname{Pois}\lambda_{\varepsilon}$ в смысле слабой сходимости. Каждый из таких пределов (все они с точностью до сдвига равны) обозначается $\operatorname{s\,Pois}\lambda$.

Результаты [39, 40] (см. также, например, [29, с. 108]) показывают, что если μ — б. д. распределение, то справедливо представление

$$\mu=\rho*\operatorname{s\,Pois}\lambda, \tag{4.9}$$

где ρ — центрированное гауссовское (возможно, вырожденное) распределение, причем μ однозначно определяет ρ и λ — меру Леви распределения μ.

Всюду в дальнейшем предполагается, что μ — б. д. распределение, ρ и λ — соответствующие ему гауссовское распределение и мера Леви. Обозначим $M(t)=\mu(U_t)$, $L_{\alpha}(t)=\lambda(U_t\backslash U_{\alpha})$, $L_{\alpha}^{0}(t)=L_{\alpha}(t)/L_{\alpha}(\infty)$.

Теорема 4.4. *Если для некоторого (или, эквивалентно, для любого) $\alpha>0$ L_{α}^{0} — с. э. ф. р., то*

$$1-M(t)\sim L_{\alpha}(\infty)-L_{\alpha}(t), \tag{4.10}$$

и M — с. э. ф. р.; и наоборот, если M — с. э. ф. р., то L_{α}^{0} — с. э. ф. р. и выполнено (4.10).

В случае, когда $\mathfrak{X}=\mathscr{R}^1$ и μ сосредоточено на положительной полуоси, этот результат получен в [30]; когда $\mathfrak{X}=\mathscr{R}^1$ и $1-L_{\alpha}^{0}(t)$ правильно меняется — в [6]; когда $dL_0(t)=ct^{-1-\gamma}dt$ (устойчивый закон с показателем $\gamma<2$) — в [29].

Доказательство теоремы 4.4. Для любого $\delta>0$, ввиду (4.9),

$$\mu=\rho*\mu_1*\mu_2,$$

где $\mu_1=\operatorname{s\,Pois}\lambda_{0,\delta}$, $\mu_2=\operatorname{Pois}\lambda_{\delta}$, если считать, что сдвиги a_{ε}, определяющие μ и μ_1, одни и те же. В [21] доказано, что

$$(\exists\alpha>0)\int_{\mathfrak{X}}\exp(\alpha\|x\|^2)\,\rho(dx)<\infty,$$

а в [27] —

$$(\exists h>0)\int_{\mathfrak{X}}\exp(h\|x\|)\,\mu_1(dx)<\infty.$$

Поэтому можно считать $\mu = \mu_2$, так как ввиду предложения 1 из [30], ф. р. $M(t)$ и $\mu_2(U_t)$ с. э. одновременно. Завершается доказательство так же, как доказательство теоремы 3 [30], если при этом пользоваться теоремой 4.1, оценкой $\mathbf{P}(\|S_n\| \geqslant x) \leqslant \mathbf{P}(\|X_{1,n}\| + \ldots + \|X_{n,n}\| \geqslant x) \leqslant K(1+\varepsilon)^n \times \mathbf{P}(\|X_{1,n}\| \geqslant x)$ для одинаково распределенных $\|X_{i,n}\|$ (ср. с леммой 3 [30]), а также тем, что при достаточно большом $\delta > 0$ $[\lambda_\delta] < \ln 2$. □

В случае $\mathfrak{X} = \mathscr{R}^1$ справедливы односторонние аналоги представления (1.7). Так, назовем ф. р. F односторонне субэкспоненциальной (о. с. э.), если ф. р. $F^+(t) = F(t)I\{t > 0\}$ с. э. Нетрудно видеть, что если ф.р. F о. с. э., то при любом фиксированном n

$$1 - F^{*n}(x) \sim n(1 - F(x)) \quad (x \to \infty). \tag{4.11}$$

Действительно,

$$1 - F^{*n}(x) \geqslant n(1 - F(x+\alpha))(1 - F^{*(n-1)}(-\alpha)) - n^2(1 - F(x+\alpha))^2. \tag{4.12}$$

Так как имеет место (1.6), можно считать, что $\alpha \to \infty$, $1 - F(x+\alpha) \sim 1 - F(x)$ $(x \to \infty)$, поэтому из (4.12) следует

$$\liminf_{x \to \infty} \left(1 - F^{*n}(x)\right)/(1 - F(x)) \geqslant n;$$

учитывая, что $1 - F^{*n}(x) \leqslant 1 - (F^+)^{*n}(x) \sim n(1 - F^+(x)) = n(1 - F(x))$ $(x \to \infty)$, приходим к требуемому утверждению.

Это замечание позволяет также получить в случае $\mathfrak{X} = \mathscr{R}^1$ односторонний аналог теоремы 4.4.

Теперь покажем, что: 1) если $\int x dF(x) \geqslant 0$, то (4.11) несовместно с условием Крамера; 2) если же $\int x dF(x) < 0$, то в виде исключения (4.11) может оставаться справедливым и при условии Крамера.

Предложение 4.2. Пусть для любого фиксированного n верно (4.11), и $m = \int x dF(x) \geqslant 0$. Тогда для любого $h > 0$ $\int \exp(hx)\, dF(x) = \infty$.

Доказательство. Пусть, напротив, для некоторого $h_0 > 0$ при $0 < h < h_0$

$$R(h) = \int e^{hx} dF(x) < \infty. \tag{4.13}$$

Введем сопряженную ф. р.

$$F_h(x) = R(h)^{-1} \int_{-\infty}^{x} e^{hu} dF(u).$$

Тогда

$$1 - F_h^{*n}(x) = R(h)^{-n} \int_x^\infty e^{hu} dF^{*n}(u) = R(h)^{-n}\Big(e^{hx}\left(1 - F^{*n}(x)\right) + \int_x^\infty h e^{hu}\left(1 - F^{*n}(u)\right) du\Big) \sim nR(h)^{-n}\left(e^{hx}(1 - F(x)) + \int_x^\infty h e^{hu}(1 - F(u))\, du\right) = nR(h)^{-n+1}(1 - F_h(x)) \quad (x \to \infty) \tag{4.14}$$

с учетом (4.11). С другой стороны,

$$1 - F_h^{*n}(x) \geqslant n(1 - F_h(x))\left(1 - F_h^{*(n-1)}(0)\right) - n^2(1 - F_h(x))^2. \tag{4.15}$$

В силу неравенства Чебышева и того, что $m_h > m \geqslant 0$,

$$F_h^{*(n-1)}(0) \leqslant (n-1)\sigma_h^2/((n-1)m_h)^2 \to 0 \quad (n \to \infty),$$

где $m_h = (\ln R(h))'$, $\sigma_h^2 = (\ln R(h))''$. Отсюда, ввиду (4.15), $\liminf\limits_{n \to \infty} \liminf\limits_{x \to \infty} \left(1 - F_h^{*n}(x)\right)/n(1 - F_h(x)) \geqslant 1$, что противоречит (4.14), так как $R(h) > 1$. □

Пример 4.2. Положим $f(x)=2\pi^{-1}(1+x^2)^{-1}$, $G(x)=\beta\int e^{-u}f(u)\times$ $\times I\{0\leqslant u<x\}\,du$, где $\beta=\left(\int\limits_0^\infty e^{-u}f(u)\,du\right)^{-1}$; очевидно, $\beta>1$; выберем произвольно $0<p<1/\beta$; пусть

$$p\beta+(1-p)e^{\mu}=1; \tag{4.16}$$

положим

$$F(x)=pG(x)+(1-p)E_\mu(x),$$

где $E_\mu(x)=I\{x>\mu\}$. Ф. р. F удовлетворяет (4.13) при $h=1$. Покажем, что имеет место (4.11). Действительно,

$$1-F^{*n}(x)=\sum_{j=0}^{n}C_n^jp^j(1-p)^{n-j}\left(1-G^{*j}(x-(n-j)\mu)\right). \tag{4.17}$$

Ввиду [4, с. 173, формула (46)]

$$1-G^{*j}(x)\sim j\beta^{j-1}(1-G(x))\quad(x\to\infty); \tag{4.18}$$

легко видеть, что для любого y

$$1-G(x+y)\sim e^{-y}(1-G(x))\quad(x\to\infty).$$

Отсюда и из (4.16)—(4.18) нетрудно вывести (4.11). □

5. «Хвосты», убывающие не быстрее степенной функции

В этом пункте будут возникать невозрастающие функции $H(u)$, удовлетворяющие условию вида $H(u)\leqslant CH(2u)$ $(0<a\leqslant u\leqslant b,\ C>1)$. Нетрудно видеть, что такие функции убывают не быстрее некоторой степенной функции: при $a\leqslant u\leqslant v\leqslant b$, $t=\log_2 C$

$$H(u)\leqslant C(v/u)^tH(v).$$

Теорема 5.1. *Пусть x и Δ изменяются так, что выполнены условия* (3.6)—(3.8), (3.10). *Пусть при этом*

$$G_n(u)=O(G_n(2u))\ \text{для}\ u\in[-\delta x/\ln G_n(x),x] \tag{5.1}$$

и любого $\delta>0$, и

$$\exp\{-x^2/(2+\varepsilon)B_n^2(x)\}=o(G_n(x)) \tag{5.2}$$

для некоторого $\varepsilon>0$. Тогда имеют место представления (1.7), (1.8).

Следствие 5.1. *Пусть при $n,u\to\infty$*

$$G_n(u)\sim nH(u), \tag{5.3}$$

причем

$$u^\alpha H(u)\downarrow, \tag{5.4}$$

$$u^\beta H(u)\uparrow. \tag{5.5}$$

Пусть, кроме того, верно хотя бы одно из трех:

1) $\alpha>1$, $\mathfrak{X}$ *— банахово пространство типа* 2, $\mathrm{M}X_{i,n}=0$, *и выполнено* (5.2);

2) $1<\alpha<\beta<2$, $\mathfrak{X}$ *— банахово пространство типа* $p>\beta$, $\mathrm{M}X_{i,n}=0$;

3) $0=\alpha<\beta<1$.

