

9. Бари Н. К., Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1956, т. 5, с. 484—521.
10. Лизоркин П. И. Свойства функций из пространств $\Lambda^r_{p\theta}$. — Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1974, т. 131, с. 158—181.
11. Лизоркин П. И. Мультипликаторы интегралов Фурье и оценки сверток.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, т. 34, с. 218—247.
12. Калябин Г. А. Описание следов для анизотропных пространств типа Лизоркина — Трибеля.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1979, т. 150, с. 160—173.
13. Гольдман М. Л. Описание следов для некоторых функциональных классов.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1979, т. 150, с. 99—126.
14. Берколайко М. З. О следах обобщенных пространств дифференцируемых функций со смешанной нормой.— Докл. АН СССР, 1985, т. 277, № 2, с. 270—274.
15. Бухвалов А. В. Интерполяция операторов в пространствах вектор-функций с приложениями к сингулярным интегральным операторам.— Докл. АН СССР, 1984, т. 278, № 3, с. 523—526.
16. Берколайко М. З., Овчинников В. И. Неравенства для целых функций экспоненциального типа в симметричных пространствах.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1983, т. 161, с. 3—17.
17. Овчинников В. И. Интерполяционные теоремы, вытекающие из неравенства Гротендика.— Функцион. анализ и его прил., 1976, т. 10, № 4, с. 45—54.

Б. И. БОТВИННИК

МУЛЬТИПЛИКАТИВНОСТЬ В ТЕОРИЯХ КОБОРДИЗМОВ МНОГООБРАЗИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Наиболее известные экстраординарные теории когомологий (теории кобордизмов, k -теории) обладают естественной мультипликативной структурой, которая играет важную роль в приложениях этих теорий. Вопрос о сохранении этой структуры при переходе к теориям когомологий с коэффициентами нетривиален и требует специального рассмотрения (см. [1]).

Теории кобордизмов многообразий с особенностями естественно обобщают теории кобордизмов с коэффициентами. Мультипликативность в некоторых конкретных теориях кобордизмов многообразий с особенностями изучена в работах Дж. Моравы [2] и У. Вёрглера [3]. Общее геометрическое исследование мультипликативности в теориях кобордизмов многообразий с особенностями было проведено О. К. Мироновым в работах [4, 5]. Именно он построил геометрические препятствия, которые отвечают за существование допустимого внешнего умножения и за его коммутативность и ассоциативность. (Допустимое внешнее умножение — это умножение, которое согласовано с мультипликативной структурой в исходной теории кобордизмов.) Конструкция О. К. Миронова позволила полностью изучить допустимое внешнее умножение во многих теориях кобордизмов многообразий с особенностями. Тем не менее препятствия к коммутативности и ассоциативности допустимого внешнего умножения были определены О. К. Мироновым при условии, что на многообразиях, по которым вводятся особенности, определена инволюция, обращающая на них (B, f) -структуру. В конкретных ситуациях это условие проверить довольно трудно — далеко не всегда класс кобордизмов задается геометрически, он может быть задан как характеристический класс некоторого расслоения или описан чисто алгебраически в терминах спектральной последовательности и т. д. Такова ситуация для теорий симплектических кобордизмов с особенностями, введенных В. В. Вершининым [6].

Целью настоящей работы является изучение мультипликативности в теориях кобордизмов многообразий с особенностями в общем случае, т. е. когда на многообразиях, по которым вводятся особенности, не наложены априорные ограничения. Отметим, что в геометрических конструкциях этой работы активно используются методы, разработанные О. К. Мироновым (см. [4, 5]).

Автор выражает искреннюю благодарность В. В. Вершинину и О. К. Миронову за полезные обсуждения материала этой статьи.

§ 1. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ О ТЕОРИЯХ КОБОРДИЗМОВ МНОГООБРАЗИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Как и в работах [4, 5], рассматриваются многообразия с (B, f) -структурой в смысле Стонга [7]. Соответствующие теории бордизмов и кобордизмов обозначим Ω_* и Ω^* соответственно. Предположим, что оператор прямого произведения многообразий задает мультипликативную структуру в теориях Ω_* и Ω^* с обычными свойствами (см., например, [4, § 2]). Зафиксируем последовательность $P_1, \dots, P_k, \dots$ замкнутых многообразий и введем обозначения: $\Sigma_k = (P_1, \dots, P_k)$, $k = 1, 2, \dots$, $\Sigma = (P_1, \dots, P_k, \dots)$.

Определение 1.1 (см. [4, § 1]). Многообразие M называется Σ_k -многообразием (многообразием с особенностями типа Σ_k , см. [8]), если зафиксированы

а) разбиение $\partial M = \partial_0 M \cup \partial_1 M \cup \dots \cup \partial_k M$ края ∂M в такое объединение многообразий, что для любого множества индексов $I = \{i_1, \dots, i_l\} \subset \{0, 1, \dots, k\}$ пересечение

$$\partial_I M = \partial_{i_1} M \cap \dots \cap \partial_{i_l} M$$

является многообразием и

$$\partial(\partial_I M) = \bigcup_{j \notin I} (\partial_I M \cap \partial_j M);$$

б) согласованные структуры прямого произведения

$$\varphi_I: \partial_I M \longrightarrow \beta_I M \times P_{i_1} \times \dots \times P_{i_l}$$

(т. е. диффеоморфизмы, сохраняющие (B, f) -структуру), $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq k$, где $\beta_I M$ — некоторые многообразия.

Согласованность означает, что если $I \subset J = \{j_1, \dots, j_m\}$ — вложение упорядоченных множеств, $\nu: \partial_J M \rightarrow \partial_I M$ — вложение, то отображение

$$\varphi_I \circ \nu \circ \varphi_J^{-1}: \beta_J M \times P^J \longrightarrow \beta_I M \times P^I$$

тождественно на прямом сомножителе P^I . (Здесь $P^I = P_{i_1} \times \dots \times P_{i_l}$, $P^J = P_{j_1} \times \dots \times P_{j_m}$.)

Определим отношение эквивалентности на Σ_k -многообразии M следующим образом: две точки $x, y \in M$ эквивалентны, если они лежат в некотором многообразии $\partial_I M$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_l \leq k$ и $pr \circ \varphi_I(x) = pr \circ \varphi_I(y)$, где $pr: \beta_I M \times P^I \rightarrow \beta_I M$ — проекция на прямой сомножитель. Фактор-пространство топологического пространства M по этому отношению эквивалентности называется моделью Σ_k -многообразия M и обозначается M_Σ .

Границей δM Σ_k -многообразия M называется многообразие $\partial_0 M$ с индуцированной структурой Σ_k -многообразия: $\partial_0(\partial_0 M) = \emptyset$, $\partial_i(\partial_0 M) = \partial_i M \cap \partial_0 M$.

Многообразия $\beta_I M$ имеют естественную структуру Σ_k -многообразий:

$$\partial_j(\beta_I M) = \emptyset, \text{ если } j \notin I = \{i_1, \dots, i_l\},$$

$$\beta_I M = \beta_{i_1}(\beta_{i_2}(\dots(\beta_{i_l} M) \dots)).$$

Сингулярным Σ_k -многообразием пары топологических пространств (X, Y) называется пара (M, f) , где M — Σ_k -многообразие, $f: (M, \delta M) \rightarrow (X, Y)$ — непрерывное отображение такое, что для любого множества $I = \{i_1, \dots, i_l\} \subset \{0, 1, \dots, k\}$ отображение $f|_{\partial_I M}$ представляет собой композицию:

$$f|_{\partial_I M} = f_I \circ pr \circ \varphi_I,$$

где $pr: \beta_I M \times P^I \rightarrow \beta_I M$ — проекция на прямой сомножитель, $f_I: \beta_I M \rightarrow X$ — непрерывное отображение. (В этом случае отображение f представляется в виде композиции $f = f_\Sigma \circ \pi$, где $\pi: M \rightarrow M_\Sigma$ — каноническая

проекция, $f_\Sigma: M_\Sigma \rightarrow X$ — непрерывное отображение.) Тем самым определены теории бордизмов $\Omega_*^{\Sigma_h}$ и кобордизмов $\Omega_{\Sigma_h}^*$. Теории Ω_*^{Σ} и Ω_{Σ}^* определяются как прямые пределы теории $\Omega_*^{\Sigma_h}$ и $\Omega_{\Sigma_h}^*$ соответственно. Как хорошо известно (см. [8]), теории $\Omega_*^{\Sigma_h}$, $\Omega_{\Sigma_h}^*$ являются экстраординарными теориями гомологий и когомологий соответственно.

Напомним, что теория $\Omega_*^{\Sigma_h}$ является модулем над теорией бордизмов Ω_* . Мы называем внешнее умножение μ в теории $\Omega_*^{\Sigma_h}$ допустимым, если оно согласовано с этой модульной структурой (см. [8] и § 2).

Так же как и в работах [4, 5], построение допустимого внешнего умножения и изучение его свойств проводится по следующей схеме. Сначала по данным Σ -многообразиям строится новое Σ -многообразие, затем эта конструкция проводится для сингулярных Σ -многообразий, проверяется ее согласованность с операцией взятия границы, таким образом она определяется для классов бордизмов Σ -многообразий. Для формализации этой схемы удобно понятие канонической конструкции, введенное О. К. Мироновым [5].

Определение 1.2 (см. [5, § 2]). Канонической n -линейной конструкцией $\mathfrak{K}$ размерности p называется правило, относящее каждому упорядоченному набору Σ -многообразий $(M_1^{m_1}, \dots, M_n^{m_n})$ многообразие $\mathfrak{K}(M_1, \dots, M_n)$ размерности $m_1 + \dots + m_n + p$, подмногообразие $\mathfrak{L}(M_1, \dots, M_n)$ его края $\mathfrak{L}(M_1, \dots, M_n) \subset \delta \mathfrak{K}(M_1, \dots, M_n)$ размерности $m_1 + \dots + m_n + p - 1$ и непрерывное отображение

$$\pi(M_1, \dots, M_n): (\mathfrak{K}(M_1, \dots, M_n))_\Sigma \rightarrow (M_1)_\Sigma \times \dots \times (M_n)_\Sigma.$$

При этом должны выполняться следующие свойства.

