

РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА
И МАЖОРИРОВАННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Понятие решеточно нормированного пространства является естественным синтезом идеи числовой нормы и векторного порядка и возникло после построения теорий нормированных пространств и векторных решеток. В настоящее время в математической литературе встречаются многочисленные и разнообразные примеры решеточно нормированных пространств, которые без дополнительных и часто весьма искусственных ограничений не сводятся ни к нормированным пространствам, ни к векторным решеткам. Векторные нормы находят применения в геометрии векторных пространств, выпуклом анализе, теории операторов, итерационных методах и т. п. В то же время общие структурные свойства решеточно нормированных пространств и связанных с ними мажорированных операторов исследованы совершенно недостаточно. Цель настоящей статьи — восполнить в какой-то мере указанный пробел.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Решеточно нормированные пространства и мажорированные операторы впервые появились в работе Л. В. Канторовича [1], в которой они применялись для описания общего метода мажорант в теории функциональных уравнений (см. также [2]). Основную мысль, заложенную в этой статье, можно, допуская определенную вольность, выразить так. Если поведение изучаемого оператора удалось проконтролировать посредством некоторого положительного оператора, называемого мажорантой, то свойства последнего существенно сказываются на свойствах исходного оператора. Таким образом, операторы, имеющие «хорошие» мажоранты, должны обладать «хорошими» свойствами. В последующие годы эта идея породила много конкретных примеров мажорации, но сама она не подвергалась сколько-нибудь глубокому анализу. Прежде чем переходить к абстрактному изложению, рассмотрим основные понятия решеточно нормированного пространства и мажорированного оператора на простых иллюстрирующих примерах.

1.1. Рассмотрим пространство с мерой (Q, Σ, μ) и банахово пространство X . Простоты ради будем считать все встречающиеся ниже меры конечными. Обозначим через $S(\mu, X) := S(Q, \Sigma, \mu, X)$ пространство всех сильно μ -измеримых вектор-функций $z: Q \rightarrow X$. Эквивалентные вектор-функции, как обычно, отождествляются. С каждым элементом $z \in S(\mu, X)$ свяжем измеримую функцию $p(z) \in S(\mu) := S(\mu, R)$ по формуле $p(z): t \rightarrow \|z(t)\|$, $t \in Q$. Пусть E — идеальное пространство, содержащееся в $S(\mu)$. Это означает, что E — подпространство $S(\mu)$ и

$$f \in S(\mu) \& g \in E \& |f| \leq g \Rightarrow f \in E.$$

Здесь $|f| \leq g$ обозначает, что $|f(t)| \leq g(t)$ для почти всех $t \in Q$. Положим по определению $E(X) := \{z \in S(\mu, X): p(z) \in E\}$. Для ограничения p на $E(X)$ сохраним то же обозначение. Очевидно, что оператор $p: E(X) \rightarrow E$ обладает следующими свойствами:

- 1) $p(z) \geq 0$, причем $p(z) = 0$ в том и только том случае, если $z = 0$;
- 2) $p(\lambda z) = |\lambda| p(z)$, $\lambda \in R$;
- 3) $p(z + u) \leq p(z) + p(u)$.

Итак, p — это E -значная норма на $E(X)$, а $(E(X), p)$ — решеточно нормированное пространство. (Заметим, что E — векторная решетка.) Более того, пространство $E(X)$ полно в следующем смысле. Если последовательность $(z_n) \subset E(X)$ такова, что $\lim_{n, m \rightarrow \infty} p(z_n - z_m) = 0$ почти всюду, то существует вектор-функция $z \in E(X)$, для которой почти всюду будет $\lim_{n \rightarrow \infty} p(z_n - z)(t) = 0$.

1.2. Можно попытаться заменить векторную норму p семейством числовых норм $l \circ p$, где l — положительный функционал на E . Однако единственным таким функционалом может оказаться $l = 0$ (как, например, в случае $E = S(\mu)$, где μ — безатомна). С другой стороны, если E — банахова решетка, то можно определить на $E(X)$ смешанную норму $\|z\| := \|p(z)\|$, $z \in E(X)$. Можно показать, что при этом $E(X)$ становится банаховым пространством. Понятно, что геометрия и топология банахова пространства $(E(X), \|\cdot\|)$ существенно должны зависеть от векторной нормы p . Отметим также, что при $E := L_s(\mu)$, $1 \leq s \leq \infty$, в качестве $E(X)$ получаем банахово пространство $L_s(\mu, X)$.

1.3. С каждым измеримым подмножеством $A \subset Q$ свяжем линейные проекторы $\pi(A)$ и $\rho(A)$ в пространствах E и $E(X)$ соответственно: $\pi(A)e$ (соотв. $\rho(A)z$) есть произведение функции $e \in E$ (соотв. вектор-функции $z \in E(X)$) на характеристическую функцию множества A . Пусть $\mathfrak{P}(E)$ — множество проекторов вида $\pi(A)$, а $\mathfrak{P}(E(X))$ — множество проекторов вида $\rho(A)$, $A \in \Sigma$. Тогда $\mathfrak{P}(E)$ и $\mathfrak{P}(E(X))$ — полные булевы алгебры, и существует булев изоморфизм h из $\mathfrak{P}(E)$ на $\mathfrak{P}(E(X))$ такой, что $\pi p(z) = p(h(\pi)z)$ при всех $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ и $z \in E(X)$. В частности, из представления $p(z) = \pi(A)e + \pi(B)e$, где $A \cap B = \emptyset$ и $A \cup B = Q$, вытекает, что для $z_1 := \rho(A)z$ и $z_2 := \rho(B)z$ выполняется $z = z_1 + z_2$, $p(z_1) = \pi(A)e$ и $p(z_2) = \pi(B)e$. Иными словами, норма p удовлетворяет условию разложимости Л. В. Канторовича [1, 2]. Более того, если (A_n) — последовательность непересекающихся измеримых подмножеств Q , причем $\bigcup (A_n) = Q$, а (z_n) — такая последовательность в $E(X)$, что $(p(z_n))$ ограничена в E , то вектор-функция $z: Q \rightarrow X$, совпадающая с z_n на A_n при всех n , входит в $E(X)$ и $\pi(A_n)p(z - z_n) = 0$, $n \in N$. Последнее свойство называется *дизъюнктивной полнотой* $E(X)$.

Наличие полной булевой алгебры проекторов — очень важное свойство пространства $E(X)$. Этим свойством обладает произвольное решеточно нормированное пространство, если только норма удовлетворяет указанному выше условию разложимости (см. § 3).

1.4. Пусть $E := L_1(\mu)$. В качестве $E(X)$ в этом случае получается пространство интегрируемых по Бохнеру вектор-функций $L_1(\mu, X)$. Напомним, что для каждого $f \in L_1(\mu, X)$ выполняется

$$\left\| \int_Q f(t) d\mu(t) \right\| \leq \int_Q \|f(t)\| d\mu(t).$$

Если $T: L_1(\mu, X) \rightarrow X$ — интеграл Бохнера, а $U: L_1(\mu) \rightarrow R$ — интеграл Лебега, то указанное неравенство можно переписать в виде $\|Tf\| \leq U(p(f))$ ($f \in L_1(\mu, X)$).

1.5. Пусть теперь (Q, Σ, μ) — произведение пространств с мерой $(A, \mathcal{A}, \nu)$ и $(B, \mathcal{B}, \lambda)$, а E и F — идеальные пространства, содержащиеся в $S(\nu)$ и $S(\lambda)$ соответственно. Возьмем банаховы пространства X и Y и рассмотрим вектор-функцию $K: Q \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$, где $\mathcal{L}(X, Y)$ — пространство всех ограниченных операторов из X в Y . Допустим, что для любых $x \in X$ и $y' \in Y'$ функция $\langle Kx, y' \rangle: (s, t) \rightarrow \langle K(s, t)x, y' \rangle$ измерима. Пусть, сверх того, в $S(\mu)$ существует супремум

$$|K| := \sup \{ \langle Kx, y' \rangle : \|x\| \leq 1, \|y'\| \leq 1 \},$$

причем интегральный оператор U с ядром $|K|$ действует из E в F . Предположим теперь, что линейный оператор $T: E(X) \rightarrow F(Y)$ таков, что

$$\langle Tf(s), y' \rangle = \int_A \langle K(s, t)f(t), y' \rangle d\nu(t).$$

Пусть q — векторная норма пространства $F(Y)$ (т. е. $q(v): t \rightarrow \|v(t)\|$, $t \in B$). Нетрудно показать, что оператор T удовлетворяет оценке

$$\|Tf(s)\| \leq \int |K|(s, t) \|f(t)\| d\nu(t).$$

Используя введенные обозначения, перепишем опять неравенство в компактной форме:

$$q(Tf) \leq U(p(f)) \quad (f \in E(X)).$$

1.6. Возьмем положительный o -непрерывный оператор $U_0: E \rightarrow F$ и ограниченный оператор $V: X \rightarrow Y$. На множестве Z вектор-функций вида $f(t) := \sum \varphi_i(t) x_i$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E$ и $x_1, \dots, x_n \in X$, определим оператор T равенством

$$Tf(s) := \sum_{i=1}^n V(x_i) U_0(\varphi_i)(s) \quad (S \in B).$$

Можно показать, что Z — плотное (в смысле векторной нормы p) подпространство в $F(Y)$, а T — линейный оператор из Z в $F(Y)$, удовлетворяющий неравенству $q(Tf) \leq \|V\| U_0(p(f))$, $f \in Z$. Далее, оператор T можно продолжить единственным способом на все $E(X)$ с сохранением указанного неравенства. Итак, существует один и только один оператор $T: E(X) \rightarrow F(Y)$, удовлетворяющий условиям

$$T(\varphi(\cdot)x) = V(x) U_0(\varphi) \quad (\varphi \in E, x \in X),$$

$$q(Tf) \leq U(p(f)) \quad (f \in E(X)),$$

где $U := \|V\| \cdot U_0$.

1.7. В ситуациях примеров 1.4—1.6 говорят, что T — мажорированный оператор, причем U служит мажорантой для T . Понятно, что мажорированный оператор может и не быть ограниченным в смысле теории банаховых пространств, даже если $E(X)$ и $F(Y)$ — банаховы.

Среди всех мажорант U оператора T существует наименьший, обозначаемый $|T|$. В примерах 1.4—1.6 $|T| = U$. Возникает множество естественных вопросов относительно мажорированных операторов. Как вычислять наименьшие мажоранты? Имеется ли в пространстве мажорированных операторов достаточно много проекторов? Является ли оно дизъюнктивно полным? Какими свойствами характеризуются операторы, имеющие мажоранты специального вида: o -непрерывные, интегральные, операторы Магарам, решеточные гомоморфизмы и т. д.? Что можно сказать об аналитическом представлении мажорированных операторов? Некоторые из этих вопросов решаются в следующих параграфах.

§ 2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ О СТРОЕНИИ КОМПОНЕНТЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Одной из наиболее старых и трудных задач теории упорядоченных векторных пространств является описание структуры пространства регулярных операторов в векторных решетках. В течение нескольких десятилетий эта проблематика привлекает внимание многих авторов (см., например, [2, 3, 4]). Многие структурные свойства векторной решетки определяются ее базой — полной булевой алгеброй дизъюнктивных компонент. Для пространства регулярных операторов эта база имеет, как правило, сложное строение и представляет предмет самостоятельного изучения [5]. Классическим здесь является следующий результат.

А. Теорема (А. Г. Пинскер [2]). *Для того, чтобы положительные порядково непрерывные функционалы, заданные на K -пространстве, были дизъюнктивны, необходимо и достаточно, чтобы были дизъюнктивны их компоненты существенной положительности.*

Из этого факта можно получить полное описание пространства порядково непрерывных функционалов [2, 6, 7]. Аналогичные результаты имеют место для одного класса операторов. Именно, говорят, что T является оператором Магарам, если T положителен, порядково непрерывен и $T[0, x] = [0, Tx]$ для любого $x \geq 0$.

В. Теорема (W. A. J. Luxemburg, A. R. Schep [8]). *Пусть $T: E \rightarrow F$ — оператор Магарам, действующий в K -пространствах. Тогда для любого линейного оператора $S: E \rightarrow F$ из неравенства $0 \leq S \leq T$ вытекает суще-*

ствование положительного ортоморфизма $\pi: E \rightarrow F$ такого, что $0 \leq \pi \leq I_E$ и $S = T \circ \pi$.

Отсюда нетрудно усмотреть, что база $\{T\}^{ad}$ изоморфна базе компоненты существенной положительности оператора T [9]. Ситуации, рассмотренные в A и B , помимо внешней схожести имеют глубокую внутреннюю связь. Дело в том, что всякий оператор Магарам представляет собой интерпретацию порядково непрерывного функционала в подходящей булевозначной модели теории множеств [9]. Уже для пространства регулярных функционалов дело значительно усложняется по сравнению с A и B (см., например, [6]).

В недавнее время было достигнуто существенное продвижение в описании базы главных компонент пространства регулярных операторов. Для формулировки этого результата необходимы некоторые определения. Пусть E и F — произвольные K -пространства. Для произвольного положительного оператора $T: E \rightarrow F$ через $\mathcal{B}_T$ обозначим базу K -пространства $\{T\}^{ad}$, т. е.

$$\mathcal{B}_T = \{S \in \mathcal{L}_r(E, F): 0 \leq S \leq T, (T - S) \wedge S = 0\}.$$

В дальнейшем оператор проектирования в K -пространстве на произвольную компоненту будем называть *порядковым проектором*. Следуя терминологии [10], каждый элемент базы $\mathcal{B}_T$ вида $\bigcup_{i=1}^n \pi_i T \delta_i$, где π_i, δ_i — порядковые проекторы в F и E соответственно, будем называть *простым*. Множество всех простых элементов базы $\mathcal{B}_T$ обозначим через A_T . Как нетрудно видеть (см., например, [8, 12, 13]), если T является порядково непрерывным решеточным гомоморфизмом, или оператором Магарам, то $\mathcal{B}_T = A_T$. В общем же случае база $\mathcal{B}_T$ устроена сложнее.

Для произвольного множества $D \subset \mathcal{B}_T$ положим $D^\dagger = \{e \in \mathcal{B}_T: \text{существует последовательность } (e_n) \subset D \text{ такая, что } e_n \uparrow e\}$, $D^\downarrow = \{e \in \mathcal{B}_T: \text{существует направление } (e_\alpha) \subset D \text{ такое, что } e_\alpha \downarrow e\}$. Аналогично определяются $D^\downarrow$ и $D^\dagger$. Ясно, что если D — подрешетка в $\mathcal{B}_T$, т. е. замкнута относительно конечных супремумов и инфимумов, то этим же свойством обладают $D^\dagger, D^\downarrow, D^\downarrow, D^\dagger$.

С. Теорема (B. de Pagter [10], C. D. Aliprantis, O. Burkinshaw [11]). Пусть E — векторная решетка с проекциями на главные компоненты и F — K -пространство с достаточным числом порядково непрерывных функционалов. Тогда для любого положительного оператора $T: E \rightarrow F$ справедливо представление $\mathcal{B}_T = A_T^{\downarrow \uparrow}$.

Наша цель — получить аналогичное описание в случае произвольного F . Схема доказательства в основном заимствована (с необходимыми модификациями) из [11]. При этом используемая нами техника кусочно равномерной аппроксимации точных границ в K -пространстве позволяет снять предположение о наличии порядково непрерывных функционалов. Ограничимся рассмотрением наиболее важного случая K -пространств, хотя можно было бы изложить все, как и в С, для векторной решетки E с проекциями на главные компоненты.

Результаты текущего параграфа используются в дальнейшем для решения некоторых вопросов теории мажорированных операторов. Ради простоты формулировок и доказательств предполагаем на протяжении этого параграфа существование фильтра $\mathcal{B}_F$ слабых порядковых единиц в F . Это предположение ни в коей степени не ограничивает общности результатов, так как любое K -пространство можно разбить на компоненты с единицами.

