ческим морфизмом

$$\pi_*(X) \otimes \pi_*(Y) \to \pi_*(X \wedge Y) \qquad (5)$$

(если последовательности сходятся, то присоединено к спариванию (5)).

Следствие 2. *Для мультипликативного спектра X спектральная последовательность Адамса обладает мультипликативными свойствами.*

Для спектральной последовательности Адамса — Новикова $h_*(\ )$ есть теория унитарных бордизмов $MU_*(\ )$ или теория, определяемая спектром Брауна — Петерсона $BP_*(\ )$. В последнем случае ее член E_2 изоморфен

$$\mathrm{Ext}_{A_*}(BP_*, BP_*(X)) \cong \mathrm{Ext}_A(BP^*(X), BP^*),$$

где $A_* = BP_*(BP)$, $A = BP^*(BP)$. Спектральная последовательность Адамса — Новикова обладает хорошими свойствами сходимости. Из теоремы 2 и следствия 2 следует, что эта последовательность обладает также и мультипликативными свойствами.

В заключение автор выражает благодарность В. Г. Горбунову за полезные обсуждения материала настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вершинин В. В.** Симплектические кобордизмы с особенностями.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1983, т. 47, № 2, с. 230—247.
2. **Ботвинник Б. И.** Алгебраические и геометрические свойства спектральной последовательности Адамса — Новикова: Дис... канд. физ.-мат. наук/Ин-т математики СО АН СССР. Новосибирск, 1984.
3. **Вершинин В. В.** Умножение в экстраординарной спектральной последовательности Адамса.— Деп. ВИНИТИ № 2351—77 Деп.— 14 с.
4. **Vogt R.** Boardman's stable homotopy category.— Aarhus, 1970.
5. **Duady A.** La suite spectrale d Adams.— Seminaire Henry Cartan, 1958—1959, exposes 18 et 19.
6. **Картан А., Эйленберг С.** Гомологическая алгебра.— М.: ИЛ, 1960.
7. **Adams J. F.** Stable homotopy and generalised homology.— Chicago, 1974.
8. **Baas N.-A.** On the stable Adams spectral sequences.— Aarhus, 1969.
9. **Гротендик А.** О некоторых вопросах гомологической алгебры.— М.: ИЛ, 1961.

С. К. ВОДОПЬЯНОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОБЛАСТЕЙ И ОТОБРАЖЕНИЙ. ОЦЕНКИ СНИЗУ НОРМЫ ОПЕРАТОРА ПРОДОЛЖЕНИЯ

Рассмотрим шкалу анизотропных пространств Соболева $W_p^l(G)$ при $l \in N^n$, $p \in [1, \infty]$ (изотропных пространств $W_p^{(l)}(G)$ при $l \in N$, $p \in [1, \infty]$), состоящих из локально суммируемых на открытом множестве $G \subset \mathbf{R}^n$ функций f: $G \to \mathbf{R}$, имеющих на G обобщенные в смысле Соболева производные $D_i^{l_i} f$ $(D^\alpha f, |\alpha| = l)$ и конечную норму

$$\|f\|_{W_p^l(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \sum_{i=1}^n \|D_i^{l_i} f\|_{L_p(G)}$$

$$\left(\|f\|_{W_p^{(l)}(G)} = \|f\|_{L_p(G)} + \|\nabla_l f\|_{L_p(G)}\right),$$

где ∇_l — градиент порядка l.

Оператор (не обязательно линейный) $\mathrm{ext}\colon W_p^l(G) \to W_p^l(\mathbf{R}^n)$ называется *оператором продолжения, если* $\mathrm{ext} f|_G = f$, где $f \in W_p^l(G)$.

В статье выводятся оценки снизу нормы оператора $\mathrm{ext}\colon W_p^l(G) \to W_p^l(\mathbf{R}^n)$, представляющие интерес в связи с некоторыми задачами интерполяции и теории функциональных пространств. Для частных случаев, когда G — шар и пространство Соболева изотропно, С. Г. Михлин [1, 2] нашел точные нижние оценки нормы оператора ext. В работе [3]

В. И. Буренков получил точные нижние и верхние оценки величины $\inf \|\mathrm{ext}\|$ для случая, когда $G=(a, b)\subset \mathbf{R}$. В отличие от цитированных работ мы получаем нижние оценки нормы оператора для произвольной области $G\subset \mathbf{R}^n$. Эти оценки зависят от геометрии области G. Полученные оценки снизу для нормы оператора продолжения влекут необходимые условия для существования ограниченного оператора ext при данных l и p. В ряде случаев эти необходимые условия являются достаточными.

Опишем кратко содержание каждого из шести параграфов работы.

Рассмотрения § 1 соответствуют соотношению $l^*p\geqslant n$ между показателями гладкости и суммируемости l и p (здесь и далее $l^{*-1}=$ $=n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n} l_i^{-1}\Big)$. В этом случае мы получаем оценки снизу нормы оператора продолжения, зависящие от отношения метрики Мазуркевича в области к метрике пространства. Основным объектом изучения в § 1 является представление однопараметрической группы невырожденных преобразований пространства $\mathbf{R}^n$ в группе изометрий произвольного полунормированного пространства функций, определенных на $\mathbf{R}^n$. Общий результат сформулирован в теореме 1, из которой следует, что получение нетривиальных оценок снизу для нормы оператора продолжения сводится к нетривиальным оценкам снизу для емкости Тейхмюллера и оценкам сверху для емкости кольца.

В § 2 выводятся оценки для емкостей кольца и Тейхмюллера в пространствах Соболева, Никольского — Бесова, *BMO* и Кальдерона.

В § 3 приведены доказательства теорем 1—3, сформулированных в § 1. Более простым является случай однородных пространств. Рассмотрение неоднородных пространств сводится к случаю однородных.

В § 4 установлены оценки снизу для нормы оператора ext: $W_p^l(G)\to$ $\to W_p^l(\mathbf{R}^n)$, при $n-1<l^*p\leqslant n$, зависящие от изопериметрических соотношений специального вида. При их выводе также используются полученные в § 2 оценки для емкостей кольца и Тейхмюллера.

Основные результаты работы содержатся в § 5 и 6, где соответственно получены необходимые условия для существования ограниченного оператора продолжения и описаны метрические свойства гомеоморфизмов φ, индуцирующих ограниченный оператор φ^* функциональных пространств по правилу $\varphi^*f=f\circ\varphi$. В § 5 в качестве частного случая мы получаем результаты работ [4—11]. Характер необходимых условий продолжения зависит от соотношений $l^*p\geqslant n$ или $l^*p\leqslant n$. Отметим здесь, что для конечносвязных областей на плоскости полученные при $l^*p=2$ необходимые условия продолжения равносильны достаточным условиям из работы [12]. В случае конечносвязных ограниченных областей $G\subset\mathbf{R}^2$ это обстоятельство приводит к необходимым и достаточным условиям для существования ограниченного оператора продолжения ext: $L_p^l(G)\to L_p^l(\mathbf{R}^n)$, $l^*p=2$. Любая связная компонента Γ_i границы ∂G такой области, отличная от точки, обладает следующим характеризующим свойством: существует постоянная $M<\infty$ такая, что для любой точки z одной из поддуг с концами x, $y\in\Gamma_i$, выполняется неравенство

$$\rho_l(x,z)\leqslant M\rho_l(x,y).$$

$\Big($Здесь $\rho_l(x, y)=\max\limits_{i=1,2}|x_i-y_i|^{l_i/l^*}$, $l^{*-1}=2^{-1}(l_1^{-1}+l_2^{-1}).\Big)$ В изотропном случае соответствующий результат установлен в [7, 8, 13—15]. Заметим, что достаточные условия продолжения, полученные в [12], формально слабее достаточных условий из работ [15, 16].

Аналогично случаю пространств Соболева формулируются необходимые и достаточные условия продолжения для пространств BMO^l и анизотропных пространств Никольского — Бесова при $l^*p=2$ [5]. Эти условия обобщают соответствующие «изотропные» результаты работ [10, 17, 18].

Наиболее общие достаточные условия продолжения из известных автору получены в работе [12]. Они являются редакцией достаточных условий Лихтенштейна [15, 16, 21]. Заметим, что локальная эквивалентность метрики Мазуркевича метрике пространства является частью достаточных условий из работы [12]. Сравнительный анализ указанных результатов проведен в [6]. В работе [19] получены сходные с условиями Лихтенштейна достаточные условия продолжения для анизотропных пространств Соболева.

Используя имеющиеся условия, можно сформулировать критерии продолжения дифференцируемых функций в духе работы [20] (см. также [7, 11]). Библиографию, более подробно отражающую историю вопроса, можно найти, например, в [6] или [10]. Часть результатов статьи анонсирована в заметках [4, 5]. Настоящая работа является естественным продолжением статьи [6].

§ 1. ОЦЕНКИ СНИЗУ НОРМЫ ОПЕРАТОРА ПРОДОЛЖЕНИЯ ЧЕРЕЗ ОТНОШЕНИЕ МЕТРИКИ МАЗУРКЕВИЧА К МЕТРИКЕ ПРОСТРАНСТВА

Прежде чем сформулировать основной результат, введем предварительные понятия. Более подробно эти понятия обсуждены в работе [6].

Условие продолжения. Пусть на пространстве $\mathbf{R}^n$ и открытом множестве $G\subset\mathbf{R}^n$ определены функциональные пространства $N(\mathbf{R}^n)$, $F(\mathbf{R}^n)$ и $N(G)$ соответственно. Будем говорить, что область G удовлетворяет *условию продолжения*, если функциональные пространства $N(\mathbf{R}^n)$, $F(\mathbf{R}^n)$ и $N(G)$ связаны диаграммой

$$N(\mathbf{R}^n)\xrightarrow{r} N(G)\xrightarrow{\exp} F(\mathbf{R}^n), \tag{1}$$

где $r\colon N(\mathbf{R}^n)\to N(G)$ — оператор ограничения, норма которого равна k, $\operatorname{ext}\colon N(G)\to F(\mathbf{R}^n)$ — ограниченный (не обязательно линейный) оператор продолжения, т. е. $\operatorname{ext} f|_G=f$, $f\in N(G)$,

$$\|\operatorname{ext}\|=\sup_{f\in N(G)}\frac{\|\operatorname{ext} f\|_{F(\mathbf{R}^n)}}{\|f\|_{N(G)}}<\infty.$$

Пространства $N(\mathbf{R}^n)$ и $F(\mathbf{R}^n)$, входящие в диаграмму (1), мы снабжаем дополнительной структурой: рассмотрим тройки $(\mathbf{R}^n, N, H_t)$ и $(\mathbf{R}^n, \bar{f}, H_t)$, где H_t, $t\in\mathbf{R}^+$,— однопараметрическая группа линейных отображений пространства $\mathbf{R}^n$, определяемая равенством $H_t=\exp(U\ln t)$, $t\in\mathbf{R}^+$, при условии, что U — невырожденная действительная $n\times n$-матрица. Более того, группа H_t, $t\in\mathbf{R}^+$, индуцирует однопараметрическую группу изоморфизмов H_t^*, $t\in\mathbf{R}^+$, пространств N и F по правилу

$$H_t^*f=t\circ H_t,\quad f\in N\,(\text{или } F),\ t\in\mathbf{R}^+,$$

причем полунорма пространства N однородна степени $\sigma\in\mathbf{R}$ относительно действия группы H_t^*, т.е.

$$\|H_t^*f\|_N=t^\sigma\|f\|_N,$$

а полунорма пространства F однородна степени δ.

Будем говорить, что пространства $N(\mathbf{R}^n)$ и $F(\mathbf{R}^n)$ *инвариантны относительно сдвига*, если для любого сдвига $\tau_a\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ на вектор a, $\tau_a(x)=x+a$, $x\in\mathbf{R}^n$, и любой функции $f\in F$ функция $\tau_a^*f=f\circ\tau_a$ принадлежит пространству F и

$$\|\tau_a^*f\|=\|f\|.$$

Пусть $\tilde{\rho}\colon\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ — произвольная непрерывная функция, обладающая свойством $\tilde{\rho}(H_t(x))=t\tilde{\rho}(x)$, $t\in\mathbf{R}^+$, $\tilde{\rho}(x)>0$ при $x\neq0$. Функцию $\rho(x,y)=\tilde{\rho}(x-y)$ будем называть ρ-*метрикой* в $\mathbf{R}^n$. Множество $Q(a,r)=\{x\in$

$\in \mathbf{R}^n$: $\rho(a, x) < r\}$ является ρ-шаром с центром в точке a и радиуса r, а $S(a, r) = \{x \in \mathbf{R}^n$: $\rho(a, x) = r\}$ — ρ-сферой.

Для точек x, y, принадлежащих одной связной компоненте открытого множества G, *относительное расстояние* (или *метрика Мазуркевича*) определяется как величина

$$\rho_G(x, y) = \inf 2r,$$

где нижняя грань берется по радиусам всех шаров $Q(z, r)$, для которых точки x и y принадлежат одной связной компоненте пересечения $Q(z, r) \cap \cap G$, z — произвольная точка $\mathbf{R}^n$.

Пусть (F_0, F_1) — пара множеств, содержащихся в замыкании множества G. Функция $f \in N(G)$ называется *N-допустимой* для пары множеств F_0, F_1, если $f(x) = 1$ $(f(x) = 0)$ для всех x, принадлежащих некоторой окрестности множества F_1 (F_0) (имеются в виду окрестности относительно множества G). Величина

$$\mathfrak{C}(F_0, F_1; N(G)) = \inf \|f\|_{N(G)},$$

где нижняя грань берется по всем N-допустимым для пары множеств F_0, F_1 функциям, называется *емкостью пары множеств F_0, F_1 в пространстве $N(G)$*.

Функция двух переменных $0 < r < R < \infty$

$$C(r, R; N) = \mathfrak{C}(\mathbf{R}^n \backslash Q(0, R), \bar{Q}(0, r); N(\mathbf{R}^n))$$

называется *емкостью кольца* $D_{r,R} = Q(0, R) \backslash \bar{Q}(0, r)$ *в пространстве* $N(R^n)$ (здесь $\bar{Q}(a, r)$ есть замыкание шара $Q(a, r)$).

Назовем *емкостью Тейхмюллера* функцию двух переменных r, R, $0 < r < R < \infty$,

$$T(r, R; F) = \inf_{F_0, F_1} \mathfrak{C}(F_0, F_1; F(\mathbf{R}^n)),$$

где нижняя грань берется по всем замкнутым связным множествам F_0, F_1 кольца $D_{r,R}$, пересекающимся как с внутренней $S(0, r) = \{x$: $\tilde{\rho}(x) = r\}$, так и с внешней $S(0, R)$ компонентами кольца $D_{r,R}$.

Пусть V — открытое множество, содержащееся в области G. *Звездной окрестностью множества V относительно области G* называется множество $S_G(V) = \{y \in G$: $\exists x \in V([y, x] \subset G)\}$. (Здесь $[y, x]$ — отрезок, соединяющий точки y и x.)

Условие невидимости. Будем говорить, что открытое множество G удовлетворяет *условию невидимости*, если для любой функции $f \in N(G)$, равной нулю в точках множества $S_G(V) \backslash \bar{V}$, функция

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \bar{V}, \\ 0, & x \in G \backslash \bar{V}, \end{cases}$$

также принадлежит пространству $N(G)$ и при этом

$$\|\tilde{f}\|_{N(G)} \leqslant \varkappa \|f\|_{N(G)},$$

где $\varkappa$ — некоторая постоянная, не зависящая от функции $f \in N(G)$.

Теорема 1. *Пусть открытое множество G удовлетворяет условиям продолжения и невидимости, а функциональные пространства $N(\mathbf{R}^n)$ и $F(\mathbf{R}^n)$ инвариантны относительно сдвигов и однопараметрической группы преобразований H_t, $t \in \mathbf{R}^+$, причем полунорма пространства $F(\mathbf{R}^n)$ однородна степени δ, а полунорма пространства $N(\mathbf{R}^n)$ однородна степени σ относительно группы H_t, $t \in \mathbf{R}^+$, $0 \leqslant \delta \leqslant \sigma$.*

Тогда в случае

$$M = \sup_{\substack{x, y \in G, \\ \rho^{1-\alpha}(x, y) \leqslant 1}} \frac{\rho_G(x, y)}{2^{1-\alpha} \rho^\alpha(x, y)} > 4,$$

$\alpha = \delta/\sigma$ при $0 < \delta \leqslant \sigma$, $\alpha = 1$ при $\delta = \sigma = 0$, для нормы оператора про-

должения ext: $N(G) \to \bar{f}(\mathbf{R}^n)$ *имеют место оценки снизу*

$$\|\text{ext}\| \geqslant M^\sigma \frac{\overline{T}(1,\ 2;\ F)}{k\varkappa C\ (1/2,\ 1;\ N)} \quad \text{при } 0<\delta\leqslant\sigma,$$

$$\|\text{ext}\| \geqslant \begin{cases} \dfrac{T\ (2/M,\ 1;\ F)}{k\varkappa C\ (1/2,\ 1;\ N)} \\ \dfrac{T\ (1,\ 2;\ F)}{k\varkappa C\ (2/M,\ 1;\ N)} \end{cases} \quad \text{при } 0=\delta=\sigma.$$

Приведем примеры пространств, которые удовлетворяют условиям теоремы 1.