1. **Согласованность с границей.** Существует разложение $\delta \mathfrak{K}(M_1, \dots, M_n) = \mathfrak{L}(M_1, \dots, M_n) \cup \left(\bigcup_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq n \\ 1 \leq l \leq n}} \mathfrak{K}(\delta_{i_1 \dots i_l}(M_1, \dots, M_n)) \right),$

где отображение $\delta_{i_1 \dots i_l}$ сопоставляет набору $(M_1, \dots, M_n)$ набор $(L_1, \dots, L_n)$, где

$$L_j = \begin{cases} M_j, & \text{если } j \notin I = \{i_1, \dots, i_l\}, \\ \delta M_j, & \text{если } j \in I. \end{cases}$$

Для этого разложения должны выполняться следующие равенства:

$$\mathfrak{L}(M_1, \dots, M_n) \cap \mathfrak{K}(\delta_I(M_1, \dots, M_n)) = \mathfrak{L}(\delta_I(M_1, \dots, M_n)),$$

$$\delta \mathfrak{K}(\delta_I(M_1, \dots, M_n)) = \mathfrak{L}(\delta_I(M_1, \dots, M_n)) \cup (\mathfrak{K}(\delta_J(M_1, \dots, M_n))),$$

$$\pi(M_1, \dots, M_n)|_{\mathfrak{K}(\delta_I(M_1, \dots, M_n))} = \pi(\delta_I(M_1, \dots, M_n)).$$

2. **Согласованность с умножением на многообразии L' без особенностей.** Должно быть справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{K}(M_1, \dots, M_{j-1}, M_j \times L, M_{j+1}, \dots, M_n) = \\ & = (-1)^{l(m_{j+1} + \dots + m_n + p)} \mathfrak{K}(M_1, \dots, M_{j-1}, M_j, M_{j+1}, \dots, M_n) \times L, \\ & \mathfrak{L}(M_1, \dots, M_{j-1}, M_j \times L, M_{j+1}, \dots, M_n) = \\ & = (-1)^{l(m_{j+1} + \dots + m_n + p - 1)} \mathfrak{L}(M_1, \dots, M_{j-1}, M_j, M_{j+1}, \dots, M_n) \times L, \\ & \pi(M_1, \dots, M_{j-1}, M_j \times L, M_{j+1}, \dots, M_n) = \\ & = \pi(M_1, \dots, M_n) \times Id. \end{aligned}$$

3. Согласованность со склеиванием. Если $M_j = M'_j \cup_{M_j} M''_j$,

то

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}(M_1, \dots, M_j, \dots, M_n) &= \\ &= \mathfrak{K}(M_1, \dots, M'_j, \dots, M_n) \cup_{\mathfrak{K}(M_1, \dots, M''_j, \dots, M_n)} \mathfrak{K}(M_1, \dots, M''_j, \dots, M_n), \\ &= \mathfrak{L}(M_1, \dots, M_j, \dots, M_n) = \\ &= \mathfrak{L}(M_1, \dots, M'_j, \dots, M_n) \cup_{\mathfrak{L}(M_1, \dots, M''_j, \dots, M_n)} \mathfrak{L}(M_1, \dots, M''_j, \dots, M_n), \\ &= \pi(M_1, \dots, M_j, \dots, M_n) = \\ &= \pi(M_1, \dots, M'_j, \dots, M_n) \cup_{\pi(M_1, \dots, M''_j, \dots, M_n)} \pi(M_1, \dots, M''_j, \dots, M_n). \end{aligned}$$

Границей $\partial\mathfrak{K}$ канонической конструкции $\mathfrak{K}$ называется каноническая конструкция

$$\mathfrak{L}: (M_1, \dots, M_n) \rightarrow \mathfrak{L}(M_1, \dots, M_n).$$

Каноническая конструкция $\mathfrak{K}$ замкнута, если $\mathfrak{L}(M_1, \dots, M_n) = \emptyset$ для каждого набора Σ -многообразий $(M_1, \dots, M_n)$.

Простейшими примерами канонических конструкций являются умножение на многообразие N без особенностей $M \mapsto M \times N$ и оператор Бокштейна $\beta_k: M \mapsto \beta_k M$.

Отметим простейшие свойства канонических конструкций.

1. Склеивание вдоль границ двух канонических конструкций есть каноническая конструкция.

2. Суперпозиция канонических конструкций есть каноническая конструкция.

Использование канонических конструкций для доказательства теорем о теориях бордизмов и кобордизмов Σ -многообразий основано на следующем факте (см. [5, § 1]).

Предложение 1.3. Замкнутая n -линейная каноническая конструкция $\mathfrak{K}$ размерности p определяет для набора конечных комплексов $X_1, \dots, X_n$ гомоморфизмы $\Omega^*(pt)$ -модулей:

$$\Omega^*(\mathfrak{K}): \Omega_{\Sigma^1}^{m_1}(X_1) \otimes \dots \otimes \Omega_{\Sigma^n}^{m_n}(X_n) \rightarrow \Omega_{\Sigma^{1+\dots+m_n+p}}^{m_1+\dots+m_n+p}(X_1 \times \dots \times X_n),$$

$$\Omega_*(\mathfrak{K}): \Omega_{\Sigma^1}^{\Sigma}(X_1) \otimes \dots \otimes \Omega_{\Sigma^n}^{\Sigma}(X_n) \rightarrow \Omega_{\Sigma^{1+\dots+m_n+p}}^{\Sigma}(X_1 \otimes \dots \otimes X_n),$$

естественные по отношению к отображениям клеточных комплексов и коммутирующие с граничными гомоморфизмами. Если каноническая конструкция $\mathfrak{K}$ является границей некоторой канонической конструкции, то гомоморфизмы $\Omega_*(\mathfrak{K})$, $\Omega^*(\mathfrak{K})$ тривиальны для любого набора комплексов $X_1, \dots, X_n$.

§ 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ДОПУСТИМОГО ВНЕШНЕГО УМНОЖЕНИЯ

Вопросы о существовании внешнего умножения в теориях гомологий h_* и когомологий h^* эквивалентны; мы будем изучать умножение в теориях бордизмов Ω_*^{Σ} ввиду удобной геометрической интерпретации этих теорий.

Как было отмечено, теория $\Omega_*^{\Sigma h}$ является модулем над теорией Ω_* ; это означает, что определены спаривания

$$\mu_{h,R}: \Omega_*^{\Sigma h} \otimes \Omega_* \rightarrow \Omega_*^{\Sigma h},$$

$$\mu_{h,K}: \Omega_* \otimes \Omega_*^{\Sigma h} \rightarrow \Omega_*^{\Sigma h}.$$

Определение 2.1. Внешнее умножение μ_k в теории $\Omega_*^{\Sigma_k}$ называется допустимым, если оно согласовано со спариваниями $\mu_{k,R}$ и $\mu_{k,L}$, т. е. для любых элементов $x \in \Omega_*(X, X_1)$, $y \in \Omega_*^{\Sigma_k}(Y, Y_1)$ имеют место равенства

$$\mu_k(\pi_k(x) \otimes y) = \mu_{k,L}(x \otimes y), \mu_k(y \otimes \pi_k(x)) = \mu_{k,R}(y \otimes x),$$

где $\pi_k: \Omega_* \rightarrow \Omega_*^{\Sigma_k}$ — естественное преобразование, порожденное отображением, сопоставляющим многообразию M его само, рассматриваемое как Σ -многообразие, т. е. $\partial_j M = \emptyset$, $j = 1, \dots, k$.

Из определений и предложения 1.3 вытекает

Лемма 2.2. Каноническая билинейная конструкция $\mathfrak{K}$ размерности 0, определенная на категории пар Σ_k -многообразий, такая, что $\mathfrak{K}(pt, pt) = pt$, задает допустимое внешнее умножение в теории $\Omega_*^{\Sigma_k}$.

Пусть $\Sigma_i = (P_1, \dots, P_i)$, $i = 1, \dots, k$. Рассмотрим многообразия $P'_i = P_i^{(1)} \times P_i^{(2)} \times I$ как Σ_i -многообразия, полагая

$$\partial_i P'_i = \beta_i P'_i \times P_i = \partial P'_i,$$

$$\beta_i P'_i = (-1)^{p_i+1} P_i^{(1)} \times \{0\} \cup P_i^{(2)} \times \{1\}, P_i = \dim P_i.$$

Заметим, что Σ_i -многообразие P'_i бордантно многообразию без особенностей, если p_i четно или если p_i нечетно и $2[P_i] = 0$.

Теорема 2.3. Пусть $[P'_i]_{\Sigma_i} = 0$ и Q_i — Σ_i -многообразия такие, что $\delta Q_i = P'_i$ для всех $i = 1, \dots, k$. Тогда для каждого $i = 1, \dots, k$ в теории $\Omega_*^{\Sigma_i}$ существует такое допустимое внешнее умножение $\mu_i = \mu_i(Q_1, \dots, Q_i)$, что следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega_*^{\Sigma_{i-1}} \otimes \Omega_*^{\Sigma_{i-1}} & \xrightarrow{\mu_{i-1}} & \Omega_*^{\Sigma_{i-1}} \\ \downarrow \pi_i^{i-1} \otimes \pi_i^{i-1} & & \downarrow \pi_i^{i-1} \\ \Omega_*^{\Sigma_i} \otimes \Omega_*^{\Sigma_i} & \xrightarrow{\mu_i} & \Omega_*^{\Sigma_i} \end{array}$$

коммутативна.

Здесь $\Omega_*^{\Sigma_0} = \Omega_*$, $\mu_0 = \mu$ — умножение в теории Ω_* , $\pi_i^{i-1}: \Omega_*^{\Sigma_{i-1}} \rightarrow \Omega_*^{\Sigma_i}$ — естественное преобразование, порожденное отображением, сопоставляющим Σ_{i-1} -многообразию M его само, т. е. $\partial_i M = \emptyset$.

Доказательство. Рассмотрим случай $k = 1$. Для каждого Σ_1 -многообразия M рассмотрим многообразие $M \times P_1 \times I$ и определим

$$\widehat{M}_{Q_1} = M \times P_1 \times I \cup (-1)^{m+p_1} \beta_1 M \times Q_1,$$

где склейка происходит по многообразиям

$$\beta_1 M \times P_1^{(1)} \times P_1^{(2)} \times I = \beta_1 M \times \delta Q_1.$$

На $\widehat{M}_{Q_1}$ введем Σ_1 -структуру следующим образом (рис. 1):

$$\delta \widehat{M}_{Q_1} = (-1)^{m+p_1} M \times P_1^{(2)} \times \{0\},$$

$$\begin{aligned} \partial_1 \widehat{M}_{Q_1} &= (-1)^{m+p_1+1} \beta_1 M \times \partial_1 Q_1 \cup M \times P_1^{(2)} \times \{1\} = \\ &= (-1)^{m+p_1+1} (\beta_1 M \times \beta Q_1 \cup M \times \{1\}) \times P_1. \end{aligned}$$

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — категория Σ_1 -многообразий. Определим спаривание (каноническую билинейную конструкцию размерности 0) $\mathfrak{m}_1: \mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_1$ по формуле (см. рис. 2)

$$\mathfrak{m}_1(M^m, N^n) = M \times N \cup_{M \times \partial_1 N} (-1)^{n(p_1+1)+1} \widehat{M}_{Q_1} \times \beta_1 N.$$

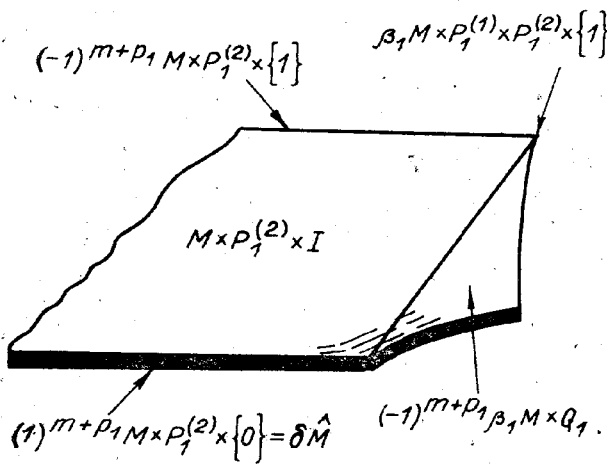


Рис. 1.