2.1. Предложение. Пусть E — произвольное K -пространство, F — K -пространство с единичным фильтром $\mathcal{B}_F$ и $S, T: E \rightarrow F$ — положительные операторы. Если $S \wedge T = 0$, то для произвольных фиксированных $x \in E_+, \varepsilon > 0, 1 \in \mathcal{B}_F$ существует полное семейство $(\pi_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ попарно дизъюнктивных порядковых проекторов в F и семейство $(\sigma_\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbb{R}}$ порядковых

проекторов в E такие, что $\pi_\xi T \sigma_\xi x \leq \varepsilon 1$ и $\pi_\xi (S - \pi_\xi S \sigma_\xi) x \leq \varepsilon 1$ для каждого $\xi \in \Xi$.

◁ Из соотношения (см. [14])

$$0 = (T \wedge S) x = \inf \{T x_1 + S x_2 : x_1 + x_2 = x; x_1, x_2 \geq 0; x_1 \wedge x_2 = 0\}$$

следует существование полного семейства $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктивных порядковых проекторов в F и семейства $(x_\xi^1 + x_\xi^2 = x)_{\xi \in \Xi}$ разбиений элемента x ($x_\xi^1 \wedge x_\xi^2 = 0$ для каждого $\xi \in \Xi$) таких, что $\pi_\xi T x_\xi^1 + \pi_\xi S x_\xi^2 \leq \varepsilon 1$. Через σ_ξ ($\xi \in \Xi$) обозначим оператор проектирования в E на компоненту $\{x_\xi^1\}^{dd}$. Тогда $\pi_\xi T \sigma_\xi x = \pi_\xi T x_\xi^1 \leq \varepsilon 1$ и $\pi_\xi (S - \pi_\xi S \sigma_\xi) x = \pi_\xi S (x - \delta_\xi x) = \pi_\xi S x_\xi^2 \leq \varepsilon 1$ ($\xi \in \Xi$). ▷

Следующее утверждение показывает, что каждый элемент булевой алгебры $\mathcal{B}_T$ может быть аппроксимирован в некотором смысле элементами A_T .

2.2. Предложение. Пусть E — произвольное K -пространство, F — K -пространство с единичным фильтром $\mathfrak{B}_F$ и $T: E \rightarrow F$ — положительный оператор. Если $S \in \mathcal{B}_T$, то для произвольных фиксированных $x \in E_+$, $\varepsilon > 0$, $1 \in \mathfrak{B}_F$ существуют полное семейство $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктивных порядковых проекторов в E и семейство $(\sigma_\xi)_{\xi \in \Xi}$ порядковых проекторов в E такие, что $\pi_\xi |S - \pi_\xi T \sigma_\xi| x \leq \varepsilon 1$ для каждого $\xi \in \Xi$.

◁ Применим предыдущее предложение для операторов $T - S$, S и порядковой единицы $\frac{1}{2} \varepsilon 1 \in \mathfrak{B}_F$. Требуемое теперь следует из неравенства

$$\begin{aligned} \pi_\xi |S - \pi_\xi T \sigma_\xi| x &\leq \pi_\xi |S - \pi_\xi S \sigma_\xi| x + \pi_\xi |\pi_\xi S \sigma_\xi - \pi_\xi T \sigma_\xi| x = \\ &= \pi_\xi (S - \pi_\xi S \sigma_\xi) x + \pi_\xi (T - S) \sigma_\xi x. \end{aligned} \quad \triangleright$$

Теперь покажем возможность аппроксимации произвольного элемента $S \in \mathcal{B}_T$ элементами множеств $A_T^\uparrow$ и $A_T^{\uparrow \downarrow}$.

2.3. Предложение. Пусть E, F — такие же, как в 2.2, $T: E \rightarrow F$ — положительный оператор и $S \in \mathcal{B}_T$. Тогда

(а) для произвольных $x \in E_+$, $\varepsilon > 0$, $1 \in \mathfrak{B}_F$ существует $B \in A_T^\uparrow$ такой, что $|S - B| x \leq \varepsilon 1$;

(б) для произвольного $x \in E_+$ существует $R \in A_T^{\uparrow \downarrow}$ такой, что $|S - R| x = 0$;

◁ (а) По предыдущему предложению существуют полное семейство $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктивных порядковых проекторов в F и семейство $(\sigma_\xi)_{\xi \in \Xi}$ порядковых проекторов в E такие, что $\pi_\xi |S - \pi_\xi T \sigma_\xi| x \leq \varepsilon 1$ для всех $\xi \in \Xi$. Множество Θ всех конечных подмножеств Ξ считаем упорядоченным по включению. Для каждого $\theta \in \Theta$ положим $B_\theta = \sum_{\xi \in \theta} \pi_\xi T \sigma_\xi$.

Направление $(B_\theta)_{\theta \in \Theta}$ возрастает. Пусть $B = \sup B_\theta$. Тогда $B \in A_T^\uparrow$ и

$$\pi_\xi |S - B_\theta| x = \pi_\xi \left| S - \sum_{\xi \in \theta} \pi_\xi T \sigma_\xi \right| x \leq \varepsilon 1$$

для каждого $\xi \in \Xi$ и всех $\theta \geq \{\xi\}$. Поэтому $\pi_\xi |S - B| x \leq \varepsilon 1$ для всех $\xi \in \Xi$ и, стало быть, $|S - B| x \leq \varepsilon 1$.

(б) Зафиксируем $1 \in \mathfrak{B}_F$. Для $\varepsilon_n = 2^{-n}$ существует $B_n \in A_T^\uparrow$ такой, что $|S - B_n| x \leq 2^{-n} 1$. Положим $C_k = \bigcup_{n=k}^\infty B_n$ и $D_{k,i} = \bigcup_{n=k}^{k+i} B_n$. Поскольку $A_T^\uparrow$ — подалгебра $\mathcal{B}_T$, то $D_{k,i} \in A_T^\uparrow$ и, следовательно, $D_{k,i} \uparrow C_k \in A_T^{\uparrow \downarrow} = A_T^\uparrow$. Далее,

$$\begin{aligned} |S - D_{k,i}| x &= \left| S - \bigcup_{n=k}^{k+i} B_n \right| x = \left| \bigcup_{n=k}^{k+i} (B_n - S) \right| x \leq \\ &\leq \sum_{n=k}^{k+i} |B_n - S| x \leq \sum_{n=k}^\infty 2^{-n} 1 < 2^{-k+1} 1 \end{aligned}$$

и $|S - C_k| x \leq 2^{-k+1} 1$. Последовательность (C_k) убывает. Положим $R = \inf \{C_k\}$. Тогда $R \in A_T^{\uparrow \downarrow}$ и $|S - R| x = 0$. ▷

2.4. Следствие. Пусть E, F — K -пространства со слабыми порядковыми единицами и $T: E \rightarrow F$ — положительный порядково непрерывный оператор.

(а) Тогда $\mathfrak{B}_T = A_T^{\uparrow\downarrow}$.

(б) (B. de Pagter [10]) Если, кроме того, F является K -пространством с существенно положительным порядково непрерывным функционалом, то $\mathfrak{B}_T = A_T^{\uparrow\downarrow}$.

2.5. На основании предложения 2.3, дословно повторяя доказательство соответствующего утверждения из [11], устанавливается следующий факт.

Теорема. Пусть E — произвольное K -пространство, F — K -пространство с единичным фильтром и $T: E \rightarrow F$ — положительный оператор. Тогда $\mathfrak{B}_T = A_T^{\uparrow\downarrow}$.

2.6. Пусть $S, T: E \rightarrow F$ — произвольные положительные операторы. Ниже мы приводим критерий принадлежности оператора T компоненте $\{S\}^{dd}$. Опять же для простоты формулировки и доказательства мы предполагаем существование единичного фильтра $\mathfrak{B}_F$ K -пространства F .

Теорема. Если E — произвольное K -пространство, F — K -пространство с единичным фильтром $\mathfrak{B}_F$ и $S, T: E \rightarrow F$ — положительные операторы, то следующие утверждения эквивалентны:

(а) $T \in \{S\}^{dd}$;

(б) для каждого $x \in E_+$ и каждой слабой порядковой единицы $1 \in \mathfrak{B}_F$ существует слабая порядковая единица $\bar{1} \in \mathfrak{B}_F$ такая, что для произвольного порядкового проектора σ в E и произвольного порядкового проектора π в F неравенство $\pi S \sigma x \in \bar{1}$ влечет неравенство $\pi T \sigma x \leq 1$.

$\triangleleft$ (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть $T \in \{S\}^{dd}$, $x \in E_+$ и $1 \in \mathfrak{B}_F$. Последовательность $e_k = (T \wedge kS)x$ возрастает и $e_k = (T \wedge kS)x \uparrow Tx$. Поэтому существует полное семейство $(\pi_\xi)_{\xi \in \mathbb{E}}$ попарно дизъюнктивных порядковых проекторов в F такое, что $\pi_\xi (T - T \wedge kS)x \leq \frac{1}{2} 1$ для каждого $\xi \in \mathbb{E}$ и всех $k \geq k_\xi$.

Положим $\bar{1} = 0 - \sum \frac{1}{2k_\xi} \pi_\xi 1$. Тогда $\bar{1} \in \mathfrak{B}_F$ и $\bar{1} \leq 1$. Если $\pi S \sigma x \leq \bar{1}$, то для каждого $\xi \in \mathbb{E}$ выполняется неравенство

$$k_\xi \pi_\xi \pi S \sigma x \leq k_\xi \pi_\xi \bar{1} = \frac{1}{2} \pi_\xi 1.$$

Учитывая соотношение

$$\begin{aligned} \pi_\xi \pi T \sigma &= \pi_\xi \pi (T - T \wedge kS) \sigma + \pi_\xi \pi (T \wedge kS) \sigma \leq \\ &\leq \pi_\xi (T - T \wedge kS) + k \pi S \sigma \quad (\xi \in \mathbb{E}), \end{aligned}$$

получаем, что неравенство $\pi S \sigma x \leq \bar{1}$ влечет неравенство

$$\pi_\xi \pi T \sigma x \leq \pi_\xi (T - T \wedge k_\xi S)x + k_\xi \pi_\xi \pi S \sigma x \leq \frac{1}{2} \pi_\xi 1 + \frac{1}{2} \pi_\xi 1 = \pi_\xi 1$$

для каждого $\xi \in \mathbb{E}$, т. е. $\pi T \sigma x \leq 1$.

(б) $\Rightarrow$ (а). Зафиксируем $x \in E_+$ и $1 \in \mathfrak{B}_F$. Оператор T представляется в виде суммы $T = T_1 + T_2$, где $T_1 \in \{S\}^{dd}$ и $T_2 \wedge S = 0$. Покажем, что $T_2 = 0$. Без ограничения общности можно считать, что $\bar{1} \leq 1$. По предложению 2.1 существуют полное семейство $(\pi_\xi)_{\xi \in \mathbb{E}}$ попарно дизъюнктивных порядковых проекторов в F и семейство $(\sigma_\xi)_{\xi \in \mathbb{E}}$ порядковых проекторов в E такие, что

$$\pi_\xi S \sigma_\xi x \leq \bar{1}, \quad \pi_\xi (T_2 - \pi_\xi T_2 \sigma_\xi)x \leq \bar{1} \quad (\xi \in \mathbb{E}).$$

Тогда для каждого $\xi \in \mathbb{E}$ справедливо неравенство $\pi_\xi T_2 \sigma_\xi x \leq \pi_\xi T \sigma_\xi x \leq 1$ и потому

$$\pi_\xi T_2 x = \pi_\xi T_2 \sigma_\xi x + \pi_\xi (T_2 - \pi_\xi T_2 \sigma_\xi)x \leq 1 + 1 = 21.$$

Неравенство $T_2 x \leq 21$, справедливое для любого $x \in E_+$ и каждой слабой порядковой единицы $1 \in \mathfrak{B}_F$, показывает, что $T_2 = 0$. $\triangleright$

2.7. Через $\mathfrak{B}(E)$ обозначим базу K -пространства E , которую отождествим с полной булевой алгеброй порядковых проекторов в E . В следующем утверждении описывается оператор проектирования на произвольную главную компоненту пространства регулярных операторов.

Теорема. Пусть E — произвольное K -пространство, F — K -пространство с единичным фильтром $\mathfrak{B}_F$, $S, T: E \rightarrow F$ — положительные операторы, R — проекция оператора T на компоненту $\{S\}^{ad}$. Тогда для каждого $x \in E_+$ справедливо соотношение

$$Rx = \sup_{1 \in \mathfrak{B}_F} \inf \{ (T - \pi T \sigma)x : \pi \in \mathfrak{B}(F), \sigma \in \mathfrak{B}(E), \pi S \sigma x \leq 1 \}.$$

◁ Зафиксируем $x \in E_+$. Операторы S и $T - R$ дизъюнкты. Поэтому для каждой слабой порядковой единицы $1 \in \mathfrak{B}_F$ существуют полное семейство $(\sigma_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктивных порядковых проекторов в F и семейство $(\sigma_\xi)_{\xi \in \Xi}$ порядковых проекторов в E такие, что $\pi_\xi S \sigma_\xi x \leq 1$ и $\pi_\xi ((T - R) - \pi_\xi (T - R) \sigma_\xi)x \leq 1$ для любого $\xi \in \Xi$ (предложение 2.1). Отсюда

$$\begin{aligned} \inf \{ (T - \pi T \sigma)x : \pi \in \mathfrak{B}(F), \sigma \in \mathfrak{B}(E), \pi S \sigma x \leq 1 \} &\leq (T - \pi_\xi T \sigma_\xi)x = \\ &= (T - R + R - \pi_\xi (T - R) \sigma_\xi - \pi_\xi R \sigma_\xi)x = ((T - R) - \pi_\xi (T - R) \sigma_\xi)x + \\ &\quad + Rx - \pi_\xi R \sigma_\xi x \leq ((T - R) - \pi_\xi (T - R) \sigma_\xi)x + Rx, \\ \pi_\xi \inf \{ (T - \pi T \sigma)x : \pi \in \mathfrak{B}(F), \sigma \in \mathfrak{B}(E), \pi S \sigma x \leq 1 \} &\leq \\ &\leq \pi_\xi ((T - R) - \pi_\xi (T - R) \sigma_\xi)x + \pi_\xi Rx \leq \pi_\xi 1 + \pi_\xi Rx = \pi_\xi (1 + Rx) \end{aligned}$$

для каждого $\xi \in \Xi$. Поэтому

$$\inf \{ (T - \pi T \sigma)x : \pi \in \mathfrak{B}(F), \sigma \in \mathfrak{B}(E), \pi S \sigma x \leq 1 \} \leq 1 + Rx.$$

Если $\bar{1} \in \mathfrak{B}_F$ и $\bar{1} \leq 1$, то

$$\begin{aligned} \inf \{ (T - \pi T \sigma)x : \pi \in \mathfrak{B}(F), \sigma \in \mathfrak{B}(E), \pi S \sigma x \leq 1 \} &\leq \\ &\leq \inf \{ (T - \pi T \sigma)x : \pi \in \mathfrak{B}(F), \sigma \in \mathfrak{B}(E), \pi S \sigma x \leq \bar{1} \} \leq \\ &\leq \bar{1} + Rx \leq 1 + Rx. \end{aligned}$$

Следовательно, существует

$$\sup_{1 \in \mathfrak{B}_F} \inf \{ (T - \pi T \sigma)x : \pi \in \mathfrak{B}(F), \sigma \in \mathfrak{B}(E), \pi S \sigma x \leq 1 \},$$

и этот супремум не превосходит Rx .