Тогда при $x\to\infty$ и условии (3.10) верны соотношения (1.7), (1.8). (Напомним, что $\mathfrak{X}$ называется банаховым пространством типа p, если существует такое число $C=C(p,\mathfrak{X})>0$, что

$$\mathrm{M}\|X_1+\ldots+X_n\|^p\leqslant C(\mathrm{M}\|X_1\|^p+\ldots+\mathrm{M}\|X_n\|^p)$$

для любых независимых с. в. $X_1,\ldots,X_n$ со значениями в $\mathfrak{X}$ с нулевыми средними.)

Замечание. Условия (5.3)—(5.5) выполнены, если, например,

$$G_n(u)=nu^{-\alpha}l(u)\ \ (\alpha\geqslant 0). \tag{5.6}$$

Таким образом, нами получены обобщения результатов работ [7, 28, 32], охватывающие все значения α в (5.6), кроме 1. Если при $\alpha=1$ предположить дополнительно, что, например, все $X_{i,n}$ симметрично распределены в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$ типа $p>1$, то при условии (3.10) и $x\to\infty$ имеют место представления (1.7), (1.8). Это нетрудно увидеть из доказательства следствия 5.1. Если же в (5.6) $\alpha=1$, но симметрия распределений нарушена, то условие (3.10) нуждается, в общем, в усилении. Например, если l меняется монотонно в окрестности ∞, следует (3.10) заменить следующим: $G_n(x)(\ln x+1/l(x))\to 0$; при этом о типе пространства $\mathfrak{X}$ ничего не предполагается.

Следствие 5.2. *Пусть для некоторого фиксированного* n

$$\left.\begin{aligned}&i_n=\infty,\ X_i=X_{i,n},\\ &\mathbf{P}(X_i=0)=1-p_i,\ \mathbf{P}(\|X_i\|=i)=p_i\ (i=1,2,\ldots),\\ &G(x)=\sum_{i\geqslant x}p_i<\infty\ (\forall x),\\ &S=X_1+X_2+\ldots\end{aligned}\right\}\tag{5.7}$$

$$G(j)=O(G(2j)),\tag{5.8}$$

$$p_j=o(G(j))\tag{5.9}$$

при $j\to\infty$. *Тогда*

$$\mathbf{P}(\|S\|\geqslant x)\sim G(x)\ \ (x\to\infty).\tag{5.10}$$

Это следствие носит иллюстративный характер: оно показывает, что распределения отдельных слагаемых могут быть весьма нерегулярными, даже двухточечными; для справедливости (1.7), (1.8) достаточно правильного изменения лишь суммы «хвостов».

Отметим, наконец, что теорема 4.3 вытекает из теоремы 5.1 (Надо положить $i_n\equiv 2$, $X_{i,n}\equiv X_i$.) Нетривиальна только проверка условия (5.2). В данном случае оно легко выводится из следующего утверждения.

Лемма 5.1. *Пусть ф. р. F удовлетворяет условию $1-F(x)=O(1-F(2x))$ $(x\to\infty)$. Тогда существует такое $s>0$, что для любого $p\geqslant 1$*

$$\int_0^x u^p\,dF(u)=O\bigl(x^p(1-F(x))^s\bigr).$$

Доказательство. При $0<a<x$

$$\int_0^x u\,dF(u)=\int_0^a u\,dF(u)+\int_{a+}^x u\,dF(u)\leqslant a+(1-F(a+))\,x.\tag{5.11}$$

Положим $A=\sup\{a\geqslant 0\colon a/(1-F(a+))\leqslant x\}$. Тогда

$$A/(1-F(A+))\geqslant x,\tag{5.12}$$

$$A/(1-F(A))\leqslant x,\tag{5.13}$$

и, в силу (5.11), (5.12),

$$\int_0^x u\,dF(u)\leqslant 2A.\tag{5.14}$$

Далее, для некоторых $C>0$, $t>0$

$$1-F(x)\geqslant C^{-1}(A/x)^t(1-F(A))\geqslant C^{-1}(A/x)^{t+1}$$

ввиду (5.13). Отсюда $A\leqslant x[C(1-F(x))]^s$, где $s=(t+1)^{-1}$, поэтому из (5.14) вытекает

$$\int_0^x u\,dF(u)=O\bigl(x(1-F(x))^s\bigr).$$

Ёсли теперь взять любое $p \geqslant 1$, то

$$\int_0^x u^p dF(u) \leqslant x^{p-1} \int_0^x u dF(u) = O\left(x^p (1-F(x))^s\right). \quad \square$$

Доказательство теоремы 5.1. Обозначим

$$\lambda = -\delta x / \ln G_n(x). \tag{5.15}$$

Положим

$$y = \varepsilon_0 x \tag{5.16}$$

(выбором $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ распорядимся позднее). Тогда $y \in [\lambda, x]$, ввиду условия (3.10). Поэтому, в силу (5.1), выполнено (3.9), что дает

$$\Pi_2 \leqslant G_n(y)^2 = o(G_n(x)), \tag{5.17}$$

и, по лемме 3.1, при $j = 1, 2$

$$\Pi_1^{(j)} \sim G_n(x). \tag{5.18}$$

Вследствие (3.8)—(3.10), (3.14)

$$\mathbf{P}(\sup_j \|S_{j,n}(y)\| \geqslant \Delta/4) \leqslant G_n(y) + \mathbf{P}(\sup_j \|S_{j,n}\| \geqslant \Delta/4) \to 0. \tag{5.19}$$

Отсюда, в силу формулы (2.8) из [41],

$$\mathbf{M}\|S_n(y)\| = O(\Delta + B_n(y)). \tag{5.20}$$

Из (5.2), (3.10) вытекает

$$B_n^2(y) \leqslant B_n^2(x) = O(-x^2/\ln G_n(x)) = o(x^2), \tag{5.21}$$

поэтому, с учетом (5.20), (3.6), $\mathbf{M}\|S_n(y)\| = o(x)$. Следовательно, в силу теоремы 2.3 и соотношений (5.19), (3.6)

$$\Pi_0 = O(\mathbf{P}(\|S_n(y)\| - \mathbf{M}\|S_n(y)\| \geqslant x + o(x))). \tag{5.22}$$

Пусть $a > 0$ близко к 0, α и α_1 близки к 1/2, $\alpha + \alpha_1 < 1$, а λ определяется формулой (5.15). Тогда из (5.22), в силу теоремы 2.1 и оценки (2.2), получим

$$\Pi_0 = O\Big(\exp\{0{,}5\alpha a \delta^{-1} \ln G_n(x)\}\Big) + \exp\{-x^2/(2+\varepsilon) B_n^2(x)\} + \\ + \left[-x^{-1} \int_\lambda^x u dG_n(u)\right]^p\Bigg), \tag{5.23}$$

где $p > \alpha/2\varepsilon_0 > 2$, если ε_0 достаточно мало. Далее, ввиду (5.1), для некоторых $C > 0$, $t > 0$

$$-x^{-1} \int_\lambda^x u dG_n(u) \leqslant G_n(\lambda) \leqslant C(x/\lambda)^t G_n(x) = C\,|\delta^{-1} \ln G_n(x)|^t G_n(x) \leqslant G_n(x)^{1/2}.$$

Остается воспользоваться соотношениями (3.1), (5.17), (5.18), (5.23), (5.2). $\square$

Доказательство следствия 5.1. Из (5.4), (5.5) следует, что для $\Delta > 0$, $u > 0$

$$H(u) \geqslant H(u+\Delta) \geqslant [u/(u+\Delta)]^\beta H(u),$$

поэтому, ввиду (5.3), соотношение (3.7) верно для любого Δ, удовлетворяющего условию (3.6). Далее, из (3.10) вытекает, что $-\ln G_n(x) \to \infty$, а из (5.3), (5.4) —

$$-\ln G_n(x) = O(-\ln H(x)) = O(\ln x) = o(x).$$

Поэтому (5.1) следует из (5.5).

Остается проверить условие (3.8) и, в случаях 2), 3) — условие (5.2). При $t > \beta$, для некоторого $a > 0$,

$$-\int_0^x u^t dG_n(u) \leqslant \int_0^x t u^{t-1} G_n(u)\,du = O\left(n + n\int_a^x u^{t-1} H(u)\,du\right) =$$

$$= O\left(n + nx^{\beta} H(x) \int_a^x u^{t-\beta-1} du\right) = O\left(n + nx^t H(x)\right) = O\left(nx^t H(x)\right),$$

ввиду (5.3), (5.5), откуда

$$-\int_0^x u^t dG_n(u) = O\left(x^t G_n(x)\right) \quad (t > \beta). \tag{5.24}$$

Поэтому при $\beta < 2$ (5.2) следует из (3.10).

Далее,

$$\sup_j \mathbf{P}(\|S_{j,n}\| \geqslant \Delta/16) \leqslant \sup_j \mathbf{P}(\|S_{j,n}(x)\| \geqslant \Delta/16) + G_n(x). \tag{5.25}$$

Так как Δ в (3.6) может быть выбрано произвольно, для проверки (3.8) достаточно, ввиду (5.25), (3.10) и неравенства Чебышева, показать, что

$$\sup_j \mathbf{M}\|S_{j,n}(x)\| = o(x). \tag{5.26}$$

Если $\mathbf{M}X_{i,n} \equiv 0$, $\mathfrak{X}$ — типа p $(1 \leqslant p \leqslant 2)$, то

$$\max_j \mathbf{M}\|S_{j,n}(x)\| \leqslant \max_j \left(\mathbf{M}\|S_{j,n}(x) - \mathbf{M}S_{j,n}(x)\| + \|\mathbf{M}S_{j,n}(x)\|\right) =$$

$$= O\left(\left(\sum_i \mathbf{M}\|X_{i,n}(x) - \mathbf{M}\,X_{i,n}(x)\|^p\right)^{1/p} + \sum_i \mathbf{M}\|X_{i,n}(x) - X_{i,n}\|\right) =$$

$$= O\left(\left(-\int_0^x u^p dG_n(u)\right)^{1/p} - \int_x^\infty u\,dG_n(u)\right) = O\left((I_p)^{1/p} + xG_n(x) + \int_x^\infty G_n(u)\,du\right), \tag{5.27}$$

где $I_p = -\int_0^x u^p dG_n(u)$.