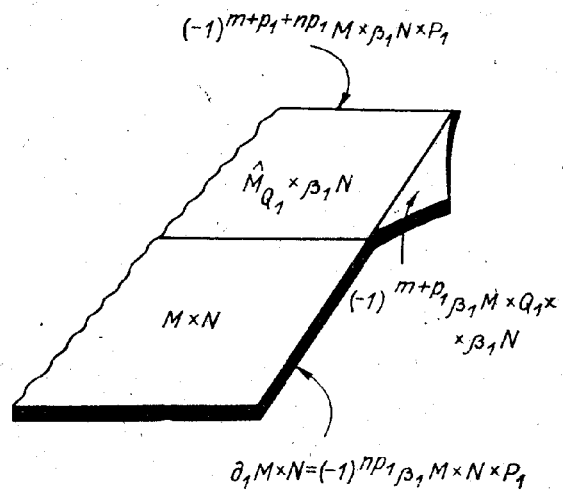


Рис. 2.

Если M — многообразие без особенностей, то $\widehat{M}_{Q_1} = M \times P_1^{(2)} \times I$, и в этом случае многообразие $\mathfrak{m}_1(M, N)$ диффеоморфно многообразию $M \times N$. Если $\partial_1 N = \emptyset$, то, по определению, $\mathfrak{m}_1(M, N) = M \times N$. Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{m}_1$ — каноническая билинейная конструкция размерности 0. Очевидно, что $\mathfrak{m}_1(pt, pt) = pt$. Итак, конструкция определяет допустимое внешнее умножение

$$\mu_1: \Omega_*^{\Sigma_1} \otimes \Omega_*^{\Sigma_1} \longrightarrow \Omega_*^{\Sigma_1}.$$

Совершим индукционный шаг. По индукции предполагаем, что построена конструкция $\mathfrak{m}_i$ для каждого $i \leq k-1$:

$$\mathfrak{m}_i: \mathfrak{M}_i \times \mathfrak{M}_i \longrightarrow \mathfrak{M}_i.$$

Кроме того, определены спаривания

$$\mathfrak{m}_{i, i+1}: \mathfrak{M}_i \times \mathfrak{M}_{i+1} \longrightarrow \mathfrak{M}_{i+1}$$

$$\mathfrak{m}_{i+1, i}: \mathfrak{M}_{i+1} \times \mathfrak{M}_i \longrightarrow \mathfrak{M}_{i+1}$$

такие, что, если M, N — Σ_i -многообразия, то $\mathfrak{m}_i(M, N) = \mathfrak{m}_{i, i+1}(M, N) = \mathfrak{m}_{i+1, i}(M, N)$. При $i=1$ мы рассмотрим Σ_2 -многообразие M , $\partial M = \partial_0 M \cup \partial_1 M \cup \partial_2 M$ как Σ_1 -многообразие следующим образом: $\widetilde{\partial}_1 M = \partial_1 M$, $\widetilde{\partial}_0 M = \partial_0 M \cup \partial_2 M$ и положим

$$\mathfrak{m}_{1,2}(M, N) = \mathfrak{m}_1(\widetilde{M}, N), \quad \mathfrak{m}_{2,1}(N, M) = \mathfrak{m}_1(N, \widetilde{M}).$$

(Здесь N — Σ_1 -многообразие, а $\widetilde{M} = M - \Sigma_1$ -многообразие с введенной выше структурой.)

Наконец рассмотрим для каждого Σ_k -многообразия M^m многообразие вида

$$\widehat{M}_{Q_k} = M \times P_k^{(2)} \times I \cup (-1)^{m-p_k} \mathfrak{m}_{k-1, k}(\beta_k M, Q_k),$$

где склейка происходит по подмногообразиям края, т. е.

$$\partial_k M \times P_k^{(2)} \times I = \beta_k M \times P_k^{(1)} \times P_k^{(2)} \times I = \beta_k M \times P'_k \subset \delta(\mathfrak{m}_{k-1, k}(\beta_k M, Q_k)).$$

Рассмотрим $\widehat{M}_{Q_k}$ как Σ_k -многообразие, полагая

$$\delta(\widehat{M}_{Q_k}) = (-1)^{m+p_k} [M \times P_k^{(2)} \times \{0\} \cup \delta M \times P_k^{(2)} \times I],$$

$$\partial_k(\widehat{M}_{Q_k}) = \partial_k(\mathfrak{m}_{k, k-1}(\beta_k M, Q_k)) \cup (-1)^{m+p_k+1} M \times P_k^{(2)} \times \{1\},$$

$$\partial_i(\widehat{M}_{Q_k}) = \partial_i M \times P_k^{(2)} \times I \cup \partial_i(\mathfrak{m}_{k, k-1}(\beta_k M, Q_k)), \quad i \neq k.$$

Заметим, что $\widehat{M}_{Q_k} = M \times P_k^{(2)} \times I$, если M — Σ_{k-1} -многообразие, поэтому многообразия $\mathfrak{m}_{k, k-1}(M, N)$ и $\mathfrak{m}_k(M, N)$ диффеоморфны. Если N — Σ_{k-1} -многообразие, то, по определению, $\mathfrak{m}_k(M, N) = \mathfrak{m}_{k, k-1}(M, N)$.

Таким образом, спаривание $\mathfrak{m}_k$ является канонической билинейной конструкцией размерности 0 и, согласно лемме 2.1, определяет допустимое внешнее умножение μ_k в теории Ω^{Σ_k} . Согласованность умножения μ_k с умножениями $\mu_1, \dots, \mu_{k-1}$ доказана выше.

Отметим следующее свойство спаривания $\mathfrak{m}_k$:

$$\beta_k(\mathfrak{m}_k(M, N)) = (-1)^{p_k n} \mathfrak{m}_k(\beta_k(M, N)) \cup (-1)^n \mathfrak{m}_k(\mathfrak{m}_k(\beta_k M, \beta_k Q_k), \beta_k N) \cup (-1)^m \mathfrak{m}_k(M, \beta_k N).$$

Предположим, что при $i = 1, \dots, k-1$ зафиксированы Σ_i -многообразия Q_i , $\delta Q_i = P'_i$, которые определяют допустимое внешнее умножение μ_{k-1} в теории $\Omega^{\Sigma_{k-1}}$, $Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)}$ — два Σ_k -многообразия такие, что $\delta Q_k^{(1)} = \delta Q_k^{(2)} = P'_k$. Положим

$$b = b(Q_k^{(1)}, Q_k^{(2)}) = Q_k^{(1)} \cup \{-Q_k^{(2)}\}.$$

Пусть $\mu_k^{(1)}, \mu_k^{(2)}$ — два допустимых внешних умножения в теории Ω^{Σ_k} , определенные наборами многообразий $Q_1, \dots, Q_{k-1}, Q_k^{(1)}$; $Q_1, \dots, Q_{k-1}, Q_k^{(2)}$.

Справедлива следующая

Теорема 2.4. *Имеет место формула*

$$\begin{aligned} \mu_k^{(1)}(x \otimes y) - \mu_k^{(2)}(x \otimes y) = \\ = (-1)^{(p_k+1)\dim y+1} \mu_{k,h-1}(\mu_{k,h-1}(\beta_h x \otimes b) \otimes \beta_h y). \end{aligned}$$

Доказательство проводится сравнением двух конструкций $\mathfrak{m}_k^{(1)}$ и $\mathfrak{m}_k^{(2)}$.

Возможна в принципе такая ситуация, когда препятствия $[P'_i]_{\Sigma_i}$ не равны нулю при $i = 1, \dots, k-1$, но вместе с тем в теории Ω^{Σ_k} эти препятствия, так же как и $[P'_k]_{\Sigma_k}$, тривиальны, т. е. $[P'_i]_{\Sigma_k} = 0$ при $i = 1, \dots, k$. Можно ли при этих условиях определить допустимое внешнее умножение μ_k непосредственно в теории Ω^{Σ_k} ? Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 2.5. *Пусть $\Sigma_k = (P_1, \dots, P_k)$, где $\dim P_i > 0$, $i = 1, \dots, k$, и $\dim P_i \neq \dim P_j$ при $i \neq j$. Тогда если*

$$[P'_1]_{\Sigma_k} = 0, \dots, [P'_k]_{\Sigma_k} = 0,$$

то в теории Ω^{Σ_k} существует допустимое внешнее умножение μ_k , в частности следующая диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Omega_* \otimes \Omega_* & \xrightarrow{\mu} & \Omega_* \\ \downarrow \pi_k \otimes \pi_k & & \downarrow \pi_k \\ \Omega_*^{\Sigma_k} \otimes \Omega_*^{\Sigma_k} & \xrightarrow{\mu_k} & \Omega_*^{\Sigma_k} \end{array}$$

коммулативна.

Доказательство. Многообразие $\mathfrak{m}_k(M, N)$ будем строить индукцией по трем параметрам — числу особенностей M , числу особенностей N и по $\dim M + \dim N$. Именно, будем доказывать следующее

Утверждение $\mathcal{P}_n(i, j)$. *Для всех Σ_k -многообразий M и N таких, что M имеет не более i непустых особенностей, N — не более j непустых особенностей, а $\dim M + \dim N \leq n$, определено Σ_k -многообразие $\mathfrak{m}_k(M, N)$, причем $\mathfrak{m}_k$ является билинейной канонической конструкцией размерности 0, определенной на парах таких Σ_k -многообразий, причем $\mathfrak{m}_k(pt, pt) = pt$.*

1°. Утверждения $\mathcal{P}_n(0, k)$, $\mathcal{P}_n(k, 0)$ доказаны, ибо, по определению, полагаем $\mathfrak{m}_k(M, N) = M \times N$.

2°. Пусть $\dim P_i = p_i$, $p = \min p_i$. Очевидно, что если $n \leq p$, то $\mathcal{P}_n(0, 0) \Rightarrow \mathcal{P}_n(k, k)$. (В этих размерностях отсутствуют многообразия с непустыми особенностями.)