С другой стороны, обозначив через $I_E(I_F)$ тождественный оператор в K -пространстве $E(F)$, из неравенства $R \leq T$ получаем для произвольных $\pi \in \mathfrak{B}(F)$ и $\sigma \in \mathfrak{B}(E)$ неравенство

$$\begin{aligned} Rx &= \pi R \sigma x + \pi R (I_E - \sigma)x + (I_F - \pi) R \sigma x + (I_F - \pi) R (I_E - \sigma)x \leq \\ &\leq \pi R \sigma x + \pi T (I_E - \sigma)x + (I_F - \pi) T \sigma x + (I_F - \pi) T (I_F - \sigma)x = \\ &= \pi R \sigma x + (T - \pi T \sigma)x. \end{aligned}$$

Из теоремы 2.6 следует, что для произвольной слабой порядковой единицы $1 \in \mathfrak{B}_F$ существует единица $\bar{1} \in \mathfrak{B}_F$ (можно считать $\bar{1} \leq 1$), такая, что неравенство $\pi S \sigma x \leq \bar{1}$ влечет неравенство $\pi R \sigma x \leq 1$. Поэтому, если $\pi S \sigma x \leq \bar{1}$, то $Rx \leq 1 + (T - \pi T \sigma)x$, и, значит,

$$Rx \leq 1 + \inf \{ (T - \pi T \sigma)x : \pi \in \mathfrak{B}(F), \sigma \in \mathfrak{B}(E), \pi S \sigma x \leq \bar{1} \}.$$

Тогда тем более

$$Rx \leq 1 + \sup_{\bar{1} \in \mathfrak{B}_F} \inf \{ (T - \pi T \sigma)x : \pi \in \mathfrak{B}(F), \sigma \in \mathfrak{B}(E), \pi S \sigma x \leq \bar{1} \}.$$

Произвольность единицы $1 \in \mathfrak{B}_F$ показывает, что

$$Rx \leq \sup_{1 \in \mathfrak{B}_F} \inf \{ (T - \pi T \sigma) x : \pi \in \mathfrak{B}(F), \sigma \in \mathfrak{B}(E), \pi S \sigma x \leq \bar{1} \}. \triangleright$$

2.8. Замечание. В [11] получены варианты теорем 2.6, 2.7 для случая, когда F является K -пространством с достаточным числом порядково-непрерывных операторов.

§ 3. РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Хорошо известно, что архимедова векторная решетка E погружается с сохранением точных границ в (единственное с точностью до изоморфизма) K -пространство $\bar{E}$, притом так, что всякий элемент $\tilde{e} \in \bar{E}$ является o -пределом как убывающего, так и возрастающего направлений элементов решетки E . K -пространство $\bar{E}$, называемое K -пополнением E , можно построить по классической схеме дедекиндовых сечений [2, 7]. Канторовская теория действительных чисел подсказывает другую конструкцию построения K -пополнения. Именно, назовем r -пополнением E наименьшую полную относительно сходимости с регулятором векторную решетку, содержащуюся между E и $\bar{E}$. r -пополнение, обозначаемое символом rE , можно отождествить с пространством r -фундаментальных последовательностей. Простые примеры убеждают, что, вообще говоря, $rE \neq \bar{E}$. Дело в том, что в $\bar{E}$ возможно проектирование на компоненты, чего нельзя сказать о rE . С другой стороны, если E — решетка с проекциями, то такой же является и rE . Таким образом, если желаем получить K -пополнение $\bar{E}$ путем r -пополнения, то необходимо предварительно расширить E до решетки с проекциями.

Назовем p -пополнением E наименьшую дизъюнктно полную решетку pE , содержащуюся между E и $\bar{E}$. Дизъюнктная полнота означает существование точной верхней границы у любого ограниченного множества попарно дизъюнктных элементов E . Точные взаимосвязи между K -, r - и p -полнотой выражаются следующими фактами.

А. Теорема (А. И. Векслер [15]). Для всякой архимедовой векторной решетки E выполняется $\bar{E} = rpE$.

В. Теорема (А. И. Векслер, В. А. Гейлер [16]). Архимедова векторная решетка является K -пространством тогда и только тогда, когда она дизъюнктно полна и r -полна.

Аналогичные вопросы о полноте и пополнении решеточно нормированных пространств, насколько нам известно, в литературе почти не рассматривались. Исключение составляет [17], где реализована схема канторовского пополнения в случае регулярного нормирующего K -пространства.

В текущем параграфе приводятся аналоги теорем А и В для решеточно нормированных пространств.

3.1. Пусть X — вещественное векторное пространство, E — некоторое K -пространство.

Отображение $p: X \rightarrow E$ называется *решеточной нормой* (см. [2, 7]), если для p выполнены все аксиомы нормы:

- (1) $p(x) \geq 0$ ($x \in X$), $p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- (2) $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$ ($x_1, x_2 \in X$);
- (3) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ ($x \in X, \lambda \in R$).

Говорят, что p — *норма Канторовича*, если, кроме того, выполнено следующее условие разложимости:

(4) для любых $x \in X$ и $e_1, e_2 \in E_+$ из $p(x) = e_1 + e_2$, $e_1 \wedge e_2 = 0$ следует существование такого представления $x = x_1 + x_2$ ($x_1, x_2 \in X$), что $p(x_i) = e_i$ ($i = 1, 2$).

Векторное пространство X , снабженное нормой Канторовича p , называется *решеточно нормированным пространством* (РНП) и обозначается (X, p, E) или (X, p) . Всюду ниже предполагается, что $p[X]^{dd} = E$.

Говорят, что направление $(x_\alpha) \subset X$ растет вбок, если $p(x_\alpha - x_\beta) \wedge p(x_\beta) = 0$ для любого β и всех $\alpha \geq \beta$.

3.2. Определение. РНП (X, p, E) называется

(а) *пространством Банаха — Канторовича (ПБК)*, если оно *bo-полно* в следующем смысле: для любого направления $(x_\alpha) \subset X$ из $p(x_\alpha - x) \xrightarrow{(o)} 0^*$ следует существование такого $x \in X$, что $p(x_\alpha - x) \xrightarrow{(o)} 0$;

(б) *br-полным*, если для любой последовательности $(x_n) \subset X$ из $p(x_n - x_m) \xrightarrow{(r)} 0$ следует существование такого $x \in X$, что $p(x_n - x) \xrightarrow{(r)} 0$;

(в) *дизъюнктно полным*, если для любого полного семейства $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов в E и любого ограниченного (по норме) семейства $(x_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset X$ существует такой $x \in X$ (обозначаемый $x = \text{mix}(\pi_\xi x_\xi)$ или $x = \text{mix}(\pi_\xi x_\xi)$), что $\pi_\xi p(x - x_\xi) = 0$ для каждого $\xi \in \Xi$ (элемент $x = \text{mix}(\pi_\xi x_\xi)$ называется *перемешиванием семейства* $(x_\xi)_{\xi \in \Xi}$ *относительно семейства* $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$). Ясно, что перемешивание единственно.

(г) *латерально полным*, если любое ограниченное растущее вбок направление с вполне упорядоченным множеством индексов имеет *bo-предел*. (Термин латеральная полнота часто используется в другом смысле [16].)

Имеет место следующий критерий *bo-полноты* произвольного РНП (см. [12, 18, 19]).

3.3. Теорема. Для *bo-полноты* произвольного РНП необходимо и достаточно, чтобы выполнялось любое из следующих условий:

(а) (X, p) — *дизъюнктно полно* и *br-полно*,

(б) (X, p) — *латерально полно* и *br-полно*.

3.4. Замечание. Условие разложимости (4) несколько слабее аналогичного условия из [2]:

(4') для любых $x \in X$, $e_1, e_2 \in E_+$ из $p(x) = e_1 + e_2$ следует существование такого представления $x = x_1 + x_2$ ($x_1, x_2 \in X$), что $p(x_i) = e_i$ ($i = 1, 2$).

Однако в случае *br-полного* РНП они эквивалентны. В частности, если (X, p, E) — ПБК, то норма p удовлетворяет (4').

3.5. Рассмотрим произвольное РНП (X, p, E) . Для каждого порядкового проектора $\pi \in \mathfrak{B}(E)$ через $h(\pi)$ обозначим оператор проектирования в X на подпространство $p^{-1}[\pi[E]]$ параллельно подпространству $p^{-1}[(I - \pi)[E]]$ ($\text{Ker } h(\pi) = p^{-1}[(I - \pi)[E]]$), где I является тождественным оператором в E .

Определение. Образ полной булевой алгебры $\mathfrak{B}(E)$ при отображении $h: \pi \rightarrow h(\pi)$ называется базой РНП (X, p, E) (обозначается $\mathfrak{B}(X, p, E)$ или $\mathfrak{B}(X, p)$), а само отображение h — каноническим отображением базы K -пространства E на базу РНП (X, p, E) .

База $\mathfrak{B}(X, p)$ является полной булевой алгеброй относительно следующих булевых операций:

$$\rho_1 \vee \rho_2 = \rho_1 + \rho_2 - \rho_1 \circ \rho_2, \quad \rho_1 \wedge \rho_2 = \rho_1 \circ \rho_2, \quad \rho^* = I - \rho,$$

где $\rho_1, \rho_2, \rho \in \mathfrak{B}(X, p)$ и ρ^* — булево дополнение ρ . Отображение h является изоморфизмом булевых алгебр, причем $\pi \circ \rho = \rho \circ h(\pi)$ для всех $\pi \in \mathfrak{B}(E)$.

3.6. Теперь перейдем к построению *bo-пополнения* произвольного решеточно нормированного пространства.

Пусть (X, p, E) — некоторое РНП и mE — максимальное расширение K -пространства E . Будем рассматривать p как отображение из X в mE . С каждым полным семейством $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктивных

*) Для произвольного направления $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \subset X$ запись $p(x_\alpha - x_\beta) \xrightarrow{(o)} 0$ означает, что существует убывающее к 0 направление $(e_\gamma)_{\gamma \in A}$ элементов E_+ такое, что $p(x_\alpha - x_\beta) \leq e_\gamma$ для всех $\alpha, \beta \leq \gamma$ ($\alpha, \beta, \gamma \in A$). В этом случае говорят, что направление $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ является *bo-фундаментальным*.

порядковых проекторов в mE и каждым ограниченным семейством $(x_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset X$ свяжем формальную сумму $\sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi x_\xi$. Во множестве всех формальных сумм такого вида введем линейные операции:

$$\begin{aligned} \text{если } \bar{x} &= \sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi x_\xi, \bar{y} = \sum_{\eta \in H} \sigma_\eta y_\eta \text{ и } \lambda \in R, \text{ то} \\ \bar{x} + \bar{y} &= \sum_{\xi \in \Xi, \eta \in H} \pi_\xi \sigma_\eta (x_\xi + y_\eta), \\ \lambda \bar{x} &= \sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi (\lambda x_\xi). \end{aligned}$$

Два элемента $\bar{x} = \sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi x_\xi$ и $\bar{y} = \sum_{\eta \in H} \sigma_\eta y_\eta$ считаем эквивалентными, если $h(\pi_\xi \sigma_\eta) x_\xi = h(\pi_\xi \sigma_\eta) y_\eta$ для всех $\xi \in \Xi, \eta \in H$, где h — каноническое отображение $\mathfrak{B}(mE)$ на базу $\mathfrak{B}(X, p)$.

Введем отображение $\bar{p}: \bar{X} \rightarrow mE$ построенного выше линейного пространства формальных сумм $\bar{X}$ в K -пространство mE по формуле

$$\bar{p}(\bar{x}) = \bar{p}\left(\sum_{\xi \in \Xi} \pi_\xi x_\xi\right) = o\text{-}\sum \pi_\xi p(x_\xi) \quad (\bar{x} \in \bar{X}).$$

Заметим, что o -сумма в правой части принадлежит, вообще говоря, расширенному K -пространству mE . Нетрудно видеть, что отображение $\bar{p}: \bar{X} \rightarrow mE$ удовлетворяет всем четырем аксиомам нормы Канторовича и, тем самым, $(\bar{X}, \bar{p}, mE)$ является РНП.

3.7. Простое доказательство следующего утверждения мы опускаем.

Предложение. Пространство $(\bar{X}, \bar{p}, mE)$ является дизъюнктно полным РНП.

З а м е ч а н и е. Аналогичная схема дизъюнктного пополнения векторных решеток использована в [16, 20].

3.8. Зафиксируем слабую порядковую единицу $1 \in mE$ и рассмотрим линейное пространство $\hat{X}$ всех br -фундаментальных с регулятором 1 последовательностей элементов из $\bar{X}$, т. е. $\hat{x} = (\bar{x}_n) \in \hat{X}$, если $(\bar{x}_n) \subset \bar{X}$ и существует последовательность $(\lambda_n) \subset R$ такая, что $\lambda_n \downarrow 0$ и $\bar{p}(\bar{x}_n - \bar{x}_m) \leq \lambda_n 1$ для всех $n, m \geq k$. Обозначим через $\hat{X}_0$ линейное подпространство $\hat{X}$, состоящее из всех br -сходящихся к нулю последовательностей и положим $\bar{\bar{X}} = \hat{X}/\hat{X}_0$. Легко убедиться, что отображение $\bar{p}: \bar{\bar{X}} \rightarrow mE$, задаваемое формулой

$$\bar{p}(\bar{\bar{x}}) = r\text{-}\lim \bar{p}(\bar{x}_n) \quad (\bar{\bar{x}} \in (\bar{x}_n)_{n=1}^\infty \in \bar{\bar{X}}),$$

удовлетворяет всем аксиомам нормы Канторовича.

3.9. **Теорема.** Пространство $(\bar{\bar{X}}, \bar{p}, mE)$ является ПБК.

◁ По теореме 3.3(а) достаточно показать дизъюнктную и br -полноту РНП $(\bar{\bar{X}}, \bar{p}, mE)$.

Пусть $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — произвольное семейство попарно дизъюнктных порядковых проекторов в mE и $(\bar{x}_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — ограниченное семейство элементов $\bar{X}$, где $\bar{x}_\xi = (\bar{x}_n^\xi)_{n \in N}$ для каждого $\xi \in \Xi$. Можно считать, что $\bar{p}(\bar{x}_n^\xi - \bar{x}_m^\xi) \leq \frac{1}{k} 1$ для всех $n, m \geq k$ и любого $\xi \in \Xi$. Положим $\bar{x}_n = \text{mix}_{\xi \in \Xi} (\pi_\xi \bar{x}_n^\xi)$ ($n \in N$). Ясно, что $\bar{x} = (\bar{x}_n)_{n=1}^\infty$ является элементом $\bar{X}$. При

этом для каждого $\xi \in \Xi$ получаем $\pi_\xi \bar{p}(\bar{x} - \bar{x}_\xi) = r\text{-}\lim \pi_\xi \bar{p}(\bar{x}_n - \bar{x}_n^\xi) = 0$. Дизъюнктная полнота доказана.