Если $\beta < p$, то $I_p = O(x^p G_n(x)) = o(x^p)$, ввиду (5.24), (3.10). Кроме того, $I_2 = B_n^2(x) = o(x^2)$, ввиду (5.21). Таким образом, в каждом из случаев 1), 2)

$$(I_p)^{1/p} = o(x). \tag{5.28}$$

Из (3.10) следует, что

$$xG_n(x) = o(x). \tag{5.29}$$

При $\alpha > 1$

$$\int_x^\infty G_n(u)\,du = O\left(n\int_x^\infty H(u)\,du\right) = O\left(nx^{\alpha} H(x) \int_x^\infty u^{-\alpha} du\right) = O(nxH(x)) =$$

$$= O(xG_n(x)) = o(x),$$

ввиду (5.3), (5.4), (5.29). Отсюда и из (5.27)—(5.29) следует оценка (5.26) для случаев 1), 2). Если же $\beta < 1$, т. е. имеет место случай 3), то

$$\max_j \mathbf{M}\|S_{j,n}(x)\| \leqslant \sum_i \mathbf{M}\|X_{i,n}(x)\| = -\int_0^x u\,dG_n(u) = O(xG_n(x)) = o(x)$$

с учетом (5.24), (5.29). Оценка (5.26) полностью доказана. □

В доказательстве следствия 5.2 нетривиальна лишь проверка условия (5.2), что нетрудно сделать с помощью леммы 5.1.

6. «Хвосты», убывающие быстрее любой степенной функции

Основная цель этого раздела — перенести теорему 4.2 на случай схемы серий бесконечномерных неодинаково распределенных слагаемых.

Рассмотрим класс $\mathcal{G}_p$ дифференцируемых функций g, удовлетворяющих условиям

$$[g'(u) - p/u] \downarrow 0, \tag{6.1}$$

$$ug'(u) \uparrow \infty \tag{6.2}$$

при $u \to \infty$.

Обозначим

$$\mu_n = \sup \left\{ \mathbf{M} \left\| \sum_{i \in H} X_{i,n} \right\| : H \subseteq \{1, \ldots, i_n\} \right\}.$$

Теорема 6.1. *Предположим, что*

$$G_n(u) \sim b_n \exp\{-g(u)\} \quad (n, \ u \to \infty), \tag{6.3}$$

где последовательность $b_n > 0$ *не убывает по* n, $g \in \mathcal{G}_p$, $p > 1$. *Пусть* $x \to \infty$ *и при этом*

$$B_n + \mu_n = o(1/g'(x)), \tag{6.4}$$

и для некоторого $\varepsilon > 0$

$$(2 + \varepsilon)\, B_n^2 \leqslant x^2/g(x). \tag{6.5}$$

Тогда имеют место представления (1.7), (1.8).

Свойства класса $\mathcal{G}_p$ (в дальнейшем для краткости их будем именовать просто свойства, опуская дополнение «класса $\mathcal{G}_p$») изложены ниже. Смысл условия (6.1) полностью раскрывают свойства 3, 4, а условия (6.2) — в наибольшей степени — свойство 7. Грубо говоря, (6.1) означает, что «хвосты» убывают медленнее любой показательной функции, а (6.2) — что быстрее степенной.

Следующее утверждение означает, что теорема 6.1 описывает «хвосты», как угодно близкие к экспоненциальным.

Предложение 6.1. Для любой функции f такой, что $f(u) = o(u)$ $(u \to \infty)$, найдется функция $g \in \mathcal{G}_2$ такая, что $f(u) = o(g(u))$.

(Доказательство см. в конце раздела.)

Условие «факторизации» (6.3) не вполне естественно для общего случая неодинаково распределенных слагаемых, но оно позволяет избежать ряда осложнений технического характера. В этой связи можно сослаться на теорему 1.7 из [17], в которой соответствующее условие по форме совпадает с условием (7.2) теоремы 7.1 настоящей работы (но в теореме 1.7 из [17], разумеется, «хвосты» могут быть сколь угодно близкими к показательным, в то время как теорема 7.1 описывает случай «хвостов», убывающих не быстрее, чем $\exp(-x^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$).

Условие (6.5) является конкретизацией ограничения (5.2), записанной с учетом других условий теоремы 6.1. Вместе с (6.4) оно определяет границы зоны уклонений, в которой справедливы представления (1.7), (1.8). Сравнение с результатом работы [35] показывает, что эти границы неулучшаемы. Отметим, что для «хвостов», достаточно близких к экспоненциальным, основную роль играет ограничение (6.4); «разделителем сфер влияния» условий (6.4) и (6.5) служит функция $g(x) = \ln^2 x$.

Приведем утверждение, по своему характеру аналогичное следствию 5.2.

Следствие 6.1. *Пусть для некоторого фиксированного* n *выполнены условия* (5.7), (5.9). *Пусть при этом* $G(j) = o(jp_j)$ $(j \to \infty)$ *и* $G(j+1)^2 \leqslant G(j+2)G(j) \exp(-p/j^2)$ *для некоторого* $p > 1$ *и достаточно больших целых* j. *Тогда имеет место* (5.10).

Чтобы убедиться в справедливости данного следствия, достаточно положить в (6.3) $b_n = 1$, $g(u) = \gamma_m + l_m(u - m) + c_m(u - m)^2/2$ при $m \leqslant u \leqslant m + 1$, где $\gamma_m = -\ln G(m)$, $l_m = \gamma_{m+1} - \gamma_m + p/2m^2$, $c_m = l_{m+1} - l_m$.

Рассмотрим теперь произвольную функцию $g \in \mathcal{G}_p$, $p > 0$. Положим $r(u) = g(u) - p \ln u$. В доказательстве теоремы 6.1 используются следующие свойства (предельные соотношения рассматриваются при условии $u \to \infty$, остальные — в некоторой окрестности ∞):

1) $g'(u) \to 0$, $r'(u) \to 0$;
2) $g' \downarrow$;
3) функции r и g вогнуты;
4) $r(u)/u \to 0$, $g(u)/u \to 0$;
5) $(r(u)/u)\downarrow$, $(g(u)/u)\downarrow$;
6) $g'(u) \leqslant g(u)/u$;
7) $g(u)/\ln u \to \infty$;
8) $g(u) \to \infty$, $r(u) \to \infty$;
9) $r(u) \sim g(u)$;
10) $g'(u\delta) \leqslant g'(u)/\delta$ $(0 < \delta < 1)$;
11) $\int\limits_{t \geqslant u} e^{-g(t)} dt \sim e^{-g(u)}/g'(u)$;
12) $g'(u) \geqslant [g(u)/u]^2$.

Свойства 1—3 легко следуют из (6.1), 7—10 — из (6.2), а свойство 4 — из свойств 1 и 8, а также правила Лопиталя.

Доказательство свойства 5. Положим $f(u) = r(u)/u$. В силу свойств 3, 4 найдется такое u_0, что $f(u_0) \geqslant f(u)$ при $u \geqslant u_0$ и функция r вогнута на $[u_0, \infty)$. Возьмем $u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_0$. Тогда $u_2 = \alpha u_1 + (1-\alpha)u_0$ для некоторого $\alpha \in [0, 1]$. Поэтому

$$f(u_2) = \frac{r(u_2)}{u_2} \geqslant \frac{\alpha r(u_1) + (1-\alpha) r(u_0)}{\alpha u_1 + (1-\alpha) u_0} \geqslant \min[f(u_1), f(u_0)] = f(u_1).$$

Убывание $r(u)/u$ доказано. Аналогично доказывается убывание $g(u)/u$. □

Свойство 6 следует из свойства 5, так как $0 \geqslant [g(u)/u]' = [ug'(u) - g(u)]/u^2$.

Доказательство свойства 11. Обозначим

$$I = \int\limits_u^\infty e^{-g(t)} dt.$$

Пользуясь условием (6.2), свойством 7 и интегрируя по частям, получаем:

$$I \leqslant [ug'(u)]^{-1} \int\limits_u^\infty t g'(t) e^{-g(t)} dt = [ug'(u)]^{-1}\left[u e^{-g(u)} + I\right] = e^{-g(u)}/g'(u) + o(I);$$

$$I \geqslant [g'(u)]^{-1} \int\limits_u^\infty g'(t) e^{-g(t)} dt = e^{-g(u)}/g'(u). \quad \square$$

Доказательство свойства 12. В силу свойства 4 и условия (6.2), $g(u) \leqslant u/3$, $g'(u) > 0$ и $ug'(u)$ не убывает при $u \geqslant u_0$, для некоторого $u_0 > 0$. Поэтому

$$u^2 g'(u) \geqslant \int\limits_{u_0}^u t g'(t)\, dt \geqslant 3 \int\limits_{u_0}^u g(t) g'(t)\, dt = 3[g^2(u) - g^2(u_0)]/2.$$

Остается воспользоваться свойством 8. □

Доказательство теоремы 6.1 начнем с ряда вспомогательных утверждений.