3°. Зафиксируем Σ_k -многообразия Q_i : $\delta Q_i = P'_i$, $i = 1, \dots, k$. Пусть M и N — многообразия с одной особенностью, для определенности, P_1 (если особенности M и N разные, то полагаем $\mathfrak{m}_k(M, N) = M \times N$), $\dim M + \dim N = n$. Предположим, что утверждение $\mathcal{P}_{n-1}(1, 1)$ доказано (начало индукции обеспечивается п. 2°). Тогда положим

$$\mathfrak{m}_k(M, N) = M \times N \cup (-1)^{\alpha_1} \widehat{M}_{Q_1} \times \beta_1 N,$$

т. е. действуем точно так же, как при построении умножения Σ_1 -многообразий ($\alpha_i = \dim N(p_i + 1) + 1$), ибо

$$\widehat{M}_{Q_1} = M \times P_1 \times I \cup (-1)^{m-p_1} \beta_1 N \times Q_1.$$

4°. Предположим, что доказано утверждение $\mathcal{P}_{n-1}(k, k)$. Покажем, что $\mathcal{P}_{n-1}(k, k) \Rightarrow \mathcal{P}_n(1, 2)$. Пусть M и N имеют особенности, скажем, P_1 и P_1, P_2 соответственно. (Если M и N не имеют общих особенностей, то полагаем $\mathfrak{m}_k(M, N) = M \times N$.) Рассмотрим N как многообразие с особенностью P_1 :

$$\delta \bar{N} = \partial_0 N \cup \partial_2 N, \quad \partial_1 \bar{N} = \partial_1 N.$$

Определим

$$\widehat{M}_{Q_1} = M \times P_1^{(2)} \times I \cup (-1)^{\dim M - p_1} \beta_1 M \times Q_1,$$

где склейка происходит по многообразию

$$\beta_1 M \times P'_1 = \beta_1 M \times P_1^{(1)} \times P_1^{(2)} \times I.$$

Рассмотрим многообразия $\mathfrak{m}_k(M, \beta_1 N)$, $\mathfrak{m}_k(Q_1, \beta_1 N)$, которые определены по индукции: первое определено потому, что $\mathfrak{m}_k(M, \beta_1 N) = M \times \beta_1 N$ (многообразия M и $\beta_1 N$ имеют разные особенности), а второе — согласно утверждению $\mathcal{P}_{n-1}(k, k)$ (так как $\dim Q_1 + \dim \beta_1 N \leq n - 1$). Многообразия

$$\mathfrak{m}_k(M, \beta_1 N) \times P_1 \times I, \quad -\beta_1 M \times \mathfrak{m}_k(Q_1, \beta_1 N)$$

склеим по общей границе $\beta_1 M \times P'_1 \times \beta_1 N$. Тем самым построено многообразие $\mathfrak{m}_k(\widehat{M}_{Q_1}, \beta_1 N)$ с границей $M \times \beta_1 N \times P_1$. Положим

$$\mathfrak{m}_k(M, N) = \mathfrak{m}_k(M, \bar{N}) \cup (-1)^{\alpha_1} \mathfrak{m}_k(\widehat{M}_{Q_1}, \beta_1 N),$$

где склейка происходит по $M \times \partial_1 N$.

5°. Покажем, что утверждение $\mathcal{P}_n(1, i+1)$ следует из утверждений $\mathcal{P}_{n-1}(k, k)$, $\mathcal{P}_n(1, i)$. Пусть многообразия M и N имеют соответственно особенности P_1 и $P_1, P_2, \dots, P_{i+1}$ (если необходимо — перенумеруем многообразия P_j). Рассматривая N как многообразие $\bar{N}$ с i особенностями ($\delta \bar{N} = \partial_0 N \cup \partial_1 N$, $\partial_j = \partial_j N$ при $j = 2, \dots, i+1$), мы можем построить многообразие $\mathfrak{m}_k(M, \bar{N})$ с краем $\mathfrak{m}_k(M, \delta \bar{N})$. Пусть

$$\mathfrak{m}_k(M, N) = \mathfrak{m}_k(M, \bar{N}) \cup_{\mathfrak{m}_k(M, \partial_1 N)} (-1)^{\alpha_1} \mathfrak{m}_k(\widehat{M}_{Q_1}, \beta_1 N).$$

Многообразие $\mathfrak{m}_k(\widehat{M}_{Q_1}, \beta_1 N)$ строим так же, как и в п. 4°.

Итак, по индукции доказано утверждение $\mathcal{P}_n(1, k)$.

6°. Покажем, что $\mathcal{P}_{n-1}(k, k)$, $\mathcal{P}_n(k, j = 1)$, $\mathcal{P}_n(i, j) \Rightarrow \mathcal{P}_n(i+1, j)$.

Пусть $j = 2$ (если $j = 1$ — доказательство очевидно). Предположим, что многообразия M и N имеют особенности $P_1, \dots, P_i, P_{i+1}$ и $P_i, P_{i+1}, \dots, P_{i+j}$ соответственно. Предположим, что $\dim \beta_{i+1} N \neq 0$ (если $\dim \beta_{i+1} N = 0$, то перенумеруем многообразия P_i : $(i+1) \mapsto i, i \mapsto (i+1)$, тогда по условию теоремы получим, что $\dim \beta_{i+1} N > 0$). Рассмотрим N как многообразие $\bar{N}$ с особенностями $P_i, P_{i+1}, \dots, P_{i+j}$ и границей $\delta \bar{N} =$

$= \partial_{i+1}N \cup \partial_0N$; определим многообразие $m_k(M, \bar{N})$ с границей $\delta m_k(M, \bar{N}) = m_k(M, \delta \bar{N})$. Положим

$$m_k(M, N) = m_k(M, \bar{N}) \cup (-1)^{\alpha_{i+1}} m_k(\widehat{M}_{Q_{i+1}}, \beta_{i+1}N),$$

где склейка происходит по $m_k(M, \partial_{i+1}N)$. Многообразие $m_k(\widehat{M}_{Q_{i+1}}, \beta_{i+1}N)$ определено ввиду следующих обстоятельств. Поскольку $\dim \beta_{i+1}N > 0$ и $\beta_{i+1}N$ содержит не более $(j-1)$ особенностей, то из утверждения $\mathcal{P}_{n-1}(k, k)$ получаем многообразие $m_k(\beta_{i+1}M, Q_{i+1})$, а из $\mathcal{P}_n(k, j-1)$ — многообразие $m_k(m_k \times (\beta_{i+1}M, Q_{i+1}), \beta_{i+1}N)$. Это дает нам возможность построить многообразие

$$m_k(\widehat{M}_{Q_{i+1}}, \beta_{i+1}N) = m_k(M \times P_{i+1} \times I, \beta_{i+1}N) \cup \cup (-1)^{\dim M - p_{i+1}} m_k(\beta_{i+1}M, Q_{i+1}, \beta_{i+1}N),$$

склейка в котором происходит по

$$m_k(m_k(\beta_{i+1}M, \delta Q_{i+1}), \beta_{i+1}N).$$

Аналогично доказывается утверждение $\mathcal{P}_n(i+1, j)$ из $\mathcal{P}_{n-1}(k, k)$, $\mathcal{P}_n(k, j-1)$, $\mathcal{P}_n(i, j)$ при любом $j = 1, \dots, k$. Из этого получаем; что $\mathcal{P}_{n-1}(k, k)$, $\mathcal{P}_n(k, j-1) \Rightarrow \mathcal{P}_n(k, j)$.

Завершает доказательство теоремы импликация

$$\mathcal{P}_{n-1}(k, k), \mathcal{P}_n(i, k), \mathcal{P}_n(i+1, j-1) \Rightarrow \mathcal{P}_n(i+1, j),$$

которая, фактически, обоснована в п. 6°. Теорема 2.5 доказана.

Пусть $\theta_1 \in \Omega_1^r(pt)$ — образующий элемент, его образ в $\Omega_1(pt)$ обозначим через θ_1 . Обратим внимание на следующее свойство Σ_k -многообразий P'_k .

Лемма 2.6. Пусть $p_k = \dim P_k$ нечетно, тогда в группе $\Omega_*^{\Sigma_k}(pt)$ справедливо равенство

$$4[P'_k]_{\Sigma_k} = [P_k]_{\Sigma_k}^2 \theta_1 = 0$$

(умножение на θ_1 — модульное).

Доказательство. Дадим прямую конструкцию пленки. Рассмотрим $\Delta = P_k^{(1)} \times P_k^{(2)} \times I \times S^1$ как Σ_k -многообразие с краем, полагая, что

$$\partial_k \Delta = \left\{ \bigcup_{n=1}^4 P_k^{(n+1)} \times \left\{ (x-1)^2 + \left(\varphi - \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{2}n \right)^2 \leq \frac{\pi^2}{64}, x \leq 1 \right\} \times P_k, \right.$$

$$(n+1) \bmod 2, \delta \Delta = 4P'_k \cup P_k^2 \times S^1.$$

Здесь x, φ — координаты на I и S^1 соответственно. Остается лишь заметить, что на окружности S^1 действительно возникает пужное оснащение.

§ 3. КОММУТАТИВНОСТЬ ДЛЯ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ

Здесь мы разберем отдельно случай, когда $\Sigma = (P)$. Пусть $[P']_{\Sigma} = 0$ и зафиксировано Σ -многообразие Q , $\delta Q = P'$, которое определяет допустимое внешнее умножение в теории Ω_*^{Σ} .

На многообразии P' определена инволюция $\tau: P' \rightarrow P'$ по формуле

$$\tau: (p_1, p_2, t) \mapsto (p_2, p_1, 1-t).$$

Тем самым определено Σ -многообразие

$$B = Q \cup_{P'=\pi P'} (-1)^p Q, p = \dim P.$$

Теорема 3.1. Для любых элементов $x \in \Omega_*^{\Sigma}(X, X_1)$, $y \in \Omega_*^{\Sigma}(Y, Y_1)$ имеет место равенство

$$\mu(x \otimes y) = (-1)^{\dim x \cdot \dim y} \chi_* \mu(y \otimes x) = (-1)^{(p+1)\dim y + 1} \mu(\mu(\beta(x), [B]_{\Sigma}), \beta(y)),$$

где $\chi: X \times Y \rightarrow Y \times X$ — перестановка сомножителей.

Доказательство. Пусть $\alpha = n(p+1)+1$. Напомним, что если M^m и N^n — Σ -многообразия, то, по определению,

$$\begin{aligned}\Delta &= m(M, N) = M \cdot N = M \times \\ &\quad \times N \cup (-1)^\alpha \widehat{M}_Q \times \beta N, \\ \Delta' &= (-1)^{mn} m(N, M) = (-1)^{mn} \times \\ &\quad \times N \cdot M = M \times N \cup (-1)^\alpha \beta M \times \widehat{N}_Q.\end{aligned}$$

Приклеивая воротники к границам многообразий M и N (рассматривая их как обычные многообразия), мы можем считать, что $\partial(M \times N) = \partial M \times N \cup \partial M \times \partial N \times I \cup \cup (-1)^m M \times \partial N$. Поэтому

$$\begin{aligned}\Delta &= M \times N \cup (-1)^\alpha \beta M \times \beta N \times Q, \\ \Delta' &= M \times N \cup (-1)^\alpha \beta M \times \beta N \times Q,\end{aligned}$$

где в первом случае $\beta M \times \beta N \times \delta Q = \beta M \times \beta N \times P'$, а во втором $\beta M \times \beta N \times \delta Q = \beta M \times \beta N \times \tau(P')$.

Рассмотрим два цилиндра $\Delta \times I_1$ и $\Delta' \times I_2$, склеим их с помощью цилиндра $M \times N \times I_3$:

$$\begin{aligned}M \times N \times \{1\} &= M \times N \{0\} \rightarrow \Delta \times \{0\}, \\ M \times N \times \{0\} &= M \times N \{0\} \rightarrow \Delta' \times \{0\}.\end{aligned}$$

Полученное многообразие обозначим через $U(M, N)$ (см. рис. 3). Его граница равна

$$\delta U(M, N) = M \cdot N \cup (-1)^{(p+1)n+1} \beta M \times \beta N \times B^{(1)} \cup (-1)^{mn} N \cdot M,$$

где

$$B^{(1)} = Q^{(1)} \cup_{\delta Q^{(1)}=P'} P' \times I \cup_{\delta Q^{(2)}=\tau P'} (-1)^p Q^{(2)}.$$

Но многообразие $B^{(1)}$ диффеоморфно многообразию B ; согласно условию теоремы $[B^{(1)}]_\Sigma = 0$, т. е. $[M \cdot N]_\Sigma - (-1)^{mn} [N \cdot M]_\Sigma = 0$. Тем самым построена каноническая билинейная конструкция $\tilde{U}(M, N)$, граница которой $\delta \tilde{U}(M, N) = M \cdot N \cup (-1)^{mn} N \cdot M$. Согласно предложению 1.3 делаем вывод: допустимое внешнее умножение μ в теории Ω_Σ^2 коммутативно.

