РАВНОМЕРНО СУММИРУЕМЫЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ

1. ПОРОЖДЕНИЕ ПОЛУГРУПП

Описание линейных операторов, порождающих полугруппы с заданными свойствами, — одна из основных задач теории полугрупп. Решение этой задачи во многом определяет исследование других вопросов теории и ее приложений — возмущение, аппроксимация полугрупп, абстрактная задача Коши и т. д., словом, тех вопросов, где речь идет о существовании и построении полугрупп. В банаховом пространстве такое описание в большинстве случаев можно дать в терминах резольвенты оператора. Успех здесь обеспечивается тем замечательным обстоятельством, что резольвента оператора, порождающего полугруппу, по существу, представляет собой преобразование Лапласа этой полугруппы. В ненормируемом пространстве аналогичной возможности, как правило, нет, и для изучения полугрупп приходится изыскивать иные средства. В связи с этим в работах [1, 2] был предложен подход к исследованию полугрупп операторов, не опирающийся на классический аппарат резольвенты. В основу его положено понятие, называемое здесь квазирезольвентой (в [1] — это n -резольвента, в [2] — асимптотическая резольвента) и являющееся специальным обобщением понятия резольвенты.

Аппарат квазирезольвенты позволил вполне удовлетворительно исследовать ряд традиционных вопросов теории полугрупп для широкого класса пространств и, в частности, описать производящие операторы различных типов полугрупп. Однако попытки применить его к проблеме возмущения полугрупп вскрыли определенные недостатки тех разновидностей квазирезольвенты, что рассмотрены в [1, 2]. Наиболее существенный из них — условие «коммутативности» квазирезольвенты (в [1] это свойство вытекает из специальных условий на остаток n -резольвенты, в [2] — свойство коммутативности операторов асимптотической резольвенты просто постулируется). Одна из задач настоящей статьи — устранение (в частности) отмеченного недостатка. Полученные здесь результаты будут применены во второй части работы к изучению вопроса о возмущении полугрупп.

В основе излагаемого ниже способа построения полугрупп лежит одно «эргодическое» свойство квазирезольвенты. Оно заключается в том, что линейный оператор, обладающий квазирезольвентой R , можно аппроксимировать операторами $\lambda^2 R(\lambda) - \lambda$ (ср.: $\lambda^2(\lambda - a)^{-1} - \lambda \rightarrow a$ при $\lambda \rightarrow \infty$). Такой подход, довольно популярный в банаховой теории, позволяет одновременно рассматривать как комплексные, так и вещественные пространства. С необходимыми модификациями он был применен в [2] при построении C_0 -полугрупп в локально выпуклых пространствах. Еще одна задача этой статьи — показать, что указанный путь возможен и в более общей ситуации (как с точки зрения рассматриваемых здесь классов полугрупп, так и в смысле используемого понятия квазирезольвенты).

Если иметь в виду формальную сторону дела, то главным результатом работы следует считать теорему 4.3, описывающую производящие операторы равномерно суммируемых (в нуле) полугрупп. На самом деле, к этому классу полугрупп правильнее относиться, как к модельному, удобному для выявления тех препятствий, которые приходится преодолевать при построении полугрупп практически любого класса. Основная же цель, преследуемая в настоящей работе, — достаточно подробно рассказать о наиболее типичных моментах, как принципиального, так и технического характера, связанных с использованием аппарата квазирезольвенты в теории однопараметрических полугрупп линейных операторов. Здесь дается развернутое изложение части результатов, содержащихся в предварительной публикации [3].

§ 1. ТЕРМИНОЛОГИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Рассматриваемые в работе локально выпуклые пространства предполагаются лишь секвенциально полными, в связи с чем возникает и соответствующая «секвенциальная» терминология. Так, секвенциальным замыканием множества называется наименьшее из всех секвенциально замкнутых множеств, содержащих данное; одно множество считается секвенциально плотным в другом, если последнее содержится в секвенциальном замыкании первого, и т. п. Для обозначения обычного замыкания используется стандартный символ cl , а для секвенциального замыкания — символ scl .

Если X и Y — локально выпуклые пространства, то $L(X, Y)$ означает совокупность всех непрерывных операторов, определенных на X и действующих в Y . Вместо $L(X, X)$ будем писать $L(X)$. Далее, $\text{id} = \text{id}_X$ — это тождественный оператор на X . Для операторов U и V , действующих в X , полагаем $\text{com}(U, V) = UV - VU$. Символы dom , im и ker не нуждаются в пояснениях. Если p — полунорма в X , а q — полунорма в Y , то для всякого оператора C из X в Y определена величина $\|C\|_q^p$ — наименьшая из констант $K \in [0, \infty]$, для которых $q(Cx) \leq Kp(x)$ при всех $x \in \text{dom } C$. Наконец, пусть $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — совокупность всех неотрицательных целых чисел.

Следующий факт (легко вытекающий из леммы Цорна) заслуживает упоминания ввиду частого его использования в дальнейшем.

Предложение 1.1. Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, X_0 — подпространство X , а $U_0 \in L(X_0, Y)$. Если X_0 секвенциально плотно в X , а Y — секвенциально полно, то существует (только один) оператор $U \in L(X, Y)$ такой, что $U|_{X_0} = U_0$.

Начиная с этого момента, X означает отделимое секвенциально полное (вещественное или комплексное) локально выпуклое пространство, а $\mathfrak{F}$ — совокупность всех непрерывных на X полунорм.

§ 2. КВАЗИРЕЗОЛЬВЕНТА

Определение 2.1. Пусть A — линейный оператор в X и $-\infty \leq \omega < +\infty$. Отображение $R: (\omega, \infty) \rightarrow L(X)$ называется квазирезольвентой оператора A на интервале (ω, ∞) , если выполнены следующие условия:

- (1) $R(\lambda)A \subset AR(\lambda) \in L(X)$ для всех $\lambda > \omega$;
- (2) отображения R и AR сильно бесконечно дифференцируемы в (ω, ∞) ;

(3) для некоторых $a \geq b > 0$ равномерно непрерывно семейство операторов $\{a^{-k}e^{kb}v^{(k)}(\lambda)\} (\lambda > \omega, k \in \bar{\mathbb{N}})$, где обозначено $v(\lambda) = (\lambda - A)R(\lambda) - \text{id}$, $\lambda > \omega$.

Отображение $v: (\omega, \infty) \rightarrow L(X)$ называется остатком квазирезольвенты R относительно оператора A . Всякую пару чисел (a, b) , удовлетворяющую условию (3), будем называть показателем убывания остатка v .

Отметим, что операторы $R(\lambda)$ и $v(\lambda)$ коммутируют на X , а операторы A и $v(\lambda)$ — на $\text{dom } A$. Последнее означает, что для всякого $x \in \text{dom } A$ справедливы включение $v(\lambda)x \in \text{dom } A$ и равенство $Av(\lambda)x = v(\lambda)Ax$.

Предложение 2.2. Для всех $\lambda > \omega$ и $\mu > \omega$ справедливы тождества

$$\text{com}(R(\lambda), R(\mu)) = v(\lambda)R(\mu)R(\lambda) - R(\lambda)R(\mu)v(\lambda),$$

$$\text{com}(R(\lambda), v(\mu)) = v(\lambda)v(\mu)R(\lambda) - R(\lambda)v(\mu)v(\lambda).$$

Действительно, умножая равенство $(\lambda - A)\text{com}(R(\lambda), R(\mu)) = \text{com}(v(\lambda), R(\mu))$ слева на оператор $R(\lambda)$ и учитывая перестановочность $R(\lambda)$ и $v(\lambda)$, получаем первое тождество. Второе доказывается аналогично.

Ряд полезных выводов об операторах, обладающих квазирезольвентами, позволит сделать

Предложение 2.3. Если $x \in \text{dom}(A^2)$ и $R(\lambda)A^2x \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$, то $\lambda^2 R(\lambda)x - \lambda x \rightarrow Ax$.

Это утверждение — непосредственное следствие вытекающего из определения 2.1 предельного соотношения $\lambda v(\lambda) \rightarrow 0$ и очевидного равенства

$$\lambda^2 R(\lambda)x - \lambda x = Ax + R(\lambda)A^2x + v(\lambda)(\lambda x + Ax).$$

Предложение 2.4. Если подпространство $\text{dom } A$ плотно (секвенциально плотно) в X , то и любое подпространство $\text{dom}(A^n)$, $n \in \mathbb{N}$, плотно (секвенциально плотно) в X .