Пусть $s = s(\varkappa; u)$ есть наибольший корень уравнения

$$g(s)/s = \varkappa g(u)/u, \tag{6.6}$$

где $\varkappa > 1$. Ввиду свойства 4 такое s существует, если u велико. Положим

$$v = s(\varkappa; x); \tag{6.7}$$

$$w = s(\varkappa^2; x) = s(\varkappa; v). \tag{6.8}$$

Из свойств 4, 5 следует, что
$$x > v > w \to \infty. \tag{6.9}$$
Отсюда, с учетом свойства 8,
$$g(v) > g(w) \to \infty. \tag{6.10}$$
Из (6.6), (6.7), (6.10) вытекает оценка
$$x/g(x) = o(w) = o(v). \tag{6.11}$$
Положим
$$u_* = [x/g(x)]^\delta. \tag{6.12}$$

Здесь и в дальнейшем δ обозначает различные (возможно, даже в пределах одной выкладки) малые положительные постоянные; их конкретные значения могут быть выбраны с учетом контекста.

Из свойств 1, 12, 7, 4 следует, что
$$\ln g'(x) = o(g(u_*)). \tag{6.13}$$
Отсюда и из (6.11) находим
$$\ln g'(x) = o(g(w)). \tag{6.14}$$
С помощью условий (6.3), (6.4) и неравенства Чебышева получаем для достаточно большого $a > 0$
$$b_n \exp\{-g(a)\} \leqslant 2G_n(a) \leqslant 2B_n^2/a^2 = o(1/g'(x)^2).$$
откуда
$$\ln b_n = o(\ln 1/g'(x)), \tag{6.15}$$
и, в силу (6.14), (6.10),
$$\ln b_n = o(g(w)) = o(g(v)). \tag{6.16}$$
Положим
$$g_n(u) = g(u) - \ln b_n. \tag{6.17}$$
Тогда, ввиду (6.3),
$$G_n(u) \sim \exp\{-g_n(u)\} \quad (n,\ u \to \infty). \tag{6.18}$$
Из (6.17), (6.15), (6.13) следует, что
$$g_n(u) \sim g(u) \quad (u \geqslant u_*). \tag{6.19}$$
Из (6.16), (6.17) вытекает
$$g_n(v) \to \infty. \tag{6.20}$$
Так как (6.9)—(6.11), (6.14), (6.16), (6.20) верны при любом $\varkappa > 1$, можно считать, что
$$\varkappa \to \infty. \tag{6.21}$$
При этом с учетом свойства 4 можно полагать
$$\varkappa = o(u_*) \tag{6.22}$$
(см. (6.12)).

Лемма 6.1. *При* $0 \leqslant \beta < 1/2$, $\lambda \geqslant u_*$
$$\int_\lambda^\infty u \exp\{\beta g(u)\}\, dG_n(u) = o(1/g'(x)).$$

Доказательство. Ввиду (6.19), $\beta g(u) \leqslant \gamma g_n(u_*)$ при $\beta < \gamma < 1/2$, $u \geqslant u_*$. Поэтому, пользуясь соотношением (6.18) и неравенством Коши — Буняковского, получаем
$$\int_\lambda^\infty u \exp\{\beta g(u)\}\, dG_n(u) = O\left(-B_n \int_\lambda^\infty G_n(u)^{-2\gamma} dG_n(u)\right) =$$
$$= O\left(B_n G_n(\lambda)^{1-2\gamma}\right) = o\left(G_n(u_*)^{1-2\gamma}/g'(x)\right)$$
в силу (6.4). Остается заметить, что ввиду (6.18), (6.19) $G_n(u_*) \to 0$. □

Лемма 6.2. *Пусть на интервале $[a, b)$ заданы функции ограниченной вариации F и G, непрерывные слева на (a, b). Тогда*

$$\int_a^{b-} F(u)\,dG(u) = F(b)\,G(b) - F(a)\,G(a) - \int_a^{b-} G(u+)\,dF(u).$$

Из леммы 6.2 следуют другие известные формулы интегрирования по частям (см., например, [20, с. 189; 23, с. 139]).

Доказательство леммы. 6.2. В силу теоремы Фубини

$$\int_a^{b-} F(u)\,dG(u) = \int_a^{b-}\left(F(a) + \int_a^{u-} dF(z)\right)dG(u) = F(a)\,(G(b) - G(a)) +$$

$$+ \int_a^{b-} dF(z)\int_{z+}^{b-} dG(u) = F(a)\,(G(b) - G(a)) + \int_a^{b-} (G(b) - G(z+))\,dF(z). \quad \square$$

Лемма 6.3. *Пусть F, G_1, G_2 — определенные на интервале $[a, b)$ неотрицательные функции ограниченной вариации, непрерывные слева на (a, b), причем F не убывает, а G_1 не возрастает, и, кроме того, $G_1(u) \leqslant CG_2(u)$ $(a \leqslant u < b)$. Тогда*

$$-\int_a^{b-} F(u)\,dG_1(u) \leqslant C\left[F(b)\,G_2(b) - \int_a^{b-} F(u)\,dG_2(u)\right].$$

Доказательство. В силу леммы 6.2

$$-\int_a^{b-} F(u)\,dG_1(u) \leqslant F(a)\,G_1(a) + \int_a^{b-} G_1(u+)\,dF(u) \leqslant$$

$$\leqslant C\left[F(a)\,G_2(a) + \int_a^{b-} G_2(u+)\,dF(u)\right] = C\left[F(b)\,G_2(b) - \int_a^{b-} F(u)\,dG_2(u)\right]. \quad \square$$

Лемма 6.4. *Пусть $p > 1$, $v^{p-1} \geqslant 2^{p+1}/(p-1)$, $v > 0$,*

$$0 \leqslant f_i(u) \leqslant u^{-p} I\{u \geqslant v\}, \tag{6.23}$$

$i = 1, 2$, и, кроме того, функции f_1, f_2 измеримы. Тогда функция $f_3 = f_1 * f_2$ также удовлетворяет (6.23).

Доказательство. Нетрудно видеть, что $f_3(u) = 0$ при $u < 2v$, а при $u \geqslant 2v$

$$0 \leqslant f_3(u) = \int_v^{u-v} f_1(u-t)\,f_2(t)\,dt \leqslant \int_v^{u-v} ((u-t)\,t)^{-p}dt \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_v^{u/2} (u/2)^{-p} t^{-p} dt \leqslant 2^{p+1}(p-1)^{-1} v^{1-p} u^{-p} \leqslant u^{-p}. \quad \square$$

Лемма 6.5. *При*

$$z \geqslant 1/g'(x) \tag{6.24}$$

$$\overline{\Pi}_0(z) = O(E_1(z) + E_2(z)),$$

где $E_1(z) = \exp\{-z^2/(2+\delta)B_n^2\}$, $\quad E_2(z) = \exp\{-\varkappa z g(x)/5x\}$ *(а $\overline{\Pi}_0(z)$ определяется формулой* (3.4)).

Доказательство. В силу (6.11), (6.12) и леммы 6.1

$$\sup_{H,j} |\mathbf{M}\|S_{j,n}(H; v)\| - \mathbf{M}\|S_{j,n}(H; \infty)\|| \leqslant \sum_j \mathbf{M}\|X_j - X_j(v)\| =$$

$$= -\int_v^{\infty} u\,dG_n(u) = o(1/g'(x)).$$

Здесь и далее H пробегает все подмножества в $\{1, \ldots, i_n\}$. Поэтому, ввиду условия (6.4),

$$\sup_{H,j} \mathbf{M}\| S_{j,n}(H; v)\| = o(1/g'(x)). \tag{6.25}$$

Пользуясь теперь теоремой 2.3, получим, с учетом (6.24)

$$\overline{\Pi}_0(z) = O\left(\sup_H \mathbf{P}(\| S_n(H; v)\| - \mathbf{M}\| S_n(H; v)\| \geqslant z + o(z))\right),$$

где $S_n(H; v) = \sum_{i \in H} X_{i,n}(v)$. Отсюда, в силу теоремы 2.1,

$$\overline{\Pi}_0(z) = O\left(\sum_{i=0}^{3} P_i(z + o(z))\right), \tag{6.26}$$

причем полагаем $\lambda = u_*$, α и α_1 — близкими к 1/2, a — близким к 0, $\varphi(u) = u \exp\{\beta g(u)\}$, где число $\beta \in (0, 1/2)$ близко к 1/2. Тогда

$$P_1(z + o(z)) \leqslant \exp\{-z^2/(2+\delta) B_n^2\} = E_1(z). \tag{6.27}$$

В силу леммы 6.1

$$A_n(\varphi; \lambda) = -\int_{u_*}^{v-} u \exp\{\beta g(u)\}\, dG_n(u) = o(1/g'(x)),$$

откуда, ввиду (6.24),

$$A_n(\varphi;\ \lambda) = o(z). \tag{6.28}$$

Принимая во внимание (6.9) и свойство 7, видим, что $\ln \widehat{\varphi}(v) \sim \ln \varphi(v)$, поэтому

$$P_2(z + o(z)) \leqslant \exp\{-zg(v)/5v\} = E_2(z); \tag{6.29}$$

последнее равенство записано с учетом (6.7), (6.6). Далее, с учетом (6.22), (6.12) и свойства 4

$$P_0(z + o(z)) = \exp\{-\alpha a(z + o(z))/u_*\} \leqslant E_2(z). \tag{6.30}$$

Ввиду (6.28) и свойства 7

$$\widehat{\varphi}^{-1}(e^{\alpha} A_n(\varphi;\ \lambda)/\alpha_2 a(z + o(z));\ \lambda,\ v) = 0,$$

т. е. $P_2(z + o(z)) = 0$. Отсюда из (6.26), (6.27), (6.29), (6.30) вытекает нужная оценка. □

Завершим доказательство теоремы 6.1.

