

Полученная матрица $A^{(M+1)} = FA^{(M)}G$ будет иметь нужный вид

$$A^{(M+1)} = [C | 0] = \left[\begin{array}{cc|cc} d_1 & b_2 & & 0 \\ & d_2 & b_3 & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & d_{M-1} & b_M \\ & & & d_M & \end{array} \right]$$

M столбцов

Реализация этого алгоритма на машине с двухступенчатой памятью во многом аналогична описанной в § 3, и ее не будем рассматривать. Отметим только, что $(M+1)$ -й шаг алгоритма сводится к перестановке в обратном порядке элементов d и b и к занесению во внешнюю память отметок о сделанной перестановке.

Аналогично тому, как это сделано в § 3, для предложенного здесь алгоритма можно получить число просмотров матрицы (при приведении ее к двухдиагональному виду), приблизительно равное $M/2$, и провести анализ возникающих ошибок округления.

* * *

Автор выражает глубокую благодарность С. К. Годунову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. Решение систем линейных уравнений.— Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1980.— 177 с.
2. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений.— М.: Наука, 1970.— 564 с.
3. Householder A. S. Unitary Triangularization of a nonsymmetric Matrix.— J. Assoc. Comput. Math., 1958, v. 5, p. 339—342.

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ВСТРЕЧНЫХ ПРОГОНОВ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЛЕНТОЧНОЙ МАТРИЦЕЙ

С. И. ФАДЕЕВ

1. Краткое описание метода. Предлагаемая работа посвящена методу ортогональных встречных прогонок для решения системы из N линейных алгебраических уравнений с действительными коэффициентами

$$Ax = F. \quad (1)$$

Матрица A размерности $N \times N$ имеет ленточную структуру, F — вектор правых частей, x — вектор неизвестных. Будем предполагать, что A достаточно хорошо обусловлена, не вводя никаких других ограничений на коэффициенты ленточного массива.

Алгоритм встречных прогонок, основанный на исключении неизвестных по методу Гаусса, описан, например, в [1]. Если ширину ленты матрицы A составляет $M+1$ элемент, $N > M$, или, иными словами, если M — порядок разностной краевой задачи, как еще можно рассматривать (1), то в результате применения встречных ходов прогонки (прямой правый и прямой левый ходы) образуется система относительно группы

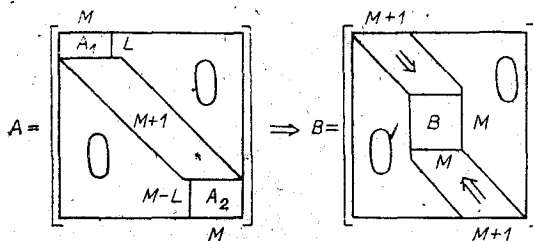


Рис. 1.

из M элементов вектора x . На рис. 1 схематически изображены матрица A с параметрами M и L , характеризующими ленточный массив, и матрица B , к которой преобразуется A после встречных прогонок. Здесь A_1 и A_2 — подматрицы A размерности $L \times M$ и $(M-L) \times M$ соответственно, $0 \leq$

$\leq L \leq M$, представляющие краевые условия разностной краевой задачи; B_* — подматрица B размерности $M \times M$, являющаяся матрицей системы для определения группы из M элементов вектора x . После вычисления этих элементов остальные неизвестные находят из решения двух систем с ленточными треугольными матрицами (обратный правый и обратный левый ходы прогонки). Стрелками отмечены направления прямого правого хода (верхняя) и прямого левого (нижняя стрелка) прогонки.

Наряду с решением (1) важно получить информацию о точности найденного решения, но заплатив за это не слишком дорого. Трудоемкость метода встречных прогонок определяется числом арифметических операций, пропорциональным N , и линейная зависимость от N должна сохраниться с учетом затрат на оценки погрешности вычислений. Именно это обстоятельство побудило обратиться к методу ортогональных встречных прогонок, связав метод с ортогональными преобразованиями Хаусхолдера, или, как их еще называют, преобразованиями отражения [2]. При выводе оценок будем использовать [3], где подробно изложен анализ погрешностей вычислений, возникающих при преобразованиях отражения систем линейных алгебраических уравнений.

Отметим основные моменты метода ортогональных встречных прогонок, на которых в дальнейшем остановимся более подробно.

1. Покажем существование ортогональной матрицы $\mathcal{P}$, приведя способ ее построения такой, что $\mathcal{P}A = B$, согласно рис. 1.

2. Наряду с устойчивостью ортогональных преобразований отражения, в основе предлагаемого метода лежит доказательство следующего почти очевидного утверждения: обусловленность матрицы B_* , $\mu(B_*)$ не выше, чем матрицы B , а следовательно, и матрицы A , т. е. $\mu(B_*) \leq \mu(B) = \mu(A)$.

3. Преобразование (1) к системе с матрицей B с целью формирования системы относительно первых M элементов вектора x , а затем преобразование (1) для формирования системы относительно последних M элементов вектора x выражается, очевидно, в одном прямом левом и (независимо) одном прямом правом ходах прогонки. Покажем, что одновременно с этим можно определить N_* независимых систем относительно M различных групп неизвестных, охватывающих в совокупности все элементы вектора x , где $N_* = N/M$, если N кратно M , и $N_* = \text{INT}(N/M) + 1$ в противном случае. Иными словами, каждую из этих систем, хотя они получены за указанные один прямой левый и один прямой правый ходы прогонки, можно представить как результат независимых преобразований (1) к системам вида $Bx = \mathcal{P}F$. Решение серии из N_* , как будем говорить, «локальных» систем размерности M с «локальными» матрицами вида B_* заменяет обратный ход прогонки.

4. Одна из возможностей решения локальной системы состоит в применении двухсторонних ортогональных преобразований матрицы B_* , приводящих ее к верхней треугольной двухдиагональной матрице Λ : $B_* = \mathcal{P}_* \Lambda Q_*$, где $\mathcal{P}_*$ и Q_* — ортогональные матрицы. Это позволяет, в частности, с относительно малыми вычислительными затратами найти обусловленность матрицы B_* и получить оценки погрешностей вычислений [3].