Для доказательства построим по индукции множества X_n , $n \in \bar{\mathbb{N}}$, полагая $X_0 = X$, а для $n \geq 1$ определяя X_n как объединение множеств $R(\lambda)(X_{n-1})$, $\lambda > \omega$. Ясно, что $X_n \subset \text{dom}(A^n)$. При этом $R(k)(kx - Ax) \xrightarrow{k} x$ для всякого элемента $x \in \text{dom } A$. Таким образом, X_1 секвенциально плотно в $\text{dom } A$ и, следовательно, плотно в X в нужном смысле. Если это верно и для X_{n-1} при каком-нибудь $n \geq 2$, то $R(\lambda)(X)$ содержится в соответствующем замыкании множества $R(\lambda)(X_{n-1})$, а X_1 , тем самым, в замыкании X_n , что и доказывает требуемое.

Предложение 2.5. (а) Оператор A допускает замыкание (т. е. соответствие $\text{cl } A$ однозначен); при этом $\text{cl } A = \text{scl } A$.

(б) Если B — линейный оператор и $A \subset B \subset \text{cl } A$, то R — квазирезольвента B , причем $AR = BR$, т. е. остатки R относительно A и B совпадают.

(с) Если R — квазирезольвента не только оператора A , но и некоторого линейного оператора C , причем $AR = CR$, то $\text{scl } A = \text{scl } C$.

Однозначность соответствия $\text{cl } A$ вытекает из следующих соображений. Если семейство $\{x_\alpha\}$ из $\text{dom } A$ таково, что $x_\alpha \rightarrow 0$ и $Ax_\alpha \rightarrow y$ для какого-либо $y \in X$, то при каждом $\lambda > \omega$ справедливы соотношения $AR(\lambda)x_\alpha \rightarrow 0$ и $R(\lambda)Ax_\alpha \rightarrow R(\lambda)y$, откуда $R(\lambda)y = 0$. Так как $(\lambda - A)R(\lambda)y \rightarrow y$ при $\lambda \rightarrow \infty$, то $y = 0$. Для обоснования утверждения (б) достаточно записать следующую цепочку соотношений:

$$R(\lambda)B \subset R(\lambda)\text{cl } A \subset \text{cl}(R(\lambda)A) \subset \text{cl}(AR(\lambda)) = AR(\lambda) = BR(\lambda), \quad \lambda > \omega.$$

Докажем теперь утверждение (с). Пусть $x \in \text{dom } A$. Так как $R(k)(kx - Ax) \rightarrow x$, когда $k \rightarrow \infty$, и при этом

$$CR(k)(kx - Ax) = AR(k)(kx - Ax) = (k - A)R(k)Ax \rightarrow Ax,$$

то определен элемент $(\text{scl } C)x$ и он совпадает с Ax . Таким образом, $A \subset \text{scl } C$. По тем же причинам $C \subset \text{scl } A$, что и доказывает нужное равенство. Остается применить утверждение (с) к оператору $C = \text{cl } A$, чтобы завершить доказательство утверждения (а).

Предложение 2.6. Пусть $n \in \mathbb{N}$, а X_0 — плотное в X множество, инвариантное относительно операторов $R(\lambda)$, $\lambda > \omega$, и лежащее в $\text{dom}(A^n)$. Тогда для всякого $x \in \text{dom}(A^n)$ можно указать такое семейство $\{x_\alpha\} \subset X_0$, что $A^i x_\alpha \rightarrow A^i x$ при каждом $i = 0, \dots, n$. В частности, $\text{cl}(A^n|X_0) = \text{cl}(A^n)$.

Определим оператор $A_n: \text{dom}(A^n) \rightarrow X^n$ на каждом $x \in \text{dom}(A^n)$ по формуле $A_n x = (Ax, \dots, A^n x)$. Наша задача — установить равенство $\text{cl}(A_n|X_0) = \text{cl}(A_n)$. Пусть сначала $x = R^n(\lambda)y$ для некоторых $\lambda > \omega$ и $y \in X$. Подберем такое семейство $\{y_\alpha\} \subset X_0$, что $y_\alpha \rightarrow y$, и положим $x_\alpha = R^n(\lambda)y_\alpha$. В таком случае $x_\alpha \in X_0$ и $A^i x_\alpha \rightarrow A^i x$ для всех $i = 0, \dots, n$. Это означает, что $A_n \text{im}(R^n(\lambda)) \subset \text{cl}(A_n|X_0)$. Рассмотрим теперь произвольный элемент x из $\text{dom}(A^n)$. Полагая $x_\lambda = (\text{id} + v(\lambda))^n x$, заметим, что $A^i x_\lambda \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} A^i x$ для всякого $i = 0, \dots, n$. Однако $x_\lambda \in \text{im}(R(\lambda)^n)$, так что, по доказанному выше, $(x, A_n x) \in \text{cl}(A_n|X_0)$.

В заключение параграфа — несколько слов в связи с условием дифференцируемости квазирезольвенты. Отметим, что для любого $n \in \mathbb{N}$ оператор $\text{cl } A$ на своей области определения коммутирует с каждым из операторов $R^{(n)}(\lambda)$ и $v^{(n)}(\lambda)$.

Предложение 2.7. Для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $R^{(n)} = -nRR^{(n-1)} + Rv^{(n)} - vR^{(n)}$.

В самом деле, дифференцируя соотношение, определяющее остаток v , для каждого $\lambda > \omega$ получим равенство $(\lambda - cl A)R^{(n)}(\lambda) + nR^{(n-1)}(\lambda) = v^{(n)}(\lambda)$. Умножая его слева на $R(\lambda)$, приходим к нужному результату.

§ 3. ПОЛУГРУППЫ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Определение 3.1. *Отображение $T: (0, \infty) \rightarrow L(X)$ будем называть полугруппой (линейных) операторов в X в том случае, если выполнены следующие условия:*

- (1) $T(s+t) = T(s)T(t)$ для всех $s, t > 0$;
- (2) отображение T сильно непрерывно;
- (3) для всякого $\varepsilon \in (0, 1)$ семейство операторов $\{T(t)\} (\varepsilon \leq t \leq \varepsilon^{-1})$ равномерно непрерывно;
- (4) множество $\text{Im } T = \bigcup_{t>0} \text{im } T(t)$ секвенциально плотно в X ;
- (5) множество $\text{Ker } T = \bigcap_{t<0} \text{ker } T(t)$ состоит лишь из нуля.

Третье условие часто оказывается следствием второго (например, если X — бочечно). Это важное условие, необходимое для получения уже самых простых свойств полугрупп. Напротив, последние два условия — чисто технического характера, позволяющие освободить от второстепенных деталей дальнейшие формулировки определений и утверждений.

Определение 3.2. Пусть T — полугруппа операторов в X . Если элементы x и y из X таковы, что

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{T(t)x - x}{t} = y,$$

то, полагая $A_0x = y$, мы определяем линейный оператор A_0 в X , который называется инфинитезимальным оператором полугруппы T .

Инфинитезимальный оператор представляет собой важную характеристику полугруппы — он содержит исчерпывающую информацию о ней. Отметим несколько элементарных фактов, относящихся к этому оператору.

Удобно определить полугруппу T в нуле, полагая $T(0) = \text{id}$. Таким образом, если $x \in \text{Im } T$, то отображение $t \rightarrow T(t)x$ непрерывно по t не только на $(0, \infty)$, но и в нуле. Если же $x \in \text{dom}(A_0)$, то указанное отображение дифференцируемо на $[0, \infty)$. При этом для всякого $t \geq 0$, как легко видеть, справедливы включения $T(t)x \in \text{dom}(A_0)$ и равенства $T'(t)x = A_0T(t)x = T(t)A_0x$. Стоит подчеркнуть, что уже здесь существенно используется условие (3) определения 3.1.