Отметим следующий простой факт.

Лемма 3.2. Если $p = \dim P$ нечетно, то $2[B]_\Sigma = 0$.

§ 4. АССОЦИАТИВНОСТЬ ДЛЯ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ

Определим Σ -многообразие, класс кобордизмов которого является препятствием к ассоциативности допустимого внешнего умножения (при условии его коммутативности).

Многообразие $\Delta = P^{(1)} \times P^{(2)} \times P^{(3)} \times D^2$ рассмотрим как Σ -многообразие, полагая, что

$$\begin{aligned}\delta \Delta &= \delta^{(0)} \Delta \cup \delta^{(1)} \Delta \cup \delta^{(2)} \Delta, \\ \delta^{(i)} \Delta &= P^{(1)} \times P^{(2)} \times P^{(3)} \times \left[\frac{(2i+1)\pi}{3}, \frac{(2i+2)\pi}{3} \right], \quad i = 0, 1, 2, \\ \beta \Delta &= (-1)^p P^{(1)} \times P^{(2)} \times \left[0, \frac{\pi}{3} \right] \cup P^{(1)} \times P^{(3)} \times \left[\frac{2\pi}{3}, \pi \right] \cup \\ &\quad \cup (-1)^p P^{(2)} \times P^{(3)} \times \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right].\end{aligned}$$

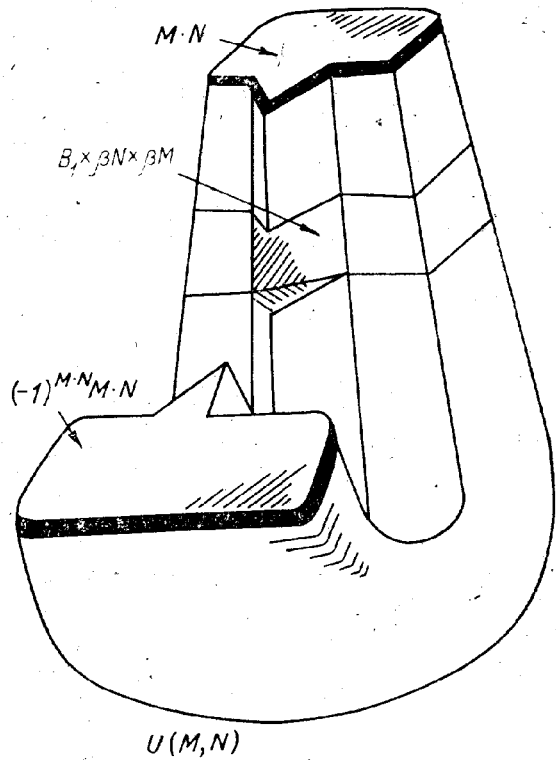


Рис. 3.

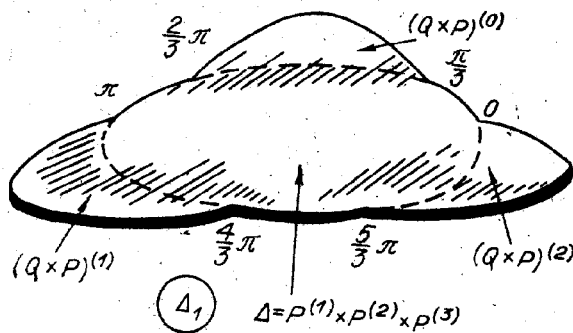


Рис. 4.

По каждой из компонент края $\delta^{(i)}\Delta$, $i=0, 1, 2$, приклеим к Σ -многообразию Δ многообразие $(-1)^{p(i+1)+1} \times (Q \times P)^{(i)}$ так, чтобы полученное многообразие Δ_1 являлось замкнутым Σ -многообразием, а именно (см. рис. 4):

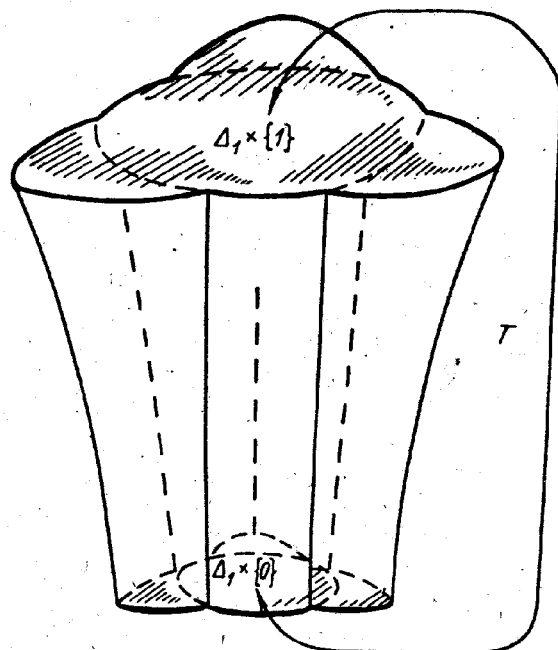


Рис. 5.

$$\delta^{(0)}\Delta = (-1)^p \left(P^{(1)} \times P^{(2)} \times \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right] \times P^{(3)} \right) = (-1)^{p+1} \delta((Q \times P)^{(0)}),$$

$$\delta^{(1)}\Delta = P^{(1)} \times P^{(3)} \times \left[\pi, \frac{4\pi}{3} \right] \times P^{(2)} = -\delta((Q \times P)^{(1)}),$$

$$\delta^{(2)}\Delta = (-1)^p P^{(2)} \times P^{(3)} \times \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi \right] \times P^{(1)} = (-1)^{p+1} \delta((Q \times P)^{(2)}).$$

Определим диффеоморфизм $\psi: \Delta_1 \rightarrow \Delta_1$ следующим образом. На части Δ многообразия Δ_1 отображение ψ зададим формулой

$$\psi(p_1, p_2, p_3, r, \varphi) = (p_3, p_1, p_2, r, \varphi + 2\pi/3).$$

Здесь (r, φ) — полярные координаты на круге D^2 . Далее, положим, что $\psi((-1)^{p(i+1)+1} (Q \times P)^{(i)}) = (-1)^{p(i+2)+1} (Q \times P)^{(i+1)}$, $(i \bmod 3)$.

Пусть $\tilde{\Gamma} = \Delta_1 \times I$, тогда

$$\Gamma = \tilde{\Gamma} / (\psi(\Delta_1 \times \{0\}) = \Delta_1 \times \{1\}).$$

Замечание. Пусть $\Sigma_i = (P_1, \dots, P_i)$, $i=1, \dots, k$, Q_i — такие Σ_i -многообразия, что $\delta Q_i = P_i'$. Заметим, что согласно приведенной выше конструкции определены Σ_i -многообразия $\Gamma_i = \Gamma(P_i)$.

Теорема 4.1. Пусть $[P']_x = 0$, Q — Σ -многообразие $\delta Q = P'$, определяющее допустимое внешнее умножение μ в теории Ω_*^Σ . Тогда если $[B]_x = 0$, $[\Gamma]_x = 0$, то умножение μ коммутативно и ассоциативно.

Доказательство. Согласно теореме 3.1 умножение μ коммутативно. Пользуясь коммутативностью μ для доказательства его ассоциативности, мы будем сравнивать многообразия $(M \cdot N) \cdot L$, $(-1)^{(n+l)m} \times (L \cdot N) \cdot M$.

1°. Построим некоторые нужные нам многообразия. Рассмотрим цилиндр $D^2 \times I$ и введем на нем координаты (r, φ, t) ((r, φ) — полярные координаты на круге D^2). На боковой поверхности $S^1 \times I$ рассмотрим кривые γ_1, γ_2 , заданные уравнениями

$$\gamma_1: \frac{\pi}{3} t + \varphi - \frac{\pi}{3} = 0, \quad \gamma_2: \frac{5}{3} \pi t - \varphi + \frac{2}{3} \pi = 0,$$

$$0 \leq t \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

и семейство

$$I = \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} t \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} t \right\}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

«горизонтальных» интервалов между кривыми γ_1 и γ_2 .

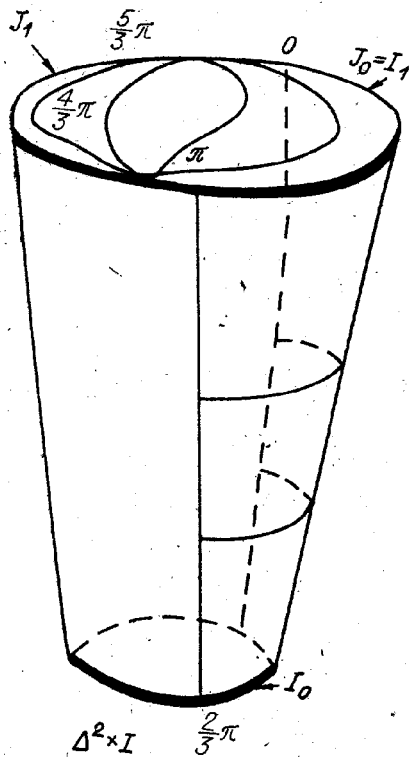


Рис. 6.

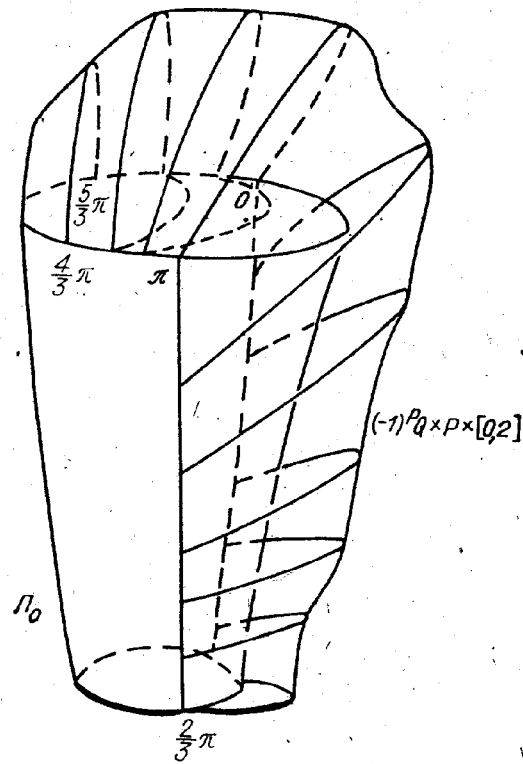


Рис. 7.