5. Представляет интерес и другой вариант, в котором матрица B_* при помощи двухсторонних ортогональных преобразований приводится к ленточной трехдиагональной матрице T . Если теперь к системе с матрицей T вновь применить прямой правый и прямой левый ходы прогонки, то задача сведется к серии локальных систем размерности 2×2 , обусловленности которых находятся по простой формуле. Метод ортогональных встречных прогонок с оценками для решения системы с ленточной трехдиагональной матрицей подробно описан в [4].

Наконец, отметим, что для реализации предполагаемого метода требуется хранить массив размерности примерно $2(M+1) \times N$.

2. **Определения.** Пусть y — вектор размерности n с элементами $y_1, y_2, \dots, y_n$, $Q[1, n]$ — матрица отражения такая, что элементы $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*$ отраженного вектора y^* , $y^* = Q[1, n]y$ равны нулю начиная со второго, на что и указывают индексы в квадратных скобках. Если в известных формулах для элементов матрицы $Q[1, n]$ исключить элементы вектора нормали гиперплоскости, относительно которой строится отражение вектора y , то матрица отражения примет вид

$$Q[1, n] = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \dots & -\alpha_n \\ -\alpha_2 & 1 - \frac{\alpha_2^2}{1 + \alpha_1} & -\frac{\alpha_2 \alpha_3}{1 + \alpha_1} & \dots & -\frac{\alpha_2 \alpha_n}{1 + \alpha_1} \\ -\alpha_3 & -\frac{\alpha_2 \alpha_3}{1 + \alpha_1} & 1 - \frac{\alpha_3^2}{1 + \alpha_1} & \dots & -\frac{\alpha_3 \alpha_n}{1 + \alpha_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\alpha_n & -\frac{\alpha_2 \alpha_n}{1 + \alpha_1} & -\frac{\alpha_3 \alpha_n}{1 + \alpha_1} & \dots & 1 - \frac{\alpha_n^2}{1 + \alpha_1} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где элементы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ вектора α являются нормированными элементами вектора y : $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\alpha_i = \frac{y_i}{\sigma \|y\|}, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}, \quad \sigma = \begin{cases} +1, & y_1 \geq 0, \\ -1, & y_1 < 0. \end{cases} \quad (3)$$

При этом

$$\alpha_1 = \frac{y_1}{\sigma \|y\|} \geq 0, \quad y_1^* = -\sigma \|y\|, \quad \|\alpha\| = 1. \quad (4)$$

Пусть далее $Q[1, n]$ — определенная по формулам (2), (3) матрица отражения, z — произвольный вектор размерности n с элементами $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тогда элементы $z_1^*, z_2^*, \dots, z_n^*$ отраженного вектора z^* , $z^* = Q[1, n]z$, вычисляются по формулам

$$z_1^* = -(\alpha, z), \quad z_i^* = z_i - R\alpha_i, \quad i = 2, 3, \dots, n, \quad (5)$$

$$R = \frac{z_1 + (\alpha, z)}{1 + \alpha_1}, \quad \|z^*\| = \|z\|.$$

Если отраженный вектор y^* таков, что его элементы, кроме n -го, равны нулю, то для матрицы отражения вводится обозначение $Q[n, 1]$. Чтобы формулы вычисления элементов $Q[n, 1]$ совпали с (2), достаточно положить $i = 1, 2, \dots, n$,

$$\alpha_i = \frac{y_{n+1-i}}{\sigma \|y\|}, \quad \sigma = \begin{cases} +1, & y_n \geq 0, \\ -1, & y_n < 0. \end{cases} \quad (6)$$

При этом

$$\alpha_1 = \frac{y_n}{\sigma \|y\|} \geq 0, \quad y_n^* = -\sigma \|y\|. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь специальные случаи отражения в N -мерном евклидовом пространстве. Пусть a — вектор размерности N с элементами

$a_1, a_2, \dots, a_N$; $\mathcal{P}[k+1, k+n]$ — матрица отражения размерности $N \times N$ такая, что элементы отраженного вектора a^* , $a^* = \mathcal{P}[k+1, k+n]a$, определяются следующим образом: $N \geq n > 1$, $k = 0, 1, 2, \dots, N-n$,

$$a_i^* = \begin{cases} a_i, & 1 \leq i < k+1, \quad k+n < i \leq N, \\ 0, & k+1 \leq i \leq k+n. \end{cases}$$

Очевидно, в этом случае матрица $\mathcal{P}[k+1, k+n]$ имеет блочно-диагональную структуру

$$\mathcal{P}[k+1, k+n] = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & Q[1, n] & \\ & & I_2 \end{bmatrix},$$

где I_1 — единичная матрица размерности $k \times k$, I_2 — единичная матрица размерности $(N-k-n) \times (N-k-n)$, $Q[1, n]$ — матрица отражения (2) размерности $n \times n$ с учетом обозначения $y_j = a_{k+j}$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Если отраженный вектор a^* таков, что

$$a_i^* = \begin{cases} a_i, & 1 \leq i < k+1, \quad k+n < i \leq N, \\ 0, & k+1 \leq i < k+n, \end{cases}$$

то для матрицы отражения вводится обозначение $\mathcal{P}[k+n, k+1]$. Полагая вновь $y_j = a_{k+j}$, $j = 1, 2, \dots, n$, и принимая во внимание (6), получим представление матрицы отражения в виде

$$\mathcal{P}[k+n, k+1] = \begin{bmatrix} I_1 & & \\ & Q[n, 1] & \\ & & I_2 \end{bmatrix}.$$

Пусть b — вектор размерности N с элементами $b_1, b_2, \dots, b_N$, b^* — отраженный вектор: $b^* = \mathcal{P}[k+1, k+n]b$ или $b^* = \mathcal{P}[k+n, k+1]b$. Введем обозначения $y_j = a_{k+j}$, $z_j = b_{k+j}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда элементы отраженного вектора b^* определяются следующим образом:

$$b_i^* = \begin{cases} b_i, & 1 \leq i < k+1, \quad k+n < i \leq N; \\ z_{i-k}^*, & k+1 \leq i \leq k+n, \end{cases}$$

где z_j^* вычисляются по формулам (5).