Пусть $a > 0$ и $\varphi \in C[0, a]$. Для каждого $x \in \text{Im } T$ определен интеграл

$$T_a(\varphi)x = \int_0^a \varphi(t) T(t)x dt.$$

Непосредственно из определений (полугруппы и ее инфинитезимального оператора) вытекает

Предложение 3.3. Если $\varphi \in C^1[0, a]$, то для каждого $x \in \text{Im } T$ справедливы включения $T_a(\varphi)x \in \text{dom}(A_0)$ и равенство $A_0T_a(\varphi)x = -T_a(\varphi')x + \varphi(a)T(a)x - \varphi(0)x$. Если при этом $x \in T(t)(\text{dom}(A_0))$ для некоторого $t > 0$, то $A_0x \in \text{Im } T$ и $T_a(\varphi)A_0x = A_0T_a(\varphi)x$.

В частности, если φ — бесконечно дифференцируемая функция с носителем в $(0, a]$, то для каждого $x \in \text{Im } T$ (и даже для любого $x \in X$) элемент $T(\varphi)x$ принадлежит пространству $\text{dom}(A_0^\infty)$ — пересечению областей определения операторов A_0^k , $k \geq 1$. Из этого замечания легко выводится

Предложение 3.4. Все элементы вида $T(t)x$, где $t > 0$, а $x \in \text{dom}(A_0^\infty)$, образуют секвенциально плотное в X подпространство.

Серьезный «недостаток» оператора A_0 состоит в том, что он не всегда замкнут. Этот недостаток, конечно, легко устранить заменив оператор его замыканием. Но в таком случае немедленно возникают два вопроса: будет ли замыкание однозначным оператором и определяется ли им исходная полугруппа? Принятое здесь определение полугруппы таково, что ответы на оба вопроса, как мы сейчас увидим, утвердительные.

Предложение 3.5. *Оператор A_0 допускает замыкание.*

Действительно, пусть $\{x_\alpha\}$ — такое семейство из $\text{dom}(A_0)$, что $x_\alpha \rightarrow 0$ и $A_0 x_\alpha \rightarrow y$ для некоторого $y \in X$. Тогда для любых чисел $s, t > 0$ имеем

$$\int_s^t T(\sigma) y d\sigma = \lim_{\alpha} \int_s^t T(\sigma) A_0 x_\alpha d\sigma = \lim_{\alpha} (T(t) x_\alpha - T(s) x_\alpha) = 0.$$

Отсюда $y \in \text{Ker } T$ и, следовательно, $y = 0$.

Определение 3.6. *Оператор $\text{cl}(A_0)$ называют производящим оператором полугруппы.* Обозначим его буквой A .

Легко понять, что для любого $x \in \text{dom } A$ при всех $t > 0$ справедливы включения $T(t)x \in \text{dom}(A_0)$ и равенства $T'(t)x = A_0 T(t)x = T(t)Ax$.

Предложение 3.7. *Пусть T — полугруппа, $\tilde{A}$ — ее производящий оператор. Если $A \subset \tilde{A}$, то $T = \tilde{T}$ и, следовательно, $A = \tilde{A}$.*

В самом деле, пусть $t > 0$, а x — элемент одного из множеств $T(\sigma)(\text{dom } A)$, $\sigma > 0$. Для каждого $s \in [0, t)$ положим $f(s) = \tilde{T}(t-s)T(s)x$. Непосредственно проверяется, что отображение $f: [0, t) \rightarrow X$ дифференцируемо и $f'(s) = \tilde{T}(t-s)AT(s)x - \tilde{T}(t-s)\tilde{A}T(s)x = 0$ для любого $s \in [0, t)$. Таким образом, для всех $s > 0$ и $t > s$ справедливы равенства $\tilde{T}(t-s)T(s)x = \tilde{T}(t)x = \tilde{T}(t-s)\tilde{T}(s)x$, откуда $T(s)x = \tilde{T}(s)x$. Рассмотренные нами точки x образуют плотное в X множество, так что $T = \tilde{T}$, а значит, и $A = \tilde{A}$.

В заключение отметим еще один факт, который нам понадобится в дальнейшем.

Предложение 3.8. *Предположим, что для некоторых $a > 0$ и $\varphi \in C^1[0, a]$ операторы $T_a(\varphi)$ и $T_a(\varphi')$ непрерывны на $\text{Im } T$. Пусть $\bar{T}_a(\varphi)$ и $\bar{T}_a(\varphi')$ — их непрерывные расширения на X . Тогда для любого $x \in X$ справедливы включения $\bar{T}_a(\varphi)x \in \text{dom } A$ и равенство*

$$A\bar{T}_a(\varphi)x = -T(\varphi')x + \varphi(a)T(a)x - \varphi(0)x.$$

Если же $x \in \text{dom } A$, то $A\bar{T}_a(\varphi)x = \bar{T}_a(\varphi)Ax$.

Первая формула для $A\bar{T}_a(\varphi)x$ вытекает непосредственно из предложения 3.3. С учетом непрерывности оператора $A\bar{T}_a(\varphi)$, вторую из интересующих нас формул достаточно установить лишь для $x \in \text{dom}(A_0)$. Заметим для этого, что операторы $T(t)$ и $\bar{T}_a(\varphi)$ коммутируют. Кроме того, согласно предложению 3.3, $A_0 T_a(\varphi)T(t)x = T_a(\varphi)A_0 T(t)x$. Таким образом,

$$\begin{aligned} T(t)A\bar{T}_a(\varphi)x &= A_0 T(t)\bar{T}_a(\varphi)x = A_0 T_a(\varphi)T(t)x = \\ &= T_a(\varphi)A_0 T(t)x = \bar{T}_a(\varphi)T(t)A_0 x = T(t)\bar{T}_a(\varphi)A_0 x \end{aligned}$$

для всех $t > 0$, откуда и вытекает требуемое равенство.

§ 4. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ОПЕРАТОРЫ РАВНОМЕРНО СУММИРУЕМЫХ ПОЛУГРУПП

Определение 4.1. *Полугруппа T называется равномерно суммируемой, если для любой полунормы $p \in \mathfrak{F}$ можно указать такую полунорму $\bar{p} \in \mathfrak{F}$, что функция $\|T(\cdot)\|_{\bar{p}}^p$ интегрируема на $(0, 1)$.*

Следующее предложение устанавливает связь между понятиями, рассмотренными в предыдущих двух параграфах.

Предложение 4.2. Пусть T — равномерно суммируемая полугруппа в X и A — ее производящий оператор. Для любых $a > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ и $x \in X$ положим

$$R_a(\lambda)x = \int_0^a e^{-\lambda t} T(t)x dt, \quad v_a(\lambda)x = -e^{-a\lambda} T(a)x.$$

Тогда R_a — квазирезольвента оператора A (на $\mathbb{R}$), а v_a — ее остаток, для которого пара (a, a) — показатель убывания. При этом для любых $p, q \in \mathbb{F}$, $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняется оценка

$$\|R^{(n)}(\lambda)\|_p^q \leq \int_0^a e^{-\lambda t} t^n \|T(t)\|_p^q dt.$$

В проверке здесь нуждается лишь то, что R_a — квазирезольвента A с остатком v_a . Но это прямо вытекает из предложения 3.8, если положить в нем $\varphi(t) = e^{-\lambda t}$, $0 \leq t \leq a$, и заметить, что благодаря равномерной суммируемости T операторы $T_a(\varphi)$ и $T_a(\varphi')$ непрерывны, причем $T_a(\varphi) = R_a(\lambda)$, а $T_a(\varphi') = -\lambda R_a(\lambda)$.

Теперь можно дать описание (в терминах квазирезольвенты) тех операторов, которые порождают равномерно суммируемые полугруппы.

Теорема 4.3. Замкнутый линейный оператор A порождает некоторую равномерно суммируемую полугруппу в X тогда и только тогда, когда он определен на секвенциально плотном в X множестве и для некоторого $\omega < \infty$ имеет на (ω, ∞) квазирезольвенту R такую, что для каждой полунормы $p \in \mathbb{F}$ существуют полунорма $\bar{p} \in \mathbb{F}$ и неотрицательная измеримая на $(0, \infty)$ функция φ_p , для которых

$$\|R^{(n)}(\lambda)\|_{\bar{p}} \leq \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^n \varphi_p(t) dt < \infty$$

при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda > \omega$. При этом, если T — полугруппа, для которой A — производящий оператор, а пара (a, b) — показатель убывания остатка квазирезольвенты R , то для каждой полунормы $p \in \mathbb{F}$ почти для всех t из интервала $(0, (\sqrt{a} - \sqrt{a-b})^2)$ выполняется оценка $\|T(t)\|_p^p \leq \varphi_p(t)$.