Пусть теперь $(\bar{x}_m)$ является br -фундаментальной с регулятором $e \in mE$ последовательностью элементов $\bar{X}$, где $\bar{x}_m = (\bar{x}_n^m)_{n=1}^\infty$ для каждого натурального m . Существуют полное семейство $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктных порядковых проекторов в mE и семейство $(\lambda_\xi)_{\xi \in \Xi}$ положительных чисел такие, что $\pi_\xi e \leq \lambda_\xi 1$ для каждого $\xi \in \Xi$. Пусть h является каноническим отображением $\mathfrak{B}(mE)$ на базу $\mathfrak{B}(\bar{\bar{X}}, \bar{p})$. Для фиксирован-

ного $\xi \in \Xi$ положим $\pi_{\xi} \bar{x}_m = (\bar{h}(\pi_{\xi}) \bar{x}_n^m)_{n=1}^{\infty}$. Тогда последовательность $(\pi_{\xi} \bar{x})_{m=1}^{\infty}$ *br*-фундаментальна с регулятором 1 для каждого $\xi \in \Xi$. Нетрудно видеть, что для произвольного $\xi \in \Xi$ существует элемент $\bar{x}_{\xi} \in \bar{X}(\bar{x}_{\xi} = (\bar{x}_k^{\xi})_{k=1}^{\infty})$ такой, что $\bar{p}(\pi_{\xi} \bar{x}_m - \bar{x}_{\xi}) \xrightarrow{(r)} 0$ с регулятором 1. Из дизъюнктивной полноты пространства (X, p) следует существование

$$\bar{x} = \text{mix}_{\xi \in \Xi} (\pi_{\xi} \bar{x}_{\xi}), \text{ где } \bar{x} = (\text{mix}_{\xi \in \Xi} (\pi_{\xi} \bar{x}_k^{\xi}))_{k=1}^{\infty}.$$

Для произвольного $\xi \in \Xi$ получаем

$$\begin{aligned} \pi_{\xi} \bar{p}(\bar{x}_m - x) &= \pi_{\xi} \bar{p}(\bar{x}_m - \text{mix}_{\xi \in \Xi} (\pi_{\xi} \bar{x}_{\xi})) = \\ &= \pi_{\xi} \left[r\text{-}\lim_n \bar{p}(\bar{x}_n^m - \text{mix}_{\xi \in \Xi} (\pi_{\xi} \bar{x}_n^{\xi})) \right] = r\text{-}\lim_n \bar{p}(\bar{h}(\pi_{\xi}) \bar{x}_n^m - \\ &- \bar{h}(\pi_{\xi}) \bar{x}_n^{\xi}) = \pi_{\xi} \left[r\text{-}\lim_n \bar{p}(\bar{h}(\pi_{\xi}) \bar{x}_n^m - \bar{x}_n^{\xi}) \right] = \pi_{\xi} \bar{p}(\pi_{\xi} \bar{x}_m - \bar{x}_{\xi}) \xrightarrow{(r)} 0 \end{aligned}$$

с регулятором 1. Значит, $\bar{p}(\bar{x}_m - x) \xrightarrow{(o)} 0$. Но последовательность $(\bar{x}_m)$ *br*-фундаментальна. Следовательно, $(\bar{x}_m)$ *br*-сходится к $\bar{x}$, и *br*-полнота пространства $(\bar{X}, \bar{p}, mE)$ доказана. $\triangleright$

Пространство $(\bar{X}, \bar{p}, mE)$ является наиболее широким ПБК, в которое может быть вложено (X, p, E) в качестве плотного подпространства. Плотность здесь понимается в смысле последовательного применения операций дизъюнктивного пополнения и *br*-замыкания или однократного *bo*-замыкания. Естественно назвать $(\bar{X}, \bar{p}, mE)$ максимальным расширением (X, p, E) . Однако представляет интерес построение пополнения пространства (X, p, E) , не расширяя нормирующего K -пространства E .

Положим $\tilde{X} = \{x \in \bar{X} : \bar{p}(x) \in E\}$ и $\tilde{p}(x) = \bar{p}(x)$ для всех $x \in \tilde{X}$.

Ясно, что пространство $(\tilde{X}, \tilde{p}, E)$ является *bo*-полным и X изометрично вкладывается в $\tilde{X}$. Для единицы $1 \in mE$ существует такое полное семейство порядковых проекторов $(\pi_{\xi})_{\xi \in \Xi} \subset \mathfrak{B}(mE)$, что $e_{\xi} = \pi_{\xi} 1$ является элементом K -пространства E для каждого $\xi \in \Xi$. Вложение $i: X \rightarrow \tilde{X}$ считаем тождественным, иными словами, полагаем $X \subset \tilde{X}$. Обозначив через h каноническое отображение $\mathfrak{B}(mE)$ на базу $\mathfrak{B}(\tilde{X}, \tilde{p})$, получаем, что произвольный элемент $\tilde{x} \in \tilde{X}$ представляется в виде $\tilde{x} = \text{mix}_{\xi \in \Xi} (\pi_{\xi} \tilde{x})$

и $h(\pi_{\xi}) \tilde{x}$ является *br*-пределом с регулятором $e_{\xi} \in E$ некоторой последовательности $(\bar{x}_n^{\xi})$ элементов $\bar{X}$. Так как $\tilde{p}(h(\pi_{\xi}) \tilde{x}) \in E$, $e_{\xi} \in E$ и $\tilde{p}(\bar{x}_n^{\xi}) \xrightarrow{(r)} \tilde{p}(h(\pi_{\xi}) \tilde{x})$ с регулятором e_{ξ} ($\xi \in \Xi$), то $\tilde{p}(\bar{x}_n^{\xi}) \in E$ для всех $\xi \in \Xi$, $n \in N$, т. е. $\bar{x}_n^{\xi} \in \tilde{X}$. Таким образом, все множество $\tilde{X}$ можно получить из элементов пространства $X \subset \tilde{X}$ в три этапа. Сначала к X следует присоединить всевозможные перемешивания элементов X (учитывая, что норма $\tilde{p}$ принимает значение в K -пространстве E , а не в mE , как это было в п. 3.6). Получим подпространство $X_1 (X \subset X_1 \subset \tilde{X})$. Затем к X_1 следует присоединить все *br*-пределы с регуляторами из E последовательностей элементов X_1 . Наконец, к полученному подпространству $X_2 (X \subset X_1 \subset X_2 \subset \tilde{X})$ необходимо добавить всевозможные перемешивания элементов X_2 . Полученное подпространство совпадает с $\tilde{X}$.

Попутно заметим, что для каждого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ и произвольных $\varepsilon > 0$, $\xi \in \Xi$ существует перемешивание $\text{mix}(\sigma_{\gamma} x_{\gamma})$ элементов X такое, что $\pi_{\xi} \tilde{p}(\tilde{x} - \text{mix}(\sigma_{\gamma} x_{\gamma})) \leq \varepsilon e_{\xi}$.

3.10. Теорема. Для произвольного РНП (X, p, E) существуют единственное с точностью до линейной изометрии ПБК $(\tilde{X}, \tilde{p}, E)$ и изометрическое вложение $i: X \rightarrow \tilde{X}$, для которых выполнено условие: найдется такое полное семейство $(e_{\xi})_{\xi \in \Xi}$ попарно дизъюнктивных элементов из E_+ , что для произвольных $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $\varepsilon > 0$, $\xi \in \Xi$ существует перемешивание $\text{mix}(\sigma_{\gamma} x_{\gamma})$ элементов из $i[X]$ такое, что

$$\pi_{\xi} \tilde{p}(\tilde{x} - \text{mix}(\sigma_{\gamma} x_{\gamma})) \leq \varepsilon e_{\xi},$$

где через π_i обозначен оператор проектирования в K -пространстве E на компоненту $\{e_i\}^{dd}$.

◁ Существование $(X, \tilde{p}, E)$ следует из пп. 3.6—3.9. Единственность его (с точностью до линейной изометрии) очевидна. ▷

3.11. Определение. ПБК $(X, \tilde{p}, E)$, определяемое теоремой 3.10, называется *во-пополнением* РНП (X, p, E) .

Замечание. (а) Как видно из конструкции во-пополнения, существенную роль играет разложимость. Если отказаться от разложимости нормы, то для существования даже секвенциального во-пополнения приходится вводить довольно жесткие ограничительные условия (см., например, [17]).

(б) Возможен и другой подход к построению во-пополнения, основанный на вложении пространства (X, p, E) во второе операторно сопряженное пространство или на возможности булевозначной реализации РНП [12].

3.12. Пусть (X, p, E) — произвольное РНП и X_1 — подпространство X . Через p_1 обозначим сужение отображения $p: X \rightarrow E$ на X_1 . Предположим, что $p_1: X_1 \rightarrow E$ является нормой Канторовича (т. е. удовлетворяет аксиоме (4) из п. 3.1).

Определение. Говорят, что подпространство X_1 *плотно* в X (относительно решеточной нормы p), если найдется такое полное семейство $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ попарно дизъюнктивных элементов E_+ , что для произвольных $x \in X$, $\varepsilon > 0$ и $\xi \in \Xi$ существует перемешивание $\text{mix}(\sigma_\tau x_\tau)$ элементов X_1 такое, что

$$\pi_i p(x - \text{mix}(\sigma_\tau x_\tau)) \leq \varepsilon e_i \quad (\xi \in \Xi),$$

где через π_i обозначен оператор проектирования в E на компоненту $\{e_i\}^{dd}$.

Замечание. Из п. 3.10 следует, что произвольное РНП можно отождествить с некоторым плотным подпространством его во-пополнения.

§ 4. МАЖОРИРОВАННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Рассмотрим произвольные решеточно нормированные пространства (X, p, E) и (Y, q, F) . Линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ называют *мажорированным*, если существует такой положительный оператор $U: E \rightarrow F$, называемый *мажорантой* T , что $q(Tx) \leq U(p(x))$ ($x \in X$). Нетрудно понять, что в K -пространстве регулярных операторов $\mathcal{L}_r(E, F)$ существует наименьший оператор среди всех мажорант, который будем обозначать через $|T|$. Разумеется, что при этом выполняется нормативное неравенство $q(Tx) \leq |T|(p(x))$ ($x \in X$). Множество всех мажорированных операторов из X в Y обозначается символом $M(X, Y)$. Отображение $|\cdot|$ из $M(X, Y)$ в $\mathcal{L}_r(E, F)$ обладает всеми свойствами решеточной нормы.

Наиболее часто в литературе встречаются следующие типы мажорированных операторов.

А. Регулярные операторы (см. [2, 7, 11]). Пусть $X = E$ и $Y = F$, а роль решеточной нормы играет модуль элемента. Тогда $M(X, Y)$ совпадает с пространством всех регулярных операторов из E в F . Наименьшая мажоранта T есть модуль $|T|$ оператора T и вычисляется по формуле

$$|T|x := \sup \{T(u) : |u| \leq x\} \quad (0 \leq x \in E).$$

В. Ограниченные операторы (см. [21]). Если $E = F = R$ — поле действительных чисел, то X и Y — нормированные пространства, а $M(X, Y)$ — пространство всех ограниченных операторов из X в Y . Наименьшая мажоранта T в этом случае есть норма оператора

$$\|T\| = \sup \{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}.$$

С. Операторы с абстрактной нормой (см. [2, 7]). Допустим, что $E = R$ и $Y = F$. Тогда оператор $T: X \rightarrow F$ имеет мажоранту в том и только том случае, если множество $\{Tx : \|x\| \leq 1\}$ порядково ограничено в F . При этом говорят, что T имеет *абстрактную норму* (или что

T — правильный оператор). Наименьшая мажоранта T вычисляется по формуле

$$|T| := \sup \{ |Tx| : \|x\| \leq 1 \}.$$

(Точнее, наименьшей мажорантой будет отображение $t \rightarrow t|T|$, $t \in R$.)

Д. Доминированные операторы (см. [22]). Пусть $F = R$ и $X = E$. Тогда наименьшая мажоранта оператора $T \in M(E, Y)$ есть положительный функционал e^* на K -пространстве E , и он может быть со- считан по формуле

$$[T]e := \langle e, e^* \rangle \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|Te_i\| : n \in N, 0 \leq e_1, \dots, e_n, \sum_{i=1}^n e_i = e \right\} (e \in E_+).$$

Доминированные операторы называют также *мажорированными*.

Заметим, что в каждом из этих четырех случаев наименьшая мажоранта находится по формуле специального вида, а разложимость ее легко усматривается в А, В и С. В текущем параграфе приведем общие формулы для вычисления наименьших мажорант. Затем дадим положительный ответ на вопрос о разложимости наименьшей мажоранты, оставленный открытым в [2]. Отметим, что мажорированные операторы впервые были введены Л. В. Канторовичем [1].

4.1. Рассмотрим произвольные ПБК (X, p, E) , РНП (Y, q, F) и линейный оператор $T: X \rightarrow Y$. Через $[x_i]$ обозначим произвольный конечный набор элементов X . Из bo -полноты (X, p, E) следует, что $p[X] = E_+$. Поэтому для каждого фиксированного $e \in E_+$ ограниченность множества $\left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) \leq e \right\}$ равносильна ограниченности множества $\left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) = e \right\}$, и в случае ограниченности этих множеств верно соотношение

$$\begin{aligned} \sup \left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) \leq e \right\} = \\ = \sup \left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) = e \right\}. \end{aligned}$$

Предложение. Для произвольных ПБК (X, p, E) , РНП (Y, q, F) и линейного оператора $T: X \rightarrow Y$ эквивалентны утверждения

- (а) $T \in M(X, Y)$;
- (б) для каждого $e \in E_+$ ограничено множество $\left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) \leq e \right\}$;
- (в) для каждого $e \in E_+$ ограничено множество $\left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) = e \right\}$.

В случае выполнения условий (а), (б), (в) для наименьшей мажоранты оператора T верны соотношения

- (г) $|T|e = \sup \left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) \leq e \right\}$;
- (д) $|T|e = \sup \left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) = e \right\}$

для каждого $e \in E_+$.

◁ (а) $\Rightarrow$ (б). Если $e \in E_+$, $[x_i] \subset X$ и $\sum_i p(x_i) \leq e$,

$$\sum_i q(Tx_i) \leq \sum_i |T|p(x_i) = |T|\left(\sum_i p(x_i)\right) \leq |T|e.$$

(б) $\Rightarrow$ (а). Положим

$$Ue = \sup \left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) \leq e \right\} \quad (e \in E_+),$$

и покажем аддитивность U на конусе E . Пусть $e, f \in E_+, [w_k] \subset X, [z_j] \subset X, \sum_k p(w_k) \leq e, \sum_j p(z_j) \leq f$. Тогда

$$\sum_k q(Tw_k) + \sum_j q(Tz_j) \leq \sup \left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) \leq e + f \right\},$$

т. е. $Ue + Uf \leq U(e + f)$. Если $[x_i] \subset X$ и $\sum_i p(x_i) = e + f$, то по свойству разложимости нормы (п. 3.4) для каждого i существует представление $x_i = w_i + z_i$ такое, что $p(x_i) = p(w_i) + p(z_i)$, и при этом $\sum_i p(w_i) \leq e, \sum_i p(z_i) \leq f$. Получаем

$$\sum_i q(Tx_i) = \sum_i q(Tw_i + Tz_i) \leq \sum_i q(Tw_i) + \sum_i q(Tz_i) \leq Ue + Uf,$$

т. е. $U(e + f) \leq Ue + Uf$.

Аддитивность отображения $U: E_+ \rightarrow F_+$ показана. Положительная однородность его очевидна. За распространением U на все K -пространство E сохраним то же обозначение. Тогда $U \in \mathcal{L}_+(E, F)$ и

$$Up(x) = \sup \left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) \leq p(x) \right\} \geq q(Tx) \quad (x \in X).$$

Таким образом, показаны включение $T \in M(X, Y)$ и неравенство $|T| \leq U$. Обратное неравенство следует из доказательства импликации (а) $\Rightarrow$ (б). $\triangleright$

Замечание. Если отказаться от *во*-полноты (X, p, E) и потребовать лишь сильную разложимость нормы p (п. 3.4), то останутся справедливыми эквивалентность (а) $\Leftrightarrow$ (б) и формула (г).

4.2. Предложение. Для произвольных ПБК (X, p, E) , РНП (Y, q, F) и оператора $T \in M(X, Y)$ справедлива формула

$$|T|e = \sup \left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, p(x_k) \wedge p(x_j) = 0 \ (k \neq j), \sum_i p(x_i) \leq e \right\}$$

для каждого $e \in E_+$.