3. Оценка погрешности расчета отраженного вектора. Следуя [3], будем описывать погрешности машинных вычислений при помощи параметров ε_1 , ε_2 и ε_0 — характеристик разрядности ЭВМ, использующей представление числа с плавающей запятой. Здесь ε_1 таково, что $1 + \varepsilon_1$ — наименьшее по модулю машинное число больше единицы, $\varepsilon_2/2$ — нижняя, а $1/\varepsilon_0$ — верхняя граница модулей машинных чисел. Будем предполагать, что все вычисления производятся с одинарной точностью. (Двойную, например, точность можно рассматривать как одинарную за счет выбора ε_1 , ε_2 и ε_0 .) Чтобы отличать точные значения величин от найденных при помощи машинных вычислений, последние заключаются в квадратные скобки.

Расчет отраженного вектора согласно формулам (3)–(5) начинается с нормировки вектора y . Если выполнены ограничения $1/\varepsilon_0 > \|y\|^2 > \varepsilon_2/\varepsilon_1$, то вычисление $\|y\|^2$ сопровождается погрешностью $[\|y\|^2] - \|y\|^2$, оценка которой имеет вид

$$|[\|y\|^2] - \|y\|^2| \leq 2n\varepsilon_1\|y\|^2.$$

Отсюда следует оценка погрешности вычисления нормы y

$$|[\sqrt{\|y\|^2}] - \|y\|| \leq \varepsilon_1 n K_1 \|y\|,$$

где

$$K_1 = \frac{2}{\sqrt{1 - 2n\varepsilon_1} + 1} + \frac{1}{n} \sqrt{1 + 2n\varepsilon_1}.$$

При этом, естественно, предполагается, что n не слишком велико, $n\varepsilon_1 < 1/200$, например. В результате получим следующую оценку погрешности нормировки или вычисления элементов вектора α ($i = 1, 2, \dots, n$):

$$|[\alpha_i] - \alpha_i| \leq \varepsilon_1 n K_2 |\alpha_i| + \frac{\varepsilon_2}{2},$$

$$K_2 = \frac{K_1 + 1/n}{1 - \varepsilon_1 n K_1}.$$

Обратимся далее к выражениям

$$|[(\alpha, z)] - (\alpha, z)| \leq \varepsilon_1 n K_3 \|z\|, \quad \|z\| > \varepsilon_2/\varepsilon_1^*);$$

$$|[1 + \alpha_i] - (1 + \alpha_i)| \leq \varepsilon_1 n K_4;$$

$$|[z_1 + (\alpha, z)] - (z_1 + (\alpha, z))| \leq \varepsilon_1 n K_5 \|z\|,$$

где

$$K_3 = 2 + (1 + 2\varepsilon_1 n) \left(K_2 + \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon_1 \sqrt{n}} \right);$$

$$K_4 = \frac{2}{n} + (1 + \varepsilon_1) \left(K_2 + \frac{\varepsilon_2}{2\varepsilon_1 n} \right);$$

$$K_5 = \frac{5}{2n} + (1 + \varepsilon_1) K_3.$$

С учетом этих оценок находим, что вычисление R в формулах (5) сопровождается погрешностью, допускающей оценку

$$|[R] - R| \leq \varepsilon_1 n K_6, \quad K_6 = \frac{(2 + \varepsilon_1) K_5 + 2(K_4 + 1/n)}{1 - \varepsilon_1 n K_4} + \frac{1}{2n}.$$

Осталось оценить погрешности, связанные с выражениями $R\alpha_i$ и z_i^* . Так как $|R| \leq 2\|z\|$, с точностью до малых порядка ε_1^2 и $\varepsilon_1 \varepsilon_2$

$$|[R\alpha_i] - R\alpha_i| \leq \varepsilon_1 n K_7 \|z\| |\alpha_i| + \varepsilon_2 \left(\|z\| + \frac{1}{2} \right), \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

$$K_7 = \frac{2}{n} + 2K_2 + K_6.$$

Таким образом, оценка $|[z_i^*] - z_i^*|$ имеет вид

$$|[z_i^*] - z_i^*| \leq \varepsilon_1 |z_i^*| + \varepsilon_1 n K_7 \|z\| |\alpha_i| + \varepsilon_2 (1 + \|z\|).$$

Кроме того, поскольку $z_1^* = -(\alpha, z)$,

$$|[z_1^*] - z_1^*| \leq \varepsilon_1 n K_3 \|z\|.$$

Как итог выпишем оценку нормы вектора погрешности $\|[z^*] - z^*\|$. Применяя известное неравенство треугольника, получим

$$\|[z^*] - z^*\| \leq \varepsilon_1 n \|z^*\| \left(K_3 + K_7 + 1 + \frac{1}{n} \right).$$

Здесь учтено условие $\|z\| > \varepsilon_2/\varepsilon_1$, из которого следует

$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 \sqrt{n}} \frac{\|z\| + 1}{\|z\|} < 1.$$

(С указанного места приведенные неравенства выполняются с точностью до малых порядка ε_1^2 и $\varepsilon_1 \varepsilon_2$.) С некоторым запасом будем в дальнейшем считать, что

$$\|[z^*] - z^*\| \leq 15\varepsilon_1 (n + 2) \|z^*\|. \quad (8)$$

*) Точнее $\|z\| > (1 + t)\varepsilon_2/\varepsilon_1$, где $t > 0$ и имеет порядок ε_1 . Кроме того, $\|z\| < 1/\varepsilon_0$.

Напомним, что оценка (8) получена, в частности, при условиях $\|y\| > \sqrt{\varepsilon_2/\varepsilon_1}$ и $\|z\| > \varepsilon_2/\varepsilon_1$. Выполнения первого условия всегда можно добиться масштабированием элементов вектора y (3), поскольку вектор α , очевидно, от этого не зависит. Если не выполняется второе условие, то будем считать вектор z равным нулю.