Необходимость условий теоремы (даже в более жесткой форме) уже установлена в предложении 4.2. Для доказательства их достаточности нам предстоит явно построить требуемую полугруппу. Эта полугруппа, как мы увидим, будет удовлетворять и указанным в теореме оценкам. Тем самым и последнее утверждение теоремы окажется доказанным, так как согласно предложению 3.7 наш оператор не может порождать какой-либо другой полугруппы. Построению нужной полугруппы посвящен весь следующий параграф, а здесь мы отметим некоторые следствия из приведенной теоремы.

Сначала посмотрим, как из теоремы 4.3 можно вывести соответствующий результат для банахова пространства (см. [4, с. 377] и [5]), когда производящие операторы обладают резольвентами.

Теорема 4.4. Замкнутый линейный оператор A , действующий в (вещественном или комплексном) банаховом пространстве X , порождает некоторую равномерно суммируемую полугруппу в X тогда и только тогда, когда подпространство $\text{dom } A$ плотно в X , при некотором $\omega < \infty$ для каждого $\lambda > \omega$ существует резольвента $R(\lambda, A)$ оператора A в точке λ и можно указать неотрицательную измеримую на $(0, \infty)$ функцию φ такую, что

$$\|R^n(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} t^{n-1} \varphi(t) dt < \infty$$

для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda > \omega$. При этом, если T — искомая полугруппа, то $\|T(t)\| \leq \varphi(t)$ почти для всех $t > 0$.

Доказательство. (1) Пусть T — равномерно суммируемая полугруппа, порожденная оператором A , а числа $\omega \in \mathbb{R}$ и $M \geq 0$ таковы, что $\|T(t)\| \leq Me^{a t}$ для всех $t \geq 1$. В таком случае для любых $\lambda > \omega$ и $a \in (0, \infty]$ определен непрерывный оператор

$$R_a(\lambda) = \int_0^a e^{-\lambda t} T(t) dt.$$

Так как $R_a(\lambda) \rightarrow R_\infty(\lambda)$ и $e^{-\lambda a} T(a) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$, то в силу замкнутости A из предложения 4.2 вытекает, что $R_\infty(\lambda)$ — резольвента A в точке λ . Полагая $\varphi(t) = \|T(t)\|$ и учитывая равенство $R^{(n-1)}(\lambda, A) = (-1)^{n-1} (n-1)! R^n(\lambda, A)$, справедливое при всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda > \omega$, получаем требуемые оценки.

(2) Пусть теперь выполнены указанные в теореме условия. Резольвента — это квазирезольвента с нулевым остатком. Поэтому применима теорема 4.3. Пусть T — соответствующая полугруппа. Так как любая пара вида (a, a) , где $a > 0$, является показателем убывания (нулевого) остатка, то $\|T\| \leq \varphi$ почти всюду на $(0, a)$ при любом $a > 0$, т. е. почти всюду на $(0, \infty)$. Теорема доказана.

Теорему 4.3 удобно использовать и для описания производящих операторов полугруппы с теми или иными дополнительными свойствами. Как правило, это — свойства, отражающие характер поведения полугруппы в нуде. Рассмотрим здесь один пример такого рода — классические C_0 -полугруппы.

Определение 4.5. Полугруппа T принадлежит классу C_0 , если семейство операторов $\{T(t)\}$ ($0 < t < 1$) равномерно непрерывно (в бочечном пространстве это условие означает, что $T(t)x \rightarrow x$ при $t \rightarrow +0$ для всякого $x \in X$).

Теорема 4.6. Замкнутый линейный оператор A порождает в X полугруппу класса C_0 тогда и только тогда, когда $\text{dom } A$ плотно в X и на некотором интервале (ω, ∞) существует такая квазирезольвента R оператора A , что семейство $\{(\lambda^{n+1}/n!)R^{(n)}(\lambda)\}$ ($\lambda > \omega$, $n \in \bar{\mathbb{N}}$) равномерно непрерывно.

Доказательство. (1) Если T — полугруппа класса C_0 , порожденная оператором A , то в качестве R можно взять квазирезольвенту R_1 из предложения 4.2. Действительно, если $p(T(t)x) \leq q(x)$ для всех $t \in (0, 1)$ и $x \in X$, то

$$p(R_1^{(n)}(\lambda)x) \leq \int_0^1 e^{-\lambda t} t^n dt q(x) \leq \frac{n!}{\lambda^{n+1}} q(x)$$

для всех $x \in X$, $n \in \bar{\mathbb{N}}$ и $\lambda > 0$.

(2) Пусть теперь, напротив, выполнено указанное в теореме условие. Прежде всего заметим, что в таком случае $\lambda R(\lambda)x \rightarrow x$ при $\lambda \rightarrow \infty$ для любого $x \in X$, так что $\text{dom } A$ оказывается секвенциально плотным в X множеством. Далее, считая ω положительным и полагая $\varphi_p(t) = 1$, $t > 0$, мы видим, что выполнены условия теоремы 4.3. Приведенные в ней оценки на полугруппу T , порождаемую оператором A , означают в данном случае принадлежность T классу C_0 . Теорема доказана.

В отличие от соответствующих утверждений из [1] и [2] о C_0 -полугруппах, в этой теореме не требуется перестановочности операторов, составляющих квазирезольвенту.

§ 5. ПОСТРОЕНИЕ ПОЛУГРУППЫ ПО КВАЗИРЕЗОЛВЕНТЕ

В этом параграфе будет показано, каким образом по квазирезольвенте можно построить полугруппу. Построения проведем в предположениях теоремы 4.3, хотя подобным способом можно конструировать полугруппы из более широких классов и при менее ограничительных условиях на квазирезольвенту. Доказательство теоремы целесообразно предварить некоторыми пояснениями.

Предположим сначала, что X — банахово пространство. В таком случае для каждого $\lambda > \omega$ можно определить семейство операторов

$$T_\lambda(t) = e^{t(\lambda^2 R(\lambda) - \lambda)}, \quad t \geq 0,$$

являющееся полугруппой с производящим оператором $\lambda^2 R(\lambda) - \lambda$. Так как в условиях обсуждаемой теоремы операторы $\lambda^2 R(\lambda) - \lambda$, очевидно, сходятся к A при $\lambda \rightarrow \infty$ на плотном в X множестве $\text{dom}(A^2)$, то естественно попытаться строить нужную полугруппу в виде предела полугруппы T_λ при $\lambda \rightarrow \infty$.

В банаховом пространстве в случае, когда R — резольвента оператора A , такой путь действительно приводит к цели [4]. Если же пространство X всего лишь локально выпукло, то у нас нет резольвенты. Однако главным препятствием к распространению указанной схемы порождения полугрупп является то обстоятельство, что экспонента непрерывного оператора в локально выпуклом пространстве, вообще говоря, не определена. Точнее, такой оператор, за исключением редких случаев, не порождает какой-либо полугруппы.

Возвращаясь на минуту к той ситуации, когда R — резольвента, заметим, что, в силу отмечавшегося уже равенства $R^{(n)}(\lambda) = (-1)^n n! R^{n+1}(\lambda)$, указанные выше операторы $T_\lambda(t)$ можно записать следующим образом:

$$T_\lambda(t) = e^{-\lambda t} \left(\text{id} + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (\lambda^2 t)^{n+1}}{n!(n+1)!} R^{(n)}(\lambda) \right).$$

Нетрудно видеть, что такой ряд сходится и в том случае, когда R — квазирезольвента, удовлетворяющая, например, условиям теоремы 4.3. Что же касается полугруппового свойства операторов $T_\lambda(t)$, $t \geq 0$, то оно теперь, разумеется, утрачено. Но есть все основания надеяться, что асимптотические свойства квазирезольвенты (а точнее, ее остатка) позволят, во-первых, установить, что отображения T_λ при «больших» значениях λ «очень похожи» на полугруппы, и, во-вторых, доказать сходимость этих отображений при $\lambda \rightarrow \infty$. Если эти надежды оправдаются, то предел, конечно же, должен быть полугруппой, и останется лишь установить связь ее с исходным оператором A . Как мы увидим, в интересующей нас ситуации описанная схема порождения полугрупп действительно может быть реализована. В условиях теоремы 4.6 и в предположении «коммутативности» квазирезольвенты это успешно было сделано в работе [2].