$\triangleleft$ Обозначим правую часть доказываемого соотношения через Ue . Стандартным образом показываются положительная однородность, субаддитивность (на всем конусе E_+), аддитивность на дизъюнктивных элементах и изотонность отображения $U: E_+ \rightarrow F_+$, т. е.

$$U(\lambda e) = \lambda Ue \quad (\lambda \geq 0, e \in E_+),$$

$$U(e + f) \leq Ue + Uf \quad (e, f \in E_+),$$

$$U(e + f) = Ue + Uf \quad (e, f \in E_+, e \wedge f = 0),$$

$$Ue \leq Uf \quad (e, f \in E_+, e \leq f).$$

Покажем аддитивность U на всем конусе. Пусть $e, f \in E_+$ и $e + f = g$. Нетрудно видеть, что для каждого n существуют конечное семейство $(\pi_i^n)_{i \in I}$ попарно дизъюнктивных порядковых проекторов в E и семейства $(\lambda_i^n)_{i \in I}, (\mu_i^n)_{i \in I}$ неотрицательных чисел такие, что $0 \leq e_n = \sum_{i \in I} \lambda_i^n \pi_i^n g \leq e, 0 \leq f_n = \sum_{i \in I} \mu_i^n \pi_i^n g \leq f$, и при этом последовательности $(e_n), (f_n)$ возрастают и r -сходятся к e, f соответственно (с регулятором g). Для каждого n имеем

$$\begin{aligned} U(e_n + f_n) &= U \left(\sum_{i \in I} (\lambda_i^n + \mu_i^n) \pi_i^n g \right) = \sum_{i \in I} (\lambda_i^n + \mu_i^n) U(\pi_i^n g) = \\ &= U \left(\sum_{i \in I} \lambda_i^n \pi_i^n g \right) + U \left(\sum_{i \in I} \mu_i^n \pi_i^n g \right) = Ue_n + Uf_n. \end{aligned}$$

Если $e - e_n < \varepsilon g$, то из субаддитивности, изотонности и положительной

однородности U получаем

$$0 \leq Ue - Ue_n \leq U(e - e_n) \leq U(\varepsilon g) = \varepsilon Ug,$$

т. е. $Ue = r\text{-}\lim Ue_n$. Аналогично $Uf = r\text{-}\lim Uf_n$ и $U(e + f) = r\text{-}\lim U(e_n + f_n)$. Стало быть,

$$U(e + f) = r\text{-}\lim U(e_n + f_n) = r\text{-}\lim Ue_n + r\text{-}\lim Uf_n = Ue + Uf.$$

За распространением U на все E сохраним то же обозначение. Очевидно, $U \leq |T|$. С другой стороны, для каждого $x \in X$

$$\begin{aligned} q(Tx) &\leq \sup \left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, p(x_k) \wedge p(x_j) = \right. \\ &= 0 (k \neq j), \left. \sum_i p(x_i) \leq p(x) \right\} = U|x|, \end{aligned}$$

т. е. $|T| \leq U$. $\triangleright$

Следствие. Пусть выполнены условия предыдущего предложения. Тогда справедливы утверждения:

(а) если оператор T допускает какой-нибудь решеточный гомоморфизм в качестве мажорант, то

$$|T|e = \sup \{q(Tx) : p(x) \leq e\} \quad (e \in E_+);$$

(б) если $(Y, q, F) = (F, |\cdot|, F)$ и T допускает какой-нибудь оператор Магарам в качестве мажоранты, то

$$|T|e = \sup \{|Tx| : p(x) \leq e\} \quad (e \in E_+).$$

$\triangleleft$ (а) При указанных предположениях $|T|$ — решеточный гомоморфизм. Если $p(x_1) \wedge p(x_2) = 0$ ($x_1, x_2 \in X$), то $p(x_1) + p(x_2) = p(x_1 + x_2)$, и из нормативного неравенства $q(Tx) \leq |T|p(x)$ следует, что $q(Tx_1) \wedge q(Tx_2) = 0$ и $q(Tx_1) + q(Tx_2) = q(Tx_1 + Tx_2) = q(T(x_1 + x_2))$.

Для произвольного $e \in E_+$ получаем

$$\begin{aligned} |T|e &= \sup \left\{ \sum_i q(Tx_i) : [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) \leq e; p(x_k) \wedge p(x_j) = 0 (k \neq j) \right\} = \\ &= \sup \left\{ q\left(T\left(\sum_i x_i\right)\right) : [x_i] \subset X, p\left(\sum_i x_i\right) \leq e; p(x_k) \wedge p(x_j) = 0 (k \neq j) \right\} = \\ &= \sup \{q(Tx) : x \in X, p(x) \leq e\}. \end{aligned}$$

(б) Вновь наименьшая мажоранта $|T|$ будет оператором Магарам. Пусть $e \in E_+$, $[x_i] \subset X$, $p(x_k) \wedge p(x_j) = 0$ ($k \neq j$) и $\sum_i p(x_i) \leq e$. Без ограничения общности полагаем, что $|T|[E]^{dd} = F$ и оператор $|T|$ существенно положителен. Для фиксированного i существуют проекторы $\sigma_1^i, \sigma_2^i \in \mathfrak{B}(F)$ такие, что $\sigma_1^i \wedge \sigma_2^i = 0$, $\sigma_1^i(Tx_i) = (Tx_i)_+$, $\sigma_2^i(Tx_i) = -(Tx_i)_-$. Поэтому $|Tx_i| = (Tx_i)_+ + (Tx_i)_- = \sigma_1^i(Tx_i) - \sigma_2^i(Tx_i)$. Как известно (см., например, [8, 12]), для оператора Магарам $|T|$ существует изоморфизм δ булевой алгебры $\mathfrak{B}(F)$ на правильную подалгебру алгебры $\mathfrak{B}(E)$ такой, что $\sigma \circ |T| = |T| \circ \delta(\sigma)$ для каждого $\sigma \in \mathfrak{B}(F)$. Из этого факта легко выводится, что $\sigma \circ T = T \circ h(\delta(\sigma))$, где h — каноническое отображение $\mathfrak{B}(E)$ на $\mathfrak{B}(X, p)$. Поэтому

$$|Tx_i| = \sigma_1^i(Tx_i) - \sigma_2^i(Tx_i) = T(h(\delta(\sigma_1^i))x_i) - T(h(\delta(\sigma_2^i))x_i).$$

Обозначив $v_i = h(\delta(\sigma_1^i))x_i$, $w_i = -h(\delta(\sigma_2^i))x_i$, получаем $p(w_i) \wedge p(v_i) = 0$, $p(v_i) + p(w_i) \leq p(x_i)$ и $Tv_i + Tw_i = |Tx_i|$. Положив $z = \sum v_i + \sum w_i$ и заметив, что $p(z) = \sum p(v_i) + \sum p(w_i) \leq e$, имеем

$$\begin{aligned} \sum |Tx_i| &= \sum (Tv_i + Tw_i) = T\left(\sum (v_i + w_i)\right) = Tz = |Tz| \leq \\ &\leq \sup \{|Tx| : p(x) \leq e\}, \end{aligned}$$

т. е. $|T|e \leq \sup \{|Tx| : p(x) \leq e\}$. Обратное неравенство очевидно. $\triangleright$

4.3. Пусть (X, p, E) , (Y, q, F) — произвольные РНП и T — линейный оператор из X в Y .

Определение. Линейный оператор $T: X \rightarrow Y$ называется *во-непрерывным*, если $\text{vo-lim } Tx_\alpha = 0$ для любого *во-сходящегося* к нулю направления (x_α) элементов X .

Через $\mathcal{L}_{\text{vo}}(X, Y)$ обозначим линейное пространство всех *во-непрерывных* операторов. Если $\mathcal{L}_n(E, F)$ — K -пространство всех регулярных порядково непрерывных операторов из E в F , то положим $M_n(X, Y) \parallel = \{T \in M(X, Y): |T| \in \mathcal{L}_n(E, F)\}$, т. е. $M_n(X, Y)$ состоит из всех мажорированных операторов, имеющих порядково непрерывные мажоранты. По очевидным соображениям $M_n(X, Y) \subset \mathcal{L}_{\text{vo}}(X, Y) \cap M(X, Y)$.

Теорема. Если (X, p, E) является ПБК, то

$$M_n(X, Y) = \mathcal{L}_{\text{vo}}(X, Y) \cap M(X, Y).$$

◁ Возьмем произвольный оператор $T \in \mathcal{L}_{\text{vo}}(X, Y) \cap M(X, Y)$ и покажем, что $|T| \in \mathcal{L}_n(E, F)$. Пусть $(e_\alpha) \subset E_+$, $e \in E$ и $e_\alpha \uparrow e$. Положим $Ue = \sup_\alpha \sup \left\{ \sum_i q(Tx_i): [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) = e_\alpha \right\}$. Так как (п. 4.1)

$$\sup \left\{ \sum_i q(Tx_i): [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) = e_\alpha \right\} = |T|e_\alpha \leq |T|e,$$

то $Ue \leq |T|e$.

Проверим обратное неравенство. Пусть $[x_i] \subset X$ и $\sum_i p(x_i) = e$. При фиксированном α для каждого i существует такое представление $x_i = w_i^\alpha + z_i^\alpha$, $w_i^\alpha, z_i^\alpha \in X$, что $p(x_i) = p(w_i^\alpha) + p(z_i^\alpha)$ и $\sum_i p(w_i^\alpha) = e_\alpha$, $\sum_i p(z_i^\alpha) = e - e_\alpha$. Так как $\sum_i p(z_i^\alpha) = e - e_\alpha \downarrow 0$, то $p(z_i^\alpha) \downarrow 0$ и, значит, $p(x_i - w_i^\alpha) = p(z_i^\alpha) \xrightarrow{(o)} 0$ для каждого i . Тогда $\sum_i q(Tx_i) = o\text{-lim}_\alpha \left(\sum_i q(Tw_i^\alpha) \right)$.

С другой стороны, для фиксированного α_0 имеем

$$\begin{aligned} \sum_i q(Tw_i^{\alpha_0}) &\leq \sup \left\{ \sum_j q(Tv_j): [v_j] \subset X, \sum_j p(v_j) = e_{\alpha_0} \right\} \leq \\ &\leq \sup_\alpha \sup \left\{ \sum_j q(Tv_j): [v_j] \subset X, \sum_j p(v_j) = e_\alpha \right\} = Ue. \end{aligned}$$

Поэтому $\sum_i q(Tx_i) \leq Ue$, и, следовательно, $|T|e \leq Ue$. Таким образом,

$$|T|e = Ue = \sup_\alpha \sup \left\{ \sum_i q(Tx_i): [x_i] \subset X, \sum_i p(x_i) = e_\alpha \right\} \sup_\alpha |T|e_\alpha,$$

но это и означает порядковую непрерывность оператора $|T|$. ▷

4.4. Пусть E, F — произвольные K -пространства и Q — положительный оператор из E в F . Оператор $S: E \rightarrow F$ называют *осколком оператора* Q , если $S \in \mathcal{B}_Q$ (§ 2), иными словами, если $0 \leq S \leq Q$ и $S \wedge (Q - S) = 0$.

Предложение. Пусть (X, p, E) , (Y, q, F) — произвольные РНП, $T \in M(X, Y)$ и $0 \leq R \leq S \leq |T|$, причем R и S — осколки оператора $|T|$. Если существуют операторы $R_T, R_S \in M(X, Y)$ такие, что $|R_T| = R$, $|S_T| = S$ и $|T - R_T| = |T| - R$, $|T - S_T| = |T| - S$, то $|S_T - R_T| = S - R$.

◁ Неравенство

$$|S_T - R_T| \leq |T - S_T| + |T - R_T| = (|T| - S) + (|T| - R)$$

и соотношения $(|T| - R) \wedge R = 0$, $(|T| - S) \wedge R = 0$ показывают, что $|S_T - R_T| \wedge R = 0$. Требуемый результат следует теперь из неравенства

$$\begin{aligned} |S_T - R_T| + R &= ||S_T - R_T| - |-R_T|| \leq |(S_T - R_T) - (-R_T)| = \\ &= |S_T| = |(S_T - R_T) + R_T| \leq |S_T - R_T| + R, \end{aligned}$$

ибо отсюда $|S_T - R_T| + R = |S_T|$. ▷

4.5. Теперь можно показать разложимость нормы относительно простых осколков оператора $|T|$ (см. § 2).

Предложение. Пусть (X, p) , (Y, q) — произвольные РНП с E - и F -значными нормами, $T \in M(X, Y)$ и $S = \sum_{i=1}^n \pi_i |T| \sigma_i$, где $(\pi_i)_{i=1}^n$ — семейство попарно дизъюнктивных порядковых операторов в F , а $(\sigma_i)_{i=1}^n$ — семейство произвольных порядковых проекторов в E . Тогда существует оператор $S_T \in M(X, Y)$ такой, что $|S_T| = S$ и $|T - S_T| = |T| - S$.

◁ Обозначим через h_1 каноническое отображение булевой алгебры $\mathfrak{B}(F)$ на базу $\mathfrak{B}(Y, q)$, а через h_2 — каноническое отображение булевой алгебры $\mathfrak{B}(E)$ на базу $\mathfrak{B}(X, p)$. Для каждого $x \in X$ положим $S_T x = \sum_{i=1}^n h_1(\pi_i) Th_2(\sigma_i) x$. Оператор S_T является линейным, и

$$\begin{aligned} q(S_T x) &= q\left(\sum_{i=1}^n h_1(\pi_i) Th_2(\sigma_i) x\right) \leq \sum_{i=1}^n \pi_i q(Th_2(\sigma_i) x) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \pi_i |T| \sigma_i p(x) = Sp(x) \quad (x \in X). \end{aligned}$$

Поэтому $S_T \in M(X, Y)$ и $|S_T| \leq S$.

Обозначив через $I_E(I_F)$ тождественный оператор в $E(F)$ и положив $\pi = I_F - \sup_i \pi_i$, получаем

$$\begin{aligned} q(Tx - S_T x) &= q\left(\sum_{i=1}^n h_1(\pi_i) Tx + h_1(\pi) Tx - \sum_{i=1}^n h_1(\pi_i) Th_2(\sigma_i) x\right) = \\ &= q\left(\sum_{i=1}^n h_1(\pi_i) Th_2(I_E - \sigma_i) x + h_1(\pi) Tx\right) \leq \sum_{i=1}^n \pi_i |T|(I_E - \sigma_i) p(x) + \\ &+ \pi |T| p(x) = \left(\sum_{i=1}^n \pi_i |T|(I_E - \sigma_i) + \pi |T|\right) p(x) = (|T| - S) p(x), \end{aligned}$$

т. е. $|T - S_T| \leq |T| - S$. Если предположить, что $|S_T| < S$ или $|T - S_T| < |T| - S$, то, учитывая дизъюнктность операторов $|T| - S$ и S , получаем

$$|T| = |T - S_T + S_T| \leq |T - S_T| + |S_T| < |T| - S + S = |T|.$$

Поэтому $|S_T| = S$ и $|T - S_T| = |T| - S$. ▷

Докажем основные результаты о разложимости решеточной нормы в пространстве мажорированных операторов.

4.6. Предложение. Пусть (X, p, E) — произвольное РНП, а (Y, q, F) — произвольное ПБК, и в K -пространстве F есть слабая порядковая единица. Тогда отображение $|\cdot|: M(X, Y) \rightarrow \mathcal{L}_r(E, F)$ удовлетворяет условию разложимости (п. 3.1).

◁ Пусть $T \in M(X, Y)$. Возьмем произвольный оператор $S \in A_{|T|}^\uparrow$ (см. теорему 2.5) и покажем существование оператора $S_T \in M(X, Y)$ такого, что $|S_T| = S$, $|T - S_T| = |T| - S$. По предложению 4.5 существует направление операторов $(S_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \subset M(X, Y)$ таких, что $|S_\gamma| \in A_{|T|}^\uparrow$, $|T - S_\gamma| = |T| - |S_\gamma|$ ($\gamma \in \Gamma$) и $(|S_\gamma|)_{\gamma \in \Gamma} \uparrow S$.

Для фиксированного $x \in X$ рассмотрим направление $(S_\gamma x)_{\gamma \in \Gamma}$. Если $\alpha, \gamma \leq \beta$, то, в силу предложения 4.4, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} q(S_\gamma x - S_\alpha x) &\leq |S_\gamma - S_\alpha| p(x) \leq (|S_\beta - S_\gamma| + |S_\beta - S_\alpha|) p(x) = \\ &= (|S_\beta| - |S_\gamma| + |S_\beta| - |S_\alpha|) p(x) \leq (2S - |S_\gamma| - |S_\alpha|) p(x). \end{aligned}$$

Значит, $q(S_\gamma x - S_\alpha x) \xrightarrow{(o)} 0$, т. е. направление $(S_\gamma x)_{\gamma \in \Gamma}$ является bo -фундаментальным. Учитывая bo -полноту (Y, q) , полагаем $S_T x = bo\text{-}\lim S_\gamma x$

$(x \in X)$. Оператор $S_T: X \rightarrow Y$ линеен, и для каждого $x \in X$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} q(S_T x) &= q(\text{bo-lim } S_\gamma x) = o\text{-lim } q(S_\gamma x) \leq o\text{-lim } |S_\gamma| p(x) = S p(x), \\ q((T - S_T) x) &= o\text{-lim } q((T - S_\gamma) x) \leq o\text{-lim } |T - S_\gamma| p(x) = \\ &= o\text{-lim } (|T| - |S_\gamma|) p(x) = (|T| - S) p(x). \end{aligned}$$

Отсюда получаем $|S_T| = S, |T - S_T| = |T| - S$.