Далее, на круге $D^2 \times \{1\}$ выберем гладкое по τ семейство интервалов J_τ такое, что (см. рис. 6)

а) $J_0 = I_1$,

б) $J_1 = \left\{ r = 1, \pi \leq \varphi \leq \frac{4\pi}{3}, t = 1 \right\}$,

в) $J_\tau \cup J_{\tau'} = \emptyset, (\tau \neq \tau')$,

г) $\bigcup_{0 \leq \tau \leq 1} J_\tau = D^2$,

д) $J_\tau(0) = \frac{5\pi}{3} + (1 - \tau) \frac{\pi}{3}, J_\tau(1) = \frac{\pi}{3} - (1 - \tau) \frac{\pi}{3}$.

Приклеим $(-1)^p Q \times P \times [0, 2]$ к цилиндру $P^{(1)} \times P^{(2)} \times P^{(3)} \times D^2 \times I$, отождествляя следующие многообразия:

$$(-1)^p \delta Q \times P \times \{\xi\} = \begin{cases} (P^{(3)} \times P^{(2)} \times I_\xi) \times P^{(1)}, & 0 \leq \xi \leq 1, \\ (P^{(3)} \times P^{(2)} \times J_{2-\xi}) \times P^{(1)}, & 1 \leq \xi \leq 2. \end{cases}$$

Полученное многообразие обозначим Π_0 (см. рис. 7). К Π_0 приклеим многообразие

$$Q \times P \times [0, 1] \cup Q \times \beta Q \cup (-1)^p Q \times P \times [2, 3],$$

где

$$\begin{aligned} \delta \beta Q &= P^{(1)} \cup (-1)^p P^{(2)}, \quad Q \times P \times \{1\} = Q \times P^{(1)}, \\ Q \times P^{(2)} &= Q \times P \times \{2\}, \end{aligned}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta Q \times \beta Q &= (-1)^p \beta (Q \times P) \times [1, 2], \\ \delta Q \times P \times \{\eta\} &= \begin{cases} (P^{(1)} \times P^{(3)} \times \left[\pi, \frac{4}{3} \pi \right]) \times P^{(2)} \times \eta, & 0 \leq \eta \leq 1, \\ (P^{(2)} \times P^{(3)} \times \left[\frac{5}{3} \pi, 2\pi \right]) \times P^{(1)} \times \{3 - \eta\}, & 2 \leq \eta \leq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

Полученное многообразие обозначим Π (см. рис. 8, а).

2°. Предположим теперь, что к границам многообразий M^n, N^n, L^l приклеены воротники (многообразия M, N, L рассматриваются при этом как обычные многообразия). Тогда граница многообразия $M \times N \times L$ мо-

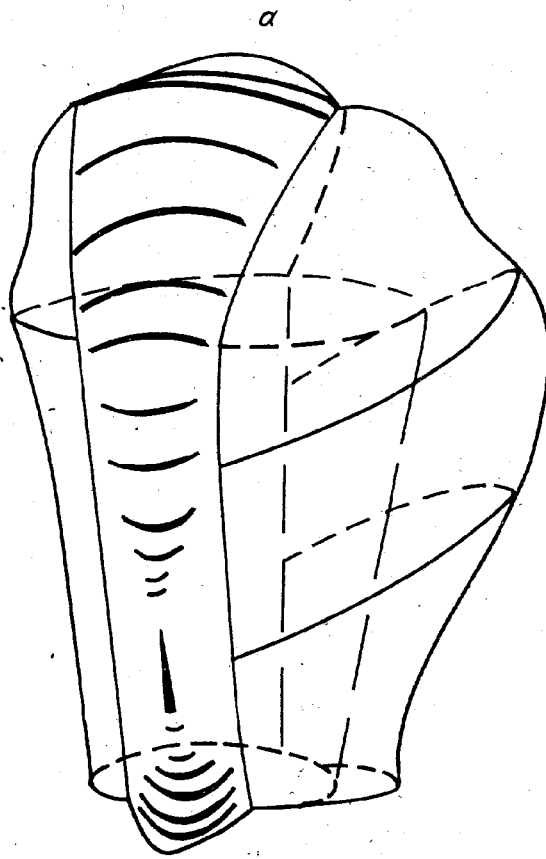


Рис. 8.

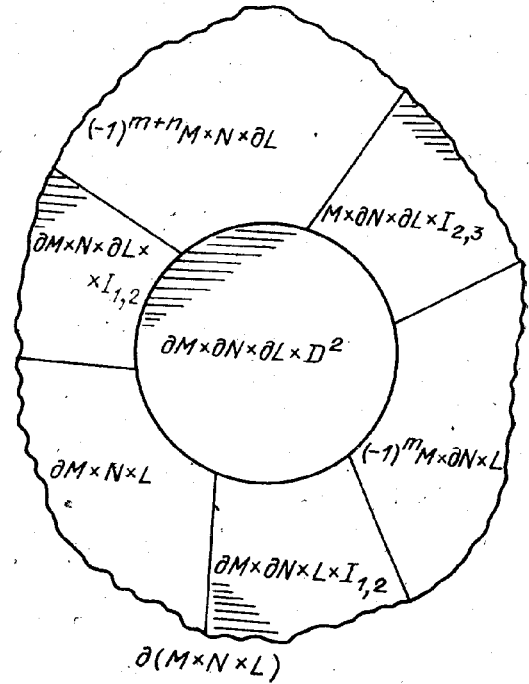
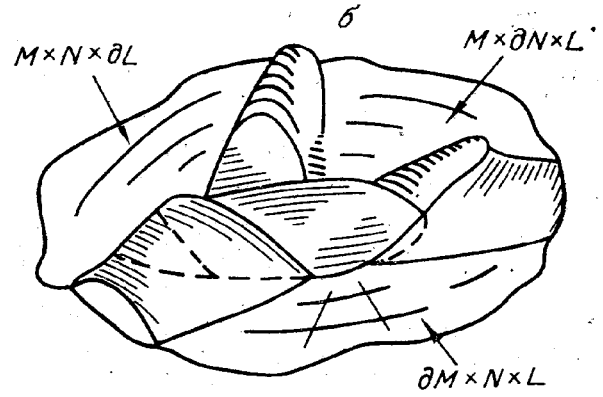


Рис. 9.

жет быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial(M \times N \times L) = & \partial M \times N \times L \cup \partial M \times \partial N \times \\ & \times I_{1,2} \cup (-1)^m M \times \partial N \times L \cup (-1)^m M \times \\ & \times \partial N \times \partial L \times I_{2,3} \cup (-1)^{m+n} M \times N \times \partial L \cup \\ & \cup (-1)^{m+n} \partial M \times N \times \partial L \times I_{1,3} \cup \\ & \cup \partial M \times \partial N \times \partial L \times D^2. \end{aligned}$$

Схема склейки указана на рис. 9.

К многообразию $M \times N \times L$ приклеим многообразия $\beta M \times \beta N \times L \times Q$, $M \times \beta N \times \beta L \times Q$, $\beta M \times N \times \beta L \times Q$, отождествляя соответственно

$$\beta M \times \beta N \times L \times \delta Q, M \times \beta N \times \beta L \times \delta Q, \beta M \times N \times \beta L \times \delta Q,$$

и

$$\partial M \times \partial N \times L \times I_{1,2}, M \times \partial N \times \partial L \times I_{2,3}, \partial M \times N \times \partial L \times I_{1,2},$$

учитывая, что $\delta Q = P^{(1)} \times P^{(2)} \times I_{ij}$.

Нетрудно заметить, что полученное многообразие U есть Σ -многообразие с краем $\beta M \times \beta N \times \beta L \times \Delta$. Многообразие же $(M \cdot N) \cdot L$ получается склейкой U и $\beta M \times \beta N \times \beta L \times \Pi$ по многообразию $\beta M \times \beta N \times \beta L \times \Delta$ (см. рис. 8).

Аналогично строится многообразие $(-1)^{m(n+l)} (L \cdot N) \cdot M$. Именно, вместо построенного выше многообразия Π необходимо использовать многообразие Π_1 , получаемое из Π следующим образом. Определим диффеоморфизм

$$T_1: P^{(1)} \times P^{(2)} \times P^{(3)} \times D^{(2)} \times I \rightarrow P^{(1)} \times P^{(2)} \times P^{(3)} \times D^2 \times I,$$

задаваемый соотношением

$$T_1(p_1, p_2, p_3, r, \varphi, t) = (T(p_1, p_2, p_3, r, \varphi), t).$$

Последующие приклейки многообразий $(-1)^p Q \times P \times [0, 2]$, $Q \times P \times [0, 1] \cup Q \times \beta Q \cup Q \times P \times [2, 3]$ необходимо «подкрутить» на диффеоморфизм T_1 . В частности, получим диффеоморфизм $\tilde{T}: \Pi \rightarrow \Pi_1$, совпадающий с T при ограничении на Δ .

3°. Рассмотрим два цилиндра

$$((M \cdot N) \cdot L) \times I_1, (-1)^{m(n+l)} (N \cdot L) \cdot M \times I_2.$$

Склеим их с помощью цилиндра $U \times I_3$:

$$\begin{aligned} U \times \{1\} &= U \times \{0\} \subset (M \cdot N) \cdot L \times \{0\}, \\ U \times \{0\} &= U = \{0\} \subset (-1)^{m(n+l)} (N \cdot L) \cdot M \times \{0\}. \end{aligned}$$

Затем многообразия

$$\begin{aligned} \beta M \times \beta N \times \beta L \times \Pi \times \{0\} &\subset \beta((M \cdot N) \cdot L \times \{0\}), \\ \beta M \times \beta N \times \beta L \times \Pi_1 \times \{0\} &\subset (-1)^{m(n+l)} \beta((N \cdot L) \cdot M \times \{0\}) \end{aligned}$$

склеим по диффеоморфизму, определенному формулой

$$(x, y, z, \xi) \mapsto (s, y, z, \tilde{T}(\xi)).$$

Полученное многообразие $V(M, N, L)$ является Σ -многообразием с границей

$$(M \times N) \cdot L \cup \beta M \times \beta N \times \beta L \times \Gamma \cup (-1)^{m(n+l)} (N \cdot L) \cdot M.$$

т. е. если $[\Gamma]_\Sigma = 0$, то тем самым определена 3-линейная каноническая конструкция $\mathfrak{A}(M, N, L)$, граница которой равна

$$\delta \mathfrak{A}(M, N, L) = (M \cdot N) \cdot L \cup (-1)^{m(n+l)} (N \cdot L) \cdot M.$$

Приклеивая к ней билинейную конструкцию $U(N \cdot L, M)$, получаем согласно предложению 1.3, что допустимое внешнее умножение μ ассоциативно. Теорема 4.1 доказана.

В дальнейшем нам понадобится следующее простое свойство многообразия $\Gamma = \Gamma(P)$.

Лемма 4.2. В группе $\Omega_*^\Sigma(pt)$ имеет место следующее равенство: $3[\Gamma]_\Sigma = [\Delta]_\Sigma \cdot \theta_1$.