Отвлекаясь частично от условий теоремы, мы будем считать (до определенного момента), что квазирезольвента R оператора A определена на $(0, \infty)$, а для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ указаны такие полунорма $\bar{p} \in \mathfrak{P}$ и неотрицательная интегрируемая на $(0, \infty)$ функция φ_p , что

$$p(R^{(n)}(\lambda)x) \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n \varphi_p(t) dt \bar{p}(x)$$

для всех $\lambda > 0$, $n \in \bar{\mathbb{N}}$ и $x \in X$. Пусть, как и прежде, v означает остаток R , а пара (a, b) — показатель его убывания. Для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ выберем еще полунорму $p' \in \mathfrak{P}$, для которой $p(v^{(n)}(\lambda)x) \leq a^n e^{-\lambda b} p'(x)$ при всех $n \in \bar{\mathbb{N}}$, $\lambda > 0$ и $x \in X$. Наконец, для $p \in \mathfrak{P}$ фиксируем полунорму $p_1 \in \mathfrak{P}$, мажорирующую p , $\bar{p}$ и p' , и по индукции для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим $p_{n+1} = (p_n)_1$. Условимся возникающие в нижеприведенных леммах обозначения использовать безоговорочно в дальнейших формулировках и рассуждениях.

Итак, для любых $\lambda > 0$, $t \geq 0$ и $x \in X$ положим

$$T_\lambda(t)x = e^{-\lambda t} \left(x + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (\lambda^2 t)^{n+1}}{n!(n+1)!} R^{(n)}(\lambda)x \right).$$

Ясно, что этот ряд сходится и определяет оператор $T_\lambda(t) \in L(X)$. Наша первая цель — установить сходимость семейства $\{T_\lambda(t)\}$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Дать точную формулировку и доказательство соответствующего утверждения

мы сможем только в лемме 6, а сейчас приступим к подготовительной работе.

Далее существенно используется следующее утверждение (см. [4, с. 238]).

Лемма 1. Пусть измеримая функция $g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ такова, что при некотором $\omega \in \mathbb{R}$ для всех $\lambda > \omega$ определен (лебеговский) интеграл

$$f(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} g(t) dt.$$

В таком случае для любых $t > 0$ и $\lambda > \omega$ сходится ряд

$$g_\lambda(t) = e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (\lambda^2 t)^{n+1}}{n!(n+1)!} f^{(n)}(\lambda)$$

и для всех точек Лебега t функции g выполняется соотношение $g_\lambda(t) \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} g(t)$. Если функция g непрерывна на каком-либо открытом промежутке, то на любом содержащемся в нем компактном множестве указанное предельное соотношение выполняется равномерно.

Всюду далее под нормой измеримой на $(0, \infty)$ функций понимается ее норма в $L^1(0, \infty)$.

Лемма 2. Существует семейство $\{\varphi_{p,\lambda} | p \in \mathfrak{P}, \lambda > 0\}$ непрерывных и неотрицательных на $[0, \infty)$ функций, удовлетворяющее условиям:

- (а) $\|T_\lambda(t)\|_p^p \leq \varphi_{p,\lambda}(t)$ для всех $p \in \mathfrak{P}, \lambda > 0$ и $t \geq 0$;
- (б) $\|\varphi_{p,\lambda}\| \leq \lambda^{-1} + \|\varphi_p\|$ для всех $p \in \mathfrak{P}$ и $\lambda > 0$;
- (в) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_{p,\lambda}(t) = \varphi_p(t)$ при каждом $p \in \mathfrak{P}$ почти для всех $t \geq 0$.

Доказательство. Для любых $p \in \mathfrak{P}, \lambda > 0$ и $t \geq 0$ положим

$$\varphi_{p,\lambda}(t) = e^{-\lambda t} \left(1 + \sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda^2 t)^{n+1}}{n!(n+1)!} \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} s^n \varphi_p(s) ds \right).$$

Непосредственно видно, что функции $\varphi_{p,\lambda}$ непрерывны и удовлетворяют условиям (а) и (б). По поводу свойства (в) достаточно лишь заметить, что $\varphi_{p,\lambda}$, с точностью до слагаемого $e^{-\lambda t}$, строится по φ_p так же, как в лемме 1 функция g_λ была построена по g . Лемма доказана.

Для каждого $\lambda > 0$ определим оператор $A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda) - \lambda$. Пусть также $c = b^2/4a$.

Лемма 3. Для всякого $\lambda > 0$ отображение $T_\lambda: [0, \infty) \rightarrow L(X)$ сильно дифференцируемо. Если $r(\lambda, t) = \frac{d}{dt} T_\lambda(t) - A_\lambda T_\lambda(t)$, то для всякой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ можно указать константу $M_0(p) \geq 0$ так, что для всех $t \in [0, c]$ и $x \in X$ будет справедлива оценка $p(r(\lambda, t)x) \leq M_0(p) \lambda^2 e^{-\lambda c} p_2(x)$.

Доказательство. Возможность почленного дифференцирования ряда, определяющего $T_\lambda(t)$, вместе с предложением 2.7 приводит к соотношению

$$\frac{d}{dt} T_\lambda(t) = A_\lambda T_\lambda(t) + \lambda^2 e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(-\lambda^2 t)^n}{n!n!} (R(\lambda) v^{(n)}(\lambda) - v(\lambda) R^{(n)}(\lambda)).$$

Таким образом, полагая $r_n(\lambda) = R(\lambda) v^{(n)}(\lambda) - R^{(n)}(\lambda) v(\lambda)$, можно представить $r(\lambda, t)$ в виде

$$r(\lambda, t) = \lambda^2 e^{-\lambda t} \sum_{n \geq 0} \frac{(-\lambda^2 t)^n}{n!n!} r_n(\lambda).$$

В силу имеющихся оценок на производные R и v , для каждого $x \in X$ имеем

$$p(r_n(\lambda)x) \leq e^{-\lambda b} \int_0^{\infty} e^{-\lambda s} (a^n \varphi_p(s) + s^n \varphi_{p_1}(s)) ds p_2(x)$$

и, следовательно,

$$p(r(\lambda, t)x) \leq \lambda^2 e^{-\lambda(t+b)} \int_0^\infty e^{-\lambda s} (e^{2\lambda\sqrt{at}} \varphi_p(s) + e^{\lambda(t+s)} \varphi_{p_1}(s)) ds p_2(x) \leq \\ \leq \lambda^2 (e^{-\lambda(t+b-2\sqrt{at})} \|\varphi_p\| + e^{-\lambda b} \|\varphi_{p_1}\|) p_2(x).$$

Так как $b > c$, а $t + b - 2\sqrt{at} \geq c$, если $0 \leq t \leq c$, то в качестве $M_0(p)$ можно взять $\|\varphi_p\| + \|\varphi_{p_1}\|$. Лемма доказана.

Лемма 4. Для полунормы $p \in \mathfrak{P}$ можно указать $M_1(p) \geq 0$ так, что для всех $\lambda > 0$, $t \in [0, c]$ и $x \in \text{dom } A$ будет выполняться оценка $p(T_\lambda(t)x) \leq M_1(p)(p_1(x) + p_1(Ax))$.