4. Метод ортогональных встречных прогонок. Обозначим через A_i элементы ленточного массива матрицы A , включая элементы подматрицы A_1 размерности $L \times M$ и подматрицы A_2 размерности $(M-L) \times M$ (см. рис. 1). Тогда построчно система (1) записывается в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M A_{i,j} x_j &= F_i, \quad i = 1, 2, \dots, L; \\ \sum_{j=1}^{M+1} A_{i,j} x_s &= F_i, \quad s = i + j - L - 1, \\ i &= L+1, L+2, \dots, N-M+L; \\ \sum_{j=1}^M A_{i,j} x_s &= F_i, \quad s = N-M+j, \\ i &= N-M+L+1, N-M+L+2, \dots, N. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь F_i — элементы вектора F , x_i — элементы вектора x , $i = 1, 2, \dots, N$. Покажем, существование ортогональной матрицы U такой, что система

$$Uax = UF \quad (10)$$

будет содержать подсистему размерности M с матрицей $B^{[1]}$ относительно неизвестных $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+M-1}$

$$\begin{bmatrix} B_{1,1}^{[1]} & B_{1,2}^{[1]} & \dots & B_{1,M}^{[1]} \\ B_{2,1}^{[1]} & B_{2,2}^{[1]} & \dots & B_{2,M}^{[1]} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{M,1}^{[1]} & B_{M,2}^{[1]} & \dots & B_{M,M}^{[1]} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_{i+M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^{[1]} \\ G_2^{[1]} \\ \vdots \\ G_M^{[1]} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Вектор правых частей (11) обозначим через $G^{[1]}$. Для этого построим последовательность отражений типа $\mathcal{P}[k, s]$, рассмотренных в п. 2, причем в качестве вектора a на k -м шагу берется k -й вектор-столбец — прямой правый ход и $(N+1-k)$ -й вектор-столбец — прямой левый ход — матрицы системы, полученной на $(k-1)$ -м шагу. Матрица U будет представлена в виде произведения матриц типа $\mathcal{P}[k, s]$ прямого правого и прямого левого ходов прогонки (в дальнейшем — просто правый и левый ходы).

Правый ход прогонки состоит из $i-1$ шагов последовательных вычислений матриц $A^{[k]}$ и векторов правых частей $F^{[k]}$ систем

$$A^{[k]}x = F^{[k]}, \quad k = 1, 2, \dots, i-1, \quad (12)$$

где

$$A^{[k]} = \mathcal{P}[k, L+k]A^{[k-1]}, \quad A^{[0]} = A; \quad (13)$$

$$F^{[k]} = \mathcal{P}[k, L+k]F^{[k-1]}, \quad F^{[0]} = F.$$

Как уже отмечалось, матрица $\mathcal{P}[k, L+k]$ определяется вектором a , совпадающим с k -м вектор-столбцом матрицы $A^{[k-1]}$, вернее, его элементами $a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+L}$, по которым строится подматрица $Q_k[1, L+1]$ матрицы $\mathcal{P}[k, L+k]$. Из определения $\mathcal{P}[k, L+k]$ следует, что строки системы, сформированной в результате правого хода прогонки,

$$A^{[i-1]}x = F^{[i-1]}, \quad (14)$$

с номерами $i, i+1, \dots, i+L-1$ содержат только неизвестные $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+L-1}$.

Действительно, на первом шагу матрица $A^{[0]}$ и вектор $F^{[0]}$ умножаются на $\mathcal{P}[1, L+1]$, содержащей подматрицу $Q_1[1, L+1]$ в левом верх-

нем углу. Практически преобразование сводится к умножению слева на $Q_1[1, L+1]$ матрицы $R_1[1, L+1]$ размерности $(L+1) \times (N+1)$, составленной из коэффициентов первых $L+1$ строк системы,

$$R_1[1, L+1] = \begin{bmatrix} B_{1,1}^{[1]} & B_{1,2}^{[1]} & \dots & B_{1,M}^{[1]} & 0 & F_1 \\ & & & & & 0 \\ B_{L,1}^{[1]} & B_{L,2}^{[1]} & \dots & B_{L,M}^{[1]} & 0 & F_L \\ A_{L+1,1} & A_{L+1,2} & \dots & A_{L+1,M} & A_{L+1,M+1} & F_{L+1} \end{bmatrix},$$

где для удобства введены обозначения $B_{s,j}^{[1]} = A_{s,j}$, $s = 1, 2, \dots, L$, $j = 1, 2, \dots, M$. При этом в качестве элементов вектора a , по которым строится подматрица $Q_1[1, L+1]$, берутся $a_1 = B_{1,1}^{[1]}$, $a_2 = B_{2,1}^{[1]}$, ..., $a_L = B_{L,1}^{[1]}$, $a_{L+1} = A_{L+1,1}$. Поскольку остальные элементы вектора a равны нулю, $a_j = 0$, $j > L+1$, первый вектор-столбец матрицы $A^{[1]}$ будет иметь только один ненулевой элемент в позиции (1.1)

$$A^{[1]} = \mathcal{P}[1, L+1] A^{[0]},$$

$$A^{[1]} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^{[1]} & A_{1,2}^{[1]} & \dots & A_{1,M+1}^{[1]} & 0 & 0 \\ 0 & B_{1,1}^{[2]} & \dots & B_{1,M}^{[2]} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & B_{L,1}^{[2]} & \dots & B_{L,M}^{[2]} & 0 & \\ 0 & A_{L+2,1} & \dots & A_{L+2,M} & A_{L+2,M+1} & \end{bmatrix}.$$

При умножении матрицы $Q_1[1, L+1]$ на вектор-столбцы $R_1[1, L+1]$ используются формулы (5), в которых в качестве вектора z последовательно выступают вектор-столбцы $R_1[1, L+1]$ начиная со второго, исключая тождественно нулевые. Кроме того, согласно (4) $A_{1,1}^{[1]} = -\sigma \|y\|$.

Как видно, геометрия массива ненулевых элементов матрицы $A^{[1]}$ (вернее, элементов, которые не обязательно равны нулю), принадлежащих строкам с номерами 2, 3, ..., $L+2$, повторяет геометрию массива ненулевых элементов матрицы $A^{[0]}$, принадлежащих строкам 1, 2, ..., $L+1$: к массиву $B_{l,j}^{[2]}$, $l = 1, 2, \dots, L$, $j = 1, 2, \dots, M$, добавляются невозмущенные элементы $A_{L+2,1}$, $A_{L+2,2}$, ..., $A_{L+2,M+1}$ матрицы $A^{[0]}$. Поэтому описание второго шага с точностью до значений индексов повторяет сказанное выше относительно первого шага правого хода прогонки.