Положим

$$\Delta = 1/g'(x), \tag{6.31}$$

$$y = x - \Delta. \tag{6.32}$$

Тогда ввиду (6.2), (3.6) выполнено и

$$y \sim x. \tag{6.33}$$

Отсюда

$$0 \leqslant g(x + \Delta) - g(x - \Delta) \leqslant 2\Delta g'(y) = O(1),$$

вследствие (6.31)—(6.33), свойств 2 и 10. Поэтому, с учетом (6.3), выполнены условия (3.7), (3.9). Из (6.4), в силу неравенства Чебышева, вытекает (3.8). Из (6.18), (6.19) следует (3.10). Поэтому, в силу леммы 3.1, справедлива оценка

$$\Pi_1^{(j)} \sim G_n(x), \quad j = 1, 2. \tag{6.34}$$

С помощью (3.9), (3.10) находим (ср. с (5.17)):

$$\Pi_2 = o(G_n(x)). \tag{6.35}$$

Из леммы 6.5 и соотношений (6.5), (6.21), (6.19), (6.18) (см. также (3.2)) вытекает, что

$$\pi_0 = o(G_n(x)). \tag{6.36}$$

Из леммы 6.3, пользуясь оценками (3.5), (6.18), выводим

$$\pi_1 \leqslant -\int\limits_v^{y-} \overline{\Pi}_{0,1}(x-u)dG_n(u) = O\left(e^{-g_n(y)}\overline{\Pi}_{0,1}(x-y) + \int\limits_v^{y-} \overline{\Pi}_{0,1}(x-u)e^{-g_n(u)}g'(u)\,du \right) \tag{6.37}$$

(отметим, что ввиду (6.17) $g_n'(u) = g'(u)$). В силу теоремы 2.3 и условий (6.4), (6.32), (6.31)

$$\overline{\Pi}_{0,1}(x-y) = O(\mu_n/(x-y)) = o(1). \tag{6.38}$$

Из (6.18), (3.9) следует, что

$$e^{-g_n(y)} = O(G_n(x)). \tag{6.39}$$

Отсюда и из (6.37), (6.38)

$$\pi_1 = O(I) + o(G_n(x)), \tag{6.40}$$

где

$$I = \int\limits_v^{y-} g'(u)\,e^{-g_n(u)}\,\overline{\Pi}_0(x-u)\,du \tag{6.41}$$

— ($\overline{\Pi}_\theta(z)$ определяется формулой (3.4)). Ввиду леммы 6.5

$$I = O(I_0 + I_1 + I_2), \tag{6.42}$$

где

$$I_0 = \int\limits_v^{\delta x} g'(u)\,e^{-g_n(u)}\overline{\Pi}_0(x-u)\,du,$$

$$I_j = \int\limits_{\delta x}^{y} g'(u)\,e^{-g_n(u)} E_j(x-u)\,du \quad (j=1,2).$$

В силу (6.20)

$$I_0 \leqslant e^{-g_n(v)}\overline{\Pi}_0(x-\delta x) = o\left(\overline{\Pi}_0(x-\delta x)\right).$$

Аналогично (6.36)

$$\overline{\Pi}_0(x-\delta x) = o(G_n(x))$$

(для достаточно малых $\delta > 0$). Поэтому

$$I_0 = o(G_n(x)). \tag{6.43}$$

Далее, с учетом (6.33) и свойства 10

$$g'(u) = O(g'(x)) \text{ при } u \in [\delta y,\ y], \tag{6.44}$$

поэтому

$$I_1 = O\left(g'(x)\int\limits_{\delta y}^{y} \exp\{-f_1(u)\}\,du \right), \tag{6.45}$$

где $f_1(u) = g_n(u) + (x-u)^2/3B_n^2$. В силу (6.32), (6.31), (6.4) найдется такая функция $\rho = \rho(n,\ x) \to \infty$, что $f_1'(u) = g'(u) - 2(x-u)/3B_n^2 \leqslant -\rho g'(x)$ при $u \in [\delta y,\ y]$, откуда $f_1(u) \geqslant f_1(y) + \rho(y-u)g'(x) \geqslant g_n(y) + \rho(y-u)g'(x)$, $u \in [\delta y,\ y]$. Следовательно,

$$I_1 = O\left(g'(x)\int\limits_0^{\infty} \exp\{-g_n(y) - \rho u g'(x)\}\,du\right) = o\left(e^{-g_n(y)}\right). \tag{6.46}$$

Аналогично (6.45)

$$I_2 = O\left(g'(x)\int\limits_{\delta y}^{y} \exp\{-f_2(u)\}\,du \right),$$

где $f_2(u) = g_n(u) + \varkappa(x-u)g(x)/5x$. При $u \in [\delta y, y]$ $f_2'(u) = g'(u) - \varkappa g(x)/5x \leqslant g'(u) - \varkappa g'(x)/5 \leqslant -\varkappa g'(x)/10$, в силу свойства 6 и соотношений (6.44), (6.21). Отсюда $f_2(u) \geqslant f_2(y) + \varkappa(y-u)g'(x)/10 \geqslant g_n(y) + \varkappa g'(x)(y-u)/10$. Поэтому аналогично (6.46) получим

$$I_2 = o\left(e^{-g_n(y)}\right). \tag{6.47}$$

Из (6.42), (6.43), (6.46), (6.47), (6.39) выводим оценку

$$I = o(G_n(x)), \tag{6.48}$$

откуда и из (6.40)

$$\pi_1 = o(G_n(x)). \tag{6.49}$$

В силу (3.5) для $q \geqslant 2$

$$\pi_q \leqslant \int_v^\infty - dG_n(u_1) \ldots \int_v^\infty - dG_n(u_q)\, \overline{\Pi}_0(x - u_1 - \ldots - u_q).$$

Применяя теперь q раз лемму 6.3 и учитывая (6.18) и свойство 1, нетрудно получить оценку

$$\pi_q = O(R_q), \tag{6.50}$$

где

$$R_q = \int_v^\infty \ldots \int_v^\infty \exp\left\{-\sum_{i=1}^q g_n(u_i)\right\} \overline{\Pi}_0(x - u_1 - \ldots - u_q)\, du_1 \ldots du_q.$$

Очевидно

$$R_q = \int_{qv}^\infty H(u)\, \overline{\Pi}_0(x-u)\, du, \tag{6.51}$$

где

$$H(u) = \int_{-\infty}^\infty \ldots \int_{-\infty}^\infty I\{\min[u_1, \ldots, u_{q-1}, u - u_1 - \ldots - u_{q-1}] \geqslant v\} \times$$
$$\times \exp\left\{-\sum_{i=1}^{q-1} g_n(u_i) - g_n\left(u - \sum_{i=1}^{q-1} u_i\right)\right\} du_1 \ldots du_{q-1}.$$

Обозначим

$$\rho(t) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{q-1} r(u_i) + r\left(u - \sum_{i=1}^{q-1} u_i\right): \min[u_1, \ldots, u_{q-1}, u - u_1 - \ldots - u_{q-1}] \geqslant t\right\}$$

(напомним, что $r(u) = g(u) - p \ln u$, $p > 1$). Тогда ввиду (6.17)

$$H(u) \leqslant b_n^q e^{-\rho(v)} (f_1 * \ldots * f_q)(u),$$

где $f_i(u) = u^{-p} I\{u \geqslant v\}$. В силу леммы 6.4 и соотношения (6.9) отсюда получаем

$$H(u) = o\left(b_n^q u^{-p} e^{-\rho(v)}\right) = o\left(b_n^q u^{-p} e^{-\rho(w)}\right). \tag{6.52}$$

По теореме 108 из [22]

$$\rho(w) \geqslant (q-1)r(w) + r(u - (q-1)w),$$

учитывая свойство 3. Отметим, что у нас $u \geqslant qv$. Пользуясь свойством 5, получим отсюда

$$\rho(w) \geqslant (q-1)r(w) + r(u)[u - (q-1)w]/u =$$
$$= r(u) + (q-1)[r(w) - wr(u)/u] \geqslant r(u) + (q-1)[r(w) - wr(v)/v] \geqslant$$
$$\geqslant r(u) + (q-1)g(w)(1 + o(1)), \tag{6.53}$$

так как в силу свойства 9 и соотношений (6.8), (6.6) $wr(v)/v \sim wg(v)/v = g(w)/\varkappa$. Из (6.52), (6.53) находим оценку

$$H(u) = O\left(e^{-g_n(u)} \exp\{(q-1)[\ln b_n - (1+o(1))\, g(w)]\}\right).$$

Принимая во внимание (6.51), (6.16), получим отсюда

$$R_q = O((I/g'(x) + I') \exp\{-qg(w)/3\}), \quad q \geqslant 2, \tag{6.54}$$

где I дается формулой (6.41), а

$$I' = \int_y^\infty e^{-g_n(u)} du.$$

Используя свойства 11, 2, а также соотношение (6.39), находим

$$I' = O(G_n(x)/g'(x)).$$

Отсюда из из (6.48), (6.54), (6.14), (6.10), (6.50) следует, что

$$\pi_2 + \pi_3 + \ldots = o\left(G_n(x) \sum_{q=2}^{\infty} \exp\{-qg(w)/4\}\right) = o(G_n(x)). \tag{6.55}$$