Доказательство. Пусть $x \in \text{dom } A$ и $\lambda > 0$. Исходя из равенства $R(\lambda)x = \lambda^{-1}x + \lambda^{-1}R(\lambda)Ax + \lambda^{-1}v(\lambda)x$, для любого $n \in \bar{\mathbb{N}}$ получаем

$$R^{(n)}(\lambda)x = \frac{(-1)^n n!}{\lambda^{n+1}} \left(x + \sum_{k=0}^n \frac{(-\lambda)^k}{k!} (R^{(k)}(\lambda)Ax + v^{(k)}(\lambda)x) \right).$$

Отсюда следует, что для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ справедлива оценка

$$p(R^{(n)}(\lambda)x) \leq \frac{n!}{\lambda^{n+1}} \left(p(x) + \|\varphi_p\| p_1(Ax) + e^{-\lambda b} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda a)^k}{k!} p_1(x) \right).$$

Теперь, если $t \geq 0$, воспользовавшись очевидным неравенством

$$\sum_{n \geq 0} \frac{(\lambda t)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda a)^k}{k!} \leq e^{\lambda(t+2\sqrt{at})},$$

легко приходим к оценке

$$p(T_\lambda(t)x) \leq p(x) + \|\varphi_p\| p_1(Ax) + e^{-\lambda(b-2\sqrt{at})} p_1(x).$$

Остается заметить, что $b - 2\sqrt{at} \geq 0$, когда $0 \leq t \leq c$, и в качестве $M_1(p)$ взять, например, $\max(2, \|\varphi_p\|)$. Лемма доказана.

Лемма 5. Для всякой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ существует константа $M_2(p) \geq 0$ такая, что

$$p(\text{com}(T_\lambda(t), R(\mu))x) \leq M_2(p) \lambda^2 e^{-\lambda c} p_2(x)$$

для всех $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $t \in [0, c]$ и $x \in X$.

Доказательство. Первое соотношение из предложения 2.2 и вытекающая из имеющихся оценок равностепенная непрерывность семейств $\{R^{(i)}(\lambda)\} (\lambda \in \Delta)$, где $i \geq 0$, а Δ — компакт в $(0, \infty)$, позволяют для каждого $n \in \bar{\mathbb{N}}$ записать равенство

$$\text{com}(R^{(n)}(\lambda), R(\mu)) = \sum_{k=0}^n C_n^k v^{(k)}(\lambda) R(\mu) R^{(n-k)}(\lambda) - \\ - \sum_{k=0}^n C_n^k R^{(n-k)}(\lambda) R(\mu) v^{(k)}(\lambda).$$

Отсюда для любых $p \in \mathfrak{P}$ и $x \in X$ непосредственно вытекает оценка

$$p(\text{com}(R^{(n)}(\lambda), R(\mu))x) \leq \\ \leq \|\varphi_{p_1}\| e^{-\lambda b} \int_0^\infty e^{-\lambda s} (a+s)^n (\varphi_{p_2}(s) + \varphi_p(s)) ds p_2(x).$$

Таким образом,

$$p(\text{com}(T_\lambda(t), R(\mu))x) \leq \\ \leq \|\varphi_{p_1}\| e^{-\lambda(t+b)} \lambda^2 t \int_0^\infty e^{-\lambda(s-2\sqrt{(a+s)t})} (\varphi_{p_2}(s) + \varphi_p(s)) ds p_2(x).$$

Так как $s - 2\sqrt{(a+s)t} \geq -2\sqrt{at}$ при всех $s_i \geq 0$, когда $0 \leq t \leq a$, то для $t \in [0, c] \subset [0, a]$ мы имеем $t + b + s - 2\sqrt{(a+s)t} \geq c$, $s \geq 0$. Теперь ясно, что в качестве $M_2(p)$ можно взять $c \|\Phi_{p_1}\| \|\Phi_{p_2} + \Phi_p\|$. Лемма доказана.

Теперь все подготовлено для доказательства сходимости операторов $T_\lambda(t)$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Точнее говоря, справедлива

Лемма 6. Для каждого $x \in \text{dom}(A^3)$ семейство $\{T_\lambda(t)x\}$ сходится при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно относительно $t \in [0, c]$.

Доказательство. Фиксируем $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $t \in [0, c]$ и запишем очевидные тождества

$$T_\lambda(t) - T_\mu(t) = \int_0^t \frac{d}{ds} (T_\lambda(s) T_\mu(t-s)) ds = \sum_{k=1}^6 I_k(\lambda, \mu, t),$$

где I_k — операторы, определяемые следующим образом:

$$I_1(\lambda, \mu, t) = -\lambda^2 \int_0^t \text{com}(T_\lambda(s), R(\lambda)) T_\mu(t-s) ds,$$

$$I_2(\lambda, \mu, t) = -\lambda^2 \int_0^t T_\lambda(s) \text{com}(T_\mu(t-s), R(\lambda)) ds,$$

$$I_3(\lambda, \mu, t) = \mu^2 \int_0^t T_\lambda(s) \text{com}(T_\mu(t-s), R(\mu)) ds,$$

$$I_4(\lambda, \mu, t) = \int_0^t r(\lambda, s) T_\mu(t-s) ds,$$

$$I_5(\lambda, \mu, t) = -\int_0^t T_\lambda(s) r(\mu, t-s) ds,$$

$$I_6(\lambda, \mu, t) = \int_0^t T_\lambda(s) T_\mu(t-s) ds (A_\lambda - A_\mu).$$

Вытекающие из лемм 2—5 оценки для каждого из этих шести слагаемых позволяют для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ указать такие числа $K_1(p)$, $K_2(p) \geq 0$, что

$$p(T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x) \leq K_1(p) (\lambda^4 e^{-\lambda c} + \lambda^2 \mu^2 e^{-\mu c} + \mu^4 e^{-\mu c}) p_4(x) + K_2(p) (p_2(A_\lambda x - A_\mu x) + p_2(A_\lambda A x - A_\mu A x))$$

для всех $\lambda, \mu \geq 1$ и $x \in \text{dom} A$. Учитывая симметричность левой части неравенства относительно λ и μ , мы можем в правой его части заменить $\lambda^2 \mu^2 e^{-\mu c}$ на максимальное из чисел $\lambda^4 e^{-\lambda c}$ и $\mu^4 e^{-\mu c}$. Кроме того, если $x \in \text{dom}(A^3)$, то имеющиеся в нашем распоряжении оценки на R позволяют воспользоваться предложением 2.3 как для точки x , так и для Ax , откуда $A_\lambda x \rightarrow Ax$ и $A_\lambda A x \rightarrow A^2 x$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Эти замечания и доказывают требуемое. Лемма доказана.

Итак, первая цель достигнута. Теперь предстоит изучить предельные операторы $\lim_{\lambda} T_\lambda(t)$, $0 \leq t \leq c$. Далее будет доказано, что они включаются в некоторую равномерно суммируемую полугруппу (лемма 9). Но прежде необходимо отметить два дополнительных свойства семейства $\{T_\lambda\}$.

Лемма 7. Для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ можно указать число $M_3(p) \geq 0$ так, что для любых $\lambda \geq 1$, $x \in X$ и всех $t, s \geq 0$, удовлетворяющих условию $s+t \leq c$, будет справедлива оценка $p(T_\lambda(t+s)x - T_\lambda(t)T_\lambda(s)x) \leq M_3(p) \lambda^4 e^{-\lambda c} p_4(x)$.

Доказательство. Замечая, что $T_\lambda(0) = \text{id}$ и $\text{com}(T_\lambda, A_\lambda) = \lambda^2 \text{com}(T_\lambda, R(\lambda))$, запишем равенства

$$\begin{aligned} T_\lambda(t+s) - T_\lambda(t)T_\lambda(s) &= \int_0^t \frac{d}{d\sigma} (T_\lambda(t-\sigma)T_\lambda(s+\sigma)) d\sigma = \\ &= \lambda^2 \int_0^t \text{com}(T_\lambda(t-\sigma), R(\lambda)) T_\lambda(s+\sigma) d\sigma - \\ &- \int_0^t r(\lambda, t-s) T_\lambda(s+\sigma) d\sigma + \int_0^t T_\lambda(t-\sigma) r(\lambda, s+\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Оценки, доставляемые леммами 2, 3 и 5, приводят теперь к нужному результату. Лемма доказана.

Лемма 8. Для любого $\varepsilon \in (0, c)$ семейство операторов $\{T_\lambda(t)\} (\lambda \geq 1, \varepsilon \leq t \leq c)$ равномерно непрерывно.