На втором шагу по элементам вектора $a: a_2 = B_{1,1}^{[2]}$, $a_3 = B_{2,1}^{[2]}$, ..., $a_{L+1} = B_{L,1}^{[2]}$, $a_{L+2} = A_{L+2,1}$ строится матрица $Q_2[1, L+1]$. Преобразование $A^{[1]}$ и $F^{[1]}$, задаваемое $\mathcal{P}[2, L+2]$, сводится к умножению слева на $Q_2[1, L+1]$ матрицы $R_2[1, L+1]$ размерности $(L+1) \times (L+1)$, где

$$R_2[1, L+1] = \begin{bmatrix} 0 & B_{1,1}^{[2]} & B_{1,2}^{[2]} & \dots & B_{1,M}^{[2]} & 0 & F_2^{[1]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & B_{L,1}^{[2]} & B_{L,2}^{[2]} & \dots & B_{L,M}^{[2]} & 0 & F_{L+1}^{[1]} \\ 0 & A_{L+2,1} & A_{L+2,2} & \dots & A_{L+2,M} & A_{L+2,M+1} & F_{L+2} \end{bmatrix}.$$

В результате матрица $A^{[2]}$ будет иметь вид

$$A^{[2]} = \mathcal{P}[2, L+2] A^{[1]},$$

$$A^{[2]} = \begin{bmatrix} A_{1,1}^{[1]} & A_{1,2}^{[1]} & A_{1,3}^{[1]} & \dots & A_{1,M+1}^{[1]} & 0 \\ 0 & A_{2,1}^{[2]} & A_{2,2}^{[2]} & A_{2,3}^{[2]} & \dots & A_{2,M+1}^{[2]} & 0 \\ 0 & 0 & B_{1,1}^{[3]} & B_{1,2}^{[3]} & \dots & B_{1,M}^{[3]} & \\ 0 & 0 & B_{L,1}^{[3]} & B_{L,2}^{[3]} & \dots & B_{L,M}^{[3]} & \\ 0 & 0 & A_{L+3,1} & A_{L+3,2} & \dots & A_{L+3,M} & A_{L+3,M+1} \end{bmatrix}.$$

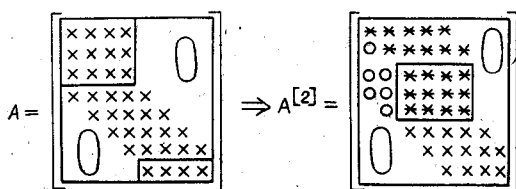


Рис. 2.

Здесь $A_{2,1}^{[2]} = -\sigma \|y\|$ согласно (4). Далее при умножении матрицы $Q_2[1, L+1]$ на вектор-столбцы $R_2[1, L+1]$ вновь используются формулы (5), в которых в качестве вектора z последовательно выступают вектор-столбцы $R_2[1, L+1]$ начиная со второго, исключая

тождественно нулевые. И так далее.

Очевидно, после $(i-1)$ -го шага получим матрицу $A^{[i-1]}$ системы (14) в виде $i = 2, 3, \dots, N-M+1$,

$$A^{[i-1]} = U^{[i-1]} A, \quad U^{[i-1]} = \mathcal{P}[i-1, L+i-1] \times \dots \times \mathcal{P}[1, L+1], \quad (15)$$

$$A^{[i-1]} = \begin{bmatrix} A_{i-1,1}^{[i-1]} & A_{i-1,2}^{[i-1]} & \dots & A_{i-1,M+1}^{[i-1]} & \dots & 0 \\ & B_{1,1}^{[i]} & \dots & B_{1,M}^{[i]} & \dots & 0 \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & B_{L,1}^{[i]} & \dots & B_{L,M}^{[i]} & \dots & \\ & A_{L+i,1} & \dots & A_{L+i,M} & \dots & A_{L+i,M+1} \end{bmatrix},$$

что и доказывает наше утверждение относительно $A^{[i-1]}$, так как элемент $B_{1,1}^{[i]}$ занимает позицию (i, i) .

При $i=1$ правого хода прогонки не требуется, поскольку первые L строк системы (1) уже содержат только $x_1, x_2, \dots, x_M$. Заметим также, что при $i=N-M+1$ в результате правого хода прогонки образуется подсистема (11) относительно последних M элементов вектора x . Таким образом, в этом случае $U = U^{[N-M]}$.

На рис. 2 изображена структура матрицы A , $N=8$, $L=3$, где крестиками обозначены элементы ленточного массива. В прямоугольники заключены составляющие граничных строк. Пусть целью прогонки является формирование подсистемы относительно последних M элементов вектора x . Тогда после двух шагов правого хода прогонки имеем матрицу $A^{[2]}$. Здесь звездочкой отмечены возмущенные элементы A . В прямоугольник заключены строки системы с матрицей $A^{[2]}$, содержащие только x_3, x_4, x_5 и x_6 . Кроме того, выделены элементы A , ставшие нулями.

Приступим к описанию левого хода прогонки, выражающегося в следующей последовательности ортогональных преобразований системы (14):

$$\tilde{A}^{[k]} x = \tilde{F}^{[k]}, \quad k = 1, 2, \dots, i_*, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{[k]} &= \mathcal{P}[k_*, k_* - M + L] \tilde{A}^{[k-1]}, \quad \tilde{A}^{[0]} = A^{[i-1]}, \\ \tilde{F}^{[k]} &= \mathcal{P}[k_*, k_* - M + L] \tilde{F}^{[k-1]}, \quad \tilde{F}^{[0]} = F^{[i-1]}, \\ i_* &= N + 1 - M - i, \\ k_* &= N + 1 - k. \end{aligned} \quad (17)$$

При этом предполагается, что на k -м шагу в качестве вектора a , определяющего k -е ортогональное преобразование, берется $(N+1-k)$ -й вектор-столбец матрицы $\tilde{A}^{[k-1]}$. Покажем, что строки системы

$$\tilde{A}^{[i_*]} x = \tilde{F}^{[i_*]} \quad (18)$$

с номерами $i+L, i+L+1, \dots, i+M-1$ содержат только неизвестные $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+M-1}$.

Для дальнейшего важно подчеркнуть, что преобразование $U^{[i-1]}$ (15) не затрагивает элементы строк исходной системы (1) начиная с номера $L+i$. По этой причине преобразования (17), хотя и применяются к системе (14), не зависят от правого хода в силу их определения. Иными словами, по завершению левого хода коэффициенты строк системы (14)

начиная с номера $L+i-1$ в сторону уменьшения остаются неизменными. Это позволяет описать левый ход прогонки как последовательность ортогональных преобразований системы (1), положив в (17) $\bar{A}^{[0]} = A$, $\bar{F}^{[0]} = F$.