Общий случай, т. е. когда $S \in \mathcal{B}_{|T|} = A_{|T|}^{\uparrow\uparrow}$ (см. теорему 2.5), получается трехкратным повторением приведенных выше рассуждений. $\triangleright$

4.7. Теорема. Для произвольных РНП (X, p, E) и ПБК (Y, q, F) пространство $(M(X, Y), |\cdot|)$ является ПБК.

$\triangleleft$ Полнота $(M(X, Y), |\cdot|)$ относительно bo -сходимости очевидна. Необходимо показать разложимость нормы $|\cdot|: M(X, Y) \rightarrow \mathcal{L}_r(X, Y)$. Возьмем произвольный оператор $T \in M(X, Y)$. Через h обозначим каноническое отображение булевой алгебры $\mathfrak{B}(F)$ на базу $\mathfrak{B}(Y, q)$, а через $(\pi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ — такое полное семейство попарно дизъюнктивных порядковых проекторов в F , что все $F_i = \pi_i[F]$ являются K -пространствами со слабыми порядковыми единицами. Требуемое получается применением предложения 4.6 к операторам $T_i = h(\pi_i)T$ и возвратом (с учетом полноты (Y, q)) к оператору T . $\triangleright$

4.8. Пусть $(X, p, E), (Y, q, F)$ являются произвольными ПБК.

Определение. Оператор $T \in M(X, Y)$ называется *сингулярным*, если выполнено следующее условие: всякий bo -непрерывный оператор, мажорируемый оператором $|T|$, является нулевым.

Теперь можем установить еще одно (ср. [23]) обобщение теоремы Иосиды — Хьютта.

Теорема. Каждый оператор $T \in M(X, Y)$ имеет единственное представление в виде суммы $T = T_n + T_s$, где T_n — bo -непрерывный оператор, а T_s — сингулярный. При этом $|T| = |T_n| + |T_s|$.

$\triangleleft$ Представим оператор $|T|$ в виде суммы $|T| = R_n + R_s$, где R_n — порядково непрерывный оператор, R_s — оператор, дизъюнктивный компоненте $\mathcal{L}_n(E, F)$ порядково непрерывных операторов. По теореме 4.7 существует такое представление $T = T_n + T_s$, что $T_n, T_s \in M(X, Y)$, $|T_n| = R_n, |T_s| = R_s$. Так как $|T_n| \in \mathcal{L}_n(E, F)$, то T_n — bo -непрерывный. Если $S \in M(X, Y) \cap \mathcal{L}_{\text{bo}}(X, Y)$ и $|S| \leq |T_s|$, то, с одной стороны, $|S| \in \mathcal{L}_n(E, F)$ (теорема 4.3), а с другой — $|S| d\mathcal{L}_n(E, F)$. Значит, $|S| = 0$ и, следовательно, $S = 0$, т. е. T_s — сингулярный оператор.

Если взять еще одно представление $T = T'_n + T'_s$, где T'_n — bo -непрерывный, а T'_s — сингулярный операторы, то $|T'_n| \in \mathcal{L}_n(E, F)$ и $|T'_s| d\mathcal{L}_n(E, F)$ (теорема 4.3). Поэтому $|T| = |T'_n| + |T'_s|$ и $|T_n| = |T'_n|, |T_s| = |T'_s|$. Норма в РНП разложима единственным образом на дизъюнктивные осколки. Следовательно, $T_n = T'_n, T_s = T'_s$. $\triangleright$

4.9. В заключение параграфа рассмотрим вопрос о распространении мажорированных операторов на bo -пополнение произвольного РНП. Пусть (X, p, E) — РНП, (Y, q, F) — ПБК и $T \in M_n(X, Y)$ (п. 4.3). Если $(\tilde{X}, \tilde{p}, \tilde{E})$ — bo -пополнение (X, p, E) и $i: X \rightarrow \tilde{X}$ — изометрическое вложение (см. п. 3.11), то произвольный элемент $\tilde{x} \in \tilde{X}$ получается из элементов подпространства $i[X]$ операциями перемешивания и переходами к br -пределам (пп. 3.9, 3.10). Удостоверимся, что оператор T «выдерживает» эти преобразования. Если $\tilde{x} = \text{mix}_{\gamma \in \Gamma} (\sigma_\gamma x_\gamma)$, где $(x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \subset i[X]$ и $(\sigma_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \subset \mathfrak{B}(E)$, то через Θ обозначим упорядоченное по включению множество всех конечных подмножеств Γ . Положим

$$z_\Theta = \sum_{\gamma \in \Theta} h(\sigma_\gamma) x_\gamma \quad (\Theta \in \Theta),$$

где h — каноническое отображение базы $\mathfrak{B}(E)$ на базу $\mathfrak{B}(X, p)$. Тогда $\tilde{x} = \text{bo-lim}_{\Theta \in \Theta} z_\Theta$, и потому направление $(z_\Theta)_{\Theta \in \Theta}$ — bo -фундаментальное.

Значит, и $(Tz_0)_{0 \in 0} — bo$ -фундаментальное направление (так как $T \in M_n(X, Y)$). Учитывая bo -полноту (Y, q) , положим $\tilde{T}\tilde{x} = bo\text{-}\lim Tz_0$. Нетрудно заметить, что значение $\tilde{T}\tilde{x}$ не зависит от конкретного представления $\tilde{x}$ в виде $\bigvee_{\gamma \in \Gamma} (\sigma_\gamma x_\gamma)$ и $q(\tilde{T}\tilde{x}) \leq |T|p(\tilde{x})$. Аналогично показывается, что T распространяется на все br -пределы без увеличения мажоранты $|T|$. Тем самым установлен следующий факт.

Теорема. Для каждого оператора $T \in M_n(X, Y)$ существует единственный оператор $\tilde{T} \in M_n(\tilde{X}, \tilde{Y})$ такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ i \downarrow & \nearrow \tilde{T} & \\ \tilde{X} & & \end{array}$$

коммутативна. При этом $|T| = |\tilde{T}|$.

Замечание. В [12] установлено, что каждому ПБК X в подходящей булевозначной модели $V^{(B)}$ отвечает банахово пространство $\mathcal{X}$, причем имеется тесная взаимосвязь между свойствами X и $\mathcal{X}$. Этим объясняется некоторый параллелизм теорий ПБК и банаховых пространств. Могло бы показаться на основании этого, что на самом деле вместо параллелизма имеет место тождество теорий с точностью до перехода к соответствующей модели. Однако это в принципе не верно. Так, например, если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — булевозначные реализации ПБК X и Y соответственно, а $\mathcal{T}$ — линейный ограниченный оператор из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$, то объекту $\mathcal{T} \in V^{(B)}$ отвечает мажорированный оператор $T: X \rightarrow Y$, причем мажоранта $|T|$ будет ортоморфизмом. Мажорированные же операторы более общего вида непосредственно методом булевозначных моделей не поддаются изучению. В частности, в большинстве затронутых в этом параграфе вопросов булевозначный анализ не помогает. Это несколько не умаляет эвристическую и техническую ценность метода булевозначных реализаций, а говорит лишь о том, что теория ПБК весьма содержательна и требует привлечения самых разнообразных аналитических средств.

§ 5. БАНАХОВЫ РАССЛОЕНИЯ И ПРОСТРАНСТВА БАНАХА — КАНТОРОВИЧА

Основное содержание текущего параграфа — представление ПБК банаховыми расслоениями, т. е. (в определенном смысле) непрерывно меняющимися семействами банаховых пространств. В сущности, такое представление можно получить из следующих трех известных фактов.

А. Теорема (D. Higgs [24, 25]). Для любой полной гейтинговой алгебры Ω категория Ω -множеств эквивалентна категории пучков $\text{Sh}(\Omega)$ над Ω .

В. Теорема (C. J. Mulvey [26]). Для любого топологического пространства Q эквивалентны категория $\text{Bn}(Q)$ банаховых расслоений с базой Q и категория банаховых пространств в топосе пучков над Q .

С. Теорема (А. Г. Кусраев [12, 27]). Категория ПБК с фиксированным нормирующим расширенным K -пространством E эквивалентна категории банаховых пространств в топосе B -множеств или в булевозначной модели $V^{(B)}$, где B — база E .

Здесь дается прямой вывод указанного представления, не требующий сложных технических средств, использованных в теоремах А, В и С. Кроме того, в контексте теории ПБК обсуждается интересное само по себе понятие банахова расслоения. Из различных определений банахова расслоения мы выбрали то, которое соответствует интерпретации банахова пространства в топосе пучков над топологическим пространством (см. теорему В). Следует подчеркнуть, что здесь мы работаем с экстремально несвязными компактами и, по существу, имеем дело с булевым топосом.

5.1. Прежде всего приведем общее определение банахова расслоения (см., например, [26, 28, 29]). Пусть Q — некоторое топологическое пространство. Расслоением над Q называют непрерывную сюръекцию $\sigma: X \rightarrow Q$ топологического пространства X на Q . При этом слой в точке $t \in Q$ есть, по определению, непустое множество $X_t := \sigma^{-1}(t) \subset X$. Непрерывное отображение s из непустого подмножества $\text{dom}(s) \subset Q$ в пространство X называется *сечением* над $\text{dom}(s)$, если $s(t) \in X_t$ для каждого $t \in \text{dom}(s)$. Сечение s называют *локальным*, *почти глобальным* или *глобальным* в зависимости от того, является ли область его определения $\text{dom}(s)$ соответственно открытым и собственным подмножеством, которм (т. е. дополнением к тощему) подмножеством или совпадает со всем Q . Произведение двух расслоений $\sigma: X \rightarrow Q$ и $\sigma': X' \rightarrow Q$ есть расслоение $\lambda: X \times_Q X' \rightarrow Q$, определяемое формулами

$$X \times_Q X' = \{(x, x') \in X \times X' : \sigma(x) = \sigma'(x')\},$$

$$\lambda: (x, x') \mapsto \sigma(x) = \sigma'(x'), ((x, x') \in X \times_Q X').$$

Банаховым расслоением или *банаховой связкой* над Q называется расслоение $\sigma: X \rightarrow Q$, подчиненное следующим четырем требованиям:

(1) каждый слой X_t , $t \in Q$ является банаховым пространством относительно некоторой нормы $\|\cdot\| := \|\cdot\|_t$, и топология, определяемая нормой, совпадает с индуцированной;

(2) сумма $(x, y) \in X \times_Q X \mapsto x + y \in X$, умножение на скаляры $R \times X \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in X$ и нулевое сечение $Q \ni t \mapsto 0_t \in X_t \subset X$ являются непрерывными отображениями;

(3) для всякой точки $x \in X$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует локальное сечение $s: \text{dom}(s) \rightarrow X$ такое, что $\|x - s(\sigma(x))\|_{\sigma(x)} < \varepsilon$;

(4) множества $U(s, \varepsilon) := \{x \in X : \sigma(x) \in \text{dom}(s), \|x - s(\sigma(x))\|_{\sigma(x)} < \varepsilon\}$, где s — произвольное локальное сечение, а $\varepsilon > 0$, формируют базис топологии X .

Рассмотрим банаховы расслоения $\mathcal{X} := (X \xrightarrow{\sigma} Q)$ и $\mathcal{Y} := (Y \xrightarrow{\nu} Q)$. Непрерывное отображение $\varphi: X \rightarrow Y$ называется *морфизмом* из σ в ν и обозначается $\varphi: \sigma \rightarrow \nu$, если $\nu \circ \varphi = \sigma$ и для каждого $t \in Q$ ограничение φ_t отображения φ на слой X_t есть линейный ограниченный оператор из X_t в Y_t , причем $\|\varphi_t\| \leq \alpha(t)$, $t \in Q$, для некоторого $\alpha \in C(Q)$. Точную нижнюю границу таких α в K -пространстве $C(Q)$ (если Q экстремально несвязен) обозначим символом $|\varphi|$. Если $|\varphi| = 1$, то φ называют *изометрией*. Отметим, что уже из условия $\nu \circ \varphi = \sigma$ следует, что φ сохраняет слои, т. е. $\varphi(X_t) \subset Y_t$ для каждого $t \in Q$. Класс всех банаховых расслоений над Q и их морфизмов вместе с обычной суперпозицией в качестве композиции образует категорию, которую обозначим символом $\text{Bn}(Q)$.

Множество $\text{Mor}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ морфизмов из $\mathcal{X}$ в $\mathcal{Y}$ можно наделять структурой векторного пространства, если сложение и умножение на скаляры определить послойно: $(\varphi + \psi)_t = \varphi_t + \psi_t$, $(\lambda\varphi)_t = \lambda\varphi_t$, $t \in Q$, где $\varphi, \psi \in \text{Mor}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. При этом оператор $|\cdot|$ оказывается $C(Q)$ -значной нормой на $\text{Mor}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

5.2. Определение банахова расслоения существенно упрощается в случае (локально) паракомпактной базы Q , как видно из следующего утверждения.

Теорема (см. [29]). Пусть Q — паракомпактное пространство. Расслоение $\sigma: X \rightarrow Q$ является банаховым в том и только том случае, если выполнены условия:

(1) топология, индуцированная в $X_t := \sigma^{-1}(t)$ из X совпадает с топологией банахова пространства;

(2) справедливо требование (2) из определения 5.1;

(3) отображение $\|\cdot\|: X \rightarrow R$ полунепрерывно сверху;

(4) всякая окрестность точки $0_t \in X$ содержит окрестность вида $U(s, \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, а s — ограничение нулевого сечения $\theta: t \mapsto 0_t$ на некоторое открытое множество;

(5) отображение σ открыто.

При этом через каждую точку $x \in X$ проходит некоторое глобальное сечение.

5.3. Предположить теперь, что Q — экстремально несвязный компакт, и рассмотрим банахово расслоение $\sigma: X \rightarrow Q$. Пусть E — некоторый фундамент в $C_\infty(Q)$. Возьмем почти глобальное сечение $s: \text{dom}(s) \rightarrow X$. Поскольку функция $u: t \mapsto \|s(t)\|$ (доопределенная на $Q \setminus \text{dom}(s)$ значением $-\infty$) полунепрерывна сверху, то ее полунепрерывная снизу регуляризация

$$\bar{u}(t_0) := \sup_{U} \inf_{t \in U} \{u(t)\} \quad (t_0 \in Q),$$

где супремум берется по всем окрестностям точки t_0 , является непрерывной функцией, совпадающей с u на некотором множестве. Таким образом, функция $\bar{u}$ однозначно определяет некоторый элемент из $C_\infty(Q)$, который обозначим символом $|s|$. Говорят, что почти глобальные сечения s_1 и s_2 эквивалентны, если они совпадают на множестве $\text{dom}(s_1) \cap \text{dom}(s_2)$. Ясно, что в этом случае $|s_1| = |s_2|$. Пусть теперь $E(X \rightarrow Q) := E(X \rightarrow Q)$ — множество классов эквивалентности z всех почти глобальных сечений банахова расслоения $\sigma: X \rightarrow Q$ таких, что $|s| \in E$ для какого-нибудь (а тогда и для всех) $s \in z$. Для почти глобальных сечений s_1 и s_2 полагают, по определению, $(s_1 + s_2): t \mapsto s_1(t) + s_2(t)$, $t \in \text{dom}(s_1) \cap \text{dom}(s_2)$ и $\lambda s_1: t \mapsto \lambda s_1(t)$, $t \in \text{dom}(s_1)$, где $\lambda \in R$. Снижение этих операций на фактор-множество по введенному отношению эквивалентности превращает множество $E(X \rightarrow Q)$ в векторное пространство, называемое пространством почти глобальных сечений банахова расслоения σ (ассоциированным с E). Для каждого $z \in E(X \rightarrow Q)$ положим $|z| := |s|$, где $s \in z$. Легко видеть, что тем самым определяется E -значная норма $|\cdot|$ на $E(X \rightarrow Q)$ и $(E(X \rightarrow Q), |\cdot|)$ есть РНП.