1°. Однородное анизотропное пространство Соболева $L_p^l(G)$ при $l \in N^n$, $p \in [1, \infty]$ (пространство $L_p^{(l)}$ при $l \in N$, $p \in [1, \infty]$) состоит из локально суммируемых на G функций f: $G \to \mathbf{R}$, имеющих на G обобщенные в смысле Соболева производные $D_i^{l_i} f$ $(D^\alpha f, |\alpha| = l)$ и конечную полунорму

$$\|f\|_{L_p^{(l)}(G)} = \sum_{i=1}^n \|D_i^{l_i}\|_{L_p(G)}$$

$$\left(\|f\|_{L_p^{(l)}(G)} = \|\nabla_l f\|_{L_p(G)}\right).$$

2°. Однородное пространство Никольского — Бесова $b_{p,\theta}^l(G)$ при $l \in (\mathbf{R}^+)^n$, $p, \theta \in [1, \infty]$ (пространство $b_{p,\theta}^l(G)$ при $l \in \mathbf{R}^+$, $p, \theta \in [1, \infty]$) состоит из локально суммируемых функций $f \in G \to \mathbf{R}$, для которых конечна полунорма

$$\|f\|_{b_{p,\theta}^l(G)} = \sum_{i=1}^n \left\{ \int_0^\infty \left| \frac{\left\| \Delta_i^{k_i}\left(h^{l^*/l_i};\ G\right) f \right\|_{L_p(G)}}{h^{l^*}} \right|^\theta \frac{dh}{h} \right\}^{1/\theta}$$

$$\left(\|f\|_{b_{p,\theta}^{(l)}(G)} = \left\{ \int_{|h|<\infty} \left| \frac{\left\| \Delta^k (h;\ G)\, f \right\|_{L_p(G)}}{|h|^l} \right|^\theta \frac{dh}{|h|^n} \right\}^{1/\theta} \right),$$

где

$$\Delta^k (h;\ G)\, f(x) = \begin{cases} (\tau_h - I)^k f(x) \text{ при } [x,\ x + kh] \subset G, \\ \quad 0 \text{ при } [x,\ x + kh] \not\subset G, \end{cases}$$

$$\tau_h f(x) = f(x + h),\ k > l,\ \Delta_i^{k_i}(t;\ G)\, f = \Delta^{k_i}(te_i;\ G)\, f,$$

e_i — орты стандартного базиса пространства $\mathbf{R}^n$, $k_i > l_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\dfrac{1}{l^*} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{1}{l_i}$.

3°. Пространство $BMO^l(G)$ при $l \in (\mathbf{R}^+)^n$ состоит из локально суммируемых на G функций, для которых конечна полунорма

$$\|f\|_{BMO^l(G)} = \sup_{\Pi \subset G} \frac{1}{|\Pi|} \int_\Pi |f(x) - f_\Pi|\, dx,$$

где $\Pi = \Pi(x, r) = \{y \in \mathbf{R}^n:\ \rho_l(x, y) \leqslant r\}$, $\rho_l(x, y) = \max\limits_{i=1;2,\ldots,n} |x_i - y_i|^{l_i/l^*}$, $|\Pi|$ — мера Лебега параллелепипеда Π, а $f_\Pi = |\Pi|^{-1} \int\limits_\Pi f(x)\, dx$, и верхняя грань берется по всем параллелепипедам $\Pi = \Pi(x, r)$, содержащимся в G.

Для примеров 1—3 в качестве однопараметрической группы преобразований H_t, $t \in \mathbf{R}^+$, рассмотрим $H_t(x) = \left(t^{l^*/l_1} x_1,\ \ldots,\ t^{l^*/l_n} x_n\right)$, $t \in \mathbf{R}^+$; в случае числового параметра гладкости l или вектора l с одинаковыми компонентами мы имеем обычную группу гомотетий. Можно проверить, что для функции f, принадлежащей любому из перечисленных пространств $S_p^l(\mathbf{R}^n)$, функция $(H_t^* f)(x) = f(H_t(x))$ также принадлежит пространству $S_p^l(\mathbf{R}^n)$ и при этом

$$\| H_t^* f \|_{S_p^l(\mathbf{R}^n)} = t^\sigma \| f \|_{S_p^l(\mathbf{R}_n)},$$

где $\sigma = l^* - n/p$ для пространства Соболева и Никольского — Бесова и $\sigma = 0$ для пространства $BMO^l(\mathbf{R}^n)$. Кроме того, $\rho_l(H_t(x), H_t(y)) = t\rho_l(x, y)$. Для любого из перечисленных пространств мы имеем следующие значения постоянных: $\varkappa = k = 1$.

4°. Рассмотрим пространство $L_{p_1,p_2}^{l_1,l_2}(G)$, $G \subset \mathbf{R}^2$, при $l_1, l_2 \in N$, $p_1, p_2 \in [1, \infty]$, локально суммируемых функций, имеющих обобщенные в смысле Соболева производные $D_1^{l_1} f$ и $D_2^{l_2} f$ и конечную полунорму

$$\| f \|_{L_{p_1,p_2}^{l_1,l_2}(G)} = \| D_1^{l_1} f \|_{L_{p_1}(G)} + \| D_2^{l_2} f \|_{L_{p_2}(G)}.$$

Положим $\lambda_1 = l_1 - \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\lambda_2 = l_2 + \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$, $H_t(x) = (t^{\lambda^*/\lambda_1} x_1, t^{\lambda^*/\lambda_2} x_2)$, где $\frac{1}{\lambda^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right)$, $\rho_\lambda(x, y) = \max\limits_{i=1,2} | x_i - y_i |^{\lambda_i/\lambda^*}$. Непосредственно проверяется, что $\rho_\lambda(H_t(x), H_t(y)) = t\rho_\lambda(x, y)$ и для функции $H_t^* f = f \circ H_t$, $f \in L_{p_1,p_2}^{l_1,l_2}(\mathbf{R}^2)$, мы имеем $\| H_t^* f \| = t^\delta \| f \|$, где

$$\delta = \frac{l_1 \lambda^*}{\lambda_1} - \frac{2}{p_1} = \frac{l_2 \lambda^*}{\lambda_2} - \frac{2}{p_2}.$$

Пространство Соболева $W_p^l(G)$ состоит из функций пространства $L_p^l(G)$, для которых конечна норма

$$\| f \|_{W_p^l(G)} = \| f \|_{L_p(G)} + \| f \|_{L_p^l(G)}.$$

Аналогично определяется пространство Никольского — Бесова $B_{p,\theta}^l(G)$.

В тех случаях, когда формулировка результата является одинаковой для шкал пространств Соболева или Никольского — Бесова, мы будем обозначать эти пространства одним символом $s_p^l (s_p^{(l)})$, если они однородны и анизотропны (изотропны), и символом $S_p^l (S_p^{(l)})$, если они неоднородны и анизотропны (изотропны). В случае однородных пространств область определения предполагается связной. Оценки нормы оператора продолжения для указанных шкал пространств являются следствиями теоремы 1.

Теорема 2. *Если*

$$M = \lim_{r \to 0} \sup_{x, y \in G, \rho^{1-\alpha}(x,y) < r} \frac{\rho_G(x, y)}{2^{1-\alpha} \rho^\alpha(x, y)} > 4$$

$$\left(M = \sup_{x, y \in G, \rho^{1-\alpha}(x,y) < 1} \frac{\rho_G(x, y)}{2^{1-\alpha} \rho^\alpha(x, y)} > 4 \right)$$

(постоянная α определяется ниже), *то для нормы оператора*

$$\text{ext}: S_p^l(G) \to S_q^r(\mathbf{R}^n)$$
$$(\text{ext}: s_p^l(G) \to s_q^r(\mathbf{R}^n)),$$

где $0 \leqslant r^* - n/q \leqslant l^* - n/p$, $r = \varkappa l$, $\varkappa \in (0, 1]$, *имеют место оценки снизу*

$$\| \text{ext} \|^p \geqslant \begin{cases} \gamma_1 M^{l^* p - n} & \text{при } 0 < r^* - n/q, \ \alpha = \dfrac{r^* - n/q}{l^* - n/p}; \\ \gamma_2 \ln \dfrac{M}{2} & \text{при } r^* - n/q = 0, \ l = r, \ p = q, \ \alpha = 1. \end{cases}$$

Теорема 3. *Если*

$$M = \sup_{x,y\in G} \frac{\rho_G(x, y)}{\rho(x, y)} > 4,$$

то для нормы оператора продолжения ext: $BMO^l(G) \to BMO^l(\mathbf{R}^n)$ *справедлива оценка снизу*

$$\|\mathrm{ext}\| \geqslant \gamma_3 \ln \frac{M}{2}.$$

§ 2. ОЦЕНКИ ДЛЯ ЕМКОСТЕЙ КОЛЬЦА И ТЕЙХМЮЛЛЕРА

В этом параграфе мы установим оценки для емкостей кольца и Тейхмюллера. Из теоремы 1 следует, что для получения нетривиальных оценок для нормы оператора ext достаточно знать оценки снизу для емкости Тейхмюллера и сверху для емкости кольца. Основным модельным примером является пространство Соболева, однородное или неоднородное. Если специфика пространства Никольского — Бесова требует некоторых изменений в доказательствах, то мы эти модификации каждый раз указываем специально. В изотропном случае такие оценки известны (см., например, [8, 10, 22—27]). Здесь для оценок емкости мы используем метод, в основе которого лежит применение теорем вложения (см. [10, 26, 27]).

1°. Напомним определение и основные свойства емкости. Множество всех функций из $N(G)$, допустимых для пары множеств F_0, F_1, обозначим символом $\mathfrak{N}(F_0, F_1; N(G))$. Величина

$$\mathfrak{C}(F_0, F_1; N(G)) = \inf_{f\in\mathfrak{N}(F_0, F_1; N(G))} \|f\|_{N(G)}$$

называется N-емкостью пары множеств F_0, F_1 в пространстве $N(G)$. Если для пары F_0, F_1 допустимых функций не существует, то полагаем $\mathfrak{C}(F_0, F_1; N(G)) = \infty$.

Приведем два общих свойства емкости, которые непосредственно следуют из определения.

Свойство 1. Монотонность емкости относительно пары множеств. *Если пара множеств* (F_0', F_1') *содержится в паре множеств* (F_0, F_1), *т. е.* $F_i' \subset F_i$, $i = 0, 1$, то

$$\mathfrak{C}(F_0', F_1'; N(G)) \leqslant \mathfrak{C}(F_0, F_1; N(G)).$$

Напомним, что для двух пространств $N(G)$ и $N(\mathbf{R}^n)$ определен оператор ограничения r: $N(\mathbf{R}^n) \to N(G)$, т. е. $r(f) = f|_G$, $f \in N(\mathbf{R}^n)$, норма которого равна k.

Свойство 2. Монотонность относительно области определения. *Для любой пары множеств* $F_0, F_1 \subset \overline{G}$ *справедливо неравенство*

$$\mathfrak{C}(F_0, F_1; N(G)) \leqslant k\mathfrak{C}(F_0, F_1; N(\mathbf{R}^n)).$$

Перейдем теперь к изучению емкостей кольца и Тейхмюллера. В [6] доказано, что в пространствах, инвариантных относительно сдвига, емкости кольца и Тейхмюллера зависят лишь от радиусов и не зависят от выбора центра. Поэтому в дальнейшем мы считаем, что центр кольца отнесен к началу координат.

Из монотонности емкости (свойство 1) вытекает следующее свойство емкости кольца (Тейхмюллера).

Свойство 3. *Функция* $C(r, R)$ $(T(r, R))$ *при фиксированном* R *не убывает* (*не возрастает*) *на промежутке* $(0, R)$, *а при фиксированном* r *не возрастает* (*не убывает*) *на промежутке* (r, ∞).

Сформулируем теперь свойства, которые вытекают из однородности нормы относительно однопараметрической группы преобразований H_t, $t \in \mathbf{R}^+$.

Свойство 4 [6]. *Емкости колец* $D_{r,R}$ *и* $D_{\mu r,\mu R}$ *в пространстве* $N(\mathbf{R}^n)$ *связаны условием*

$$C(r,\ R;\ N)=\mu^{\sigma}C(\mu r,\ \mu R;\ N).$$

Полагая в последнем равенстве $\mu=1/R$, $r=R/2$, получаем

$$C(R/2,\ R;\ N)=R^{-\sigma}C(1/2,\ 1;\ N). \tag{2}$$

Свойство 5 [6]. *Емкости Тейхмюллера* $T(r,\ R;\ F)$ *и* $T(\mu r,\ \mu R;\ F)$ *в пространстве* $F(\mathbf{R}^n)$ *связаны условием*

$$T(r,\ R;\ F)=\mu^{\delta}T(\mu r,\ \mu R;\ F).$$

Полагая $\mu=1/R$, имеем

$$T(r,\ R;\ F)=R^{-\delta}T(r/R,\ 1;\ F). \tag{3}$$

2°. Перейдем теперь к оценкам емкостей кольца и Тейхмюллера в пространствах Соболева и Никольского — Бесова.

Напомним, что с каждым пространством Соболева или Никольского — Бесова s_p^l мы связываем ρ-метрику $\rho_l(x,\ y)=\max\limits_{i=1,2,\ldots,n}|x_i-y_i|^{l_i/l^*}$, где $l^{*-1}=n^{-1}\sum\limits_{i=1}^{n}l_i^{-1}$. Как обычно, относительно этой метрики определяются ρ-шары и ρ-сферы (в нашем случае ρ-шары являются параллелепипедами). Относительно однопараметрической группы преобразований $H_t(x)=\left(t^{l^*/l_1}x_1,\ \ldots,\ t^{l^*/l_n}x_n\right), t\in\mathbf{R}^+$, пространство $s_p^l(\mathbf{R}^n)$ инвариантно и его полунорма однородна степени l^*-n/p, т. е.

$$\|H_t^*f\|_{s_p^l}=t^{l^*-n/p}\|f\|_{s_p^l},\ f\in s_p^l(\mathbf{R}^n),\ t\in\mathbf{R}^+.$$

Отметим соотношение между емкостями колец в однородном и неоднородном пространствах, которое базируется на неравенстве Пуанкаре — Соболева. Известно [28], что если $\operatorname{supp}u\subset Q(0,\ R)$, то

$$\|u\|_{L_p(\mathbf{R}^n)}\leqslant CR^{l^*}\|u\|_{s_p^l(\mathbf{R}^n)}.$$

Поэтому для любой функции u, допустимой для емкости кольца $D_{r,R}$, имеем

$$C\left(r,\ R;\ s_p^l\right)\leqslant\|u\|_{s_p^l(\mathbf{R}^n)}\leqslant\|u\|_{S_p^l(\mathbf{R}^n)}=$$
$$=\|u\|_{L_p(\mathbf{R}^n)}+\|u\|_{s_p^l(\mathbf{R}^n)}\leqslant\left(1+CR^{l^*}\right)\|u\|_{s_p^l(\mathbf{R}^n)}.$$

Отсюда вытекает следующее

Предложение 1. *Емкости кольца* $D_{r,R}$ *в однородном и неоднородном пространствах связаны между собой неравенствами*

$$C\left(r,\ R;\ s_p^l\right)\leqslant C\left(r,\ R;\ S_p^l\right)\leqslant\left[1+CR^{l^*}\right]C\left(r,\ R;\ s_p^l\right),$$

где C *— постоянная в неравенстве Пуанкаре — Соболева.*

Неравенство для емкостей Тейхмюллера в однородных и неоднородных пространствах следует непосредственно из определения емкости.

Предложение 2. *Для емкостей Тейхмюллера в однородных и неоднородных пространствах имеем соотношение*

$$T\left(r,\ R;\ s_p^l\right)\leqslant T\left(r,\ R;\ S_p^l\right).$$

Сформулируем теперь свойства 4 и 5 для случая пространств Соболева и Никольского — Бесова.

Предложение 3. *Емкости колец* $D_{r,R}$ *и* $D_{\mu r,\mu R}$ *в пространстве* $s_p^l(\mathbf{R}^n)$ *связаны условием*

$$C\left(r,\ R;\ s_p^l\right)=\mu^{l^*-n/p}C\left(\mu r,\ \mu R;\ s_p^l\right).$$

Из (2) получаем

$$C(R/2,\ R;\ s_p^l) = R^{n/p-l^*}\, C\left(\frac{1}{2},\ 1;\ s_p^l\right). \tag{4}$$

Предложение 4. *Емкости Тейхмюллера* $T(r,\ R;\ s_q^r)$ и $T(\mu r,\ \mu R;\ s_q^r)$ *связаны равенством*

$$T(r,\ R;\ s_q^r) = \mu^{r^*-n/q}\, T(\mu r,\ \mu R;\ s_q^r).$$

Из (3) получаем

$$T(r,\ R;\ s_q^r) = R^{n/q-r^*}\, T\left(\frac{r}{R},\ 1;\ s_q^r\right). \tag{5}$$

Напомним, что из свойства 3 вытекает следующее свойство емкости кольца: функция $C(r,\ R)$ при фиксированном R не убывает на $(0,\ R)$, а при фиксированном r не возрастает на промежутке $(r,\ \infty)$.