На первом шагу матрица $A^{[0]}$ и вектор $F^{[0]}$ умножаются на $\mathcal{P}[N, N-M+L]$, причем в качестве вектора a рассматривается N -й вектор-столбец $A^{[0]}$. Подматрица $Q_1[M-L+1, 1]$ расположена в нижнем правом углу $\mathcal{P}[N, N-M+L]$. Следовательно, преобразование сводится к умножению слева на $Q_1[M-L+1, 1]$ матрицы $R_1[M-L+1, 1]$ размерности $(M-L+1) \times (M-L+1)$, составленной из коэффициентов последних $M-L+1$ строк системы $A^{[0]}x = F^{[0]}$,

$$s = N - M + L - 1, \quad m = M - 1,$$

$$R_1[M-L+1, 1] = \begin{bmatrix} A_{s,1} & A_{s,2} & \dots & A_{s,M+1} & F_s \\ 0 & 0 & \tilde{B}_{1,1}^{[1]} & \dots & \tilde{B}_{1,M}^{[1]} & F_{s+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \tilde{B}_{m,1}^{[1]} & \dots & \tilde{B}_{m,M}^{[1]} & F_N \end{bmatrix},$$

где для удобства введены обозначения $\tilde{B}_{l,j}^{[1]} = A_{s+1+l,j}$, $l = 1, 2, \dots, M-L$, $j = 1, 2, \dots, M$. Ненулевыми элементами вектора a , по которым строится подматрица $Q_1[M-L+1, 1]$, являются $a_{s+1} = A_{s,M+1}$, $a_{s+2} = \tilde{B}_{1,M}^{[1]}$, $\dots$, $a_N = \tilde{B}_{M-L,M}^{[1]}$. В результате N -й вектор-столбец матрицы $\bar{A}^{[1]}$ имеет только один ненулевой элемент, в позиции (N, N)

$$\bar{A}^{[1]} = \begin{bmatrix} A_{s-1,1} & A_{s-1,2} & \dots & A_{s-1,M+1} & 0 \\ & \tilde{B}_{1,1}^{[2]} & \dots & \tilde{B}_{1,M}^{[2]} & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{B}_{m,1}^{[2]} & \dots & \tilde{B}_{m,M}^{[2]} & 0 \\ & \tilde{A}_{N,1}^{[1]} & \dots & \tilde{A}_{N,M}^{[1]} & \tilde{A}_{N,M+1}^{[1]} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}^{[1]} = \mathcal{P}[N, N-M+L] \bar{A}^{[0]},$$

причем, согласно (7), $\tilde{A}_{N,M+1}^{[1]} = -\sigma \|y\|$. Вычисление остальных ненулевых элементов матрицы произведения $Q_1[M-L+1, 1]R_1[M-L+1, 1]$ производится при помощи (5), как и в случае правого хода прогонки.

На втором шагу по элементам вектора a , $a_s = A_{s-1,M+1}$, $a_{s+1} = \tilde{B}_{1,M}^{[2]}$, $\dots$, $a_{N-1} = \tilde{B}_{M-L,M}^{[2]}$ строится матрица $Q_2[M-L+1, 1]$. Преобразование $\bar{A}^{[1]}$ и $\bar{F}^{[1]}$, задаваемое $\mathcal{P}[N-1, N-M+L-1]$, сводится к умножению слева на $Q_2[M-L+1, 1]$ матрицы $R_2[M-L+1, 1]$ размерности $(M-L+1) \times (M-L+1)$:

$$R_2[M-L+1, 1] = \begin{bmatrix} A_{s-1,1} & A_{s-1,2} & \dots & A_{s-1,M+1} & 0 & F_{s-1} \\ & \tilde{B}_{1,1}^{[2]} & \dots & \tilde{B}_{1,M}^{[2]} & 0 & \tilde{F}_s^{[1]} \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{B}_{m,1}^{[2]} & \dots & \tilde{B}_{m,M}^{[2]} & 0 & \tilde{F}_{N-1}^{[1]} \end{bmatrix}.$$

В результате матрица $\bar{A}^{[2]}$ будет иметь вид

$$\bar{A}^{[2]} = \begin{bmatrix} A_{s-2,1} & A_{s-2,2} & \dots & A_{s-2,M+1} & 0 & 0 \\ & \tilde{B}_{1,1}^{[3]} & \dots & \tilde{B}_{1,M}^{[3]} & 0 & 0 \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ & \tilde{B}_{m,1}^{[3]} & \dots & \tilde{B}_{m,M}^{[3]} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}_{N-1,1}^{[2]} & \dots & \tilde{A}_{N-1,M}^{[2]} & \tilde{A}_{N-1,M+1}^{[2]} & 0 \\ & \tilde{A}_{N,1}^{[1]} & \dots & \tilde{A}_{N,M}^{[1]} & \tilde{A}_{N,M+1}^{[1]} \end{bmatrix},$$

$$\bar{A}^{[2]} = \mathcal{P}[N-1, N-M+L-1] \bar{A}^{[1]}$$

и т. д. Очевидно, при $k = i_* = N + 1 - M - i$ получим матрицу $\tilde{A}^{[i+1]}$ следующего вида:

$$\tilde{A}^{[i+1]} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & B_{L,1}^{[i]} & \dots & B_{L,M}^{[i]} & \dots & \dots \\ & \tilde{B}_{1,1}^{[i+1]} & \dots & \tilde{B}_{1,M}^{[i+1]} & \dots & \dots \\ 0 & \tilde{B}_{m,1}^{[i+1]} & \dots & \tilde{B}_{m,M}^{[i+1]} & \dots & 0 \\ & \tilde{A}_{M+i,1}^{[i+1]} & \dots & \tilde{A}_{M+i,M}^{[i+1]} & \tilde{A}_{M+i,M+1}^{[i+1]} & \dots \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A}^{[i+1]} = \mathcal{P}[M+i, L+i] \tilde{A}^{[i+1-1]},$$

причем элемент $\tilde{B}_{m,M}^{[i+1]}$ занимает позицию $(N - i_*, N - i_*)$. Следовательно, строки системы (18) с номерами $i+L, i+L+1, \dots, i+M-1$ действительно содержат только неизвестные $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+M-1}$. Более того, это же относится и к строкам с номерами $i, i+1, \dots, i+L-1$.