5.4. Теорема. Для любого банахова расслоения $\sigma: X \rightarrow Q$ над экстремально несвязным компактом Q пространство почти глобальных сечений $E(X \rightarrow Q)$, ассоциированное с фундаментом $E \subset C_\infty(Q)$, есть ПБК.

◁ В соответствии с критерием bo -полноты 3.3 нужно лишь доказать дизъюнктивную полноту и br -полноту.

Возьмем разбиение единицы $(Q_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в булевой алгебре $\mathfrak{B}(Q)$ и пусть $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi}$ соответствующее разбиение единицы в $\mathfrak{B}(E)$, т. е. π_ξ — оператор умножения на характеристическую функцию открыто замкнутого множества Q_ξ . Рассмотрим ограниченное множество $(z_\xi)_{\xi \in \Xi}$ в пространстве $E(X \rightarrow Q)$ и обозначим $e = \sup \{|z_\xi|: \xi \in \Xi\}$. Положим $Q'_\xi := Q_\xi \cap \text{dom}(z_\xi)$, $\xi \in \Xi$, и заметим, что $Q' := \bigcup \{Q'_\xi: \xi \in \Xi\}$ — некоторое подмножество Q . В самом деле, если Q_0 — дополнение к $\bigcup \{Q_\xi: \xi \in \Xi\}$, то

$$Q \setminus (Q_0 \cup Q') = \bigcup \{Q_\xi \setminus Q'_\xi: \xi \in \Xi\} = \bigcup_{\substack{n=0 \\ \xi \in \Xi}}^{\infty} F_{\xi, n} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcup_{\xi \in \Xi} F_{\xi, n},$$

где $(F_{\xi, n})_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность замкнутых нигде неплотных подмножеств Q_ξ . Замыкание множества $\bigcup_{\xi} F_{\xi, k}$ содержится в $F_k := \bigcup_{\xi} (Q_0 \cup F_{\xi, k})$, а последнее множество не имеет внутренних точек. Если бы открытое замкнутое множество V содержалось целиком в F_k , то для некоторого $\xi_0 \in \Xi$ было бы $V \cap Q_{\xi_0} \neq \emptyset$, а с другой стороны, $V \cap Q_{\xi_0} \subset F_k \cap Q_{\xi_0} = \bigcup_{\xi} [Q_{\xi_0} \cap (Q_0 \cup F_{\xi, k})] = F_{\xi_0, k}$, что противоречило бы выбору $F_{\xi, k}$. Определим теперь почти глобальное сечение z банахова расслоения $\sigma: X \rightarrow Q$ условиями $\text{dom}(z) := Q'$; $z(t) = z_\xi(t) \quad \forall t \in Q'_\xi, \forall \xi \in \Xi$. Непрерывность этого отображения очевидна. Для каждого $\xi \in \Xi$ выполняется

$\pi_{\xi} z = \pi_{\xi} z_{\xi}$. Отсюда видно, что $0 = |\pi_{\xi} z - \pi_{\xi} z_{\xi}| = \pi_{\xi} |z - z_{\xi}|$, $\xi \in E$, т. е. $z = \text{mix}_{\xi \in E} (\pi_{\xi} z_{\xi})$. В частности, $\pi_{\xi} |z| \leq \pi_{\xi} |z_{\xi}| + \pi_{\xi} |z - z_{\xi}| \leq \pi_{\xi} e \leq e$, $\xi \in E$, или $|z| \leq e$, а потому $|z| \in E$ или $z \in E(X \xrightarrow{\sigma} Q)$.

Рассмотрим теперь *br*-фундаментальную последовательность $(z_n)_{n \in N}$ в $E(X \xrightarrow{\sigma} Q)$. В силу доказанной уже дизъюнктивной полноты можно пользоваться техникой разбиения на компоненты с единицей и, следовательно, можно все свести к случаю, когда единица 1 входит в E и является регулятором сходимости для (z_n) . Итак, существует числовая последовательность (λ_n) такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$; $|z_n - z_m| \leq \lambda_k 1$ для всех

$n, m \geq k$. Пусть $Q_0 := \bigcap_{n=0}^{\infty} \text{dom}(z_n)$. Ясно, что Q_0 — некоторое множество, и можно считать, что при $t \in Q_0$, $m, n \geq k$ выполняется $\|z_n(t) - z_m(t)\|_t \leq \lambda_k 1(t) = \lambda_k$. Из этого вытекает, что последовательность $(z_n(t))_{n \in N}$ фундаментальна в банаховом пространстве X_t и, стало быть, имеет предел $z(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} z_n(t)$. При этом

$$\|z(t) - z_n(t)\|_t = \lim_{m \rightarrow \infty} \|z_m(t) - z_n(t)\|_t \leq \lambda_k \quad (n \geq k, t \in Q_0).$$

Возьмем произвольные $\varepsilon > 0$ и $t_0 \in Q_0$, а локальное сечение s подберем так, чтобы $t_0 \in \text{dom}(s)$ и $\|z_n(t_0) - s(t_0)\|_{t_0} < \varepsilon/2$ для всех $n \geq k_0$. Выберем k_0 настолько большим, чтобы $\lambda_k < \varepsilon/2$, и зафиксируем $n > k_0$. В силу непрерывности z_n найдется окрестность V точки t_0 такая, что $\|z_n(t) - s(t)\|_t < \varepsilon/2$ для всех $t \in V$. Теперь для каждого $t \in V$ имеем

$$\|z(t) - s(t)\|_t \leq \|z(t) - z_n(t)\|_t + \|z_n(t) - s(t)\|_t < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

т. е. $z(t) \in U(s, \varepsilon)$, $t \in V$. Тем самым доказана непрерывность z , значит, z — почти глобальное сечение расслоения $\sigma: X \rightarrow Q$. Наконец, очевидно, что $|z - z_n| \leq \lambda_k 1$, $n > k$, поэтому $z \in E(X \xrightarrow{\sigma} Q)$ и последовательность (z_n) *br*-сходится к z . $\triangleright$

5.5. Теорема. Для любого ПБК (Y, p) , нормированного посредством K -пространства E , существует банахово расслоение $\sigma: X \rightarrow Q$, где Q — стоуновский компакт E , такое, что Y линейно изометрично (в смысле векторных норм) ПБК почти глобальных сечений $E(X \xrightarrow{\sigma} Q)$.

$\triangleleft$ Реализуем E как фундамент в $C_{\infty}(Q)$. Сначала предположим, что $1 \in E$. Положим $Z := \{y \in Y: p(y) \in C(Q)\}$ и обозначим через q ограничение векторной нормы p на Z . Тогда (Z, q) как пространство с $C(Q)$ -значной нормой является ПБК и, в частности, оно *br*-полно. Так как в $C(Q)$ сходимость с регулятором совпадает со сходимостью относительно обычной sup -нормы $\|e\|_{\infty} := \sup \{|e(t)|, t \in Q\}$, то $(Z, \|\cdot\|)$ — банахово пространство, если положить $\|z\| := \|q(z)\|_{\infty}$, $z \in Z$. Как показано в [12], ПБК Y является модулем над кольцом ортоморфизмов $\text{Orth}(E)$, причем норма p модульно однородна. Отсюда видно, что Z является модулем над $C(Q)$, причем $\|ez\| \leq \|e\|_{\infty} \|z\|$ для всех $z \in Z$ и $e \in C(Q)$. С банаховым $C(Q)$ -модулем $(Z, \|\cdot\|)$ свяжем теперь банахово расслоение $\sigma: X \rightarrow Q$. Для этого обозначим $I_t := \{e \in C(Q): e(t) = 0\}$, $t \in Q$. Слой X_t нужного расслоения определим как фактор-пространство $Z/I_t Z$, где $I_t Z := \{ez: e \in I_t, z \in Z\}$ — замкнутое подпространство в Z . Положим $X := \bigcup_{t \in Q} X_t \times \{t\}$ и определим $\sigma: X \rightarrow Q$ соотношениями $\sigma^{-1}(t) = X_t \times \{t\}$, $t \in Q$. Базу топологии в X зададим множествами

$$U(z, \varepsilon) := \{x \in X: \sigma(x) \in U, \|x - \varphi_{\sigma(x)}(z)\|_{\sigma(x)} < \varepsilon\},$$

где $z \in Z$, U — произвольное открыто-замкнутое подмножество Q , $\varepsilon > 0$, а φ_t — канонический фактор-гомоморфизм Z на $Z/I_t Z$. Можно проверить, что $\sigma: X \rightarrow Q$ — банахово расслоение. Известно (см., например, [29]), что при этом банахов модуль Z изоморфен и изометричен пространству

всех глобальных сечений z расслоения $\sigma: X \rightarrow Q$ с нормой $\|z\| = \sup_{t \in Q} \|z(t)\|_t$.

Более того, этот изоморфизм (обозначим его буквой h) сохраняет векторную норму. Возьмем теперь произвольный элемент $y \in Y$, и пусть $p(y) = e \in E$. Тогда существует разбиение единицы (π_ξ) в $\mathfrak{B}(E)$ такое, что $\pi_\xi e \in C(Q)$ для всех ξ . Далее, ввиду разложимости нормы $\pi_\xi p(y) = p(\pi_\xi y) \in C(Q)$, поэтому $\pi_\xi y \in Z$. Обозначим через z_ξ глобальное сечение расслоения $\sigma: X \rightarrow Q$, соответствующее элементу $\pi_\xi y$ в силу указанного изоморфизма. Тогда существует единственное почти глобальное сечение z такое, что $h(\pi_\xi y) = \pi_\xi z$ для всех ξ . При этом $|z| = \sigma \sum \pi_\xi |z_\xi| = \sigma \sum \pi_\xi p(y) = e \in E$, т. е. $z \in E(X \rightarrow Q)$. Положим $h(y) = z$. Ясно, что $h: Y \rightarrow E(X \rightarrow Q)$ — линейная изометрия, причем образом Y служит все $E(X \rightarrow Q)$. $\triangleright$

§ 6. ОБ ОДНОМ БИФУНКТОРЕ В КАТЕГОРИИ РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

Бурное внедрение удобного языка теории категорий и функторов в разные разделы математики привело в том числе и к изучению функторов, связанных с конкретными функционально-аналитическими конструкциями. В частности, интенсивно разрабатывается общая теория функторов в категориях банаховых пространств (см., например, [30—32]). Здесь отметим лишь два результата об описании отображений функторов, порожденных пространствами вектор-функций, а также двойственных функторов. Сначала введем необходимые обозначения. Пусть E — банахово фундаментальное пространство на (T, Σ, μ) (см. [21]), X — банахово пространство, а $E(X)$ — пространство (классов эквивалентности) вектор-функций $z: T \rightarrow X$ таких, что функция $t \rightarrow \|z(t)\|$, $t \in T$ входит в E . Отображение $E \rightarrow E(X)$ является функтором в категории банаховых пространств (см. [30, 32]). Если F — еще одно банахово фундаментальное пространство, то отображения функтора E в функтор F образуют банахову решетку, обозначаемую $\{E \rightarrow F\}$ [31, 32].

А. Теорема (А. В. Бухвалов [32]). *Если F — рефлексивно по Накано, то пространство отображений $\{E \rightarrow F\}$ изометрично пространству порядково непрерывных операторов из E в F .*

Заметим, что в [32] установлен несколько более общий результат.

Обозначим через M_E функтор, сопоставляющий банахову пространству X пространство мажорированных операторов $M_n(E, X)$ с (скалярной) нормой $\|\cdot\|$.

В. Теорема (А. В. Бухвалов [32]). *Двойственный функтор DE изометричен функтору M_E .*

Определение двойственного функтора см. в [30].

Аналогичные вопросы интересно было бы ставить и решать для категорий пространств Банаха — Канторовича. Насколько нам известно, подобные исследования отсутствуют в математической литературе. Ниже мы приведем несколько иллюстративных результатов в этом направлении.

6.1. Пусть X — произвольное банахово пространство, X' — его сопряженное, Γ — некоторое нормативное множество в X' и E — фундамент расширенного K -пространства $C_\infty(Q)$. Через $E_*(X, \Gamma)$ обозначим векторное пространство всех (классов эквивалентности) вектор-функций $z: \text{dom}(z) \rightarrow X$ ($\text{dom}(z) \subset Q$) таких, что

(а) $\text{dom}(z)$ — котопщее подмножество (зависящее, вообще говоря, от z);

(б) функция $t \mapsto \langle z(t), x' \rangle$ непрерывна при каждом $x' \in \Gamma$;

(в) множество $\{\langle z, x' \rangle(\cdot): x' \in \Gamma, \|x'\| \leq 1\}$ ограничено в E ($\langle z, x' \rangle(\cdot)$ означает непрерывное продолжение функции $t \mapsto \langle z(t), x' \rangle$, $t \in \text{dom}(z)$, на весь компакт Q).

Функции, совпадающие на пересечении областей определения, считаем эквивалентными. Через $E(X)$ обозначим подпространство в $E_s(X, X')$, состоящее из непрерывных (по норме) вектор-функций. Пространства непрерывных и измеримых вектор-функций типа $E(X)$ и $E_s(X, X')$ с разных точек зрения изучались в [32, 36—38].

На $E_s(X, X')$, $E(X)$, $E \otimes X$ введем решеточные нормы p' , p , p_0 , называемые *естественными*:

$$p'(z) := \sup \{ |\langle z, x' \rangle(\cdot)| : x' \in X', \|x'\| \leq 1 \} \quad (z \in E_s(X, X')),$$

$$p(z) := \|z\|(\cdot) \quad (z \in E(X)),$$

$$p_0(z) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^k \|x_i\| |e_i| : z = \sum_{i=1}^k e_i \otimes x_i \right\} \quad (z \in E \otimes X).$$

Тогда $p = p'|_{E(X)}$ и РНП $(E_s(X, X'), p')$, $(E(X), p)$ являются ПБК (см., например, [18]). Далее, $p_0 = p|_{E \otimes X}$ и $E \otimes X$ плотно в $E(X)$ по решеточной норме p , другими словами, ПБК $E(X)$ является *бо-пополнением* РНП $(E \otimes X, p_0)$ [18] (о плотности $E \otimes X$ в $E(X)$, когда E является фундаментом в K -пространстве измеримых функций с тотальным E_u , см. в [36]). Заметим, что $E_s(X, X')$ и $E(X)$ не зависят (с точностью до линейной изометрии) от конкретной реализации E в виде фундамента $C_\infty(Q)$.

6.2. Замечания. (1) Пусть X — банахово пространство и E — фундамент K -пространства $C_\infty(Q)$ и $E^* := \{z \in C_\infty(Q) : z \cdot E \subset E\}$. Каждому элементу $w \in E_s(X') := E_s(X, X')$ поставим в соответствие оператор $S_w: v \rightarrow \langle v, w \rangle$, $v \in E(X)$, где $\langle v, w \rangle$ — та единственная функция из E , для которой на некотором котошем множестве выполняется равенство $\langle v, w \rangle(t) = \langle v(t), w(t) \rangle$. Можно показать, что сопоставление $w \mapsto S_w$ есть линейная изометрия ПБК $E_s^*(X')$ и $E(X)^*$, где $E(X)^* := M_{E^*}(E(X), E)$ — пространство мажорированных операторов с мажорантами из E^* (см. [12]). Пространство $E(X)^*$ называют *операторным сопряженным к $E(X)$* . Если бы $E_s^*(X') = E^*(X')$, то второе операторно сопряженное пространство $E(X)^{**}$ оказалось бы изометричным ПБК $E_s^{**}(X'')$. Однако это не всегда так. В этой связи естественно спросить, для каких E и X верно, что $E_s(X) = E(X)$? Нам не известен исчерпывающий ответ на такой вопрос. Отметим, что если K -пространство E имеет регулярную базу, а банахово пространство X сепарабельно, то $E_s(X') = E(X)$ (см. [12, 18]).