Остается собрать оценки (3.1), (6.34), (6.35), (3.2), (6.36), (6.49), (6.55). □

Доказательство предложения 6.1. Пусть функция $f_1(u) > 0$ такова, что $f(u) = o(f_1(u))$, $f_1(u) = o(u)$. Положим $g_1(u) = \inf\{\varphi(u)\colon \varphi$ — вогнутая функция, $\varphi(u) \geqslant f_1(u)$ для $u \geqslant u_1\}$. Здесь числа $u_j \geqslant 1$ удовлетворяют условиям: $f_1(u) \leqslant u/j$ при $u \geqslant u_j$, $u_j < u_{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Пусть φ — непрерывная ломаная с вершинами $(u_j, \varphi(u_j))$, $\varphi(u_1) = u_1$, $\varphi'(u) = j^{-1}$ при $u_j < u < u_{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Тогда функция φ вогнута, $\varphi(u) \geqslant u/j \geqslant f_1(u)$ при $u_j \leqslant u \leqslant u_{j+1}$, $\varphi(u) = o(u)$ $(u \to \infty)$. Поэтому $g_1(u) \geqslant f_1(u)$ $(u \geqslant u_1)$, $g_1(u) = o(u)$ $(u \to \infty)$, и g_1 вогнута, как и всякая вогнутая мажоранта. Отсюда следует, что $g_1'(u) \downarrow 0$ $(u \to \infty)$, где g_1' — правая производная вогнутой функции g_1. Положим $h(u) = ug_1'(u) + \ln u$,

$$\bar{h}(u) = \sup\{h(t)\colon u_1 \leqslant t \leqslant u\}, \quad g_2(u) = \int_{u_1}^{u} t^{-1}\bar{h}(t)\, dt. \quad \text{Имеем } ug_2'(u) = \bar{h}(u).$$

Следовательно, $ug_2'(u) \geqslant h(u) \geqslant \ln u \to \infty$, более того, $ug_2'(u) \uparrow \infty$, так как $\bar{h}(u)$ не убывает. Далее, $g_2'(u) = u^{-1}\bar{h}(u) = o(1)$, поскольку $u^{-1}h(u) = o(1)$. Докажем, что $g_2'(u)$ не возрастает. Пусть $t < s$. Если $\bar{h}(s) = \bar{h}(t)$, то $s^{-1}\bar{h}(s) < t^{-1}\bar{h}(t)$, т. е. $g_2'(s) < g_2'(t)$. Пусть $\bar{h}(s) > \bar{h}(t)$. Тогда, ввиду убывания $u^{-1}h(u)$, $s^{-1}\bar{h}(s) = s^{-1} \sup\limits_{t \leqslant u \leqslant s} h(u) \leqslant s^{-1} \sup\limits_{t \leqslant u \leqslant s} ut^{-1}h(t) = t^{-1}h(t) \leqslant$

$\leqslant t^{-1}\bar{h}(t)$. Итак, $g_2'(u) \downarrow 0$ $(u \to \infty)$. Наконец, $g_2(u) \geqslant \int_{u_1}^{u} t^{-1}h(t)dt \geqslant \int_{u_1}^{u} g_1'(t)dt = g_1(u) - g_1(u_1) \geqslant f_1(u) - g_1(u_1)$.

Поэтому $f(u) = o(f_1(u)) = o(g_2(u))$. Остается положить $g(u) = g_2(u) + 2\ln u$. □

§ 7. «Хвосты», убывающие не быстрее, чем $\exp(-x^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$

В пп. 5, 6 получены теоремы, охватывающие весь диапазон возможного изменения «хвостов» (от $o(1)$ до $\exp\{o(x)\}$), в котором появляются представления (1.7), (1.8). Тем не менее «хвосты», указанные в заголовке данного пункта, представляют некоторый самостоятельный интерес. Как видно из формулировки приведенной ниже теоремы 7.1, в ней накладывается ограничение только, по существу, на величину 1-й производной «хвоста», в то время как в теореме 6.1 требуется учитывать изменение 1-й производной, или знак 2-й производной. (Правда, в теореме 7.1, как показывает сравнение с результатами пп. 5, 6, даются худшие оценки границы зоны уклонений, в которой справедливы представления (1.7), (1.8).) Кроме того, теорема 7.1 обобщает одновременно теоремы 1 и 2 [10]. Аналогичные результаты в одномерном случае, как отмечалось, получил Л. В. Розовский. Рассмотрим следующие классы неотрицательных неубывающих функций g, определенных на некотором интервале $[a, b]$, $a>0$:

1) класс $A_\alpha = A_\alpha(a, b)$, $0<\alpha<1$, определяемый условием: $s^{-\alpha}g(s)$ не возрастает;

2) класс $B_{\alpha,\beta} = B_{\alpha,\beta}(a, b)$, $0<\alpha$, $\beta<1$, определяемый условием: $g(s)-g(t)\leqslant \alpha g(s)(s-t)/s$ при $\beta s\leqslant t\leqslant s$;

3) класс $C_\alpha = C_\alpha(a, b)$, $0<\alpha<1$, определяемый следующим условием. Функция g абсолютно непрерывна, и ее производная подчиняется ограничению: $g'(s)\leqslant \alpha g(s)/s$.

Класс A_α изучал Л. В. Розовский, $B_{\alpha,\beta}$ — А. В. Нагаев [10], класс C_α рассматривался в работе [17].

Предложение 7.1. Имеют место вложения:

$$C_{\alpha\beta}\subseteq B_{\alpha,\beta}\subseteq A_\alpha\subseteq B_{\alpha\beta^{-1},\beta}\subseteq C_{\alpha\beta^{-1}}\,(0<\alpha<\beta<1).$$

В частности, $C_\alpha = A_\alpha$.

Таким образом, все эти классы представляют, по существу, одно и то же.

Доказательство предложения 7.1.

1. Пусть $g\in C_{\alpha\beta}$. Тогда $(g(s)/s)'\leqslant 0$, т. е. $g(s)/s$ не возрастает. Поэтому при $\beta s\leqslant t\leqslant s$

$$g(s)-g(t)=\int_t^s g'(u)\,du\leqslant \alpha\beta\int_t^s u^{-1}g(u)\,du\leqslant$$

$$\leqslant \alpha\beta t^{-1}g(t)(s-t)\leqslant \alpha g(t)(s-t)/s\leqslant \alpha g(s)(s-t)/s,$$

т. е. $g\in B_{\alpha,\beta}$.

2. Пусть $g\in B_{\alpha,\beta}$. Тогда при $\beta s\leqslant t\leqslant s$

$$s^{-\alpha}g(s)-t^{-\alpha}g(t)=s^{-\alpha}[g(s)-g(t)]+g(t)(s^{-\alpha}-t^{-\alpha})\leqslant$$

$$\leqslant \alpha g(s)(s-t)/s^{\alpha+1}-g(t)(s^\alpha-t^\alpha)/s^\alpha t^\alpha\leqslant$$

$$\leqslant \alpha g(s)(s-t)/s^{\alpha+1}-\alpha g(t)(s-t)/st^\alpha=[s^{-\alpha}g(s)-t^{-\alpha}g(t)]\alpha(s-t)/s,$$

откуда $s^{-\alpha}g(s)-t^{-\alpha}g(t)\leqslant 0$, т. е. $g\in A_\alpha$.

3. Пусть $g\in A_\alpha$. Тогда при $\beta s\leqslant t\leqslant s$

$$g(s)-g(t)\leqslant g(s)-t^\alpha s^{-\alpha}g(s)=s^{-\alpha}g(s)(s^\alpha-t^\alpha)\leqslant$$

$$\leqslant s^{-\alpha}g(s)\alpha t^{\alpha-1}(s-t)\leqslant \alpha g(s)(s-t)/t\leqslant \alpha\beta^{-1}g(s)(s-t)/s,$$

т. е. $g\in B_{\alpha\beta^{-1},\beta}$.

4. Пусть $g\in B_{\alpha\beta^{-1},\beta}$. Тогда, по доказанному $g\in A_{\alpha\beta^{-1}}$, и $g(s)/s$ не возрастает. Кроме того, функция g удовлетворяет условию Липшица с постоянной $\alpha\beta^{-1-\varepsilon}g(s)/s$ на интервале $[\beta^\varepsilon s, s]$, следовательно, она абсолютно непрерывна, и $g'(t)\leqslant \alpha\beta^{-1-\varepsilon}g(s)/s\leqslant \alpha\beta^{-1-\varepsilon}g(t)/t$ при $\beta^\varepsilon s\leqslant t\leqslant s$, т. е. $g\in C_{\alpha\beta^{-1}}$.

Наконец, из вложений $C_{\alpha\beta}\subseteq A_\alpha\subseteq C_{\alpha\beta^{-1}}$ и произвольности $\beta\in(\alpha, 1)$ следует, что $C_\alpha = A_\alpha$.

Теорема 7.1. *Пусть $x>0$ меняется так, что выполнено условие (3.10) и пусть существует функция $g_n\in A_\alpha(a, b)$, где $0<\alpha<1$, $a=\min[x, \gamma\Delta_0]$, $b=x+\max[0, \Delta_0/\gamma]$,*

$$\Delta_0 = x/g_n(x), \tag{7.1}$$

такая, что

$$G_n(u)\sim \exp\{-g_n(u)\} \tag{7.2}$$

при $n \to \infty$, $a \leqslant u \leqslant b$, каково бы ни было $\gamma > 0$; пусть при этом

$$g_n(\Delta_0)/\ln g_n(x) \to \infty, \tag{7.3}$$

$$B_n + \sup_j \mathbf{M}\|S_{j,\,n}\| = o(\Delta_0). \tag{7.4}$$

Тогда имеют место представления (1.7), (1.8).

Следствие 7.1. *Пусть справедливо представление* (6.3) *для некоторой функции $g \in A_\alpha(1, \infty)$, $0 < \alpha < 1$, удовлетворяющей условию*

$$g(u)/\ln u \to \infty \quad (u \to \infty). \tag{7.5}$$

Тогда в зоне $x \to \infty$,

$$B_n + \sup_j \mathbf{M}\|S_{j,\,n}\| = o(x/g(x)) \tag{7.6}$$

имеют место представления (1.7), (1.8).

Следствие 7.2. *Пусть*

$$G_n(u) = b_n u^{-p} l(u), \ p > 2, \tag{7.7}$$

где $b_n > 0$ не убывает по n, l медленно меняется на ∞. Тогда в зоне $x \to \infty$, определяемой условием (7.6) *с заменой $g(x)$ на $\ln x$, справедливы представления* (1.7), (1.8).