Предложение 5. *Емкость кольца* $C(1/2,\ 1)$ *в однородных пространствах Соболева и Никольского — Бесова отлична от нуля.*

Доказательство. Если u — допустимая функция для емкости $C(1/2,\ 1;\ S_p^l)$, то

$$[m(Q(0,\ 1/2))]^{1/p} \leqslant C(1/2,\ 1;\ S_p^l).$$

Применяя теперь правое неравенство предложения 1 при $R=1$, получаем оценку

$$[m(Q(0,\ 1/2))]^{1/p} \leqslant C\left(\frac{1}{2},\ 1;\ S_p^l\right) \leqslant [1+C]\, C\left(\frac{1}{2},\ 1;\ s_p^l\right),$$

что и требовалось доказать.

Предложение 6. *Если в случае пространств Соболева* $l^*p > n$ *при* $p>1$ *или* $l^* \geqslant n$ *при* $p=1$, *а в случае пространств Никольского — Бесова* $l^*p > n$ *при* $\theta > 1$ *или* $l^*p \geqslant n$ *при* $\theta = 1$, *то при* $(1 \geqslant R \geqslant 2r)$

$$C(r,\ R;\ s_p^l) = aR^{n/p-l^*}\left(C(r, R;\ S_p^l) \sim R^{n/p-l^*}\right).$$

Доказательство. Полагая в предложении 3 $\mu = R^{-1}$, получим равенство

$$C(r,\ R;\ s_p^l) = R^{n/p-l^*} C\left(\frac{r}{R},\ 1;\ s_p^l\right).$$

Воспользовавшись, далее, монотонностью емкости, получим оценку сверху

$$R^{n/p-l^*}\left(C\frac{r}{R},\ 1;\ s_p^l\right) = C(r,\ R;\ s_p^l) \leqslant C\left(\frac{R}{2},\ R;\ s_p^l\right) = R^{n/p-l^*} C\left(\frac{1}{2},\ 1\right).$$

Чтобы получить оценку снизу, достаточно проверить, что $C(s,\ 1;\ s_p^l) \geqslant \alpha > 0$, где $s = r/R \leqslant 1/2$. Из предложения 1 имеем неравенство

$$C(s,\ 1;\ S_p^l) \leqslant (1+C)\, C(s,\ 1;\ s_p^l),$$

из которого следует, что надо убедиться в справедливости неравенства

$$C(s,\ 1;\ S_p^l) \geqslant \alpha > 0,\quad s \in (0,\ 1/2].$$

Заметим, что допустимые функции для емкостей $C(s,\ 1;\ S_p^l)$, $s \in (0,\ 1/2]$, равны нулю вне шара и единице в окрестности точки 0. По теореме вложения $S_p^l(\mathbf{R}^n) \to C(\mathbf{R}^n)$ [28] для любой допустимой функции u имеем неравенство

$$1 \leqslant \sup_{x \in \mathbf{R}^n} |u(x)| \leqslant C_1 \|u\|_{S_p^l},$$

где постоянная C_1 — норма оператора вложения $S_p^l(\mathbf{R}^n) \to C(\mathbf{R}^n)$, ограниченного в силу условий предложения 6. Таким образом,

$$C_1^{-1} \leqslant C(s,\ 1;\ S_p^l),$$

что доказывает предложение для однородных пространств. В неоднородном случае доказательство требует применения предложения 1.

Доказательства предложений 5 и 6 основаны на неравенстве между емкостями, вытекающем из возможности вложения одного функционального пространства в другое. Сформулируем соответствующий результат в абстрактной форме.

Предложение 7. *Если* i: $H_1(\mathbf{R}^n)\to H_2(\mathbf{R}^n)$ — *ограниченный оператор вложения двух функциональных пространств* H_1 *и* H_2, *то*

$$\mathfrak{C}(F_0,\ F_1;\ H_2(R^n))\leqslant\|i\|\mathfrak{C}(F_0,\ F_1;\ H_1(R^n)),$$

где $\|i\|$ — *норма оператора вложения.*

Доказательство следует непосредственно из определения емкости.

В следующем предложении устанавливается оценка снизу для емкости Тейхмюллера.

Предложение 8. *Пусть компоненты вектора гладкости упорядочены* $l_1\leqslant l_2\leqslant\ldots\leqslant l_n$. *Если* $p>\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{l_i}$ *при* $p>1$ *или* $1\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{l_i}$ *при* $p=1$ *в случае пространств Соболева и* $p>\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}$ *в случае пространств Никольского — Бесова, то*

$$T^p(r,\ R;\ s_p^l)\geqslant\begin{cases} c\ln\dfrac{R}{r}\ \text{при}\ l^*p=n,\\ \dfrac{c}{l^*p-n}\left(r^{n-l^*p}-R^{n-l^*p}\right)\text{при}\ l^*p>n,\\ \dfrac{c}{n-l^*p}\left(R^{n-l^*p}-r^{n-l^*p}\right)\ \text{при}\ l^*p<n.\end{cases}$$

Доказательство проведем для пространства Соболева L_p^l, а затем укажем изменения для случая пространств Никольского — Бесова.

Заметим, прежде всего, что при фиксированном $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$ для почти всех x_i ограничение функции $u\in L_p^l$ на гиперплоскость $P(x_i)=\{y\in\mathbf{R}^n: y_i=x_i\}$ есть функция класса $L_p^{\lambda(i)}(P(x_i))$, где $\lambda_{(i)}=(l_1,\ \ldots$ $\ldots,\ l_{i-1},\ l_{i+1},\ \ldots,\ l_n)$. Этот факт доказывается точно так же, как теорема 5.5 [29, с. 120].

Рассмотрим произвольную допустимую функцию u для емкости $T(r,\ R)$ в пространстве $L_p^l(\mathbf{R}^n)$. Перейдем теперь в выражении для $\|u\|_{L_p^l}^p$ к обобщенным сферическим координатам [28]

$$\|u\|_{L_p^l}^p\geqslant\sum_{i=1}^{n}\|D_i^{l_i}u\|_{L_p}^p\geqslant\int\limits_{D_{r,R}}\sum_{i=1}^{n}|D_i^{l_i}u|^p\,dx=$$

$$=\int\limits_r^R ds\int\limits_{S(0,1)}\sum_{i=1}^{n}\left|D_i^{l_i}u(H_s(x'))\right|^p s^{n-1}d\omega(x').$$

В силу ограничений на показатели суммируемости и гладкости для почти всех $s\in(r,\ R)$ сужение функции u на ρ-сферу $S(0,\ s)$ является непрерывной функцией и, кроме того, для почти всех $s\in(r,\ R)$

$$\int\limits_{S(0,1)}\sum_{i=1}^{n}\left|D_i^{l_i}u(H_s(x'))\right|^p s^{n-1}d\omega(x')\geqslant cs^{n-1-l^*p},$$

поскольку $\operatorname*{osc}\limits_{S(0,s)}u=\max\limits_{S(0,s)}u-\min\limits_{S(0,s)}u\geqslant 1$ по определению функции u. Здесь c — постоянная, зависящая от нормы оператора вложения $W_p^{\lambda}(S(0,\ s))$ в $C(S(0,\ s))$.

Объединим теперь выведенные неравенства в окончательную оценку:

$$\|u\|^p_{L^l_p} \geqslant c\int\limits_r^R s^{n-1-l^*p}ds = c\begin{cases} \ln\frac{R}{r} \text{ при } l^*p = n, \\ \frac{1}{l^*p-n}\left(r^{n-l^*p} - R^{n-l^*p}\right) \text{ при } l^*p > n, \\ \frac{1}{n-l^*p}\left(R^{n-l^*p} - r^{n-l^*p}\right) \text{ при } l^*p < n. \end{cases}$$

Так как допустимая для емкости $T(r, R)$ функция $u \in L^l_p$ выбиралась произвольно, то утверждение для пространств Соболева доказано.

Доказательство для пространств Никольского — Бесова проводится по той же схеме с учетом следующего замечания: в силу вложения $B^l_{p,\theta}(\mathbf{R}^n) \subset B^l_{p,\infty}(\mathbf{R}^n)$ достаточно установить оценки для классов Никольского. Ограничения на показатели суммируемости и гладкости гарантируют ограниченность оператора вложения в пространство непрерывных функций на соответствующих ρ-сферах.

Предложение 9. *Если $l^*p < n$, $p \geqslant 1$ для пространств Соболева W^l_p и $l^*p < n$, $p > 1$ $(1 \leqslant \theta \leqslant q$ при $p = 1)$ для пространств Никольского — Бесова $B^l_{p,\theta}$, то при $R > 2r$ $(1 \geqslant R > 2r)$*

$$C\left(r, R; s^l_p\right) \sim r^{\frac{n}{p}-l^*} \left(C\left(r, R; S^l_p\right) \sim r^{\frac{n}{p}-l^*}\right).$$

Доказательство. Положим в предположении 3 $\mu = R^{-1}$. Тогда получим равенство

$$C\left(r, R; s^l_p\right) = R^{\frac{n}{p}-l^*} C\left(\frac{r}{R}, 1; s^l_p\right).$$

Напишем теперь применительно к нашему случаю неравенства предложения 1

$$C\left(\frac{r}{R}, 1; s^l_p\right) \leqslant C\left(\frac{r}{R}, 1; S^l_p\right) \leqslant \left[1 + CR^{l^*}\right] C\left(\frac{r}{R}, 1; s^l_p\right).$$

Из этих неравенств следует, что достаточно найти оценку снизу для емкости $C\left(\frac{r}{R}, 1; S^l_p\right)$. Эта оценка следует из вложения $W^l_p(\mathbf{R}^n)$ в $L_q(\mathbf{R}^n)$ [28, 30] $\left(B^l_{p,\theta}(\mathbf{R}^n)\right.$ в пространство Лоренца $L_{q,\infty}(\mathbf{R}^n)$ [28, 31, 32]) при $1/q = (n - l^*p)/pn$. Для всякой функции $u \in W^l_p(\mathbf{R}^n)\left(B^l_{p,\theta}(\mathbf{R}^n)\right)$, равной единице на $Q(0, r/R)$, имеем неравенство

$$[m(Q(0, r/R))]^{1/q} \leqslant C\|u\|_{W^l_p(\mathbf{R}^n)} \left(\leqslant C\|u\|_{B^l_{p,\theta}(\mathbf{R}^n)}\right).$$

Заметим, что мера шара $Q(0, r/R)$ равна $2^n(r/R)^n$. Поэтому

$$2^{\frac{n}{q}}\left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{n-pl^*}{p}} \leqslant CC\left(r/R, 1; S^l_p(\mathbf{R}^n)\right) \leqslant$$

$$\leqslant C[1 + C]\, C\left(\frac{r}{R}, 1; s^l_p\right) = CR^{-\frac{n}{p}+l^*} C\left(r, R; s^l_p\right).$$

Таким образом, получена оценка снизу

$$Cr^{n/p-l^*} \leqslant C\left(r, R; s^l_p\right).$$

Оценка сверху для емкости $C\left(r, R; s^l_p\right)$ следует из соотношения

$$C\left(r, R; s^l_p\right) \leqslant C\left(r, 2r; s^l_p\right) = r^{\frac{n}{p}-l^*} C\left(1, 2; s^l_p\right),$$

так как по предложению 5 емкость $C\left(1, 2; s^l_p\right) \neq 0$. Применение предложения 1 дает двустороннюю оценку емкости $C\left(r, R; S^l_p\right)$. На этом доказательство закончено.

Предложение 10. *Если $n=l^*p$, $p\in(1, \infty)$, то для емкости кольца $D_{r,1}$, $r\in(0, 1)$, в пространствах W_p^l имеет место оценка сверху*

$$C(r, 2; W_p^l)\leqslant c\left(\ln\frac{2}{r}\right)^{1/p-1}.$$

Доказательство. В [33] доказано существование положительной гладкой в $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$ функции ρ_1: $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, однородной относительно группы преобразований $H_t(x)=\left(t^{l^*/l_1}x_1, \ldots, t^{l^*/l_n}x_n\right)$, т. е. $\rho_1(H_t(x))=t\rho_1(x)$. Кроме того, функции $\rho(x)=\rho_l(x, 0)$ и ρ_1 эквивалентны в том смысле, что существуют положительные постоянные C_0, $C_1>0$ такие, что для всех $x\in\mathbf{R}^n$

$$C_0\rho_1(x)\leqslant\rho(x)\leqslant C_1\rho_1(x).$$

В [34] отмечено также, что $|D^\sigma\rho_1(x)|\leqslant C_\sigma\rho_1(x)^{1-\alpha\sigma}$, $x\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, где C_σ не зависит от x, а $\alpha=(l^*/l_1, l^*/l_2, \ldots, l^*/l_n)$, σ — произвольный n-мерный мультииндекс. В силу эквивалентности метрик ρ и ρ_1 достаточно доказать предложение для метрики ρ_1. Положим $v(x)=\left(\ln\frac{2}{r}\right)^{-1}\ln\frac{2}{\rho_1}$. Обозначим через φ функцию из пространства $C^\infty(\mathbf{R})$, такую, что $\varphi(t)=0$ при $t<0$, $\varphi(t)=1$ при $t>1$. Пусть $u(x)=\varphi[v(x)]$. Ясно, что $u=0$ вне $B_2=\{x\in\in\mathbf{R}^n:\ \rho_1(x)<2\}$ и $u=1$ на множестве $B_r=\{x\in\mathbf{R}^n:\ \rho_1(x)\leqslant r\}$. Кроме того, с учетом предыдущих замечаний имеем неравенство

$$\left|D_i^{l_i}u(x)\right|\leqslant C\left[\ln\frac{2}{r}\right]^{-1}\rho_1(x)^{-l^*}$$

на множестве $B_2\setminus B_r$. Отсюда получаем

$$[C(B_r, \mathbf{R}^n/B_2; W_p^l]^p\leqslant C\sum_{i=1}^n\left\|D_i^{l_i}u(s)\right\|_{L_p}^p\leqslant$$

$$\leqslant C\left[\ln\frac{2}{r}\right]^{-p}\int\limits_{B_2\setminus B_r}[\rho_1(x)]^{-l^*p}dx=C\left[\ln\frac{2}{r}\right]^{-p}\int\limits_r^2\frac{ds}{s}=C\left[\ln\frac{2}{r}\right]^{1-p}.$$

В заключение отметим свойства емкостей кольца и Тейхмюллера в пространстве BMO^l, которые нам понадобятся при доказательстве теоремы 3.

Предложение 11. *В пространстве $BMO^l(\mathbf{R}^n)$ емкость Тейхмюллера $T(1, 2; BMO^l)\neq0$. Для емкости кольца имеем оценку сверху*

$$C(r, 1; BMO^l)\leqslant C\left[\ln\frac{1}{r}\right]^{-1},\ r\in(0, 1).$$

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $\ln\frac{1}{\rho(x)}\in\in BMO^l(\mathbf{R}^n)$. Тогда функция $u(x)=\left[\ln\frac{1}{\rho(x)}\right]\Big/\ln\frac{1}{r}$ при $x\in D_{r,1}(0)$, $u(x)\equiv1$ на $Q(0, r)$, $u(x)\equiv0$ на $\mathbf{R}^n\setminus Q(0, 1)$, является допустимой для емкости $C(r, 1; BMO^l)$. Поэтому

$$C(r, 1; BMO^l)\leqslant\|u\|_{BMO^l(\mathbf{R}^n)}\leqslant C\left\|\ln\frac{1}{\rho}\right\|_{BMO^l(\mathbf{R}^n)}\left[\ln\frac{1}{r}\right]^{-1}.$$

В последнем переходе использован результат работы [35].

Замечание 1. Доказанные оценки для шкал пространств Соболева и Никольского — Бесова позволяют получить аналогичные соотношения для промежуточных шкал. Приведем в качестве примера шкалу пространств $\mathfrak{R}_p^\alpha$, $\alpha>0$, $p\in[1, \infty]$, введенную (в изотропном случае) Кальдероном [36]. В [37] доказано, что шкала пространств Кальдерона занимает промежуточное положение в шкале пространств Бесова: $B_{pp}^\alpha\subset\subset\mathfrak{R}_p^\alpha\subset B_{p,\infty}^\alpha$. В силу предложения 7 имеем следующие соотношения для емкости:

$$k_1\mathfrak{C}(F_0, F_1; B^\alpha_{p,p}) \leqslant \mathfrak{C}(F_0, F_1; \mathfrak{R}^\alpha_p) \leqslant k_2\mathfrak{C}(F_0, F_1; B^\alpha_{p,\infty}).$$

Отсюда мы видим, что оценки для емкостей кольца и Тейхмюллера в пространствах Кальдерона немедленно получаются через соответствующие оценки емкости в пространствах Бесова (см. предложения 1—6, 8, 9).

§ 3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1—3

Доказательство теоремы 1 основано на теореме 2.2 из [6], которую мы сейчас процитируем. Все понятия, входящие в формулировку теоремы, определены в § 1.