(2) Вопрос о совпадении пространств $E_s(X')$ и $E(X')$ возникает и в связи с булевозначным анализом. Пусть $V^{(B)}$ — булевозначная модель теории множеств, построенная на основе полной булевой алгебры $B := \mathfrak{B}(E)$ (см. [12, 33]). Тогда образ X^V банахова пространства X при каноническом вложении класса всех множеств в универсум $V^{(B)}$ будет равномерным пространством внутри $V^{(B)}$, а его пополнение $\mathcal{G}(X)$ — это банахово пространство в модели $V^{(B)}$ [34]. Если $\mathcal{G}(X) \downarrow := \{x \in V^{(B)} : \langle x \in \mathcal{G}(X) \rangle = 1\}$, то $\mathcal{G}(X) \downarrow$ является ПБК изометричным пространству $E(X)$. В частности, $\mathcal{G}(X') \downarrow \simeq E(X')$. Возьмем теперь элемент $\mathcal{G}(X)' \in V^{(B)}$ такой, что $V^{(B)} \models \mathcal{G}(X)'$ — сопряженное к банахову пространству $\mathcal{G}(X)$. В [35] установлено, что множество $\mathcal{G}(X)' \downarrow$ биективно с пространством операторов с абстрактной нормой $M(X, E)$ из X в E . Более того, имеет место линейная изометрия $M(X, E) \simeq \mathcal{G}(X)' \downarrow$. В силу сказанного выше верно также $\mathcal{G}(X)' \downarrow \simeq E_s(X')$. Таким образом, в модели $V^{(B)}$ банаховы пространства $\mathcal{G}(X')$ и $\mathcal{G}(X)'$ изометричны в том и только том случае, если $E_s(X') = E(X')$. В частности, если X — рефлексивное банахово пространство, причем $E_s(X') \simeq E(X')$ и $E_s(X) = E(X)$, то $\mathcal{G}(X)$ — рефлексивное банахово пространство в модели $V^{(B)}$ и $E(X)^{**} \simeq E(X)$.

6.3. Пусть Y — еще одно банахово пространство, F — фундамент K -пространства $C_\infty(Q_1)$. Возьмем порядково непрерывный оператор $T: E \rightarrow F$ и ограниченный оператор $S: X \rightarrow Y$. На $F(Y)$ и $F \otimes Y$ рассмотрим естественные нормы q и q_0 соответственно.

Предложение. Оператор $T \otimes S: E \otimes X \rightarrow F \otimes Y$, задаваемый формулой

$$T \otimes s: z \rightarrow \sum_{i=1}^k T e_i \otimes S x_i \left(z = \sum_{i=1}^k e_i \otimes x_i \in E \otimes X \right)$$

принадлежит $M_n(E \otimes X, F(Y))$.

◁ Действительно, если $z = \sum e_i \otimes x_i$, то

$$\begin{aligned} q((T \otimes S)z) &= q\left(\sum T e_i \otimes S x_i\right) = q_0\left(\sum T e_i \otimes S x_i\right) = \\ &= \inf \left\{ \sum \|y_j\| \|f_j\| : \sum f_j \otimes y_j \in F \otimes Y, \sum f_j \otimes y_j = \right. \\ &= \left. \sum T e_i \otimes S x_i \right\} \leq \sum \|S x_i\| \|T e_i\| \leq \|S\| \|T\| \left(\sum \|x_i\| \cdot \|e_i\| \right). \end{aligned}$$

Из фильтруемости вниз множества $\{\sum \|x'_k\| \|e'_k\| : z = \sum e'_k \otimes x'_k\}$ и порядковой непрерывности оператора $|T|$ следует неравенство

$$q((T \otimes S)z) \leq \|S\| |T| p_0(z) = \|S\| |T| p(z).$$

и, тем самым, показано включение $T \otimes S \in M_n(E \otimes X, F(Y))$. ▷

По теореме 4.9 оператор $T \otimes S$ однозначно распространим без увеличения решеточной нормы до оператора из $M_n(E(X), F(Y))$. За распространением оператора $T \otimes S$ на $E(X)$ сохраним то же обозначение. Таким образом, $T \otimes S \in M_n(E(X), F(Y))$ и $|T \otimes S| \leq \|S\| |T|$.

6.4. Рассмотрим три категории:

(а) $\mathcal{B}$ — подкатегория категории банаховых пространств и линейных ограниченных операторов;

(б) $\mathcal{K}$ — подкатегория категории K -пространств и порядково непрерывных операторов;

(в) $\mathcal{BK}$ — категория всех пространств Банаха — Канторовича (ПБК) и мажорированных операторов с порядково непрерывными мажорантами (определение см. в § 4). Во всех трех категориях имеется в виду обычная суперпозиция в качестве композиции морфизмов. Полагаем, что R входит в $\mathcal{B}$ и $\mathcal{K}$.

Каждое K -пространство E задает функтор E из категории $\mathcal{B}$ в категорию $\mathcal{BK}$. Именно для каждого банахова пространства X положим $E(X) := E(X)$ и для каждого линейного ограниченного оператора S из банахова пространства X в банахово пространство Y обозначим $E(S) := I_E \otimes S$, где I_E — тождественный оператор в E . Заметим, что $E(I_X) := I_E \otimes I_X = I_{E(X)}$ и $E(S \circ T) = E(S) \circ E(T)$. Пусть F — еще одно K -пространство и F — соответствующий функтор. Рассмотрим векторное пространство $\{E \rightarrow F\}$ отображений E в F . (Теоретико-множественные трудности, возникающие в связи с подобными понятиями, можно исключить, предполагая, например, что категории $\mathcal{K}$ и $\mathcal{B}$ малые.) Если обозначить через $\bar{x}$ оператор из R в банахово пространство X , сопоставляющий числу α элемент αx , то из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} E(X) & \xrightarrow{\varphi_X} & F(X) \\ E(\bar{x}) \uparrow & & \uparrow F(\bar{x}) \\ E & \xrightarrow{\varphi_R} & F \end{array}$$

получим $\varphi_X(\sum e_i \otimes x_i) = \sum (\varphi_R e_i) \otimes x_i$ или, что то же (см. 6.3),

$$\varphi_X = \varphi_R \otimes I_X \in M_n(E(X), F(X))$$

и

$$|\varphi_X| \leq |\varphi_R| = |\varphi_R| \in \mathcal{L}_n(E, F).$$

Введем решеточную норму на $\{E \rightarrow F\}$, полагая $|\varphi| := \sup \{ |\varphi_X| : X \in \mathcal{B} \}$. Как видно, $|\varphi| = |\varphi_R|$, причем $(\{E \rightarrow F\}, |\cdot|)$ является РНП.

6.5. Теорема. Отображение $T \mapsto \{\varphi_X = T \otimes I_X\}$ осуществляет линейную изометрию ПБК $(\mathcal{L}_n(E, F), |\cdot|, \mathcal{L}_n(E, F))$ на $(\{E \rightarrow F\}, |\cdot|, \mathcal{L}_n(E, F))$. В частности, $\{E, F\}$ — ПБК.

◁ Если $T \in \mathcal{L}_n(E, F)$, то $T \otimes I_X \in M_n(E(X), F(X))$ и для каждого ограниченного оператора $S: X \rightarrow Y$ имеем

$$(T \otimes I_X) \circ E(S) = T \otimes S = F(S) \circ (T \otimes I_X).$$

Таким образом, $\{\varphi_X = T \otimes I_X\}$ является отображением функтора E в функтор F .

Если $\varphi \in \{E \rightarrow F\}$, то из коммутативности приведенной выше диаграммы следует, что $\varphi_X = \varphi_R \otimes I_X$. Линейность и изометричность отображения $T \mapsto \{\varphi_X = T \otimes I_X\}$ очевидны. ▷

6.6. С произвольным банаховым пространством $X \in \mathcal{B}$ свяжем функтор X из категории $\mathcal{K}$ в категорию $\mathcal{BK}$:

$$\begin{aligned} X(E) &:= E(X) \quad (E \in \mathcal{K}), \\ X(T) &:= T \otimes I_X \quad (T \in \mathcal{L}_n(E, F)). \end{aligned}$$

Аналогичный функтор Y определим для банахова пространства $Y \in \mathcal{B}$. Легко видеть, что отображение $\|\cdot\|: \{X \rightarrow Y\} \rightarrow R$, задаваемое по формуле

$$\|\psi\| := \sup_{E \in \mathcal{K}} \inf \{\alpha > 0: \alpha \in R, |\psi_E| \leq \alpha I_E\} = \|\psi_R\| \quad (\psi \in \{X \rightarrow Y\}),$$

задает норму на линейном пространстве $\{X \rightarrow Y\}$, и при этом справедлива

6.7. Теорема. Отображение $S \mapsto \{\psi_E = I_E \otimes S\}$ осуществляет линейную изометрию банахова пространства всех ограниченных операторов из X в Y на $(\{X \rightarrow Y\}, \|\cdot\|)$.

◁ Доказательство аналогично 6.5. ▷

ЛИТЕРАТУРА

1. Канторович Л. В. О функциональных уравнениях.— Уч. зап. ЛГУ, 1937, т. 3 (17), с. 17—33.
2. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г. Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах.— М.—Л.: Гостехиздат, 1950.
3. Zaanen A. C. Riesz spaces II.— Amsterdam—London: North Holland, 1983.
4. Schaefer H. H. Banach lattices and positive operators.— Berlin a. o.: Springer, 1974.
5. Акилов Г. П., Кутателадзе С. С. Упорядоченные векторные пространства.— Новосибирск: Наука, 1978.
6. Вулих Б. З., Лозановский Г. Я. О представлении вполне линейных и регулярных функционалов в полупорядоченных пространствах.— Мат. сб., 1971, т. 84, № 3, с. 331—352.
7. Вулих Б. З. Введение в теорию полупорядоченных пространств.— М.: Физматгиз, 1961.
8. Luxemburg W. A. T., Schep A. R. A Radon—Nikodim type theorem for positive operators and a dual.— Indag. Math., 1978, v. 40, N 3, p. 357—376.
9. Кусраев А. Г. Общие формулы дезинтегрирования.— Докл. АН СССР, 1982, т. 265, № 6, с. 1312—1316.
10. de Pagter B. The components of a positive operator.— Indag. Math., 1983, v. 45, N 2, p. 229—241.
11. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. The components of a positive operator.— Math. Z., 1983, Bd 184, N 2, s. 245—257.
12. Кусраев А. Г. Векторная двойственность и ее приложения.— Новосибирск: Наука, 1985.
13. Стрижевский В. З. Дизъюнктность некоторых классов порядково непрерывных операторов.— Докл. АН СССР, 1985, т. 280, № 3, с. 556—559.
14. Абрамович Ю. А. Инъективные оболочки нормированных структур.— Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 4, с. 743—745.
15. Векслер А. И. О новой конструкции дедекиндова пополнения векторных структур и l -групп с делением.— Сиб. мат. журн., 1969, т. 10, № 6, с. 1206—1213.
16. Векслер А. И., Гейлер В. А. О порядковой и дизъюнктной полноте линейных полупорядоченных пространств.— Сиб. мат. журн., 1972, т. 13, № 1, с. 43—51.
17. Скляднев С. А. О пополнении структурно-нормированных пространств.— В кн.: Труды семинара по функциональному анализу. Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 1968, вып. 10, с. 21—32.
18. Кусраев А. Г., Стрижевский В. З. Решеточно нормированные пространства и классы непрерывных вектор-функций.— Оптимизация, 1984, вып. 34, с. 24—36.
19. Кусраев А. Г., Стрижевский В. З. О структуре решеточно нормированных пространств.— Новосибирск, 1984, 30 с. (Препринт/Ин-т математики СО АН СССР).

20. Векслер А. И. О структурной упорядочиваемости алгебр и колец.— Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 2, с. 259—262.
21. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.
22. Dinculeanu N. Vector measures.— Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.
23. Бухвалов А. В. Интегральные операторы и пространства измеримых векторнозначных функций.— Автореферат дис. ...докт. физ.-мат. наук/Ленингр. отд-ние Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1984.— 26 с.
24. Higgs D. A category approach to Boolean valued set theory.— Waterloo, 1973.
25. Fourman M. P., Scott D. Sheaves and logic.— In: Applications of sheaves. Berlin a. o.: Springer, 1979, p. 302—401 (Lecture Notes in Math., N 753).
26. Mulvey C. T. Banach sheaves.— Journal of Pure and applied Algebra, 1980, v. 17, N 1, p. 69—83.
27. Кусраев А. Г. О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа.— Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 2, с. 283—286.
28. Зайденберг М. Г., Крейн С. Г., Кучмент П. А., Панков А. А. Банаховы расслоения и линейные операторы.— Успехи мат. наук, 1975, т. 30, вып. 5, с. 101—157.
29. Hofman K. H., Keimel K. Sheaf theoretical concepts in analysis: bundles and sheaves of Banach spaces, Banach $C(X)$ -modules.— In: Applications of Sheaves. Berlin: Springer, 1979, p. 415—441 (Lecture Notes in Math., N 753).
30. Митягин Б. С., Шварц А. С. Функторы в категориях банаховых пространств.— Успехи мат. наук, т. 19, вып. 2, с. 65—182.
31. Левин В. Л. Тензорные произведения и функторы в категориях банаховых пространств, определяемые K -линеалами.— Тр. Моск. мат. об-ва, 1969, т. 20, с. 43—82.
32. Бухвалов А. В. О двойственности функторов, порождаемых пространствами вектор-функций.— Изв. АН СССР. Сер. математическая, 1975, т. 39, № 6, с. 1284—1309.
33. Иех Т. Теория множеств и метод форсинга.— М.: Мир, 1973.
34. Любецкий В. А., Гордон Е. И. Булевы расширения равномерных структур.— В кн.: Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983, с. 82—153.
35. Гордон Е. И. K -пространства в булевозначных моделях теории множеств.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 4, с. 777—780.
36. Бухвалов А. В. Пространства вектор-функций и тензорные произведения.— Сиб. мат. журн., 1972, т. 13, № 6, с. 1229—1238.
37. Бухвалов А. В. Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой.— Изв. вузов. Математика, 1975, № 11, с. 21—32.
38. Бухвалов А. В. Об аналитическом представлении линейных операторов при помощи измеримых вектор-функций.— Изв. вузов. Математика, 1977, № 7, с. 21—32.

Ю. Г. РЕШЕТНЯК

К ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

Для всякой двумерной поверхности P , удовлетворяющей принятым в дифференциальной геометрии условиям регулярности, может быть определена некоторая вполне аддитивная функция множества h . Именно пусть $\mathbf{H}(p)$ есть вектор средней кривизны поверхности в произвольной точке $p \in P$. (В случае поверхностей в трехмерном пространстве $\mathbf{H}(p) = 2H(p)\mathbf{v}(p)$, где $H(p)$ — средняя кривизна, $\mathbf{v}(p)$ — единичный вектор нормали в точке p .) Обозначим через $S(E)$ площадь множества $E \subset P$ и для произвольного борелевского множества положим

$$h(E) = \int_E \mathbf{H}(p) dS(p).$$

Вектор-функцию множества h будем называть *интегральной средней кривизной поверхности P* .

Цель настоящей работы — ввести наиболее общий класс поверхностей, для которых может быть естественным образом определена интегральная средняя кривизна. Предлагаемое здесь решение этой задачи основано на следующем наблюдении. Пусть $u(x, y)$ ($(x, y) \in G$, G — область на плоскости) — параметризация поверхности P . Предположим,