Конечно, последнее следствие можно было бы вывести и из теоремы 5.1, и при этом получить более точные по сравнению с (7.6) границы соответствующей зоны уклонений. В то же время следствия 7.1, 7.2 обобщают теоремы 1, 2 из [10], вернее, по одному из двух утверждений каждой из этих теорем. Оставшиеся утверждения можно получить аналогично, если заметить, что в теорему 7.1 можно внести следующие модификации:

1) заменить (7.2) условием

$$G_n(u) \asymp \exp\{-g_n(u)\};$$

2) добавить условие (3.7);

3) заменить правую часть в (7.4) на $o(\min[\Delta, \Delta_0])$.

Доказательство теоремы 7.1. Положим

$$\Delta = \varkappa\Delta_0, \tag{7.8}$$

где Δ_0 определяется формулой (7.1), $\varkappa \geqslant 1$ произвольно,

$$y = x - \Delta. \tag{7.9}$$

Ввиду (7.2), (3.10)

$$g_n(x) \to \infty. \tag{7.10}$$

Поэтому, в силу предложения 7.1,

$$g_n \in A_\alpha(x - \Delta, x + \Delta) \subseteq B_{\alpha\beta^{-1},\beta}(x - \Delta, x + \Delta),$$

следовательно,

$$g_n(x + \Delta) - g_n(x - \Delta) \leqslant \alpha\beta^{-1} \cdot 2\Delta g_n(y)/y \leqslant (2 + o(1))\alpha\beta^{-1}\varkappa,$$

с учетом (7.8)—(7.10), (7.1), откуда, принимая во внимание (7.2), выводим (3.7), (3.9). Кроме того, из (7.10) следует (3.6), а из (7.4), (7.8) и неравенства Чебышева — (3.8). В силу леммы 3.1

$$\Pi_1^{(j)} \sim G_n(x) \ (j = 1, 2). \tag{7.11}$$

Теперь, учитывая произвол в выборе $\varkappa \geqslant 1$, можно считать, что

$$\varkappa \to \infty. \tag{7.12}$$

Пусть γ и p — любые числа, удовлетворяющие неравенствам

$$1 > \gamma > \max[\alpha, 2^{-(1-\alpha)/\alpha}], \tag{7.13}$$

$$\gamma^{1/(1-\alpha)} > p > 2^{-1/\alpha}. \tag{7.14}$$

Положим

$$v = px. \tag{7.15}$$

Тогда, ввиду (7.2), (7.10) и условия $g_n \in A_\alpha$,

$$G_n(v) \sim \exp\{-g_n(v)\} \leqslant \exp\{-p^\alpha g_n(x)\} = \\ = o(\exp\{-g_n(x)/2\}) = o(G_n(x)^{1/2}). \tag{7.16}$$

Отсюда, в частности,

$$g_n(v) \to \infty, \tag{7.17}$$

$$G_n(v) \to 0. \tag{7.18}$$

С помощью оценки (7.16) также получим

$$\Pi_2 + \pi_2 + \pi_3 + \ldots \leqslant G_n(v)^2 = o(G_n(x)). \tag{7.19}$$

Для дальнейших выкладок потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 7.1. *При*

$$z \geqslant x/g_n(x) \tag{7.20}$$

верна оценка

$$\overline{\Pi}_{0,q}(z) = O(\exp\{-\gamma z g_n(v)/v\}), \quad q = 0, 1$$

(*для любого* γ, *удовлетворяющего неравенствам* (7.13); $\overline{\Pi}_{0,q}(z)$ *определяется формулой* (3.3)).

Доказательство. В силу неравенства Коши — Буняковского и соотношений (7.18), (7.4), (7.1)

$$-\int_v^\infty u\,dG_n(u) \leqslant B_n G_n(v)^{1/2} = o(x/g_n(x)).$$

Отсюда, ввиду (7.20), так же как и в доказательстве леммы (6.5), получаем

$$\overline{\Pi}_{0,q}(z) = O(\mathbf{P}(\|S_n(v)\| - \mathbf{M}\|S_n(v)\| \geqslant z + o(z))),$$

$q = 0, 1$. Поэтому, в силу теоремы 2.2, при $s > 0$, $q = 0, 1$,

$$\overline{\Pi}_{0,q}(z) = O(\exp\{-s(z + o(z)) + I\}), \tag{7.21}$$

где $I = -\int_0^v \left(e^{su} - 1 - su\right) dG_n(u)$. Далее,

$$I \leqslant I_1 + I_2, \tag{7.22}$$

$$\text{где } I_1 = -\int_0^{1/s} \left(e^{su} - 1 - su\right) dG_n(u),\ I_2 = -\int_{1/s}^{v} e^{su} dG_n(u).$$

Положим теперь

$$s = \gamma' g_n(v)/v, \text{ где } \gamma < \gamma' < 1. \tag{7.23}$$

Тогда, ввиду (7.15), (7.4), (7.1),

$$I_1 = O\left(s^2 B_n^2\right) = o(1). \tag{7.24}$$

Интегрируя по частям и учитывая (7.2), получим

$$I_2 = O\left(G_n(1/s) + s\int_{1/s}^{v} \exp\{su - g_n(u)\}\,du\right). \tag{7.25}$$

Пользуясь неравенством Чебышева, аналогично (7.24) находим

$$G_n(1/s) \leqslant s^2 B_n^2 = o(1). \tag{7.26}$$

В силу условия $g_n \in A_\alpha$ $g_n(u)/u$ убывает при $u \in [s^{-1}, v] (\subseteq [px/g_n(x), x]$, поэтому с учетом (7.23), (7.3), (7.1), (7.15)

$$su - g_n(u) = \gamma' u[g_n(v)/v - g_n(u)/u] - (1-\gamma')g_n(u) \leqslant \\ \leqslant -(1-\gamma')g_n(u) \leqslant -(1-\gamma')g_n(1/s) \leqslant -(1-\gamma')g_n(v/g_n(v)) \leqslant \\ \leqslant -(1-\gamma')p^\alpha g_n(x/g_n(x)) \leqslant -2\ln g_n(x) \leqslant -2\ln g_n(v)$$

при $1/s \leqslant u \leqslant v$, откуда

$$s\int\limits_{1/s}^{v}\exp\{su - g_n(u)\}\,du = O(sv\exp\{-2\ln g_n(v)\}) =$$
$$= O(1/g_n(v)) = o(1), \tag{7.27}$$

ввиду (7.17). Соотношения (7.21)—(7.27) дают искомую оценку. □

Вернемся к доказательству теоремы 7.1. С помощью леммы 7.1, полагая $z = x$, получим, пользуясь условиями $g_n \in A_\alpha$ и (7.15), что

$$\pi_0 = O(\exp\{-\gamma x g_n(v)/v\}) = O(\exp\{-\gamma p^{\alpha-1} g_n(x)\}),$$

откуда, ввиду (7.14), (7.2), (3.10),

$$\pi_0 = o(G_n(x)). \tag{7.28}$$

Нетрудно видеть (ср. с (6.40), (6.41)), что

$$\pi_1 = O(J) + o(G_n(x)), \tag{7.29}$$

где

$$J = \int\limits_v^y g_n'(u)\,e^{-g_n(u)}\overline{\Pi}_{0,1}(x-u)\,du.$$

В силу леммы 7.1

$$J = O\left(\int\limits_v^y g_n'(u)\exp\{-f(u)\}\,du\right), \tag{7.30}$$

где $f(u) = g_n(u) + \gamma(x-u)g_n(v)/v$. Так как $g_n \in C_\alpha$, то

$$g_n'(u) \leqslant \alpha g_n(u)/u \leqslant \alpha g_n(v)/v \quad (v \leqslant u \leqslant x). \tag{7.31}$$

Поэтому $f'(u) \leqslant (\alpha - \gamma)g_n(v)/v$, следовательно, $f(u) \geqslant f(x) + (u-x) \times$ $\times (\alpha-\gamma)g_n(v)/v = g_n(x) + (x-u)(\gamma-\alpha)g_n(v)/v$ $(v \leqslant u \leqslant y)$. Отсюда, ввиду (7.30), (7.31), (7.13),

$$J = O\left(v^{-1}g_n(v)\right)\int\limits_v^y \exp\{-g_n(x) - (x-u)(\gamma-\alpha)g_n(v)/v\}\,du\Bigg) =$$
$$= O(\exp\{-g_n(x) - (\gamma-\alpha)(x-y)\,g_n(v)/v\}). \tag{7.32}$$

Пользуясь теперь соотношениями (7.9), (7.8), (7.1), (7.12), получим

$$(\gamma-\alpha)(x-y)g_n(v)/v \geqslant \varkappa(\gamma-\alpha) \to \infty,$$

следовательно, ввиду (7.32), (7.2), $J = o(G_n(x))$. Поэтому, с учетом (7.29),

$$\pi_1 = o(G_n(x)). \tag{7.33}$$

Остается собрать оценки (3.1) (3.2), (7.11), (7.19), (7.28), (7.33). □

Доказательство следствия 7.1. Положим $g_n(u) = g(u) - \ln b_n$. Ввиду (6.3), (7.6) и неравенства Чебышева для некоторого $a > 0$

$$b_n = O(G_n(a)) = O\left(B_n^2\right) = o(x^2/g(x)^2).$$

Поэтому, с учетом (7.5),

$$g_n(u) \sim g(u) \text{ при } u \geqslant \varepsilon x/g(x), \tag{7.34}$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$. В частности, $g_n(x) \sim g(x) = O(x^\alpha)$, так как $g \in A^\alpha$. Отсюда вследствие (7.6) получим (7.4), а из (7.5), (7.34), (7.1) — соотношение (7.3). Из (6.3) и определения g_n вытекает (7.2). Из (7.2) и соотношения $g_n(x) \sim g(x)$ следует (3.10). Наконец, $g \in A_\alpha = C_\alpha$, поэтому, ввиду (7.34) и определения g_n, $g_n \in C_\alpha = A_\alpha$. Все условия теоремы 7.1 проверены. □