Доказательство. Пусть $p \in \mathfrak{P}$, $\lambda \geq 1$, $t \in [\varepsilon, c]$ и $x \in X$. Леммы 7, 2 и 1 приводят к соотношениям

$$\begin{aligned} t(p(T_\lambda(t)x))^{1/2} &= \int_0^t (p(T_\lambda(s+t-s)x))^{1/2} ds \leq \\ &\leq \int_0^t (p(T_\lambda(s)T_\lambda(t-s)x) + M_3(p)\lambda^4 e^{-\lambda c} p_4(x))^{1/2} ds \leq \\ &\leq \int_0^t (\varphi_{p,\lambda}(s)\varphi_{p_1,\lambda}(t-s)p_2(x) + M_3(p)\lambda^4 e^{-\lambda c} p_4(x))^{1/2} ds \leq \\ &\leq \left(\frac{\|\varphi_p\| + \|\varphi_{p_1}\|}{2} + 1 + \sqrt{M_3(p)\lambda^2 e^{-\lambda c/2}} \right) \sqrt{p_4(x)}. \end{aligned}$$

Отсюда и вытекает требуемое утверждение. Лемма доказана.

В дальнейшем нам потребуется условие секвенциальной плотности в X множества $\text{dom } A$.

Лемма 9. Существует (единственная) полугруппа T^* в X такая, что для всех $t \in [0, c]$ и $x \in X$ выполняется равенство $T(t)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_\lambda(t)x$.

Это предельное соотношение выполняется равномерно относительно $t \in [\varepsilon, c]$ при любом $\varepsilon \in (0, c)$. Если же $x \in \text{dom } A$, то указанное соотношение выполняется равномерно по $t \in [0, c]$. Далее, если $x \in \text{dom } A$, то $T(t)x \rightarrow x$ при $t \rightarrow +0$. Наконец, для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ почти при всех $t \in [0, c]$ и для всех $x \in X$ справедлива оценка $p(T(t)x) \leq \varphi_p(t)\bar{p}(x)$.

Доказательство. Пусть $t \in [0, c]$, $x \in \text{dom}(A^3)$, а $T_*(t)x$ означает предел при $\lambda \rightarrow \infty$ семейства $\{T_\lambda(t)x\}$, существующий в силу леммы 6. Из предыдущей леммы следует, что $T_*(t)$ — непрерывный оператор, определенный на множестве $\text{dom}(A^3)$, которое, как мы знаем из предложения 2.4, секвенциально плотно в X . Тем самым можно продолжить $T_*(t)$ до оператора из $L(X)$. Сохраним для этого продолжения то же обозначение. Пользуясь еще раз леммой 8, заключаем, что не только для x из $\text{dom}(A^3)$, но и для произвольного $x \in X$ при каждом $t \in [0, c]$ существует предел семейства $\{T_\lambda(t)x\}$ при $\lambda \rightarrow \infty$, совпадающий с $T_*(t)x$. При этом для любого $\varepsilon \in (0, c)$ предел равномерен по $t \in [\varepsilon, c]$. Так как отображения $T_\lambda(\cdot)x$ непрерывны на $[0, c]$, то отображение $T_*(\cdot)x$ будет непрерывным на $(0, c]$.

Пусть теперь $x \in \text{dom } A$. Лемма 4 утверждает, что семейство операторов $\{T_\lambda(t) | \text{dom } A\} (\lambda > 0, 0 \leq t \leq c)$ равномерно непрерывно в $L(\text{dom } A, X)$, где пространство $\text{dom } A$ снабжено топологией графика оператора A . Согласно предложению 2.6, множество $\text{dom}(A^3)$ секвенциально плотно в $\text{dom } A$ относительно этой топологии. Поэтому $T_\lambda(t)x \rightarrow T_*(t)x$

при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно по $t \in [0, c]$ не только для $x \in \text{dom}(A^3)$, что отмечено в лемме 6, но и для любого $x \in \text{dom} A$. В частности, сказанное означает, что отображение $T_*(\cdot)x$, как и $T_\lambda(\cdot)x$, $\lambda > 0$, непрерывно в нуле.

Далее, если $s \geq 0$, $t \geq 0$ и $s + t \leq c$, то леммы 7 и 8 гарантируют равенство $T_*(t + s) = T_*(t)T_*(s)$. Это позволяет распространить отображение T_* с $[0, c]$ на $[0, \infty)$ с сохранением необходимых свойств. В самом деле, выбрав для каждого $t \geq 0$ то единственное $n \in \bar{\mathbb{N}}$, для которого $nc \leq t < (n + 1)c$, положим $T(t) = T_*(t/(n + 1))^{n+1}$. Легко проверить, что полугрупповое свойство отображения T , сильная непрерывность и локальная эквинепрерывность переносятся с промежутка $(0, c]$ на полупрямую $(0, \infty)$. Таким образом, мы имеем отображение $T: (0, \infty) \rightarrow L(X)$, удовлетворяющее условиям (1) — (3) определения 3.1. Осталось доказать, что условия (4) и (5) также выполнены. Если $x \in \text{dom} A$, то, как уже отмечалось, $T(t)x = T_*(t)x \rightarrow x$ при $t \rightarrow +0$. Это значит, что $\text{Im} T$ секвенциально плотно в $\text{dom} A$, а значит, и в X . Пусть, наконец, точка $x \in X$ такова, что $T(t)x = 0$ для всех $t > 0$. Заметим, что из леммы 5 вытекает перестановочность операторов $T(t)$ и $R(\mu)$ для любых $t \in [0, c]$ и $\mu > 0$. Так как $\text{im}(R(\mu)) \subset \text{dom} A$, то

$$R(\mu)x = \lim_{t \rightarrow 0} T(t)R(\mu)x = \lim_{t \rightarrow 0} R(\mu)T(t)x = 0.$$

Отсюда $x + v(\mu)x = (\mu - A)R(\mu)x = 0$, где $v(\mu)x \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$, т. е. $x = 0$.

Итак, T — полугруппа в X . Указанные в лемме оценки, обеспечивающие равномерную суммируемость T , вытекают из леммы 2: если $p \in \mathfrak{F}$, то почти для всех $t \in [0, c]$ и для всех $x \in X$ имеют место соотношения

$$p(T(t)x) = p(T_*(t)x) \leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_{p,\lambda}(t) \bar{p}(x) = \varphi_p(t) \bar{p}(x).$$

Лемма доказана.

Теперь наша цель — описать связь между полугруппой T и оператором A . Это будет сделано в лемме 11, а пока нам необходимо установить один вспомогательный факт. Далее, как и в теореме 4.3, оператор A предполагается замкнутым.

Лемма 10. Пусть $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$. Положим

$$P_\alpha(\lambda) = \int_0^\alpha e^{-\lambda t} T(t) dt, \quad \eta_\alpha(\lambda) = -e^{-\lambda \alpha} T(\alpha).$$

Отображение P_α является квазирезольвентой оператора A , отображение η_α — ее остаток, а пара (α, α) — показатель убывания остатка.

Доказательство. Сначала покажем, что операторы A и $T(t)$, $t \geq 0$, перестановочны на $\text{dom} A$. Действительно, A коммутирует с $R^{(n)}(\mu)$ для любых $n \in \bar{\mathbb{N}}$ и $\mu > 0$. Поэтому он коммутирует и с каждым оператором $T_\mu(t)$, где $t \geq 0$, $\mu > 0$. Так как согласно лемме 9 $T_\mu(t) \rightarrow T(t)$ и $T_\mu(t)A \rightarrow T(t)A$ при $\mu \rightarrow \infty$ для каждого $t \in [0, c]$, то для таких t оператор A перестановочен с $T(t)$. Наконец, полугрупповое свойство T позволяет распространить установленное утверждение на все $t \geq 0$.

Пусть $x \in \text{dom}(A^2)$. Для любых $t, s \in (0, c]$ и $\mu > 0$ имеем

$$T_\mu(s)x - T_\mu(t)x = \int_t^s (T_\mu(\sigma)A_\mu x + r(\sigma, \mu)x) d\sigma.$$

Так как $A_\mu x \rightarrow Ax$ при $\mu \rightarrow \infty$, то, переходя (с помощью леммы 8) к пределу по $\mu \rightarrow \infty$ в последнем равенстве, получаем

$$T(s)x - T(t)x = \int_t^s T(\sigma)Ax d\sigma.$$

Полугрупповое свойство T и непрерывность $T(\cdot)Ax$ в нуле позволяют

распространить это соотношение на все $t, s \geq 0$. Отсюда следуют непрерывная дифференцируемость $T(\cdot)x$ на $[0, \infty)$ и равенство $T'(t)x = T(t)Ax, t \geq 0$.