Теорема [6]. *Пусть открытое множество $G \subset \mathbf{R}^n$ удовлетворяет условиям невидимости и продолжения. Тогда если*

$$M = \sup_{x,y\in G, \rho^{1-\alpha}(x,y)\leqslant 1} \frac{\rho_G(x,y)}{2^{1-\alpha}\rho^\alpha(x,y)} > 4,$$

$$\alpha = \begin{cases} \delta/\sigma & \text{при } 0<\delta\leqslant\sigma, \\ 1 & \text{при } \delta=\sigma=0, \end{cases}$$

то для нормы оператора продолжения выполняются неравенства

$$T\left(r, \frac{1}{2}Mr^\alpha; F\right) \leqslant k\varkappa \|\operatorname{ext}\| C\left(\frac{M}{2}r^\alpha, Mr^\alpha; N\right), \tag{6}$$

$$T(r, 2r; F) \leqslant k\varkappa\|\operatorname{ext}\|C(2r, Mr^\alpha; N). \tag{7}$$

Заметим, что условия цитируемой теоремы заведомо выполнены, если выполнены условия теоремы 1. Следовательно, в условиях теоремы 1 мы имеем неравенства (6) и (7).

Применим равенства (2) и (3) к емкостям, входящим в неравенство (6). Получим

$$\frac{T\left(r, \frac{1}{2}Mr^\alpha; F\right)}{C\left(\frac{M}{2}r^\alpha, Mr^\alpha; N\right)} = \frac{r^{-\delta}T\left(1, \frac{1}{2}Mr^{\alpha-1}; F\right)}{(Mr^\alpha)^{-\sigma}C\left(\frac{1}{2}, 1; N\right)} = \frac{M^\sigma T\left(1, \frac{1}{2}Mr^{\alpha-1}; F\right)}{C\left(\frac{1}{2}, 1; N\right)}$$

и поэтому

$$\|\operatorname{ext}\| \geqslant \begin{cases} M^\sigma \dfrac{T(1, 2; F)}{k\varkappa C\left(\frac{1}{2}, 1; N\right)} & \text{при } 0<\delta\leqslant\sigma, \\ \dfrac{T\left(\frac{2}{M}, 1; F\right)}{k\varkappa C\left(\frac{1}{2}, 1; N\right)} & \text{при } \delta=\sigma=0. \end{cases} \tag{8}$$

Если применить равенства (2) и (3) к емкостям, входящим в неравенство (7), то получим

$$\frac{T(r, 2r; F)}{C(2r, Mr^\alpha; N)} = \frac{r^{-\delta}T(1, 2; F)}{(Mr^\alpha)^{-\sigma}C\left(\frac{2r^{1-\alpha}}{M}, 1; N\right)} = \frac{M^\sigma T(1, 2; F)}{C\left(\frac{2r^{1-\alpha}}{M}, 1; N\right)}.$$

Отсюда

$$\|\operatorname{ext}\| \geqslant \begin{cases} \dfrac{M^\sigma T(1, 2; F)}{k\varkappa C\left(\frac{1}{2}, 1; N\right)} & \text{при } 0<\delta\leqslant\sigma, \\ \dfrac{T(1, 2; F)}{k\varkappa C\left(\frac{2}{M}, 1; N\right)} & \text{при } \delta=\sigma=0. \end{cases} \tag{9}$$

Очевидно, что неравенства (8) и (9) составляют утверждение теоремы 1.

Замечание 2. Оценки снизу для нормы оператора продолжения при $0<\delta\leqslant\sigma$ в (8) и (9) совпадают, в то время как при $\delta=\sigma=0$ они различны. В (8) оценка снизу зависит от поведения емкости Тейхмюллера $T(2/M,\ 1;\ F)$ при $M\to\infty$, а в (9) — от поведения емкости кольца $C(2/M,\ 1;\ N)$ при $M\to\infty$. Это обстоятельство, во-первых, расширяет возможности применения теоремы 1 к конкретным пространствам, а во-вторых, позволяет из двух возможных оценок выбрать наилучшую (ср., например, поведение емкостей кольца и Тейхмюллера в пространствах Соболева при $l^*p=n$ в предложениях 8 и 10).

Применение теоремы 1 к конкретным пространствам при $0<\delta\leqslant\sigma$ сводится к проверке того, что емкости кольца $C(1/2,\ 1;\ N)$ и Тейхмюллера $T(1,\ 2;\ F)$ не равны нулю. В этом случае оценка снизу нетривиальна.

Доказательство теоремы 3. Положим в теореме 1 $N=F=BMO^l$. Тогда $k=\varkappa=1$, $\delta=\sigma=0$. Из (9) имеем оценку снизу для нормы оператора продолжения:

$$\|\mathrm{ext}\|\geqslant T(1,\ 2;\ BMO^l)/C\left(\frac{2}{M},\ 1;\ BMO^l\right).$$

По предложению 11 $T(1,\ 2;\ BMO^l)\neq 0$ и $C\left(\frac{2}{M},\ 1;\ BMO^l\right)\leqslant C\left[\ln\frac{M}{2}\right]^{-1}$, $M>2$. Отсюда окончательно получаем $\|\mathrm{ext}\|\geqslant\gamma_3\ln M/2$, где $\gamma_3=T(1,\ 2;\ BMO^l)/C$.

Доказательство теоремы 2. Разберем два случая: однородный и неоднородный. Пусть пространства, фигурирующие в теореме 2, однородны. Тогда мы находимся в условиях теоремы 1 при $N(\mathbf{R}^n)=s_p^l(\mathbf{R}^n)$, $N(G)=s_p^l(G)$, $F(\mathbf{R}^n)=s_q^r(\mathbf{R}^n)$, $k=\varkappa=1$, $\delta=r^*-n/q$, $\sigma=l^*-n/p$. Поэтому

$$\|\mathrm{ext}\|\geqslant\begin{cases} M^{l^*-n/p}\dfrac{T(1,\ 2;\ s_q^r)}{C\left(\frac{1}{2},\ 1;\ s_p^l\right)} & \text{при } 0<r^*-n/q\leqslant l^*-n/p,\\ T\left(\frac{2}{M},\ 1;\ s_q^r\right)\Big/C\left(\frac{1}{2},\ 1;\ s_p^l\right) & \text{при } r^*-n/q=0,\ l=r,\ p=q. \end{cases}\tag{10}$$

Если $r^*q>n$, то $q>\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{r_i}$, и поэтому выполняются условия предложения 8, из которого следует, что $T(1,\ 2;\ s_q^r)\neq 0$. По предложению 5 $C\left(\frac{1}{2},\ 1;\ s_p^l\right)\neq 0$. Таким образом, при $0<r^*-n/q\leqslant l^*-n/p$ теорема 2 доказана с постоянной $\gamma_1=\left[T(1,\ 2:\ s_q^r)/C\left(\frac{1}{2},\ 1;\ s_p^l\right)\right]^p$.

Если $r^*q=n$, то $q>\sum\limits_{k\neq i}\frac{1}{r_k}$ для любого $i=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и мы опять находимся в условиях предложения 8. В этом случае для емкости Тейхмюллера имеем оценку снизу $T^r(2/M,\ 1;\ s_q^r)\geqslant C\ln\frac{M}{2}$. Из предложения 5 $C(1/2,\ 1;\ s_p^l)\neq 0$. Отсюда получаем искомую оценку в однородном случае:

$$\|\mathrm{ext}\|^p\geqslant\gamma_2\ln\frac{M}{2},$$

где $\gamma_2=C/C\left(\frac{1}{2},\ 1;\ s_p^l\right)^p$.

Перейдем теперь к неоднородному случаю. Из условий теоремы следует, что для всех $r\in(0,\ r_0)$, где r_0 — некоторое положительное число, одновременно выполняются неравенства $Mr^\alpha\leqslant 1$ и $0<r^{1-\alpha}<M/4$. Напомним, что $\delta=r^*-n/q$, $\sigma=l^*-n/p$ и $\alpha=\delta/\sigma$, если $\delta<\sigma$, и $\alpha=1$, если $\delta=\sigma$. В условиях теоремы 2 справедлива теорема 2.2 из [6] при $N(\mathbf{R}^n)=S_p^l(\mathbf{R}^n)$, $N(G)=s_p^l(G)$, $F(\mathbf{R}^n)=S_q^r(\mathbf{R}^n)$, $k=\varkappa=1$, поэтому при

$Mr^{\alpha} \leqslant 1,\ 0 < r^{1-\alpha} < M/4,\ r \in (0, r_0),$

$$T\left(r, \frac{1}{2} Mr^{\alpha}; S_q^r\right) \leqslant \| \mathrm{ext} \| C\left(\frac{M}{2} r^{\alpha}, Mr^{\alpha}; S_p^l\right). \tag{11}$$

Неравенство (11) является основой для получения окончательного результата.

Имеем следующие неравенства (объяснения переходов даны в скобках):

$$r^{-\delta} T(1, 2; s_q^r) \leqslant \left(\text{свойство } 3, \quad 2 < \frac{1}{2} Mr^{\alpha-1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant r^{-\delta} T\left(1, \frac{1}{2} Mr^{\alpha-1}; s_q^r\right) = (\text{равенство } (5)) =$$

$$= T\left(r, \frac{1}{2} Mr^{\alpha}; s_q^r\right) \leqslant (\text{предложение } 2) \leqslant T\left(r, \frac{1}{2} Mr^{\alpha}; S_q^r\right) \leqslant (\text{неравенство } (11)) \leqslant$$

$$\leqslant \| \mathrm{ext} \| C\left(\frac{M}{2} r^{\alpha}, Mr^{\alpha}; S_p^l\right) \leqslant (\text{предложение } 1,\ Mr^{\alpha} \leqslant 1) \leqslant$$

$$\leqslant \| \mathrm{ext} \| (1 + C) C\left(\frac{M}{2} r^{\alpha}, Mr^{\alpha}; s_p^l\right) = (\text{равенство } (4)) =$$

$$= \| \mathrm{ext} \| (1 + C) (Mr^{\alpha})^{-\sigma} C\left(\frac{1}{2}, 1; s_p^l\right).$$

Из этой цепочки получаем оценки

$$\left.\begin{array}{l} \| \mathrm{ext} \| \geqslant M^{l^*-n/p} \dfrac{T(1, 2; s_q^r)}{(1 + C) C\left(\frac{1}{2}, 1; s_p^l\right)} \\ \text{при } 0 < r^* - n/q \leqslant l^* - n/p, \\ \| \mathrm{ext} \| \geqslant \dfrac{T\left(\frac{2}{M}, 1; s_q^r\right)}{(1 + C) C\left(\frac{1}{2}, 1; s_p^l\right)} \\ \text{при } r^* - n/q = 0,\ l = r,\ p = q. \end{array}\right\} \tag{12}$$

Здесь C — постоянная из неравенства Пуанкаре — Соболева.

Очевидно, что (10) и (12) отличаются лишь множителем $1+C$ в знаменателе. Поэтому к (12) применимы те же рассуждения, что и к неравенствам (10). Таким образом, теорема 2 доказана.

Замечание 3. Утверждение теоремы 2 справедливо также для пространств Кальдерона при тех же соотношениях между показателем гладкости и суммируемости. По поводу оценок для емкости в пространствах Кальдерона см. замечание 1 в конце § 2.

§ 4. ОЦЕНКИ НОРМЫ ОПЕРАТОРА ПРОДОЛЖЕНИЯ ЧЕРЕЗ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

В этом параграфе мы рассмотрим оценки нормы оператора продолжения через соотношения изопериметрического типа. Эти оценки выводятся для случая, когда показатели суммируемости и гладкости в пространствах Соболева связаны соотношениями

$$(i)\ p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{l_i},$$

$$(ii)\ p > \max_{k=1,2,\ldots,n} \sum_{i \neq k} \frac{1}{l_i} \text{ при } p > 1$$

или $1 \geqslant \max\limits_{k=1,2,\ldots,n} \sum\limits_{i \neq k} \frac{1}{l_i}$ при $p = 1$.

1. Рассмотрим вначале абстрактную ситуацию. Мы используем понятия и обозначения из § 1.

Из определения емкости вытекает следующая

Лемма 1 [6, 38]. *Рассмотрим оператор продолжения* ext: $N(G)\to F(\mathbf{R}^n)$. *Для любой пары множеств* (F_0, F_1), *содержащихся в* G, *справедливо неравенство*

$$\mathfrak{C}(F_0, F_1; F(\mathbf{R}^n))\leqslant \|\text{ext}\|\mathfrak{C}(F_0, F_1; N(G)).$$

Условие разделения. Пусть ρ-шар $Q(a, s)$ расположен таким образом относительно области G, что $G\setminus\overline{Q}(a, s)$ содержит, по крайней мере, две непустые связные компоненты V_0 и V_1. Будем говорить, что область G удовлетворяет *условию разделения* для пространства $N(G)$, если для любой функции $u\in N(G)$ такой, что $u\equiv 1$ в некоторой окрестности $Q(a, s)$, функция

$$u_1(x)=\begin{cases}u(x) \text{ при } x\notin V_1,\\ 1 \text{ при } x\in V_1\end{cases}$$

также принадлежит $N(G)$ и

$$\|u_1\|_{N(G)}\leqslant \varkappa\|u\|_{N(G)}.$$

Очевидно, что для пространства Соболева $L^l_\varphi(G)$ и пространства $BMO^l(G)$ условие разделения выполняется с постоянной $\varkappa=1$.

Из условия разделения следует

Емкостное условие разделения. Рассмотрим замкнутые множества $F_0\subset\overline{V}_0$ и $F_1=\overline{(Q(a, s)\cap G)\cup V_1}$. Тогда

$$\mathfrak{C}(F_0, F_1; N(G))\leqslant \varkappa\mathfrak{C}(F_0, \overline{Q(a, s)\cap G}; N(G)). \tag{13}$$

Действительно, возьмем произвольную допустимую функцию u для емкости $\mathfrak{C}(F_0, \overline{Q(a, s)\cap G}; N(G))$. Тогда в некоторой окрестности $Q(a, s)\cap G$ функция u тождественно равна единице. Очевидно, что функция u_1 из условия разделения, построенная по u, является допустимой для емкости $\mathfrak{C}(F_0, F_1; N(G))$ и, кроме того,

$$\mathfrak{C}(F_0, F_1; N(G))\leqslant \|u_1\|_{N(G)}\leqslant \varkappa\|u\|_{N(G)}.$$

Отсюда уже немедленно следует (13).

Напомним, что емкость $C(r, s; N(\mathbf{R}^n))$, фигурирующая в следующей лемме, определяется при $0<r<s<\infty$ как емкость пары множеств $(\overline{Q(0, r)}, \overline{\mathbf{R}^n\setminus Q(0, s)})$ в пространстве $N(\mathbf{R}^n)$:

$$C(r, s; N(\mathbf{R}^n))=\mathfrak{C}(\overline{Q(0, r)}, \overline{\mathbf{R}^n\setminus Q(0, s)}; N(\mathbf{R}^n)).$$

Лемма 2 [38]. *Предположим, что область* $G\subset\mathbf{R}^n$ *удовлетворяет условию продолжения и разделения для пространства* $N(G)$. *Пусть* ρ-*шар* $Q(a, r)$ *расположен таким образом, что* $G\setminus\overline{Q}(a, r)$ *содержит, по крайней мере, две непустые связные компоненты* V_0, V_1 *и в то же время пересечения сферы* $S(a, R)$ *с* $\overline{V}_0$ *и* $\overline{V}_1$ *не пусты. Тогда для любого числа* $s\in(r, R)$ *имеет место неравенство*

$$T(s, R; F(\mathbf{R}^n))\leqslant k\varkappa\|\text{ext}\|C(r, s; N(\mathbf{R}^n)), \tag{14}$$

где k — *норма оператора ограничения, а* $\varkappa$ — *постоянная из условия разделения.*

Доказательство. Положим $F_i=\overline{V_i\cap D_{s,R}(a)}$. По определению емкости Тейхмюллера имеем

$$T(s, R; F(\mathbf{R}^n))\leqslant \mathfrak{C}(F_0, F_1; F(\mathbf{R}^n)).$$

По лемме 1

$$\mathfrak{C}(F_0, F_1; F(\mathbf{R}^n))\leqslant \|\text{ext}\|\mathfrak{C}(F_0, F_1; N(G)).$$

Так как $F_1\subset\overline{(Q(a, r)\cup G)\cup V_1}$, то в силу свойства 1 из § 2

$$\|\text{ext}\|\mathfrak{C}(F_0, F_1; N(G))\leqslant \|\text{ext}\|\mathfrak{C}(F_0, \overline{(Q(a, r)\cap G)\cup V_1}; N(G)).$$

В силу неравенства (13)

$$\|\mathrm{ext}\|\mathfrak{C}(F_0, \ (\overline{Q(a, r)\cap G})\cup V_1; \ N(G))\leqslant \varkappa\|\mathrm{ext}\|\mathfrak{C}(F_0, \ \overline{Q(a, r)\cap G}; \ N(G)).$$

Опять используем свойство 1 из § 2:

$$\varkappa\|\mathrm{ext}\|\mathfrak{C}(F_0, \ \overline{Q(a,r)\cap G}; \ N(G))\leqslant \varkappa\|\mathrm{ext}\|\mathfrak{C}(\overline{\mathbf{R}^n\backslash Q(a,s)\cap G}, \ \overline{Q(a,r)\cap G}; \ N(G)).$$

А теперь — свойство 2 из § 2:

$$\varkappa\|\mathrm{ext}\|\mathfrak{C}(\overline{\mathbf{R}^n\backslash Q(a, s)\cap G}, \overline{Q(a, r)\cap G}; N(G))\leqslant$$

$$\leqslant k\varkappa\|\mathrm{ext}\|\mathfrak{C}(\mathbf{R}^n\backslash Q(a, s), \ Q(a, r); \ N(\mathbf{R}^n))=k\varkappa\|\mathrm{ext}\|C(r, \ s; \ N(\mathbf{R}^n)).$$

Переходя последовательно от первого неравенства доказательства к последнему, мы, очевидно, получаем утверждение леммы 2.

