20. **Векслер А. И.** О структурной упорядочиваемости алгебр и колец.— Докл. АН СССР, 1965, т. 164, № 2, с. 259—262.
21. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.
22. **Dinculeanu N.** Vector measures.— Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.
23. **Бухвалов А. В.** Интегральные операторы и пространства измеримых векторнозначных функций.— Автореферат дис. ...докт. физ.-мат. наук/Ленингр. отд-ние Мат. ин-та им. В. А. Стеклова, 1984.— 26 с.
24. **Higgs D.** A category approach to Boolean valued set theory.— Waterloo, 1973.
25. **Fourman M. P., Scott D.** Sheaves and logic.— In: Applications of sheaves. Berlin a. o.: Springer, 1979, p. 302—401 (Lecture Notes in Math., N 753).
26. **Mulvey C. T.** Banach sheavers.— Journal of Pure and applied Algebra, 1980, v. 17, N 1, p. 69—83.
27. **Кусраев А. Г.** О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа.— Докл. АН СССР, 1983, т. 271, № 2, с. 283—286.
28. **Зайденберг М. Г., Крейн С. Г., Кучмент П. А., Панков А. А.** Банаховы расслоения и линейные операторы.— Успехи мат. наук, 1975, т. 30, вып. 5, с. 101—157.
29. **Hofman K. H., Keimel K.** Sheaf theoretical concepts in analysis: bundles and sheaves of Banach spaces, Banach $C(X)$-modules.— In: Applications of Sheaves. Berlin: Springer, 1979, p. 415—441 (Lecture Notes in Math., N 753).
30. **Митягин Б. С., Шварц А. С.** Функторы в категориях банаховых пространств.— Успехи мат. наук, т. 19, вып. 2, с. 65—182.
31. **Левин В. Л.** Тензорные произведения и функторы в категориях банаховых пространств, определяемые K-линеалами.— Тр. Моск. мат. об-ва, 1969, т. 20, с. 43—82.
32. **Бухвалов А. В.** О двойственности функторов, порождаемых пространствами вектор-функций.— Изв. АН СССР. Сер. математическая, 1975, т. 39, № 6, с. 1284—1309.
33. **Йех Т.** Теория множеств и метод форсинга.— М.: Мир, 1973.
34. **Любецкий В. А., Гордон Е. И.** Булевы расширения равномерных структур.— В кн.: Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М.: Наука, 1983, с. 82—153.
35. **Гордон Е. И.** K-пространства в булевозначных моделях теории множеств.— Докл. АН СССР, 1981, т. 258, № 4, с. 777—780.
36. **Бухвалов А. В.** Пространства вектор-функций и тензорные произведения.— Сиб. мат. журн., 1972, т. 13, № 6, с. 1229—1238.
37. **Бухвалов А. Б.** Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой.— Изв. вузов. Математика, 1975, № 11, с. 21—32.
38. **Бухвалов А. В.** Об аналитическом представлении линейных операторов при помощи измеримых вектор-функций.— Изв. вузов. Математика, 1977, № 7, с. 21—32.

Ю. Г. РЕШЕТНЯК

К ТЕОРИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

Для всякой двумерной поверхности P, удовлетворяющей принятым в дифференциальной геометрии условиям регулярности, может быть определена некоторая вполне аддитивная функция множества h. Именно пусть $\mathbf{H}(p)$ есть вектор средней кривизны поверхности в произвольной точке $p \in P$. (В случае поверхностей в трехмерном пространстве $\mathbf{H}(p) = 2H(p)\nu(p)$, где $H(p)$ — средняя кривизна, $\nu(p)$ — единичный вектор нормали в точке p.) Обозначим через $S(E)$ площадь множества $E \subset P$ и для произвольного борелевского множества положим

$$h(E) = \int_E \mathbf{H}(p)\, dS(p).$$

Вектор-функцию множества h будем называть *интегральной средней кривизной поверхности P*.

Цель настоящей работы — ввести наиболее общий класс поверхностей, для которых может быть естественным образом определена интегральная средняя кривизна. Предлагаемое здесь решение этой задачи основано на следующем наблюдении. Пусть $u(x, y)$ $((x, y) \in G$, G — область на плоскости) — параметризация поверхности P. Предположим, что эта параметризация является изотермической, т. е.