Доказательство следствия 7.2. В силу интегрального представления Карамата [20, с. 342] существует такая абсолютно непрерывная функция l_1, что $l_1(u) \sim l(u)$ и $[\ln l_1(u)]' = o(1/u)$ $(u \to \infty)$. Положим $g_n(u) = p\ln u - \ln l_1(u) - \ln b_n$. Так же, как и выше, убеждаемся (ср. с (7.34)), что для любого $\varepsilon > 0$

$$g_n(u) \sim p\ln u \text{ при } u \geqslant \varepsilon x/\ln x.$$

Отсюда следуют условия (7.2)—(7.4), (3.10). Наконец, $g'_n(u) = p/u + o(1/u) = o(g_n(u)/u)$ при $u \in [a, b]$, так как $[a, b] \subseteq [\varepsilon x/\ln x, \infty)$, если $\varepsilon > 0$ мало. Таким образом, $g_n \in C_\alpha(a, b)$ для любого $\alpha \in (0, 1)$. □

Приложение. Доказательство предложения 1.1. Пользуясь выпуклостью l и тем, что $p(x) = \exp\{-l(x)\}$ — плотность, нетрудно убедиться, что $l(u)$ не убывает при $u \geqslant a$ для некоторого a. Поэтому утверждение для случая 1) следует из неравенств $l(u_1) + \ldots + l(u_n) \geqslant nl((u_1 + \ldots + u_n)/n) \geqslant nl(u/n)$ при $n \geqslant na$.

Для рассмотрения случая 2) заметим, прежде всего, что $F_n(u) = \min(F_{n,1}, F_{n,2})$, где $F_{n,1} = \inf\{l(u_1) + \ldots + l(u_n)\colon u_n \leqslant a;\ u_1 + \ldots + u_n \geqslant u\}$, $F_{n,2} = \inf\{l(u_1) + \ldots + l(u_n)\colon u_1 + \ldots + u_n \geqslant u;\ u_i > a\ (i = 1, \ldots, n)\}$. Доказательство утверждения в случае 2) проведем по индукции. При $n = 1$ это тривиально. Предположим, что $F_{n-1}(u) \sim l(u)$ $(u \to \infty)$ при некотором $n \geqslant 2$. Так как плотность p предполагалась ограниченной, то $l(u) \geqslant C$ для некоторого C и любого u. Поэтому $F_{n,1} \geqslant C + F_{n-1}(u - a) \sim l(u - a) \sim l(u)$ $(u \to \infty)$ в силу предположения индукции, вогнутости l и условия $l(u) = o(u)$. Далее, вследствие (уже использованной ранее) теоремы 108 из [22], $F_{n,2} = l(u - (n-1)a) + (n-1)l(a) \sim l(u)$. Таким образом, $F_n(u) \sim l(u)$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. **Азларов Т. А., Володин Н. А.** Критерии усиленного закона больших чисел для случайных векторов.— В кн.: Предельные теоремы, случайные процессы и их приложения. Ташкент: Фан, 1979, с. 12—20.
2. **Анорина Л. А., Нагаев А. В.** Интегральная предельная теорема для сумм независимых двумерных случайных векторов в случае, когда не выполняется условие Крамера.— В кн.: Случайные процессы и смежные вопросы. Ч. 2. Ташкент: Фан, 1971, с. 17—23.
3. **Боровков А. А.** О факторизационных тождествах и свойствах распределения супремума последовательных сумм.— Теория вероятн. и ее примен., 1970, т. 15, № 3, с. 377—418.
4. **Боровков А. А.** Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972. 367 с.
5. **Годованчук В. В.** Вероятности больших уклонений для сумм независимых случайных величин, принадлежащих области притяжения устойчивого закона.— Теория вероятн. и ее примен., 1978, т. 23, № 3, с. 624—630.
6. **Золотарев В. М.** Об асимптотическом поведении одного класса безгранично делимых законов распределения.— Теория вероятн. и ее примен., 1961, т. 6, № 3, с. 303—334.
7. **Нагаев А. В.** Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, при нарушении условия Крамера.— Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1969, № 6, с. 17—22.
8. **Нагаев А. В.** Интегральные предельные теоремы с учетом больших уклонений, когда не выполнено условие Крамера. I, II.— Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. 14, № 1, с. 51—63; 1969, т. 14, № 2, с. 203—216.
9. **Нагаев А. В.** Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин. Автореф. докт. дис. Л.: ЛГУ, 1971. 18 с.
10. **Нагаев А. В.** Об одном свойстве сумм независимых случайных величин.— Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. 22, № 2, с. 335—346.
11. **Нагаев С. В.** Интегральная предельная теорема для больших уклонений.— Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1962, № 6, с. 37—43.
12. **Пинелис И. Ф.** Одна задача о больших уклонениях в пространстве траекторий.— Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, № 1, с. 73—87.
13. **Пинелис И. Ф.** О некоторых неравенствах для больших уклонений.— Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, № 2, с. 428—430.
14. **Пинелис И. Ф.** Предельные теоремы для больших уклонений при нарушении условия Крамера.— В кн.: Третья международная Вильнюсская конф. по теории вероятностей и мат. статистике. Т. 2. (Тез. докл.). Вильнюс, 1981, с. 108—109.
15. **Пинелис И. Ф.** Некоторые предельные теоремы для больших уклонений бесконечномерных случайных блужданий.— Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. 26, № 3, с. 645—646.
16. **Пинелис И. Ф.** Об асимптотике безгранично делимых распределений.— Теория вероятн. и ее примен., 1982, т. 27, № 1, с. 204—205.

17. **Пинелис И. Ф.** Предельные теоремы о больших уклонениях при нарушении условия Крамера для сумм бесконечномерных случайных величин. 93 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 14.04.1981, № 1674—81 Деп.
18. **Ткачук С. Г.** Теоремы о больших уклонениях в случае распределений с правильно меняющимися хвостами.— В кн.: Случайные процессы и статистические выводы. Вып. 5. Ташкент: Фан, 1975, с. 164—174.
19. **Ткачук С. Г.** Теоремы о больших уклонениях в случае устойчивого предельного закона.— В кн.: Случайные процессы и статистические выводы. Вып. 4. Ташкент: Фан, 1974, с. 178—184.
20. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. М.: Мир, 1967. 752 с.
21. **Ферник К.** Регулярность траекторий гауссовских случайных функций.— В кн.: Случайные процессы. Выборочные функции и пересечения. М.: Мир, 1978, с. 63—132.
22. **Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г.** Неравенства. М.: ИЛ, 1948. 456 с.
23. **Хеннекен П. Л., Тортра А.** Теория вероятностей и некоторые ее приложения. М.: Наука, 1974. 472 с.
24. **Хьюитт Э., Росс К.** Абстрактный гармонический анализ. Т. 1. М.: Наука, 1975. 656 с.
25. **Чистяков В. П.** Теорема о суммах независимых положительных случайных величин и ее приложения к ветвящимся процессам.— Теория вероятн. и ее примен., 1964, т. 9, № 4, с. 710—718.
26. **Юринский В. В.** Показательные оценки для больших уклонений.— Теория вероятн. и ее примен., 1974, т. 19, № 1, с. 152—154.
27. **Юринский В. В.** О безгранично делимых распределениях.— Там же, № 2, с. 308—318.
28. **Andersen G. R.** Large deviation probabilities for positive variables.— Proc. Amer. Math. Soc., 1970, v. 24, N 2, p. 382—384.
29. **Araujo A., Giné E.** On tails and domains of attraction of stable measures in Banach spaces.— Trans. Amer. Math. Soc., 1979, v. 248, N 1, p. 105—119.
30. **Embrechts P., Goldie C. M., Veraverbeke N.** Subexponentiality and infinite divisibility.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1979, Bd 49, N 3, p. 335—347.
31. **Goldie C. M.** Subexponential distributions and dominated variation tails.— J. Appl. Probab., 1978, v. 15, N 2, p. 440—442.
32. **Heyde C. C.** On large deviations probabilities in the case of attraction to a nonnormal stable law.— Sankhya, 1968, A30, N 3, p. 253—258.
33. **Linnik Yu. V.** On the probability of large deviations for the sums of independent variables.— Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Statist. Probability, Univ. Calif. Press, 1961, v. 2, p. 289—306.
34. **Marcus M. B., Voyczynski W. A.** Stable measures and central limit theorems in spaces of stable type.— Trans. Amer. Math. Soc., 1979, v. 251, p. 71—102.
35. **Nagaev S. V.** Large deviations for sums of independent random variables.— Trans. Sixth Prague Conf. Inform. Theory, Random Processes, Statist. Decis. Functions, Prague, 1973, p. 657—674.
36. **Pitman E. J. G.** Subexponential distribution functions.— J. Austral. Math. Soc., 1980, A29, N 3, p. 337—347.
37. **Ronatgi V. K.** On large deviation probabilities for sums of random variables which are attracted to the normal law.— Comm. Statist., 1973, v. 2, p. 525—533.
38. **Teugels J. L.** The class of subexponential distributions.— Ann. Probab., 1975, v. 3, N 6, p. 1000—1011.
39. **Tortrat A.** Structure des lois indéfiniment divisibles dans un espace vectoriel topologique.— In: Symp. on Probab. Methods in Analysis, Lect. Notes in Math., 1967, v. 31, p. 299—328.
40. **Tortrat A.** Sur la structure des lois indéfiniment divisibles dans les spaces vectoriels.— Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verv. Geb., 1969, Bd 11, N 4, p. 311—326.
41. **Yurinskii V. V.** Exponential inequalities for sums of random vectors.— J. Multivar. Anal., 1976, v. 6, N 4, p. 473—499.

Поступила в редколлегию 31 января 1984 г.