Доказанная лемма является основой для доказательства следующей теоремы.

Теорема 4. *Пусть открытое множество G удовлетворяет условиям продолжения и разделения, а функциональные пространства $N(\mathbf{R}^n)$ и $F(\mathbf{R}^n)$ инвариантны относительно сдвигов и однопараметрической группы преобразований H_t, $t\in\mathbf{R}^+$, причем полунорма пространства $F(\mathbf{R}^n)$ однородна степени δ, а полунорма пространства $N(\mathbf{R}^n)$ однородна степени σ относительно группы H_t, $t\in\mathbf{R}^+$, $\sigma\leqslant\delta\leqslant 0$. Пусть ρ-шар $Q(a, r)$ расположен таким образом, что $G\backslash\overline{Q(a, r)}$ содержит, по крайней мере, две непустые связные компоненты V_0 и V_1, и в то же время пересечения сферы $S(a, R)$ с $\overline{V}_0$ и $\overline{V}_1$ не пусты. Тогда для нормы оператора* ext: $N(G)\to$ $\to F(\mathbf{R}^n)$ *имеют место неравенства*

$$\|\mathrm{ext}\|\geqslant\begin{cases}\dfrac{T\left(\frac{2r}{R}, 1; F(\mathbf{R}^n)\right)}{k\varkappa C(1, 2; N(\mathbf{R}^n))}\left(\dfrac{R^\alpha}{r}\right)^{-\sigma},\\[2ex] \dfrac{T\left(\frac{1}{2}, 1; F(\mathbf{R}^n)\right)}{k\varkappa C\left(\frac{r}{R}, \frac{1}{2}; N(\mathbf{R}^n)\right)}R^{\sigma-\delta},\end{cases}\tag{15}$$

где $2r<R/2$ *и* $\alpha=\delta/\sigma$ *при* $0<-\delta\leqslant-\sigma$ *и* $\alpha=1$ *при* $\delta=\sigma=0$.

Доказательство. Чтобы доказать верхнее из неравенств (15), положим в (14) $s=2r$. Тогда

$$T(2r, R; F(\mathbf{R}^n))\leqslant k\varkappa\|\mathrm{ext}\|C(r, 2r; N(\mathbf{R}^n)).\tag{16}$$

Применим теперь к (16) равенства (2) и (3):

$$R^{-\delta}T\left(\frac{2r}{R}, 1; N(\mathbf{R}^n)\right)=T(2r, R; N(\mathbf{R}^n))\leqslant$$

$$\leqslant k\varkappa\|\mathrm{ext}\|C(r, \ 2r; \ N(\mathbf{R}^n))\leqslant r^{-\sigma}k\varkappa\|\mathrm{ext}\|C(1, \ 2; \ N(\mathbf{R}^n)).$$

Таким образом, первое из неравенств (15) доказано. Чтобы доказать второе, положим в (14) $s=R/2$. Тогда

$$T\left(\frac{R}{2}, R; F(\mathbf{R}^n)\right)\leqslant k\varkappa\|\mathrm{ext}\|C(r, R/2; N(\mathbf{R}^n)).$$

Воспользуемся еще раз равенствами (2) и (3):

$$R^{-\delta}T(1/2, \ 1; \ F(\mathbf{R}^n))\leqslant k\varkappa\|\mathrm{ext}\|R^{-\sigma}C(r/R, \ 1/2; \ N(\mathbf{R}^n)),$$

что и доказывает теорему.

2. Доказанную теорему можно теперь применять к конкретным пространствам. Рассмотрим случай однородных пространств Соболева и пространств BMO^l.

В следующей теореме G — открытое связное множество в $\mathbf{R}^n$. Для точки $x\in\overline{G}$ и радиуса $0<R<(\mathrm{diam}\, G)/4$ обозначим через $V_G(x, R)$ замыкание любой связной компоненты открытого множества $Q(x, R)\cap G$, содержащее точку x, а через $S_G(x, R)$ — множество $V_G(x, R)\cap S(x, R)$. Число $d(S_G(x, R))=\inf\{r: r<R/4$, шар $Q(y, r)$, $y\in S(x, R)$, расположен таким образом, что $G\setminus\overline{Q}(y, r)$ содержит, по крайней мере, две непустые связные компоненты, замыкание одной из них содержит точку $x\}$. Заметим, что, вообще говоря,

$$2d(S_G(x, R))\leqslant c \operatorname{diam} S_G(x, R),$$

где c не зависит от размерности, выбора точки x и радиуса R.

Теорема 5. *Для нормы оператора продолжения* ext: $L_p^l(G)\to L_p^l(\mathbf{R}^n)$, *где показатели гладкости и суммируемости удовлетворяют одновременно условиям* (*i*) *и* (*ii*), *имеют место оценки снизу*

$$\|\text{ext}\|\geqslant\begin{cases} C\sup\limits_{x\in\overline{G}}\left[\dfrac{R}{d(S_G(x, R))}\right]^{\frac{n}{p}-l^*} & \text{при } l^*p<n,\\ C\sup\limits_{x\in\overline{G}}\left[\ln\dfrac{R}{2d(S_G(x, R))}\right]^{\frac{1}{p}} & \text{при } l^*p=n,\end{cases}\tag{17}$$

где верхняя грань берется по всем таким точкам $x\in\overline{G}$ *и радиусам* $R<(\operatorname{diam} G)/4$, *для которых* $0<d(S_G(x, R))<R/4$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $x\in\overline{G}$ из тех, по которым берется верхняя грань в (17). Для положительного числа $\varepsilon>0$ выберем произвольный шар $Q(a, r)$, $r<d(S_G(x, R))+\varepsilon$, $a\in S(x, R)$, $r<R/4$, расположенный таким образом, что $G\setminus Q(a, r)$ содержит, по крайней мере, две непустые компоненты V_0 и V_1. При этом точка x принадлежит замыканию одной из этих компонент, а сфера $S(a, R)$ пересекается как с $\overline{V}_0$, так и с $\overline{V}_1$ по непустому множеству. При таких предположениях мы находимся в условиях теоремы 4, в которой $N(G)=L_p^l(G)$, $F(\mathbf{R}^n)=L_p^l(\mathbf{R}^n)$, $\sigma=\delta=n/p-l^*$, $k=\varkappa=1$. Из неравенства (15) имеем

$$\|\text{ext}\|\geqslant\frac{T\left(\frac{2r}{R}, 1; L_p^l(\mathbf{R}^n)\right)}{C\left(1, 2; L_p^l(\mathbf{R}^n)\right)}\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{n}{p}-l^*}.\tag{18}$$

Для емкостей, входящих в (18), имеем следующие соотношения (см. свойство 3 и предложения 8 и 5 из § 2):

$$T\left(\frac{2r}{R}, 1; L_p^l(\mathbf{R}^n)\right)\geqslant T\left(\frac{1}{2}, 1; L_p^l(\mathbf{R}^n)\right)>0,$$

$$T\left(\frac{2r}{R}, 1; L_p^l(\mathbf{R}^n)\right)\geqslant C\left[\ln\frac{R}{2r}\right]^{\frac{1}{p}}\quad \text{при } l^*p=n,$$

$$C\left(1, 2; L_p^l(\mathbf{R}^n)\right)>0.$$

Подставив теперь выписанные соотношения в (18), получим неравенства

$$\|\text{ext}\|\geqslant\begin{cases} C\left(\dfrac{R}{r}\right)^{\frac{n}{p}-l^*} & \text{при } l^*p<n,\\ C\left[\ln\dfrac{R}{2r}\right]^{\frac{1}{p}} & \text{при } l^*p=n.\end{cases}$$

Поскольку $d(S_G(x, R))\leqslant r\leqslant d(S_G(x, R))+\varepsilon$ и ε — произвольное положительное число, то теорема доказана.

В формулируемой ниже теореме значение радиуса R и величина $d(S_G(x, R))$ такие же, как в теореме 5.

Теорема 6. *Для нормы оператора продолжения* ext: $BMO^l(G)\to$ $\to BMO^l(\mathbf{R}^n)$ *имеет место оценка снизу*

$$\|\text{ext}\|\geqslant C\ln\frac{R}{2d(S_G(x,R))}.$$

Чтобы доказать теорему, положим в теореме 4 пространства F и N равными BMO^l и применим схему доказательства предыдущей теоремы. Соответствующие оценки для емкостей кольца и Тейхмюллера в пространствах BMO^l приведены в предположении 11, § 2.

Специфика плоского случая позволяет заменить изопериметрические соотношения, входящие в теорему 4, на отношение метрики Мазуркевича в дополнительной области $G^*=\mathbf{R}^2\setminus\overline{G}$ к метрике пространства. Соответствующий вариант теоремы 4 мы сформулируем ниже.

Теорема 7. *Пусть открытое множество* $G\subset\mathbf{R}^2$ *удовлетворяет условиям продолжения и разделения, а функциональные пространства* $N(\mathbf{R}^2)$ *и* $F(\mathbf{R}^2)$ *инвариантны относительно сдвигов и однопараметрической группы преобразований* H_t, $t\in\mathbf{R}^+$, *причем нормы пространства* $F(\mathbf{R}^2)$ *и* $N(\mathbf{R}^2)$ *имеют одинаковую однородность* $\sigma\leqslant 0$ *относительно группы* H_t, $t\in\mathbf{R}^+$. *Пусть* $M_i=\sup\rho_{G_i}(x,y)/\rho(x,y)>8$, *где верхняя грань берется по всем точкам* x, y, *принадлежащим одной и той же компоненте связности* G_i *дополнения* $\mathbf{R}^2/\overline{G}$. *Тогда для нормы оператора* ext: $N(G)\to F(\mathbf{R}^2)$ *имеют место неравенства*

$$\|\text{ext}\|\geqslant M_i^{-\sigma}\frac{T\left(\frac{1}{2},1;F(\mathbf{R}^2)\right)}{2^\sigma k\varkappa C(1,2;N(\mathbf{R}^2))}\quad \textit{при }\sigma<0,$$

$$\|\text{ext}\|\geqslant\begin{cases}\dfrac{T\left(\frac{4}{M_i},1;F(\mathbf{R}^2)\right)}{k\varkappa C(1,2;N(\mathbf{R}^2))}\\[2ex] \dfrac{T\left(\frac{1}{2},1;F(\mathbf{R}^2)\right)}{k\varkappa C\left(\frac{2}{M_i},\frac{1}{2};N(\mathbf{R}^2)\right)}\end{cases}\quad \textit{при }\sigma=0.$$

Доказательство. Выберем две точки x, $y\in G_i$, для которых $\rho_G(x,y)/\rho(x,y)>M_i-\varepsilon>8$. В условиях теоремы 7 существует шар $Q(a,r)$, на границе которого находятся точки x и y, такой, что $r\leqslant$ $\leqslant\rho(x,y)$. При этом дополнение $G\setminus Q(a,r)$ содержит по крайней мере две непустые связные компоненты V_0 и V_1, замыкания которых $\overline{V}_0$ и $\overline{V}_1$ пересекаются со сферой $S(a,R)$, где $R=\rho_G(x,y)/2$. Тогда $R/r\geqslant\rho_G(x,y)/$ $/2\rho(x,y)>(M_i-\varepsilon)/2>4$, поэтому $2r<R/2$. Таким образом, мы находимся в условиях теоремы 4 — при $\delta=\sigma$. Следовательно, утверждение теоремы 4 можно записать в виде

$$\|\text{ext}\|\geqslant\left(\frac{M_i-\varepsilon}{2}\right)^{-\sigma}\frac{T(2r/R,1;F(\mathbf{R}^2))}{C(1,2;N(\mathbf{R}^2))}.$$

Отсюда в силу свойства 3 из § 2, неравенства $2r/R<1/2$ и произвольности $\varepsilon>0$ получаем первое из неравенств теоремы 7. Второе неравенство получим из (15) с учетом того, что $\sigma=\delta=0$; $2r/R<4/(M_i-\varepsilon)$, $r/R<2(M_i-\varepsilon)$; $\varepsilon>0$ произвольно; по свойству 3 из § 2 емкости кольца и Тейхмюллера монотонны.

Сформулируем следствие теоремы 7 применительно к пространствам L_p^l и BMO^l.

Теорема 8. *Пусть* $M=\sup\rho_{G^*}(x,y)/\rho(x,y)>8$, *где верхняя грань берется по всем парам точек* x, y *дополнения* $G^*=\mathbf{R}^2\setminus\overline{G}$, *принадлежащим одной компоненте связности. Тогда для нормы оператора продолжения* ext: $L_p^l(G)\to L_p^l(R^2)$, *где одновременно выполняются условия* a) $l^*p\leqslant$ $\leqslant 2$ *и* b) $p>\max(l_1^{-1},l_2^{-1})$ *при* $p>1$ *или* $1\geqslant\max(l_1^{-1},l_2^{-1})$ *при* $p=1$, *имеют место оценки снизу*

$$\|\mathrm{ext}\| \geqslant \begin{cases} \gamma_1 M^{2/p-l^*} & \text{при } l^*p < 2, \\ \gamma_2 \left[\ln \dfrac{M}{4}\right]^{1/p} & \text{при } l^*p = 2. \end{cases}$$

Здесь $\gamma_1 = T\left(\frac{1}{2}, 1; L_p^l(\mathbf{R}^2)\right)\Big/2^{2/p-l^*} C\left(1, 2; L_p^l(\mathbf{R}^2)\right)$, $\gamma_2 = c/C\left(1, 2; L_p^l(\mathbf{R}^2)\right)$, где c — постоянная из предложения 8.

Теорема 9. *Если $M = \sup \rho_{G^*}(x, y)/\rho(x, y) > 8$, где верхняя грань берется по всем парам точек x, y дополнения $G^* = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{G}$, $G \subset \mathbf{R}^2$, принадлежащим одной компоненте связности, то для нормы оператора* ext: $BMO^l(G) \to BMO^l(\mathbf{R}^2)$ *справедлива оценка*

$$\|\mathrm{ext}\| \geqslant \gamma_3 \ln \frac{M}{4},$$

где γ_3 зависит от постоянных в предложении 11.

§ 5. ОБ УСЛОВИЯХ ПРОДОЛЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Оценки снизу нормы оператора продолжения, зависящие от отношения геометрических величин, влекут необходимые условия для существования ограниченного оператора продолжения. В этом параграфе мы сформулируем те из них, которые непосредственно следуют из доказанных в предыдущих разделах теорем. Часть результатов этого параграфа анонсирована в работах [4, 5].

Параграф состоит из нескольких пунктов. В первом мы формулируем условия продолжения для случая $l^*p \geqslant n$, во втором — для $l^*p \leqslant n$, в третьем — для случая плоскости мы покажем, что полученные условия продолжения совпадают с достаточными работы [12].

1. Из теоремы 1 получается условие существования оператора продолжения в виде эквивалентности метрики Мазуркевича метрике пространства. Пусть выполнены условия теоремы 1 и заранее известно, что норма оператора ограничена. Если оценки для емкостей кольца и Тейхмюллера не тривиальны, т. е. в случае $0 < \delta \leqslant \sigma$

$$T(1, 2; F) \neq 0 \text{ и } C\left(\frac{1}{2}, 1; N\right) \neq 0, \tag{19}$$

а в случае $0 = \delta = \sigma$

$$T(\tau, 1; F) \to \infty \text{ при } \tau \to 0 \text{ и } C\left(\frac{1}{2}, 1; N\right) \neq 0 \tag{20}$$

или

$$T(1, 2; F) \neq 0 \text{ и } C(\tau, 1; N) \to 0 \text{ при } \tau \to 0,$$

то оценки теоремы 1 влекут ограниченность отношения

$$\rho_G(x, y)/2^{1-\alpha}\rho^\alpha(x, y)$$

для всех точек x, y при условии $\rho^{1-\alpha}(x, y) \leqslant 1$.

Таким образом, поведение емкостей кольца и Тейхмюллера в теореме 1 влияют на соотношение между метрикой Мазуркевича в области G и метрикой пространства.

Будем говорить, что в области G *метрика Мазуркевича эквивалентна ρ-метрике*, если существует такое число $C < \infty$, что для всех точек x, $y \in G$ выполняется неравенство

$$\rho_G(x, y) \leqslant C\rho(x, y). \tag{21}$$

Если условие (21) выполняется для всех точек x, $y \in G$ с $\rho(x, y) < \delta(G)$, где положительное число $\delta(G) < \operatorname{diam} G$, то будем говорить, что в области G метрика Мазуркевича локально эквивалентна ρ-метрике.

Сформулируем общий вывод, следующий из теоремы 1.

Предложение 12. *Если в условиях теоремы 1 норма оператора продолжения ограничена и для емкостей кольца и Тейхмюллера справедливы соотношения* (19) *и* (20), *то существует такая постоянная C, что для всех точек $x, y \in G$ выполняется неравенство*

$$\rho_G(x, y) \leqslant C\rho^{\alpha}(x, y)$$

как только $\rho^{1-\alpha}(x, y) \leqslant 1$, т. е. метрика Мазуркевича эквивалентна (локально эквивалентна) ρ-метрике (в степени α), если пространства N и F имеют одинаковую (различную) однородность.