§ 5. КОММУТАТИВНОСТЬ И АССОЦИАТИВНОСТЬ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Пусть $\Sigma_i = (P_1, \dots, P_i)$, $i = 1, \dots, k$, $[P'_i]_{\Sigma_i} = 0$, и зафиксированы Σ_i -многообразия Q_i , $\delta Q_i = P'_i$, определяющие допустимое внешнее умножение $\mu_i = \mu_i(Q_1, \dots, Q_i)$ в теории $\Omega_*^{\Sigma_i}$. Напомним, что ранее были построены Σ_i -многообразия $B_i = B(P_i)$, $\Gamma_i = \Gamma(P_i)$.

Теорема 5.1. Пусть $\Sigma_k = (P_1, \dots, P_k)$, $[P'_i]_{\Sigma_i} = 0$ при $i = 1, \dots, k$; Q_i — такие Σ_i -многообразия, что $\delta Q_i = P'_i$; $\mu_k(Q_1, \dots, Q_k)$ — допустимое внешнее умножение, определенное многообразиями Q_i . Тогда если

$$[B_i]_{\Sigma_i} = 0, [\Gamma_i]_{\Sigma_i} = 0$$

при $i = 1, \dots, k$, то умножение μ_k в теории $\Omega_*^{\Sigma_k}$ коммутативно и ассоциативно.

Доказательство. Поясним схему доказательства. Для каждого $i = 1, \dots, k$ строим билинейную конструкцию $\mathfrak{R}_i$ и 3-линейную конструкцию $\mathfrak{A}_i$ на категории Σ_i -многообразий, которые обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 1) \delta \mathfrak{R}_i(M, N) &= \mathfrak{m}_i(M, N) \cup (-1)^{mn} \mathfrak{m}_i(N, M) \cup \mathfrak{R}_i(\delta M, \\ N) &\cup \mathfrak{R}_i(M, \delta N); \\ \mathfrak{R}_i(\delta M, \delta N) & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \delta \mathfrak{A}_i(M, N) &= \mathfrak{m}_i(\mathfrak{m}_i(M, N), L) \cup -\mathfrak{m}_i(M, \mathfrak{m}_i(N, L) \cup \mathfrak{A}_i(\delta M, N, L) \cup \\ &\cup \mathfrak{A}_i(M, \delta N, L) \cup \mathfrak{A}_i(M, N, \delta L), \text{ где конструкции } \mathfrak{A}_i(\delta M, N, L), \mathfrak{A}_i(M, \delta N, L) \\ &\text{ склеиваются по } \mathfrak{A}_i(\delta M, \delta N, L); \text{ конструкции } \mathfrak{A}_i(\delta M, N, L), \mathfrak{A}_i(M, N, \delta L) — \\ &\text{ по } \mathfrak{A}_i(\delta M, N, \delta L); \mathfrak{A}_i(M, \delta N, L), \mathfrak{A}_i(M, N, \delta L) — \text{ по } \mathfrak{A}_i(M, \delta N, \delta L); \end{aligned}$$

$$3) \text{ если } M, N, L \text{ } \Sigma_j\text{-многообразия, где } j < i, \text{ то } \mathfrak{A}_i(M, N, L) = \mathfrak{A}_j(M, N, L), \mathfrak{R}_i(M, N) = \mathfrak{R}_j(M, N);$$

4) если одно из многообразий M, N не содержит особенностей, то $\mathfrak{R}_i(M, N) = M \times N \times I$;

5) если одно из многообразий M^m, N^n, L^l (например, многообразие N) не содержит особенностей, то $\mathfrak{A}_i(M, N, L) = (-1)^{nl} m_i(M, L) \times N \times I$;

6) если два многообразия из M, N, L не содержат особенностей, то $\mathfrak{A}_i(M, N, L) = M \times N \times L \times I$;

7) $\mathfrak{A}_0(M, N, L) = M \times N \times I, \mathfrak{R}_0(M, N) = M \times N \times I$.

Покажем, как совершить индукционный шаг при построении конструкции $\mathfrak{R}_i$. Пусть M, N — Σ_i -многообразия, $m = \dim M, n = \dim N, \alpha(n) = n(p_i + 1) + 1$. Для простоты изложения предположим, что $\delta M = \delta N \neq \emptyset$. Применяя конструкцию $\mathfrak{R}_{i+1}$ к Σ_i -многообразиям X, Y , будем рассматривать эти многообразия X, Y как Σ_{i-1} -многообразия следующим образом: $\partial_j X = \partial_j Y$ при $j \neq i, \delta X = \delta Y \cup \partial_i X$.

Рассмотрим многообразия $M_{Q_i}, \beta_i N$. Напомним, что

$$\widehat{M}_{Q_i} = M \times P_i \times I \cup (-1)^{\alpha(n)} m_{i-1}(\beta_i M, Q_i),$$

где склейка происходит по $\beta_i M \times P'_i = \beta_i M \times \delta Q_i$, кроме того,

$$\partial_i \widehat{M}_{Q_i} = M \times P_i \times \{1\} \cup (-1)^{\alpha(n)} m_{i-1}(\beta_i M, \partial_i Q_i),$$

$$\partial_j \widehat{M}_{Q_i} = (-1)^{\alpha(n)} m_{i-1}(\beta_i M, \partial_j Q_i) \text{ при } j \neq i.$$

Введем конструкцию

$$\mathfrak{R}_i^{(1)}(M, N) = \mathfrak{R}_{i-1}(M, N) \cup \mathfrak{R}_{i-1}(\widehat{M}_{Q_i}, \beta_i N),$$

где склейка происходит по конструкции $\mathfrak{R}_{i-1}(M, \partial_i N)$. Заметим, что

$$\delta \mathfrak{R}_i^{(1)}(M, N) = m_i(M, N) \cup (-1)^{mn} [m_i(N, M) \cup (-1)^{\alpha(n)} m_{i-1}(\beta_i N, \widehat{M}_{Q_i})].$$

Рассмотрим $\widehat{M}_{(i)} = M \times P_i \times I$ как Σ_i -многообразие:

$$\partial_j \widehat{M}_{(i)} = \partial_j M \times P_i \times I, j \neq i; \partial_i \widehat{M}_{(i)} = M \times P_i \times \{1\},$$

$$\delta \widehat{M}_{(i)} = -M \times P_i \times \{0\} \cup \beta_i M \times P'_i.$$

Заметим, что

$$m_{i-1}(\beta_i N, \widehat{M}_{Q_i}) = m_{i-1}(\beta_i N, \widehat{M}_{(i)}) \cup m_{i-1}(\beta_i N, m_{i-1}(Q_i, \beta_i N)),$$

где склейка происходит по конструкции

$$m_{i-1}(\beta_i N, m_{i-1}(\delta Q_i, \beta_i M)).$$

Но многообразие $\delta Q_i = P'_i$ не имеет общих особенностей с $\beta_i M$, поэтому

$$m_{i-1}(\delta Q_i, \beta_i M) = P'_i \times \beta_i M.$$

Рассмотрим теперь конструкцию $\mathfrak{A}_{i-1}(\beta_i N, Q_i, \beta_i M)$, граница которой равна

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{A}_{i-1}(\beta_i N, Q_i, \beta_i M) &= m_{i-1}(\beta_i N, m_{i-1}(Q_i, \beta_i M)) \cup \\ &\cup \mathfrak{A}_{i-1}(\beta_i N, P'_i, \beta_i M) \cup m_{i-1}(m_{i-1}(\beta_i N, Q_i), \beta_i M). \end{aligned}$$

(Здесь мы пользуемся индукционными предположениями относительно конструкции $\mathfrak{A}_{i-1}$.) Поскольку многообразие P'_i не имеет общих особенностей с $\beta_i M$ и $\beta_i N$, то

$$\mathfrak{A}_{i-1}(\beta_i N, P'_i, \beta_i M) = (-1)^{(m-p_i-1)(2p_i+1)} m_{i-1}(\beta_i N, \beta_i M) P_i \times I.$$

Построим следующую конструкцию:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_i^{(2)}(M, N) &= [m_{i-1}(M, N) \cup (-1)^{\alpha(n)} m_{i-1}(\beta_i N, \widehat{M}_{(i)})] \times I_1 \cup \\ &\cup \mathfrak{A}_{i-1}(\beta_i N, Q_i, \beta_i M). \end{aligned}$$

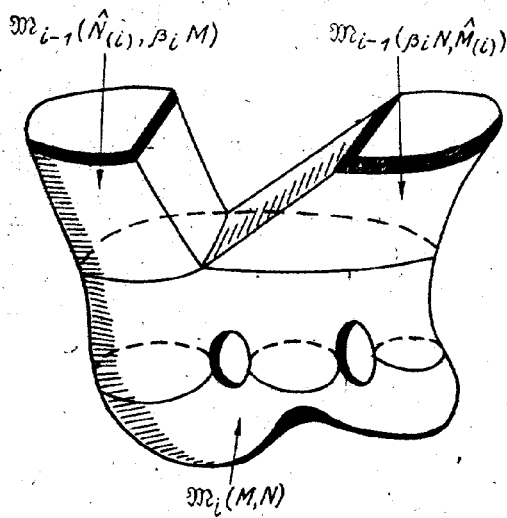


Рис. 10.

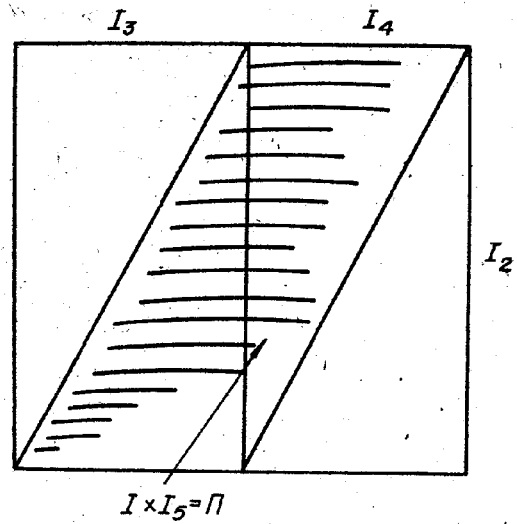


Рис. 11.