Таким образом, после i_* шагов левого хода прогонки в результате преобразования

$$\tilde{A}^{[i+1]} = \tilde{U}^{[i+1]} A, \quad \tilde{F}^{[i+1]} = \tilde{U}^{[i+1]} F,$$

или, что то же самое,

$$\tilde{A}^{[i+1]} = \tilde{U}^{[i+1]} A^{[i-1]}, \quad \tilde{F}^{[i+1]} = \tilde{U}^{[i+1]} F^{[i-1]},$$

где

$$\tilde{U}^{[i+1]} = \mathcal{P}[M+i, L+i] \times \dots \times \mathcal{P}[N, N-M], \quad (19)$$

т. е. получена система, содержащая подсистему (11) относительно $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+M-1}$. Прогонка завершена, и можно выписать представление искомой ортогональной матрицы U (10) в виде произведения $N-M$ матриц отражения. С учетом (15) и (19) матрица U имеет вид

$$U = \tilde{U}^{[i+1]} U^{[i-1]}, \quad i_* = N + 1 - M - i. \quad (20)$$

Заметим, что при $i = N + 1 - M$ левого хода прогонки не требуется, поскольку последние $M-L$ строки системы (1) уже содержат только $x_{N-M+1}, x_{N-M+2}, \dots, x_N$, которые находятся в результате прямого хода прогонки. При $i=1$ в результате только левого хода прогонки образуется система относительно $x_1, x_2, \dots, x_M$.

На рис. 3 схематично представлен результат прогонки в примере, рассматриваемом на рис. 2. В прямоугольники заключены элементы матрицы подсистемы относительно x_3, x_4, x_5 и x_6 .

5. Формирование локальных систем. Приведем описание процедуры формирования N_* систем (11), из которых затем можно найти все элементы вектора x , за один правый и один левый ходы прогонки. Для этого

вначале запоминаются коэффициенты первых L строк системы (1) или системы (12) при $k=0$, в качестве коэффициентов первых L строк системы (11), $i=1$. Далее, при выполнении правого хода прогонки, т. е. при вычислении коэффициентов системы (12)*, $k=1, 2, \dots, N-M$, запоминаются коэффициенты L строк с элементами $B_{i,j}^{[k+1]}$, если $k=M, 2M, \dots$, и так далее, пока на следующем шагу не окажется, что $k > N-M$. Это

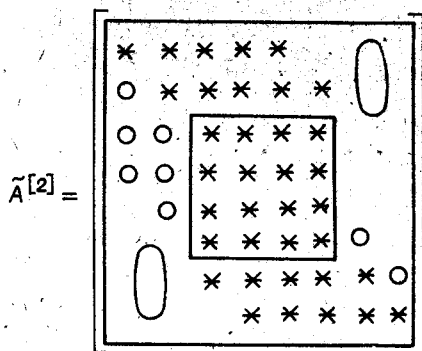


Рис. 3.

* Точнее, элементов массива $R_k[1, L+1]$.

происходит при $k = k_0 = M[\text{INT}(N/M) - 1]$. Кроме того, чтобы процедура не зависела от того, N кратно M , или некратно, запоминаются также же L строк системы (12) при $k = N - M$.

Левому ходу прогонки предшествует запоминание элементов последних $M - L$ строк системы (1) и, таким образом, при $i = N - M + 1$ оказывается полностью определенной система (11). Далее, при вычислении левого хода прогонки, выражающегося в вычислении коэффициентов системы (16), $k = 1, 2, \dots, N - M$, запоминаются коэффициенты $M - L$ строк с элементами $\tilde{B}_{i,j}^{[k+1]}$, если $k = N - M - k_0, N - k_0, \dots, N - M$, в качестве последних $M - L$ строк системы (11). При этом всякий раз оказывается сформированной очередная система (11). Число таких систем равно $\text{INT}(N/M) + 1$. Однако для вычисления элементов вектора x требуется найти решение N_* систем, т. е. на одно меньше, если N кратно M .

6. Обусловленность матрицы подсистемы. Для оценки обусловленности матрицы $B^{[1]}$ системы (11) потребуется теорема отделения Штурма [5]. Приведем ее формулировку. Рассмотрим последовательность симметрических матриц C_r размерности $r \times r$, где $r = 1, 2, \dots, N$. Пусть $\lambda_j(C_r)$, $j = 1, 2, \dots, r$, обозначает j -е собственное число матрицы C_r , причем $\lambda_1(C_r) \leq \lambda_2(C_r) \leq \dots \leq \lambda_r(C_r)$. Тогда $\lambda_j(C_{i+1}) \leq \lambda_j(C_i) \leq \lambda_{j+1}(C_{i+1})$.

Опираясь на теорему отделения, легко показать, что $\mu(B^{[1]}) \leq \mu(A)$, где A — матрица системы (1). Действительно, матрица $\tilde{A}^{[1*]}$ имеет следующую структуру:

$$\tilde{A}^{[1*]} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ \hline B_2 & B_3 \end{bmatrix},$$

где B_1 — подматрица, включающая $B^{[1]}$ как блок в правом нижнем углу, 0 — нулевая подматрица. Обозначим через $\min \sigma$ и $\max \sigma$ соответственно наименьшее и наибольшее сингулярные числа матрицы, указанной в скобках, $\mu = \max \sigma / \min \sigma$. Так как матрица $B_1 B_1^T$ имеет в правом нижнем углу подматрицу $B^{[1]} (B^{[1]})^T$, применив теорему отделения к матрицам $B^{[1]} (B^{[1]})^T$ и $B_1 B_1^T$, получим $\min \sigma^2(B_1) \leq \min \sigma^2(B^{[1]}) \leq \max \sigma^2(B_1) \leq \max \sigma^2(B^{[1]})$, т. е. $\mu(B^{[1]}) \leq \mu(B_1)$. В свою очередь, матрица $\tilde{A}^{[1*]} (\tilde{A}^{[1*]})^T$ имеет в левом верхнем углу подматрицу $B_1 B_1^T$. Следовательно, $\mu(B_1) \leq \mu(\tilde{A}^{[1*]})$. Остается вспомнить, что $\tilde{A}^{[1*]} = UA$, где U — ортогональная матрица, поэтому $\mu(\tilde{A}^{[1*]}) = \mu(A)$.