Модельными пространствами в предложении 12 являются однородные пространства Соболева, Никольского — Бесова, Кальдерона, BMO^l. Соответствующее поведение емкостей кольца и Тейхмюллера в этих пространствах изучено в § 2.

Необходимые условия продолжения для неоднородных пространств Соболева и Никольского — Бесова следуют из теоремы 2.

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы 2 оператор продолжения* ext: $S_p^l(G) \to S_q^r(R^n)$ *ограничен. Тогда в каждой связной компоненте множества G метрика Мазуркевича локально эквивалентна ρ_l-метрике в степени $\alpha = \left(r^* - \frac{n}{q}\right)\Big/\left(l^* - \frac{n}{p}\right)$.*

Замечание 4. В качестве пространств $S_p^l(G)$ и $S_p^l(\mathbf{R}^n)$ в следствии 1 можно также взять пространства Кальдерона $\mathfrak{R}_p^l(G)$, $G \subset \mathbf{R}^n$, и $\mathfrak{R}_p^l(\mathbf{R}^n)$ ($BMO^l(G)$, $G \subset \mathbf{R}^n$, и $BMO^l(\mathbf{R}^n)$) соответственно.

Предложение 12 и следствие 1 содержат в качестве частного случая результаты работ [6—11, 29, 39]. В работе [17] необходимые и достаточные условия существования в изотропном случае оператора продолжения для пространств BMO сформулированы на другом языке.

2. В этом пункте мы сформулируем условие продолжения в терминах изопериметрических соотношений. Основным для нас является случай плоскости.

Предложение 13. *Если в условиях теоремы 7 норма оператора продолжения ограничена и для емкостей кольца и Тейхмюллера справедливы соотношения* (19) *и* (20), *то существует такая постоянная C, что для всех пар точек x, y, принадлежащих одной связной компоненте дополнения $\mathbf{R}^2 \backslash \overline{G} = G^*$, выполняется неравенство*

$$\rho_{G^*}(x, y) \leqslant C\rho(x, y),$$

т. е. в каждой компоненте связности дополнительной области $G^* = \mathbf{R}^2 \backslash \overline{G}$ метрика Мазуркевича эквивалентна ρ-метрике.

Следствием теоремы 8 является следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть в условиях теоремы 8 оператор продолжения* ext: $L_p^l(G) \to L_p^l(\mathbf{R}^2)$ *ограничен. Тогда существует такая постоянная C, что для всех пар точек x, y, принадлежащих одной связной компоненте дополнения $\mathbf{R}^2 \backslash \overline{G}$, выполняется неравенство*

$$\rho_{G^*}(x, y) \leqslant C\rho_l(x, y).$$

Таким образом, в каждой компоненте связности дополнительной области $G^* = \mathbf{R}^2 \backslash \overline{G}$ метрика Мазуркевича эквивалентна ρ_l-метрике.

В качестве пространств $L_p^l(G)$ и $L_p^l(\mathbf{R}^2)$ в следствии 2 можно также взять пространства $BMO^l(G)$, $G \subset \mathbf{R}^2$, и $BMO^l(\mathbf{R}^2)$ (см. теорему 9), а также однородные пространства Кальдерона.

Отметим следующее предложение, которое является одновременным следствием теорем 1 и 7.

Предложение 14. *Пусть открытое множество $G \subset \mathbf{R}^2$ удовлетворяет условиям продолжения, невидимости и разделения, а функциональные пространства $N(\mathbf{R}^2)$ и $F(\mathbf{R}^2)$ инвариантны относительно сдвигов и однопараметрической группы преобразований H_t, $t \in \mathbf{R}^+$, причем нормы прост-*

ранств $F(\mathbf{R}^2)$ и $N(\mathbf{R}^2)$ имеют нулевую однородность относительно группы H_t, $t\in\mathbf{R}^+$. Пусть, кроме того, выполняются соотношения (20).

Тогда как в области G, так и в каждой компоненте связности дополнительной области $G^*=\mathbf{R}^2\setminus\overline{G}$ метрика Мазуркевича эквивалентна ρ-метрике.

Модельными пространствами в предложении 14 являются пространства Соболева L^l_p, $l^*p=2$, BMO^l и однородные пространства Кальдерона.

Предложение 15. *Если существует ограниченный оператор продолжения* ext: $W^l_p(G)\to W^l_p(\mathbf{R}^2)$, $l^*p=2$, *где G — ограниченная область в $\mathbf{R}^2$, то в любой компоненте связности дополнительной области $G^*=\mathbf{R}^2\setminus\overline{G}$ метрика Мазуркевича $\rho_{G^*}(x,y)$ локально эквивалентна ρ_l-метрике.*

Доказательство. Пусть ρ_l-шар $Q(a,r)$ расположен таким образом, что $G\setminus\overline{Q}(a,r)$ содержит, по крайней мере, две непустые компоненты связности V_0 и V_1 и в то же время пересечения сферы $S(a,R)$ с $\overline{V}_0$ и $\overline{V}_1$ не пусты. Здесь R — наибольший радиус, обладающий данным свойством, т. е. любая сфера $S(a,s)$ с $s>R$ может пересекаться лишь с множеством $\overline{V}_0$.

Положим $\mathfrak{M}=\{u\in W^l_p(G)\colon\ 0\leqslant u\leqslant 1,$ u равно i в некоторой окрестности множества $F_i=\overline{V}_i$, $i=0,1\}$. Кроме того, будем считать, что $2r<R/2$. Тогда мы имеем следующую цепочку неравенств:

$$T\left(2r,R;L^l_p(\mathbf{R}^2)\right)\leqslant\inf_{u\in\mathfrak{M}}\|\operatorname{ext}u\|_{L^l_p(\mathbf{R}^2)}\leqslant\|\operatorname{ext}\|\inf_{u\in\mathfrak{M}}\|u\|_{W^l_p(G)}=$$

$$=\|\operatorname{ext}\|\inf_{u\in\mathfrak{M}}\left\{\left[\int_G|u|^pdx\right]^{1/p}+\|u\|_{L^l_p(G)}\right\}\leqslant\|\operatorname{ext}\|\bigl(R^{2/p}+$$

$$+C\left(r,2r;L^l_p(\mathbf{R}^2)\right)\bigr)\leqslant\|\operatorname{ext}\|\left(R^{2/p}+\gamma_1\right).$$

Заметим, что если для точек x, y, принадлежащих одной компоненте связности дополнения $G^*=\mathbf{R}^2\setminus\overline{G}$, отношение $\rho_{G^*}(x,y)/\rho_l(x,y)$ достаточно велико, то существует шар $Q(a,r)$, обладающий свойствами, обозначенными в начале доказательства, для которого $r\sim\rho_l(x,y)$, $R\sim\rho_{G^*}(x,y)$.

В силу этого замечания и предложения 8 результат цепочки неравенств можно записать в другой форме:

$$\left[\ln\gamma_2\frac{\rho_{G^*}(x,y)}{\rho_l(x,y)}\right]^{1/p}\leqslant\|\operatorname{ext}\|\left((\rho_{G^*}(x,y))^{2/p}+\gamma_1\right)\ \text{при}\ l^*p=2.$$

Из полученного неравенства следует, что в каждой связной компоненте области метрика Мазуркевича локально эквивалентна ρ_l-метрике.

Сформулируем теперь следствие теоремы 5 применительно к односвязным плоским областям.

Предложение 16. *Пусть область $G\subset\mathbf{R}^2$ односвязна и в условиях теоремы 5 оператор продолжения* ext: $L^l_p(G)\to L^l_p(\mathbf{R}^2)$, $l^*p\leqslant 2$, *ограничен. Тогда существует постоянная $\varepsilon>0$ такая, что для любых двух точек $x,y\in G$ существует кривая γ (с концами x и y), для любой точки z которой выполняется неравенство*

$$\rho_l(z,\mathbf{R}^2\setminus G)\geqslant\varepsilon\min(\rho_l(x,z),\rho_l(z,y)).\tag{22}$$

Доказательство. Если в условиях предложения неравенство (22) не выполняется, то для любого $m\in N$ существует пара точек x_m, $y_m\in G$ такая, что на любой дуге $\gamma_m\subset G$ с концами в точках x_m и y_m найдется точка $z_m\in\gamma_m$, для которой выполняется неравенство

$$\rho_l(z_m,\mathbf{R}^2\setminus G)\leqslant m^{-1}\min(\rho_l(x_m,z_m),\rho_l(z_m,y_m)).$$

Если $\min(\rho_l(x_m,z_m),\rho_l(z_m,y_m))=\rho_l(x_m,z_m)$, то положим в теореме 5 $x=x_m$, $R=\rho_l(x_m,z_m)$. Тогда, очевидно, $d(S_G(x,R))\leqslant\rho_l(z_m,\mathbf{R}^2\setminus G)$ и поэтому $d(S_G(x,R))\leqslant m^{-1}R$. Таким образом, мы приходим к следующей оценке для нормы оператора продолжения:

$$\|\mathrm{ext}\| \geqslant \begin{cases} cm^{\frac{n}{p}-l^*} & \text{при } l^*p<2, \\ c\left[\ln\frac{m}{2}\right]^{1/p} & \text{при } l^*p=2, \end{cases}$$

которая в силу произвольности $m \in N$ противоречит ограниченности оператора продолжения. Полученное противоречие доказывает предложение 16.

3. Следующее определение приведено в работе [12]. Говорят, что область $G \subset \mathbf{R}^n$ удовлетворяет (ε, δ)-условию Лихтенштейна, если существуют положительные постоянные $\varepsilon = \varepsilon(G)$, $\delta = \delta(G)$, такие, что для любых точек $x, y \in G$ с $\rho_l(x, y) \leqslant \delta$ существует непрерывная кривая $\gamma \subset G$, соединяющая x и y, и такая, что для любого $z \in \gamma$ выполняется

$$\rho_l(x, z) + \rho_l(z, y) \leqslant \varepsilon^{-1}\rho_l(x, y),$$
$$\rho_l(z, \mathbf{R}^n \setminus G) \geqslant \varepsilon \min(\rho_l(x, z), \rho_l(z, y)).$$

Замечание 5. Легко проверить, что первое условие Лихтенштейна эквивалентно (21), а второе совпадает с (22).

Жорданову замкнутую кривую $\Gamma \subset R^2$ будем называть *l-кривой Альфорса*, $l = (l_1, l_2)$ — вектор гладкости, если существует постоянная $M < \infty$ такая, что для любой точки z на поддуге меньшего диаметра с концами x и y выполняется неравенство

$$\rho_l(x, z) \leqslant M\rho_l(x, y). \tag{23}$$

В изотропном случае данное определение совпадает с общепринятым определением кривых Альфорса [22].

Замечание 6. Отметим, что для ограниченных кривых локализация неравенства (23) не приводит к расширению введенного класса l-кривых Альфорса. Другими словами, если потребовать выполнения условия (23) лишь для точек x, y, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < \delta$, где $\delta > 0$, то такое определение не приводит к расширению класса l-кривых Альфорса. В самом деле, рассмотрим кривую Γ, для которой условие (23) выполняется локально в приведенном только что смысле. Рассмотрим теперь последовательности точек x_n, y_n, z_n, $n \in N$, на кривой Γ, причем точка z_n лежит на поддуге меньшего диаметра с концами x_n и y_n, для которых

$$\rho_l(x_n, z_n) \geqslant n\rho_l(x_n, y_n). \tag{24}$$

Так как кривая Γ ограничена, то $\rho_l(x_n, y_n) \leqslant S$ для всех $n \in N$ одновременно. Переходя поэтому, если необходимо, к подпоследовательности, мы можем считать, что $\rho(x_n, y_n) \to 0$. При $\rho(x_n, y_n) < \delta$ начинает работать условие локальности и поэтому выполняется (23), что противоречит допущению (24). Следовательно, ограниченная кривая, для которой (23) выполняется локально, является l-кривой Альфорса.

Замечание 7. Легко привести пример неограниченной замкнутой кривой в $\overline{\mathbf{R}^2}$, для которой условие (23) выполняется локально, но которая не является l-кривой Альфорса.

В следующем предложении плоскость $\mathbf{R}^2$ рассматривается с некоторой ρ_l-метрикой.

Предложение 17. *Для конечносвязной области $G \subset \mathbf{R}^2$ следующие условия эквивалентны:*

a) *область G удовлетворяет (ε, δ)-условию Лихтенштейна;*

b) *дополнительная область $G^* = \mathbf{R}^2 \setminus G$ удовлетворяет (ε, δ)-условию Лихтенштейна;*

c) *как в области G, так и в дополнительной области $G^* = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{G}$ метрика Мазуркевича локально эквивалентна ρ_l-метрике;*

d) *любая ограниченная компонента связности Γ_i границы ∂G, отличная от точки, является l-кривой Альфорса, в то время как неограниченная удовлетворяет условию (23) локально.*

Доказательство. Основным в данном предложении является случай односвязных областей, к рассмотрению которого мы переходим. В общем случае доказательство следует приведенной ниже схеме.

Докажем эквивалентность следующих двух предложений:

a$'$) область G удовлетворяет (ε, ∞)-условию Лихтенштейна;

c$'$) как в области G, так и в дополнительной области $G^* = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{G}$ метрика Мазуркевича эквивалентна ρ_l-метрике.

Если выполнено a$'$), то в области G метрика Мазуркевича эквивалентна ρ_l-метрике. Кроме того, область G является локально-связной в каждой граничной точке. Последнее означает, что для любого шара $B(x, R)$, $x \in \partial G$, найдется шар $B(x, r)$, $r < R$, такой, что любые две точки $u, v \in B(x, r) \cap G$ можно соединить непрерывной дугой, содержащейся в $B(x, R) \cap G$. Известно, что граница односвязной локально-связной в каждой граничной точке области является жордановой кривой. Проверим теперь, что в дополнительной области $G^* = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{G}$ метрика Мазуркевича эквивалентна ρ_l-метрике. Фиксируем две точки $u, v \in G^*$ и отрезок $[u, v]$, их соединяющий. Если $[u, v] \cap G = \varnothing$, то $\rho_l(u, v) = \rho_{G^*}(u, v)$. Если $[u, v] \cap G \neq \varnothing$, то пусть u' и v' — точки пересечения $[u, v] \cap \partial G$, ближайшие к u и v соответственно. Среди двух поддуг на ∂G с концами u' и v' выберем дугу γ меньшего диаметра и проверим соотношение $\rho_l(z, u) \leqslant M\rho_l(u, v)$ для любой точки $z \in \gamma$. Пусть точка z принадлежит поддуге $\tilde{\gamma} \subset \gamma$ с концами $\tilde{u}$ и $\tilde{v} \in [u, v]$, для которой хорда $[\tilde{u}, \tilde{v}] \subset \overline{G}$. Тогда по условию a$'$) $\rho_l(z, \tilde{u}) \leqslant \varepsilon^{-1}\rho_l(\tilde{u}, \tilde{v})$. Имеем теперь $\rho_l(z, u) \leqslant C(\rho_l(z, \tilde{u}) + \rho_l(\tilde{u}, u)) \leqslant C(\rho_l(\tilde{u}, u) + \varepsilon^{-1}\rho_l(u, v)) \leqslant M\rho_l(u, v)$, где $M = C(1 + \varepsilon^{-1})$. Из доказанного неравенства вытекает, что в G^* метрика Мазуркевича эквивалентна ρ_l-метрике.

Если выполнено c$'$), то первое соотношение в условии Лихтенштейна очевидным образом выполняется. Если второе соотношение в условии Лихтенштейна не выполняется, то отсюда вытекает, что в дополнительной области G^* метрика Мазуркевича не эквивалентна ρ_l-метрике. Таким образом, эквивалентность утверждений a$'$) и c$'$) доказана.

Эквивалентность утверждений a) и c) доказывается локализацией вышеприведенного рассуждения. Точно так же доказывается эквивалентность утверждений b) и c).

Легко видеть, что c) является эквивалентным определением локального выполнения условия (23). Таким образом, в силу замечания 6 каждая ограниченная компонента связности границы ∂G является l-кривой Альфорса. Предложение 17 доказано.

Теорема 10. *Для существования ограниченного оператора продолжения*

$$\mathrm{ext}\colon L_p^l(G) \to L_p^l(\mathbf{R}^2), \quad l^*p = 2,$$
$$(\mathrm{ext}\colon BMO^l(G) \to BMO^l(\mathbf{R}^2)),$$

где G — конечносвязная ограниченная область в $\mathbf{R}^2$, необходимо и достаточно, чтобы каждая компонента связности границы ∂G, отличная от точки, являлась l-кривой Альфорса.

Доказательство. Пространства, входящие в формулировку теоремы 10, являются модельными для предложения 14, которое утверждает, что при условии существования ограниченного оператора продолжения как в области G, так и в дополнительной области $G^* = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{G}$ метрика Мазуркевича эквивалентна ρ_l-метрике. Отсюда в силу предложения 17 каждая компонента связности границы ∂G области G, отличная от точки, является l-кривой Альфорса.

Обратно, если каждая компонента связности границы ∂G области G, отличная от точки, является l-кривой Альфорса, то в силу предложения 17 область G удовлетворяет условию Лихтенштейна. В работе [12] доказано, что для области G, удовлетворяющей условию Лихтенштейна, существует ограниченный оператор продолжения

$$\mathrm{ext}\colon L_p^l(G) \to L_p^l(\mathbf{R}^2), \quad l^*p = 2,$$

$$(\mathrm{ext}\colon BMO^l(G)\to BMO^l(\mathbf{R}^2)).$$

Так же, как предложение 17, доказывается следующее утверждение.