Теперь легко доказывается утверждение леммы. Если $x \in \text{dom}(A^2)$, то

$$AP_\alpha(\lambda)x = P_\alpha(\lambda)Ax = \int_0^\alpha e^{-\lambda t} T'(t)x dt = e^{-\lambda\alpha} T(\alpha)x - x + \lambda P_\alpha(\lambda)x.$$

Согласно предложению 2.6, замыкание сужения A на $\text{dom}(A^2)$ совпадает с A . Поэтому равенство $P_\alpha(\lambda)Ax = \lambda P_\alpha(\lambda)x - x - \eta_\alpha(\lambda)x$ справедливо для всех $x \in \text{dom} A$. Аналогичное равенство для $AP_\alpha(\lambda)$ переносится с плотного в X множества $\text{dom}(A^2)$ на все пространство X . Утверждение, касающееся пары (α, α) , в обосновании не нуждается. Лемма доказана.

Лемма 11. *Оператор A является производящим оператором полугруппы T .*

Доказательство. Пусть B — производящий оператор полугруппы T . Отображение P_α является квазирезольвентой не только оператора A , но, как указано в предложении 4.2, и оператора B . При этом остаток P_α относительно A и B — один и тот же. Предложение 2.5 гарантирует в таком случае равенство $A = B$. Лемма доказана.

Можно сказать, что главная работа уже проделана. Нужно лишь уточнить интервал, на котором выполняются оценки на полугруппу, указанные в лемме 9.

Лемма 12. *Пусть $d = (\sqrt{a} - \sqrt{a-b})^2$. Для каждой полунормы $p \in \mathfrak{F}$ почти для всех $t \in [0, d]$ и для всех $x \in X$ справедлива оценка $p(T(t)x) \leq \varphi_p(t)\hat{p}(x)$.*

Доказательство. Для полунормы $p \in \mathfrak{F}$ подберем полунорму $\hat{p} \in \mathfrak{F}$ и неотрицательную интегрируемую на $(0, \infty)$ функцию ψ_p так, чтобы для всех $x \in X$ и $t \in [0, d]$ выполнялись оценки

$$p_1(T(d)x) \leq \hat{p}(x), \quad p_1(T(t)x) \leq \psi_p(t)\hat{p}(x).$$

Определяя теперь операторы $T_{d,\lambda}(t)$ по формуле

$$T_{d,\lambda}(t) = e^{-\lambda t} \left(\text{id} + \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n (\lambda^2 t)^{n+1}}{n!(n+1)!} P_d^{(n)}(\lambda) \right),$$

оценим разность $T_\lambda(t) - T_{d,\lambda}(t)$. Легко проверить, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} R^{(n)}(\lambda) - P_d^{(n)}(\lambda) &= \sum_{k=0}^n C_n^k (-d)^{n-k} e^{-\lambda d} R^{(k)}(\lambda) T(d) + \\ &+ \sum_{k=0}^n C_n^k v^{(n-k)}(\lambda) P_d^{(k)}(\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда для всех $p \in \mathfrak{F}, x \in X$ и $\lambda > 0$ получаем

$$\begin{aligned} p(R^{(n)}(\lambda)x - P_d^{(n)}(\lambda)x) &\leq e^{-\lambda d} \int_0^\infty e^{-\lambda s} (d+s)^n \varphi_p(s) ds \hat{p}(x) + \\ &+ e^{-\lambda b} \int_0^\infty e^{-\lambda s} (a+s)^n \psi_p(s) ds \hat{p}(x). \end{aligned}$$

Замечая, что при условии $0 \leq t \leq d (\leq a)$ для всех $s \geq 0$ имеют место неравенства $s - 2\sqrt{(d+s)t} \geq -2\sqrt{dt}$, $s - 2\sqrt{(a+s)t} \geq -2\sqrt{at}$, для $t \in [0, d]$ легко выводим оценку

$$\begin{aligned} p(T_\lambda(t)x - T_{d,\lambda}(t)x) &\leq \\ &\leq \lambda^{2t} (e^{-\lambda(t-2\sqrt{dt+d})} \| \varphi_p \| + e^{-\lambda(t-2\sqrt{at+b})} \| \psi_p \|) \hat{p}(x). \end{aligned}$$

Итак, если $0 \leq t < d$, то $T_\lambda(t)x - T_{d,\lambda}(t)x \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$. Теперь можно сделать окончательные выводы. Пусть $p \in \mathfrak{P}$ и $x' \in X'$, причем $|x'| \leq p$. По лемме 1 для всякого $t \in [0, d)$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle T_{d,\lambda}(t)x, x' \rangle = \langle T(t)x, x' \rangle.$$

Следовательно, если t — точка, для которой $\varphi_{p,\lambda}(t) \rightarrow \varphi_p(t)$ при $\lambda \rightarrow \infty$, то

$$\begin{aligned} p(T(t)x) &= \sup_{|x'| \leq p} \langle T(t)x, x' \rangle = \sup_{|x'| \leq p} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \langle T_\lambda(t)x, x' \rangle \leq \\ &\leq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \varphi_{p,\lambda}(t) \bar{p}(x) = \varphi_p(t) \bar{p}(x). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Полезно отметить, что можно было бы установить и сходимость операторов $T_\lambda(t)$ к $T(t)$ для всех $t \in [0, d)$. Как видно из доказательства последней леммы, для этого достаточно распространить лемму 1 на отображения со значениями в локально выпуклом пространстве.

Для завершения доказательства теоремы 4.3 нам остается обсудить случай произвольного $\omega < \infty$.

Доказательство теоремы 4.3. Пусть $\tilde{\omega} < 0$. Рассмотрим операторы

$$\tilde{A} = (\tilde{\omega} - \omega) \text{id} + A, \quad \tilde{R}(\lambda) = R(\lambda + \omega - \tilde{\omega}), \quad \tilde{\nu}(\lambda) = \nu(\lambda + \omega - \tilde{\omega}),$$

где $\lambda > \tilde{\omega}$. Положим также

$$\tilde{\varphi}_p(t) = e^{(\tilde{\omega} - \omega)t} \varphi_p(t), \quad p \in \mathfrak{P}, \quad t > 0.$$

Тогда $\tilde{R}$ — квазирезольвента оператора $\tilde{A}$ с остатком $\tilde{\nu}$, определенная в $(\tilde{\omega}, \infty) \supset (0, \infty)$. Показатель остатка $\tilde{\nu}$ тот же, что и у ν , т. е. пара (a, b) . Функции $\tilde{\varphi}_p$ оказываются уже интегрируемыми на $(0, \infty)$, причем

$$p(\tilde{R}^{(n)}(\lambda)x) \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n \tilde{\varphi}_p(t) dt \bar{p}(x)$$

для всех $p \in \mathfrak{P}$, $n \in \bar{\mathbb{N}}$, $\lambda > \tilde{\omega}$ и $x \in X$. Таким образом, по доказанному, оператор $\tilde{A}$ порождает полугруппу $\tilde{T}$ такую, что для всякой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ почти всюду на $(0, d)$ выполняется оценка $\|\tilde{T}(\cdot)\|_p^{\bar{p}} \leq \tilde{\varphi}_p$. В таком случае операторы $T(t) = e^{(\omega - \tilde{\omega})t} \tilde{T}(t)$, $t \geq 0$, составляют, очевидно, полугруппу, порождаемую оператором A и удовлетворяющую нужным оценкам. Теорема 4.3 полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов В. В. Резольвентная последовательность в вопросах порождения суммируемых полугрупп операторов.— Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 2, с. 282—285.
2. Ouchi S. Semi-groups of operators in locally convex spaces.— J. Math. Soc. Japan, 1973, v. 25, N 2, p. 265—276.
3. Иванов В. В. Возмущение равномерно суммируемых полугрупп операторов.— Докл. АН СССР, 1980, т. 250, № 2, с. 269—273.
4. Хилле Э., Филлипс П. Функциональный анализ и полугруппы.— М.: ИЛ, 1962.— 829 с.
5. Забрыйко П. П., Зафиевский А. В. Об одном классе полугрупп.— Докл. АН СССР, 1969, т. 189, № 5, с. 934—937.