Ее граница равна

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{R}_i^{(2)}(M, N) = & -m_{i-1}(N, M) \cup (-1)^{\alpha(n)} m_{i-1}(\beta_i N, \hat{M}_{Q_i}) \cup \\ & \cup [m_{i-1}(M, N) \cup (-1)^{\alpha(n)} m_{i-1}(\beta_i N, \hat{M}_{Q_i})] \cup \\ & \cup (-1)^{\alpha(n)} m_{i-1}(m_{i-1}(\beta_i N, Q_i), \beta_i M). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_i^{(3)}(M, N) = & [m_i(N, M) \cup (-1)^{\alpha(n)} m_{i-1}(\beta_i N, \hat{M}_{(i)}) \cup \\ & \cup (-1)^{\alpha(n)} m_{i-1}(\hat{N}_{(i)}, \beta_i M)] \times I_2. \end{aligned}$$

Иными словами, в конструкции $\mathfrak{R}_i^{(3)}$ мы приклеиваем «воротники» к $m_i(M, N)$ (см. рис. 10). На конструкции $\mathfrak{R}_i^{(3)}(M, N)$ определим следующую Σ_i -структуру. Пусть $\hat{M}_{(i)} = M \times P_i \times I_3$, $\hat{N}_{(i)} = N \times P_i \times I_4$. В границу $\mathfrak{R}_i^{(3)}(M, N)$ вложено многообразие

$$(\beta_i N \times P_i \times \beta_i M \times P_i) \times (I_3 \cup I_4) \times I_2.$$

Пусть Π — параллелограмм, заштрихованный на рис. 11; разложим его в произведение: $\Pi = I \times I_5$. Положим

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{R}_i^{(3)}(M, N) = & [m_{i-1}(N, M) \cup (-1)^{\alpha(n)} m_{i-1}(\beta_i N, \hat{M}_i)] \times \{1\} \cup \\ & \cup (-1)^{m-p_i-1} m_{i-1}(\beta_i N, \beta_i M) \times P'_i I_5 \cup \{ - [m_{i-1}(N, M) \cup \\ & \cup (-1)^{\alpha(n)} m_{i-1}(\hat{N}_{(i)}, \beta_i M)] \}. \end{aligned}$$

Здесь мы отождествляем $P'_i \times I_5 = P_i \times P_i \times I \times I_5 = P_i \times P_i \times \Pi$. Наконец, рассмотрим конструкцию

$$\mathfrak{R}_i^{(4)}(M, N) = m_i(M, N) \times I_6 = [m_{i-1}(N, M) \cup (-1)^{\alpha(m)} m_{i-1}(\hat{N}_{Q_i}, \beta_i M)] \times I_6.$$

Склеивая последовательно $\mathfrak{R}_i^{(1)}$, $m_i^{(2)}$, $\mathfrak{R}_i^{(3)}$, $\mathfrak{R}_i^{(4)}$, получаем, как нетрудно убедиться, конструкцию $\mathfrak{R}_i(M, N)$ такую, что

$$\begin{aligned} \delta \mathfrak{R}_i(M, N) = & m_i(M, N) \cup (-1)^{mn} m_i(N, M) \cup \\ & \cup (-1)^{m-p_i-1} m_i(m_i(\beta_i M, \beta_i N), B_i^{(1)}), \end{aligned}$$

где $B_i^{(1)} = Q_i^{(1)} \cup P'_i \times I_5 \cup Q_i^{(2)}$ (здесь $\delta Q_i^{(1)} = P'_i \times \{0\}$, $\delta Q_i^{(2)} = \tau P'_i \times \{1\}$).

Заклеивая многообразие $B_i^{(1)}$ (которое, очевидно, диффеоморфно B_i), получаем конструкцию $\mathfrak{R}_i(M, N)$. Свойства $\mathfrak{R}_i$, перечисленные ранее, легко следуют по индукции. Примерно таким же образом проводится построение конструкции $\mathfrak{R}_i(M, N, L)$.

Замечание. В формулировке теоремы 2 работы автора [9] необходимо добавить условие

$$[\Gamma_i]_{\Sigma_i} = 0 \text{ при } i \leq k-1.$$

Справедлив также следующий результат, который мы приведем здесь без доказательства.

Теорема 5.2. Пусть $\Sigma_k = (P_1, \dots, P_k)$, $\dim P_i > 0$, $[P'_i]_{\Sigma_k} = 0$ при $i = 1, \dots, k$; $\dim P_i \neq \dim P_j$ при $i \neq j$; Q_i — такие Σ_k -многообразия, что $\delta Q_i = P'_i$; $\mu_k = \mu_i(Q_1, \dots, Q_k)$ — допустимое внешнее умножение в теории $\Omega_{*}^{\Sigma_k}$. Тогда если

$$[B_i]_{\Sigma_k} = 0, \quad [\Gamma_i]_{\Sigma_k} = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

то умножение μ_k коммутативно и ассоциативно.

§ 6. УМНОЖЕНИЕ В ТЕОРИЯХ КОБОРДИЗМОВ

СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Здесь мы изучим допустимое внешнее умножение в теориях кобордизмов $Sp_{\Sigma_k}^*$ симплектических многообразий с особенностями, рассмотренных В. В. Вершининым [6].

Пусть $\Sigma = (P_1, \dots, P_k, \dots)$ — последовательность симплектических многообразий таких, что $[P_1]_{Sp} = \theta_1$, $[P_k]_{Sp} = \varphi_{2^k-2}$, где $\varphi_j \in Sp^{-8j+3}(pt)$ — элементы Н. Рэя [10]. Обозначим $\Sigma_k = (P_1, \dots, P_k)$; пусть $Sp_{\Sigma_k}^*$, Sp_{Σ}^* — соответствующие теории кобордизмов, MSp_{Σ_k} , MSp_{Σ} — их классифицирующие спектры.

Теорема 6.1 (В. В. Вершинин [6]). Для каждого k в теории $Sp_{\Sigma_k}^*$ существует допустимое внешнее умножение μ_k такое, что

1) при $p > 2$ (p — простое)

$$Sp_{\Sigma_k}^*(pt)_{(p)} = Z_{(p)}[w_1, \dots, w_k, x_2, \dots, x_n, \dots],$$

где $n = 2, 4, 5, \dots$, $n \neq 2^j - 1$, $j \leq k$, $\deg w_j = -2(2^j - 1)$, $\deg x_n = -4n$;

2) кольцо $Sp_{\Sigma_k}^*(pt)$ не имеет кручения в размерностях, строго меньших $2^{k+2} - 3$;

3) в теории Sp_{Σ}^* существует допустимое внешнее умножение μ , относительно которого

$$Sp_{\Sigma}^*(pt) = Z[w_1, \dots, w_k, \dots, x_2, \dots, x_n, \dots],$$

где $\deg w_i = -2(2^i - 1)$, $i = 1, 2, \dots$, $\deg x_n = -4n$, $n = 2, 4, 5, \dots$, $n \neq 2^j - 1$. При этом умножения μ_k , μ согласованы, т. е. для всех $k \leq l$ диаграмма коммутативна (рис. 12).

Эта теорема доказана с помощью изучения спектральной последовательности Адамса — Новикова для спектров MSp_{Σ_k} , MSp_{Σ} . В частности, в

работе [6] установлено, что для каждого k $Sp_{\Sigma_k}^{-2P_k-1}(pt) = 0$, где $P_k = \dim P_k = 2^{k+1} - 3$, т. е. $[P'_k]_{\Sigma_k} = 0$.

Пусть Q_i — Σ_i -многообразия такие, что $\delta Q_i = P'_i$, $i = 1, \dots, k$, и соответствующее допустимое внешнее умножение совпадает с умножением μ_k . Рассмотрим Σ_k -многообразие $B_k = B(P_k)$, $\dim B_k = 4(2^k - 1)$. Согласно лемме 3.2

$$\begin{array}{ccccc} Sp_{\Sigma_k}^* \otimes Sp_{\Sigma_k}^* & \xrightarrow{\mu_k} & Sp_{\Sigma_k}^* & & \\ \downarrow \pi_k^k \otimes \pi_k^k & & \downarrow \pi_k^k & & \\ Sp_{\Sigma_l}^* \otimes Sp_{\Sigma_l}^* & \xrightarrow{\mu_l} & Sp_{\Sigma_l}^* & & \\ \downarrow \pi_l^l \otimes \pi_l^l & & \downarrow \pi_l^l & & \\ Sp_{\Sigma}^* \otimes Sp_{\Sigma}^* & \xrightarrow{\mu} & Sp_{\Sigma}^* & & \end{array}$$

Рис. 12.

$$[B_k]_{\Sigma_k} \in \text{Tors } Sp_{\Sigma_k}^*(pt),$$

по $4(2^k) - 4 < 2^{k+2} - 3$, поэтому $[B_k]_{\Sigma_k} = 0$. Наконец, элемент $[\Gamma_k]_{\Sigma_k}$ имеет третий порядок согласно лемме 4.4, но в кольце $Sp_{\Sigma_k}^*(pt)$ нет элементов третьего порядка, поэтому $[\Gamma_k]_{\Sigma_k} = 0$. Мы доказали следующий результат.

Теорема 6.2. Для всех $k = 1, 2, \dots$ допустимые внешние умножения μ_k в теориях $Sp_{\Sigma_k}^*$ и умножение μ в теории Sp_{Σ}^* коммутативны и ассоциативны.

Из теоремы 6.2 вытекает (см. [11])

Следствие 6.3. Теория кобордизмов $(Sp_{\Sigma}^*)_{(2)}$ с мультипликативной структурой μ изоморфна прямой сумме теорий когомологий Брауна — Петерсона BP^* .

Тем самым, в частности, отождествляются соответствующие спектральные последовательности Адамса — Новикова для спектра MSp . Более того, тесная взаимосвязь между теориями кобордизмов Sp^* и Sp_{Σ}^* позволяет дать геометрическое описание этой спектральной последовательности Адамса — Новикова в геометрических терминах (см. [11]), в частности, мультипликативная структура в ней порождается умножением μ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Araki S., Toda H. Multiplicative structure in mod q cohomology theories. I. — Osaka J. Math., 1965, v. 2, N 1, p. 71—115; II — Osaka J. Math., 1966, v. 3, N 1, p. 81—120.
2. Morava J. A product for the odd-primary bordism of manifolds with singularities. — Topology, 1979, v. 18, N 2, p. 177—186.
3. Wurgler U. On products in a family of cohomology theories associated to the invariant prime ideals of $BP^*(pt)$. — Comment. math. helv., 1977, v. 55, p. 457—481.
4. Миронов О. К. Существование мультипликативных структур в теориях кобордизмов с особенностями. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1975, т. 39, № 5, с. 1065—1092.
5. Миронов О. К. Мультипликативность в кобордизмах с особенностями и операции Стиррода — Дика. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1978, т. 42, № 4, с. 789—806.
6. Вершинин В. В. Симплектические кобордизмы с особенностями. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1983, т. 47, № 2, с. 230—247.
7. Стонг Р. Заметки по теории кобордизмов. — М.: Мир, 1973.
8. Baas N. A. On the bordism theory of manifolds with singularities. — Math. Scand., 1973, v. 33, p. 279—302.
9. Ботвинник Б. И. О мультипликативности в кобордизмах с особенностями. — В кн.: Симпозиум по геометрии в целом и основаниям теории относительности. Тезисы докладов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1982, с. 16—17.
10. Ray, N. Indecomposables in Tors Ω_{Sp}^* . — Topology, 1971, v. 10, N 4, p. 261—270.
11. Ботвинник Б. И. Геометрические свойства спектральной последовательности Адамса — Новикова для симплектических кобордизмов. — Деп. ВИНТИ, № 250—84 Деп. — 59 с.

В. В. ВЕРШИНИН

УМНОЖЕНИЕ В СПЕКТРАЛЬНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Алгебраические структуры спектральных последовательностей, несущие информацию о соответствующих структурах в тех объектах, к которым эти последовательности сходятся, являются также одним из основных средств для вычисления дифференциалов. Однако существование таких структур, как умножение, зачастую лишь подразумевается или, во всяком случае, принадлежит фольклору. Одной из причин этого, по-видимому, является необходимость проведения кропотливых рассуждений, результатом которых может быть лишь подтверждение того, что должно быть по природе вещей. С точки зрения мультипликативных структур нас интересуют спектральная последовательность Атьи — Хирцебруха и экстраординарная спектральная последовательность Адамса, в частности последовательность, построенная на основе унитарных кобор-