Теорема 11. *Для существования ограниченного оператора продолжения*

$$\mathrm{ext}\colon W_p^l(G)\to W_p^l(\mathbf{R}^2),\quad l^*p=2,$$

где G — конечносвязная ограниченная область в $\mathbf{R}^2$, необходимо и достаточно, чтобы область G удовлетворяла (ε,δ)-условию Лихтенштейна.

Доказательство. Если существует ограниченный оператор продолжения $\mathrm{ext}\colon W_p^l(G)\to W_p^l(\mathbf{R}^2)$, $l^*p=2$, то по следствию 1 метрика Мазуркевича в области G локально эквивалентна ρ_l-метрике, а по предложению 15 метрика Мазуркевича в дополнительной области $G^*=\mathbf{R}^2\backslash\overline{G}$ локально эквивалентна ρ_l-метрике. В силу предложения 17 область G удовлетворяет (ε,δ)-условию Лихтенштейна.

Обратно, если область G удовлетворяет (ε,δ)-условию Лихтенштейна, то в работе [12] доказано существование ограниченного оператора продолжения

$$\mathrm{ext}\colon W_p^l(G)\to W_p^l(\mathbf{R}^2),\quad l^*p=2.$$

Замечание 8. В силу предложения 17 утверждения теорем 10 и 11 эквивалентны.

Сформулируем теперь утверждение общего характера о необходимых условиях существования оператора продолжения.

Теорема 12. *Пусть конечносвязная область в $\mathbf{R}^2$ удовлетворяет условиям продолжения, невидимости и разделения, а функциональные пространства $N(\mathbf{R}^2)$ и $F(\mathbf{R}^2)$ инвариантны относительно сдвигов и однопараметрической группы преобразований H_t, $t\in\mathbf{R}^+$, причем полунормы пространств $N(\mathbf{R}^2)$ и $F(\mathbf{R}^2)$ имеют нулевую однородность относительно группы H_t, $t\in\mathbf{R}^+$. Пусть, кроме того, выполняются соотношения* (20).

Тогда каждая ограниченная компонента связности границы ∂G, отличная от точки, является ρ-кривой Альфорса, в то время как неограниченная удовлетворяет условию (23) *локально.*

Замечание 9. ρ-Кривая Альфорса определяется так же, как и l-кривая Альфорса с заменой ρ_l-метрики на ρ-метрику, которая определяется по однопараметрической группе H_t, $t\in\mathbf{R}^+$.

Доказательство теоремы 12 сводится к применению предложений 14 и 17.

Замечание 10. Можно проверить, что условия теоремы 12 выполняются для пространства $N(\mathbf{R}^2)=F(\mathbf{R}^2)\doteq L^{l_1,l_2}_{p_1,p_2}(\mathbf{R}^2)$, определенного в § 1 (условия (20) проверяются методами, разработанными в § 2). Поэтому получаем, в частности, следующий результат:

Для существования ограниченного оператора продолжения

$$\mathrm{ext}\colon L^{l_1,l_2}_{p_1,p_2}(G)\to L^{l_1,l_2}_{p_1,p_2}(\mathbf{R}^2),\quad l_ip_i=\frac{2\lambda_i}{\lambda^*},\quad i=1,2,$$

где G — односвязная область, необходимо, чтобы граница области G являлась ρ_λ-кривой Альфорса (определение ρ_λ-метрики см. в § 1).

Если граница G локально является графиком некоторой функции $x_2=g(x_1)$ (или $x_1=g(x_2)$), то метод получения модуля непрерывности для функции g, разработанный в приложении к работе [6], позволяет состыковать необходимые условия продолжения в терминах модуля непрерывности функции g с достаточными условиями, указанными в работе [40] для специальных областей класса $A(l_1,l_2)$ (см. определение в [40]).

Замечание 11. Для ряда пространств, например BMO, L_p^l и $L^{l_1,l_2}_{p_1,p_2}$, утверждение теоремы 12 можно усилить. Покажем, что для указанных пространств в условиях теоремы 12 не только ограниченные компоненты связности границы, но также и неограниченная компонента являются кривыми Альфорса в соответствующих метриках.

Рассмотрим случай пространств Соболева L_p^l, $l^*p=2$. Если область $G\subset \mathbf{R}^2$ конечносвязна и существует оператор продолжения $\text{ext}: L_p^l(G)\to \to L_p^l(\mathbf{R}^2)$, то, как уже доказано, все ограниченные компоненты связности границы являются ρ_l-кривыми Альфорса. Так как G связно, то в $\overline{\mathbf{R}}^2$ есть только одна неограниченная компонента Γ границы ∂G. Рассмотрим область $\widetilde{G}$, границей которой является кривая Γ и которая содержит G. Покажем, что существует ограниченный оператор продолжения

$$\widetilde{\text{ext}}:\ L_p^l(\widetilde{G})\to L_p^l(\mathbf{R}^2).$$

Действительно, рассмотрим функцию $f\in L_p^l(\widetilde{G})$; ее ограничение $g = f|_G\in L_p^l(G)$ принадлежит $L_p^l(G)$. Далее, $\text{ext}\, g\in L_p^l(\mathbf{R}^2)$, поэтому функция $f-\text{ext}\, g|_{\widetilde{G}}\in L_p^l(\widetilde{G})$ и, кроме того, равна нулю в области G. Поэтому она может быть продолжена нулем на все пространство $\mathbf{R}^2$ до функции $u\in L_p^l(\mathbf{R}^2)$. Легко видеть теперь, что $\widetilde{\text{ext}}\, g=\text{ext}\, g+u\in L_p^l(\mathbf{R}^2)$ и оператор продолжения $\widetilde{\text{ext}}: L_p^l(\widetilde{G})\to L_p^l(\mathbf{R}^2)$ ограничен. Применяя предложения 12, 16 и случаи a′) и c′) в доказательстве предложения 17 к области $\widetilde{G}$, заключаем, что граница $\partial\widetilde{G}=\Gamma$ является ρ_l-кривой Альфорса.

§ 6. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И КВАЗИКОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В изотропном случае кривые Альфорса, фигурирующие в теореме 10, являются образами окружностей при квазиконформных отображениях плоскости на себя [22]. Прямая связь между квазиконформными отображениями и продолжением функций класса $L_2^{(1)}$ из неограниченных односвязных областей установлена в работе [41]. В этой работе продолжение функций класса $L_2^{(1)}$ осуществляется с помощью квазиконформного отображения плоскости на себя, которое переводит границу области G на прямую.

Напомним, что функциональный класс $L_n^{(1)}$ (n — размерность пространства) инвариантен при квазиконформных отображениях [42, 43], т. е. для любого квазиконформного отображения $\varphi: G\to G'$ и функции $f\in L_n^{(1)}(G')$ функция $f\circ\varphi$ принадлежит $L_n^{(1)}(G)$ и

$$\|f\circ\varphi\|_{L_n^{(1)}(G)}\leqslant \sqrt[n]{K}\,\|f\|_{L_n^{(1)}(G')},$$

здесь K — коэффициент квазиконформности. Верно также и обратное утверждение: если гомеоморфизм $\varphi: G\to G'$ индуцирует ограниченный изоморфизм пространств $L_n^{(1)}$ по правилу $\varphi^*f=f\circ\varphi$, $f\in L_n^1(G')$, то φ является квазиконформным отображением (см. [42, 43], где этот результат доказан при более слабых предположениях относительно отображения φ).

Отметим также, что аналогичный результат установлен для пространств BMO [44, 45]; необходимость в [44] доказана при некоторых условиях регулярности относительно φ, которые сняты в [45].

Приведем точную формулировку. Если $\varphi: G\to G'$ — K-квазиконформный гомеоморфизм, то

$$C^{-1}\|f\|_{BMO(G')}\leqslant\|f\circ\varphi\|_{BMO(G)}\leqslant C\|f\|_{BMO(G')}$$

для любой функции $f\in BMO(G')$ (здесь постоянная C зависит только от K и размерности n [44]). Обратно, если для сохраняющего ориентацию гомеоморфизма $\varphi: G\to G'$ существует такая постоянная C, что неравенство

$$C^{-1}\|f\|_{BMO(D')}\leqslant\|f\circ\varphi\|_{BMO(D)}\leqslant C\|f\|_{BMO(D')}$$

выполняется для любой подобласти $D\subset G$ и для всех $f\in BMO(D')$, $D'=\varphi(D)$, то f квазиконформно [45].

В этом параграфе изучаются метрические свойства гомеоморфизма φ: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, который индуцирует ограниченный оператор φ^*: $N(\mathbf{R}^n)\to F(\mathbf{R}^n)$ по правилу $\varphi^*f=f\circ\varphi$, $f\in N(\mathbf{R}^n)$. Прежде чем сформулировать точный результат, введем необходимые для этого понятия и опишем абстрактную ситуацию, в которой происходят наши рассмотрения.

Условия на функциональные пространства введены в § 1. Введем разновидность емкости Тейхмюллера как функцию переменной $r>0$

$$\tilde{T}(r)=\inf_{F_0,F_1}\mathfrak{C}(F_0,F_1;F(\mathbf{R}^n)),$$

где нижняя грань берется по всем замкнутым связным множествам F_0, F_1 таким, что F_1 пересекает $S(0,r)$ и $\{0\}$, а F_0 пересекает $S(0,r)$ и $S(0,2r)$.

Так же, как свойство 5, доказывается

Свойство 6. Емкости Тейхмюллера $\tilde{T}(r)$ и $\tilde{T}(\mu r)$, $\mu\in\mathbf{R}^+$, в пространстве F связаны условием

$$\tilde{T}(r)=\mu^{\sigma}\tilde{T}(\mu r),\tag{25}$$

где σ — степень однородности полунормы в пространстве $F(\mathbf{R}^n)$ относительно группы H_t, $t\in\mathbf{R}^+$.

Полагая в (25) $\mu=r^{-1}$, получаем

$$\tilde{T}(r)=r^{-\sigma}\tilde{T}(1).\tag{26}$$

В этом параграфе мы различаем емкости $C(r,R;F)$ и $C(r,R;N)$ кольца $D_{r,R}$ в пространствах F и N соответственно. Введем также значения

$$C(0,R;F)=\lim_{r\to0}C(r,R;F),$$

$$C(r,\infty;F)=\lim_{R\to\infty}C(r,R;F),$$

которые существуют в силу свойства 3, § 2. Свойство 4 (§ 2) справедливо также при крайних значениях r и R, т. е. при $r=0$ и $R=\infty$. Полагая в нем $\mu=R^{-1}$, получаем

$$C(r,R;F)=R^{-\sigma}C(r/R,1;F).\tag{27}$$

Сформулируем теперь результат о метрических свойствах гомеоморфизмов, порождающих ограниченный оператор функциональных пространств.

Теорема 13. *Пусть функциональные пространства $F(\mathbf{R}^n)$ и $N(\mathbf{R}^n)$ инвариантны относительно сдвига и однопараметрической группы H_t, $t\in\mathbf{R}^+$, причем полунормы в $N(\mathbf{R}^n)$ и $F(\mathbf{R}^n)$ однородны степени σ относительно действия группы H_t, $t\in\mathbf{R}^+$. Если гомеоморфизм φ: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ порождает ограниченный оператор φ^*: $N(\mathbf{R}^n)\to F(\mathbf{R}^n)$ по правилу $\varphi^*f=f\circ\varphi$, $f\in N(\mathbf{R}^n)$, то в случае*

1) $\sigma=0$ *и* $\tilde{T}(1)\neq0$, $C(0,1;N)=0$ *отображение* φ *обладает свойством*

$$\max_{\rho(x,y)=r}\rho(\varphi(x),\varphi(y))\Big/\min_{\rho(x,y)=r}\rho(\varphi(x),\varphi(y))\leqslant C<\infty,\tag{28}$$

где C не зависит ни от $x\in\mathbf{R}^n$, ни от $r>0$;

2) $\sigma>0$ и $\tilde{T}(1)\neq0$, $C(0,1;F)\neq0$ *отображение* φ *обладает свойством*

$$\rho(\varphi(x),\varphi(y))\leqslant C\rho(x,y),\tag{29}$$

где C не зависит от выбора точек x, $y\in\mathbf{R}^n$;

3) $\sigma<0$ и $\tilde{T}(1)\neq 0$, $C(1, \infty; F)\neq 0$ *отображение* φ^{-1} *обладает свойством* (29), *т. е.*

$$\rho(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))\leqslant C\rho(x, y),$$

где C *не зависит от выбора точек* $x, y\in\mathbf{R}^n$.

Доказательству теоремы предпошлем две леммы.

Лемма 3. *Если выполнены условия теоремы* 13, *то для любой пары замкнутых множеств* F_0, F_1 *из* $\mathbf{R}^n$ *имеем*

$$\mathfrak{C}(\varphi^{-1}(F_0), \varphi^{-1}(F_1); F)\leqslant K\mathfrak{C}(F_0, F_1; N), \tag{30}$$

где K — *норма оператора* φ^*.

Доказательство. Ограниченность оператора φ^* означает, что $\|\varphi^*f\|_F\leqslant K\|f\|_N$. Если $f\in N(\mathbf{R}^n)$ — допустимая функция для пары замкнутых множеств (F_0, F_1), то φ^*f является допустимой функцией для пары замкнутых множеств $(\varphi^{-1}(F_0), \varphi^{-1}(F_1))$ и при этом

$$\mathfrak{C}\left(\varphi^{-1}(F_0), \varphi^{-1}(F_1); F\right)\leqslant\|\varphi^*f\|_F\leqslant K\|f\|_N. \tag{31}$$

Так как допустимая функция $f\in N$ выбирается произвольно, то из (31) получаем (30).

Для гомеоморфизма φ: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ введем функции $L(x, r)$ и $l(x, r)$ следующим образом:

$$L(x, \varphi)=\max_{\rho(x,y)=r}\rho(\varphi(x), \varphi(y)),$$
$$l(x, \varphi)=\min_{\rho(x,y)=r}\rho(\varphi(x), \varphi(y)).$$

Здесь $x\in\mathbf{R}^n$ и $r>0$.

Лемма 4. *Если выполнены условия теоремы* 13, *то справедливо следующее неравенство*:

$$r^{-\sigma}\tilde{T}(1)\leqslant KL^{-\sigma}(x, r)\,C\left(\frac{l(x, r)}{L(x, r)}, 1; N\right). \tag{32}$$

где $x\in\mathbf{R}^n$ — *произвольная точка*, $r>0$, *а* K — *норма оператора* φ^*.

Доказательство. Положим $F_1=\bar{Q}(\varphi(x), l(x, r))$, $F_0=\mathbf{R}^n\backslash Q(\varphi(x), L(x, r))$. По определению емкости Тейхмюллера $\tilde{T}(r)$, свойству 1 и неравенству (30) имеем последовательно три неравенства

$$\tilde{T}(r)\leqslant\mathfrak{C}(\varphi^{-1}(F_0)\cap\bar{D}_{r,2r},\ \ \varphi^{-1}(F_1); F(\mathbf{R}^n))\leqslant$$
$$\leqslant\mathfrak{C}(\varphi^{-1}(F_0), \varphi^{-1}(F_1); F(R^n))\leqslant K\mathfrak{C}(F_0, F_1; N(\mathbf{R}^n))=$$
$$=KC(l(x, r), L(x, r); N).$$

Используем теперь (26) и (27), чтобы окончательно записать

$$r^{-\sigma}\tilde{T}(1)=\tilde{T}(r)\leqslant KC(l(x, r), L(x, r); N)=$$
$$=KL^{-\sigma}(x, r)C(l(x, r)/L(x, r), 1; N).$$

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим первый случай: $\sigma=0$. Из (32) имеем

$$0<\tilde{T}(1)\leqslant KC(l(x, r)/L(x, r), 1; N). \tag{33}$$

По условию теоремы $\lim\limits_{t\to 0}C(t, 1; N)=0$, поэтому, если существуют последовательности x_n, r_n, $n\in N$, для которых $L(x_n, r_n)/l(x_n, r_n)\to\infty$ при $n\to\infty$, мы приходим к противоречию с неравенством (33). Таким образом, (28) доказано.

Если теперь $\sigma>0$, то из условий теоремы $\tilde{T}(1)\neq 0$ и по неравенству (32) с учетом $0\neq C(t, 1; N)\leqslant C\left(\frac{1}{2}, 1; N\right)$, $t=l(x, r)/L(x, r)\leqslant 1/2$, получаем

$$L(x, r)\leqslant\left\{\frac{KC(1/2; 1; N)}{\tilde{T}(1)}\right\}^{1/\sigma}r.$$

Отсюда немедленно следует неравенство

$$\rho(\varphi(x),\ \varphi(y)) \leqslant C_1\rho(x,\ y), \tag{34}$$

где $C_1 = \{KC(1/2,\ 1;\ N)/\tilde{T}(1)\}^{1/\sigma}$, полученное в предположении, что $l(x,\ r)/L(x,\ r) \leqslant 1/2$.