7. Оценка погрешностей коэффициентов локальной системы. Приведение системы (1) к (10) сопровождается накоплением ошибок округлений, связанных с серией не более чем из $N - M$ ортогональных преобразований. Поэтому вместо системы

$$Wx = V, \quad W = UA, \quad V = UF, \quad (21)$$

получим возмущенную систему

$$W\tilde{x} = \tilde{V}, \quad W = W + w, \quad \tilde{V} = V + v, \quad (22)$$

где матрица w и вектор v моделируют результат влияния ошибок округлений. Система (22) содержит возмущенную подсистему (11) относительно элементов $\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}, \dots, \tilde{x}_{i+M-1}$ вектора $\tilde{x}$ с матрицей $B^{[1]}$ и правой частью $G^{[1]}$

$$B^{[1]} = B^{[1]} + b^{[1]}, \quad G^{[1]} = G^{[1]} + g^{[1]}, \quad (23)$$

где $b^{[1]}$ — подматрица w , точно так же как $B^{[1]}$ — подматрица W ; $g^{[1]}$ — вектор, составленный из элементов $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+M-1}$ вектора v . Отметим, что размерность матриц отражений $Q_i[1, L+1]$ и $Q_i[M-L+1, 1]$, используемых при правом и левом ходах прогонки, не превышает $(M+1) \times (M+1)$. Следовательно, согласно (8) относительные погрешности нормы отраженного вектор-столбца матрицы и отраженного векто-

ра правых частей преобразуемой системы не превосходят величины θ , равной $15\epsilon_1(M+3)$.

Ссылаясь на [3], выпишем оценку нормы вектора v . Так как число ортогональных преобразований не превосходит $N-M$,

$$\|v\| < (N-M)\theta e^{(N-M)\theta}\|V\|, \quad \theta = 15\epsilon_1(M+3). \quad (24)$$

Подобная оценка имеет место и для вектор-столбцов матрицы w . Обозначим через A_k , W_k и w_k , $k=1, 2, \dots, N$, вектор-столбцы матриц A , W и w соответственно. Тогда получим

$$\|w_k\| < (N-M)\theta e^{(N-M)\theta}\|W_k\|.$$

Однако учет ленточной структуры матрицы W позволяет уточнить эту оценку. Как легко заметить, каждый из вектор-столбцов A_k матрицы A содержит не более чем $M+1$ ненулевых элементов и в силу этого подвергается не более чем $M+1$ ортогональным преобразованиям с целью формирования локальной системы. Поэтому

$$\|w_k\| \leq (M+1)\theta e^{(M+1)\theta}\|W_k\|. \quad (25)$$

Оценки норм (24) и (25) можно представить также в виде

$$\|v\| \leq \frac{\delta_1}{1-\delta_1}\|V\|, \quad \|w_k\| \leq \frac{\delta_2}{1-\delta_2}\|W_k\|,$$

где

$$\delta_1 = (N-M)\theta e^{(N-M)\theta}, \quad \delta_2 = (M+1)\theta e^{(M+1)\theta}, \quad \delta_1 < 1, \quad \delta_2 < 1.$$

Напомним, что $\|V\| = \|F\|$ и $\|W_k\| = \|A_k\|$.

Так как $\|g^{[i]}\| \leq \|v\|$, возмущение правых частей локальной системы характеризуется оценкой

$$\|\tilde{G}^{[i]} - G^{[i]}\| = \|g^{[i]}\| \leq \frac{\delta_1}{1-\delta_1}\|F\|. \quad (26)$$

Далее заметим, что матрица $b^{[i]}$ образуется из элементов M вектор-столбцов матрицы w , поэтому

$$\|\tilde{B}^{[i]} - B^{[i]}\|_E = \|b^{[i]}\|_E \leq \sqrt{\sum_{j=1}^M \|w_{i+j-1}\|^2} \leq \frac{\delta_2}{1-\delta_2} \sqrt{\sum_{j=1}^M \|A_{i+j-1}\|^2}.$$

Это означает, что возмущение матрицы $B^{[i]}$ характеризуется оценкой

$$\|\tilde{B}^{[i]} - B^{[i]}\| \leq \delta_0 \|B^{[i]}\|_E, \quad (27)$$

где

$$\delta_0 = \frac{\delta_2}{(1-\delta_2)\|B^{[i]}\|_E} \sqrt{\sum_{j=1}^M \|A_{i+j-1}\|^2}$$

— параметр, определяемый после формирования локальной системы.

Теперь можно непосредственно воспользоваться результатами [3] при исследовании решения локальной системы. Принимая во внимание лишь (27), вычисляются $\|\tilde{B}^{[i]}\|$, $\|(B^{[i]})^{-1}\|$ и $\mu(\tilde{B}^{[i]})$. Найденная при этом оценка нормы абсолютной погрешности решения дополняется учетом (26).

8. Заключение. Основные особенности метода ортогональных встречных прогонок рассмотрены без детального его анализа. С этой точки зрения описание варианта с приведением (11) к системе с трехдиагональной матрицей во многом повторило бы уже сказанное, поэтому ограничимся упоминанием о такой возможности. Тем не менее реализация на ЭВМ подтверждает работоспособность этого варианта прогонки. Отметим, что во многих тестовых примерах с известной обусловлен-

ностью матрицы A обусловленность локальных матриц оказалась на порядок меньше.

Автор выражает искреннюю благодарность С. К. Годунову за проявленный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений.— М.: Наука, 1978.— 592 с.
2. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений.— М.: Наука, 1970.— 564 с.
3. Годунов С. К. Решение систем линейных уравнений.— Новосибирск: Наука, Сиб. отд-ние, 1980.— 177 с.
4. Фадеев С. И. Численное решение системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей методом ортогональных встречных прогонок.— В кн.: Методы сплайн-функций (Вычислительные системы, вып. 98). Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983, с. 103—130.
5. Беллман Р. Введение в теорию матриц.— М.: Наука, 1976.— 352 с.