В случае $1/2 < l(x,\ r)/L(x,\ r)$, используя неравенство (30) и монотонность емкости (свойство 1), приходим к соотношению

$$C(0,\ r;\ N) \leqslant KC(0,\ l(x,\ r);\ N),$$

откуда

$$r^{-\sigma}C(0,\ 1;\ F) \leqslant Kl^{-\sigma}(x,\ r)C(0,\ 1;\ N),$$

что приводит к неравенствам

$$L(x,\ r) \leqslant 2l(x,\ r) \leqslant 2\{KC(0,\ 1;\ N)/C(0,\ 1;\ F)\}^{1/\sigma}r.$$

Таким образом, в случае $1/2 < l(x,\ r)/L(x,\ r)$ также получаем неравенство (34) с постоянной $C_2 = 2\{KC(0,\ 1;\ N)/C(0,\ 1;\ F\}^{1/\sigma}$. Следовательно, при $\sigma > 0$ неравенство (29) доказано с постоянной $C = \max(C_1,\ C_2)$.

Рассмотрим теперь случай $\sigma < 0$. Из условий теоремы и неравенства (27) получаем, что при $0 < r < 1/2$

$$0 \neq C(r,\ 1;\ N) \leqslant C(r,\ 2r;\ N) = r^{-\sigma}C(1,\ 2;\ N).$$

Перепишем (32) при $r = l(x,\ r)/L(x,\ r) \leqslant 1/2$ в следующем виде:

$$r^{-\sigma}\tilde{T}(1) \leqslant KL^{-\sigma}(x,\ r)\frac{l^{-\sigma}(x,\ r)}{L^{-\sigma}(x,\ r)}C(1,\ 2;\ N),$$

откуда

$$r \leqslant \left\{\frac{KC(1,\ 2)}{\tilde{T}(1)}\right\}^{-1/\sigma} l(x,\ r).$$

Последнее неравенство приводит к соотношению

$$\rho(\varphi^{-1}(x),\ \varphi^{-1}(y)) \leqslant C_3\rho(x,\ y), \tag{35}$$

где $C_3 = \{KC(1,2;\ N)/\tilde{T}(1)\}^{-1/\sigma}$, которое получается при условии $l(x,\ r)/L(x,\ r) \leqslant 1/2$. В случае $1/2 < l(x,\ r)/L(x,\ r)$, используя (30) и свойство (1), приходим к неравенству

$$C(r,\ \infty;\ F) \leqslant KC(L(x,\ r),\ \infty;\ N),$$

из которого имеем

$$r^{-\sigma}C(1,\ \infty;\ F) \leqslant KL^{-\sigma}(x,\ r)C(1,\ \infty;\ N),$$

откуда

$$r \leqslant 2\{KC(1,\ \infty;\ N)/C(1,\ \infty;\ F)\}^{-1/\sigma}l(x,\ r).$$

Таким образом, в случае $1/2 < l(x,\ r)/L(x,\ r)$ также приходим к неравенству (34) с постоянной $C_4 = 2\{KC(1,\ \infty;\ N)/C(1,\ \infty;\ F)\}^{-1/\sigma}$. Следовательно, (29) доказано с постоянной $C = \max(C_3,\ C_4)$.

Гомеоморфизм φ метрического пространства $(D,\ \rho)$ на метрическое пространство $(D',\ \rho')$ называется *квазиконформным*, если функция

$$H_\varphi(x) = \overline{\lim_{r\to 0}} \max_{\rho(x,y)=r} \rho'(\varphi(x),\ \varphi(y)) \Big/ \min_{\rho(x,y)=r} \rho'(\varphi(x),\ \varphi(y))$$

является ограниченной, и *K-квазиконформным*, если $H_\varphi(x) \leqslant K$ для всех $x \in D$.

В [46] можно найти простейшие метрические свойства квазиконформных гомеоморфизмов.

Следствие 3. *В условиях теоремы* 13, *случай* 1), *отображение* φ *является квазиконформным.*

Гомеоморфизм φ метрического пространства $(D,\ \rho)$ на метрическое пространство $(D',\ \rho')$ называется *квазиизометрическим*, если для некоторой постоянной C

$$\overline{\lim_{y\to x}}\frac{\rho'(\varphi(x),\varphi(y))}{\rho(x,y)}\leqslant M,\ \overline{\lim_{y\to x}}\frac{\rho(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y))}{\rho'(x,y)}\leqslant M.$$

Следствие 4. *Если условия теоремы 13, случаи 2, 3, выполняются как для отображения φ, так и для отображения φ^{-1}, то φ является квазиизометрическим.*

Теорема 14. *Пусть гомеоморфизм φ: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ порождает ограниченный оператор φ^*: $L_p^l(\mathbf{R}^n)\to L_p^l(\mathbf{R}^n)$*

$$(\varphi^*\colon b^l_{p,\theta_1}(\mathbf{R}^n)\to b^l_{p,\theta_2}(\mathbf{R}^n),\ \theta_2\geqslant\theta_1)$$

по правилу $\varphi^*f=f\circ\varphi$, $f\in L_p^l(\mathbf{R}^n)\,(f\in b^l_{p,\theta_1}(\mathbf{R}^n))$. Тогда в случае

1) $l^*p=n$, $p\in(1,\infty)$ для пространств Соболева ($l^*p=n$, $p\in(1,\infty)$, $\theta_1>1$ для пространств Никольского — Бесова) отображение φ обладает свойством

$$\max_{\rho(x,y)=r}\rho(\varphi(x),\varphi(y))\Big/\min_{\rho(x,y)=r}\rho(\varphi(x),\varphi(y))\leqslant C<\infty,$$

где C не зависит ни от $x\in\mathbf{R}^n$, ни от $r>0$;

2) $l^*p>n$ отображение φ обладает свойством

$$\rho(\varphi(x),\varphi(y))\leqslant C\rho(x,y),$$

где C не зависит от точек x, $y\in\mathbf{R}^n$;

3) $l^*p<n$ и выполнены условия предложения 8 отображение φ^{-1} обладает свойством

$$\rho(\varphi^{-1}(x),\varphi^{-1}(y))\leqslant C\rho(x,y),$$

где C не зависит от выбора точек x, $y\in\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Во всех трех случаях ограничения на показатели суммируемости и гладкости гарантируют выполнение условий теоремы 13. В случае 1) см. предложения 10 и 8; в случае 2) — предложения 6 и 8; в случае 3) — предложения 9 и 8.

Следствие 5. *Если условия теоремы 14 в случаях 2) и 3) выполняются как для отображения φ, так и для отображения φ^{-1}, то φ является квазиизометрическим. В условиях теоремы 14, случай 1), отображение φ является квазиконформным.*

Замечание 12. Для изотропных пространств Соболева $L_n^1(R^n)$ ($L_p^1(R^n)$, $p>n$) и Бесова $b^{n/n+1}_{n+1,n+1}(R^n)$ утверждение теоремы 14, случай 1 (случай 2) доказано ранее в [42, 43, 47] ([13]).

Замечание 13. Утверждение следствия 5 остается в силе при более слабых требованиях на отображение φ:

1) можно отказаться от гомеоморфности отображения φ, а рассматривать лишь определенные почти всюду взаимно однозначные отображения, которые индуцируют ограниченный оператор функциональных пространств;

2) ограниченность изоморфизма φ^* следует из его существования;

3) можно рассмотреть случай неоднородных полунормированных функциональных пространств $F(\mathbf{R}^n)$ и $N(\mathbf{R}^n)$.

Теорема 15. *Пусть гомеоморфизм φ: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ индуцирует ограниченный изоморфизм φ^*: $BMO^l(\mathbf{R}^n)\to BMO^l(\mathbf{R}^n)$ по правилу $\varphi^*f=f\circ\varphi$, $f\in BMO^l(\mathbf{R}^n)$. Тогда отображение φ удовлетворяет условию (28), в частности квазиконформно.*

Доказательство сводится к проверке условий теоремы 13 с помощью предложения 11.

Замечание 14. Теорема 13 справедлива также в том случае, когда областью определения функций является однородная группа [48], в частности группа Гейзенберга [49]. Отметим, что доказательство теоремы 13 для случая однородных групп остается без изменений.

Замечание 15. Утверждение следствия 5 справедливо также и при других соотношениях между показателями гладкости и суммируемости. Однако его доказательство при $lp \leqslant n-1$ требует другой техники. Случай изотропных пространств Соболева, $1 < lp < n$, $p > 1$ рассмотрен в [50]. Распространение этого результата для пространств Соболева $W_p^{(l)}$ при $p=1$ и Никольского — Бесова $B_{p,\theta}^{(l)}$, $1 < lp < n$, $p > 1$, осуществляется методом, разработанным автором, в основании которого лежит комбинированное применение теорем вложения Соболева — Ильина в форме, доказанной Адамсом, и теоремы Фростмана.

В заключение автор выражает искреннюю признательность В. Г. Перепелкину за обсуждение предмета статьи и замечания по изложению материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Михлин С. Г.** Об эквивалентных нормах в соболевских пространствах и о теореме оператора продолжения.— Сиб. мат. журн., 1978, т. 19, № 5, с. 1141—1153.
2. **Михлин С. Г.** О наименьшей постоянной продолжения функций соболевских классов.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1979, т. 90, с. 150—195.
3. **Буренков В. И.** Об оценке норм операторов продолжения.— В кн.: IX школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Тернополь: Тернопольск. гос. пед. ин-т, 1984, с. 19—20.
4. **Водопьянов С. К.** Геометрические свойства областей и оценки снизу нормы оператора продолжения.—В кн.: Тезисы докладов Всесоюзного семинара молодых ученых «Актуальные вопросы комплексного анализа». Ташкент: Ташкент. гос. ун-т, 1985, с. 23—24.
5. **Vodopjanov S. K.** Geometrical properties of domains and lower bounds for the norm of the extention operator.— In: Alfred Haar Memorial conference. August 11—17, 1985, Budapest: János Bolyai Math. Soc., 1985, p. 65—66.
6. **Водопьянов С. К.** Геометрические свойства областей, удовлетворяющих условию продолжения для пространств дифференцируемых функций.— В кн.: Некоторые приложения функционального анализа к задачам математической физики (Тр. семинара акад. С. Л. Соболева). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984, № 2, с. 65—95.
7. **Gol'dstein V. M., Vodop'janov S. K.** Prolongement de fonctions differentiables hors de domaines plans.— C. r. Acad. sci., 1981, t. 293, Ser. A, p. 581—584.
8. **Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.** Пространства Соболева и специальные классы отображений.— Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1981.
9. **Гольдштейн В. М.** Необходимые условия продолжения классов Соболева.— В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Тр. семинара акад. С. Л. Соболева). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1981, № 1, с. 34—47.
10. **Гольдштейн В. М.** Пространства дифференцируемых функций и квазиконформные отображения. Автореферат дис... докт. физ.-мат. наук/Ин-т математики СО АН СССР. Новосибирск, 1984.
11. **Водопьянов С. К.** О геометрии областей, удовлетворяющих условию продолжения для пространств дифференцируемых функций.— В кн.: IX школа по теории операторов в функциональных пространствах. Тезисы докладов. Тернополь: Тернопольск. гос. пед. ин-т, 1984, с. 23—24.
12. **Шварцман П. А.** Локальные приближения функций и теоремы продолжения.— Деп. ВИНИТИ, № 2025—83 Деп.— 30 с.
13. **Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.** О геометрических свойствах функций с первыми обобщенными производными.— Успехи мат. наук, 1979, т. 34, вып. 1, с. 17—62.
14. **Gol'dstein V. M., Vodop'janov S. K.** Prolongement de fonctions de classe L_p^1 et application quasi — conformes.— C. r. Acad. Sci., 1980, t. 290, Sér. A, p. 453—456.
15. **Jones P. W.** Quasiconformal mapping and extendability of functions in Sobolev Spaces.— Acta Math., 1981, v. 147, p. 71—88.
16. **Файн Б. Л.** Об одном способе продолжения дифференцируемых функций.— Деп. ВИНИТИ № 3352—Деп.— 11 с.
17. **Jones P. W.** Extensions theorems for *BMO*.— Indiana Univ. Math. J., 1980, v. 29, N 1, p. 41—65.
18. **Гольдштейн В. М.** Продолжение функций одного класса Бесова из плоских областей.— Докл. АН СССР, 1979, т. 247, № 1, с. 18—21.
19. **Файн Б. Л.** О продолжении функций из анизотропных пространств Соболева.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1984, т. 170, с. 248—272.
20. **Гольдштейн В. М.** Продолжение дифференцируемых функций с сохранением класса из плоских областей.— Докл. АН СССР, 1981, т. 257, № 2, с. 451—454.
21. **Lichtenstein L.** Eine elementare Bemerkung zur reelen Analysis.— Math. Z., 1929, v. 30, p. 794—795.
22. **Альфорс Л.** Лекции по квазиконформным отображениям.— М.: Мир, 1969.

23. **Gehring F. W.** Rings and quasiconformal mapping in space.— Trans. Amer. Math. Soc., 1965, N 362, p. 1—12.
24. **Väisälä J.** Two new characterizations for quasiconformality.— Ann. Acad. Sci. Fenn., 1965, N 362, p. 1—12.
25. **Решетняк Ю. Г.** Некоторые геометрические свойства функций и отображений с обобщенными производными.— Сиб. мат. журн., 1966, т. 7, № 4, с. 886—919.
26. **Maz'a V. G.** Einbettungssätze für Sobolewsche Räume.— Leipzig: Teubner, I, 1979; II, 1980. (Texte für Math.).
27. **Мазья В. Г.** Пространства С. Л. Соболева.— Л.: Изд-во Ленингр. гос. ун-та, 1985.
28. **Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.** Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.
29. **Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.** Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.— М.: Наука, 1983.
30. **Солонников В. А.** О некоторых неравенствах для функций из классов $W_p^l(\mathbb{R}^n)$.— Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1972, т. 27, с. 194—210.
31. **Трибель Х.** Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.— М.: Мир, 1980.
32. **Берг Й., Лёфстрём Й.** Интерполяционные пространства. Введение.— М.: Мир, 1980.
33. **Бесов О. В., Лизоркин П. И.** Сингулярные интегральные операторы и последовательности сверток в пространствах L_p.— Мат. сб., т. 73, № 1, с. 65—88.
34. **Dappa H., Trebels W.** On L^1-criteria for quasiradial Fourier multipliers with application to some anisotropic function spaces.— Anal. Math., 1983, t. 9, Fasc. 4, p. 275—290.
35. **Sundberg C.** Truncation of *BMO* functions.— Indiana Univ. Math. J., 1984, v. 33, N 5, p. 749—772.
36. **Calderon A. P.** Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions.— Studia math., 1972, v. 44, p. 563—582.
37. **Devore R. A., Sharpley R. C.** Maximal functions measuring smoothness.— Memoirs of Amer. Math. Soc., 1984, N 293.
38. **Vodopianov S. K.** As condiçoes necessárias de prolongamento para espaços funcionais.— Ciência e tecnologia, 1982, N 6, p. 22—25.
39. **Christ M.** The axtension problem for certain function spaces involving fractional orders of differentiability.— Ark. Math., 1984, v. 22, N 1, p. 63—81.
40. **Буренков В. И., Файн Б. Л.** О продолжении функций из анизотропных пространств с сохранением класса.— Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1979, т. 150, с. 52—66.
41. **Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М., Латфуллин Т. Г.** Критерий продолжения функций класса L_2^1 из неограниченных плоских областей.— Сиб. мат. журн., 1979, т. 20, № 2, с. 416—419.
42. **Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.** Структурные изоморфизмы пространств W_n и квазиконформные отображения.— Докл. АН СССР, 1974, т. 215, № 1, с. 24—26.
43. **Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.** Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения.— Сиб. мат. журн., 1975, т. 16, № 2, с. 224—246.
44. **Reimann H. M.** Functions of Bounded mean Oscillation and Quasiconformal Mapping.— Comm. Math. Helv., 1974, v. 49, Fasc. 2, p. 260—276.
45. **Astala K.** A remark on quasiconformal mapping and *BMO*-functions.— Mich. Math. J., 1983, v. 30, N 2, p. 209—212.
46. **Мостов Г. Д.** Квазиконформные отображения в n-мерном пространстве и жесткость гиперболических пространственных форм.— В кн.: Математика, 1972, т. 16, № 5, с. 105—157.
47. **Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М.** Новый функциональный вариант для квазиконформных отображений.— В кн.: Некоторые вопросы современной теории функций. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1976, с. 18—20.
48. **Folland G. B., Stein E. M.** Hardy spaces of homogeneous groups.— Math. Notes, 1982, v. 28. 284 p.
49. **Korányi A., Reimann H. M.** Quasiconformal mappings of the Heisenberg group.— Inventiones Math., 1985, v. 80, Fasc. 2, p. 309—338.
50. **Романов А. С.** О замене переменной в пространствах потенциалов Бесселя и Рисса.— В кн.: Функциональный анализ и математическая физика. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1985, с. 117—133.

В. М. ГОЛЬДШТЕЙН, В. И. КУЗЬМИНОВ, И. А. ШВЕДОВ

L_p-КОГОМОЛОГИИ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Для риманова многообразия X и числа $p \geqslant 1$ банахово пространство $W_p^k(X)$ образовано дифференциальными формами степени k на X, модуль и модуль дифференциала которых интегрируемы в степени p. Пространства $W_p^k(X)$ вместе с оператором внешнего дифференцирования d