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\right|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right|^2 = \lambda(x, y),$$

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right\rangle = 0.$$

(Здесь $\langle , \rangle$ означает скалярное произведение векторов.) Тогда для всякой точки $p = u(x, y)$ поверхности имеем $\mathbf{H}(p)\lambda(x, y) = \Delta u(x, y)$ (Δ — оператор Лапласа), откуда заключаем, что для любого множества E на поверхности P

$$h(E) = \int\limits_{u^{-1}(E)} \Delta u(x, y)\, dxdy.$$

В соответствии с этим мы будем говорить, что поверхность P в пространстве $\mathbf{R}^n$ есть поверхность ограниченной средней кривизны, если она допускает параметризацию $u(x, y)$ такую, что вектор-функция имеет обобщенные в смысле С. Л. Соболева первые производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$, причем $\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x, y)\right|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\right|^2$, $\left\langle \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right\rangle = 0$ для почти всех $(x, y) \in G$ и оператор Лапласа функции $u(x, y)$, понимаемый в смысле обобщенных функций, есть вполне аддитивная функция множества в области G. Мы будем рассматривать, главным образом, случай, когда G — круг. Класс поверхностей ограниченной интегральной средней кривизны в смысле данного определения обозначим через $\mathscr{H}$.

Основным результатом статьи является предложение о предельном переходе (лемма 4.3). С его помощью может быть установлена, в частности, принадлежность классу $\mathscr{H}$ класса поверхностей ограниченной абсолютной интегральной кривизны (ПОАСИК), введенного и исследуемого И. А. Данеличем [1—3].

Результат настоящей статьи анонсирован в заметке автора [4].

§ 1. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВЕКТОРНЫХ МЕРАХ

Приведем здесь некоторые определения и опишем обозначения, используемые в дальнейшем. Для $c \in \mathbf{C}$ и $r > 0$, $B(c, r)$ есть открытый круг $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - c| < r\}$, $\bar{B}(c, r)$ — замкнутый круг $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - c| \leqslant r\}$, $\Gamma(c, r)$ — окружность $\{z \in \mathbf{C} \mid |z - c| = r\}$. Для краткости обозначаем: $B = B(0, r)$, $B = B(0, 1)$, $\bar{B} = \bar{B}(0, 1)$, $\Gamma = \Gamma(0, 1)$.

Для произвольного непустого множества $E \subset \mathbf{C}$ и числа $z \in \mathbf{C}$ определим расстояние от точки z до множества E как величину $\rho(z, E) \inf\limits_{\zeta \in E} |z - \zeta|$.

Пусть G — открытое множество в $\mathbf{C}$. Будем говорить, что *функция* $u\colon G \to \mathbf{R}^m$, $m \geqslant 1$, *принадлежит классу* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(G)$, $p \geqslant 1$, если каждая из ее компонент $u_1(z), u_2(z), \ldots, u_m(z)$ имеет в G обобщенные первые производные $\frac{\partial u_j}{\partial x}(z)$ и $\frac{\partial u_j}{\partial y}(z)$, $j = 1, 2, \ldots, m$, интегрируемые в степени p на всяком компактном подмножестве G. Если указанные производные интегрируемы в степени p на всем множестве G, то мы будем говорить, что *u принадлежит классу* $W^1_p(G)$.

Далее мы будем рассматривать разного рода вектор-функции множества. Приведем необходимые определения.

Пусть T — произвольное множество, S — некоторое σ-кольцо его подмножеств. *Мерой со значением в* $\mathbf{R}^m$, $m \geqslant 1$, называется всякая вполне аддитивная функция множеств $\mu\colon S \to \mathbf{R}^m$. При $m \geqslant 2$ меру со значениями в $\mathbf{R}^m$ будем называть *векторной*. Если $\mu\colon S \to \mathbf{R}^m$ — векторная мера, то для всякого $A \in S$ имеем: $\mu(A) = (\mu_1(A), \mu_2(A), \ldots, \mu_m(A))$.

Меры μ_j, $j=1, 2, \ldots, m$, которые таким образом определены, называются *компонентами векторной меры* μ.

Пусть μ: $S\to\mathbf{R}^m$ — векторная мера. Для произвольного $A\in S$ положим

$$|\mu|(A)=\sup\sum_{k=1}^{l}|\mu(A_k)|,$$

где $A_k\in S$, $k=1, 2, \ldots, l$,— произвольная конечная система попарно непересекающихся подмножеств A, для которой $\bigcup_{k=1}^{l} A_k=A$, и точная верхняя граница берется по совокупности всех таких конечных разбиений A. Для всякого $A\in S$ величина $|\mu|(A)$ конечна и $|\mu(A)|\leqslant|\mu|(A)$.

Введем некоторые обозначения для интегралов по мере. Если u: $T\to\mathbf{R}$ — вещественная функция, μ: $S\to\mathbf{R}^m$ — векторная мера, то символ

$$\int_T u(x)\,d\mu(x)$$

означает вектор, j-я компонента которого есть

$$\int_T u(x)\,d\mu_j(x),\quad j=1, 2, \ldots, m.$$

($\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ — компоненты меры μ). Имеет место оценка

$$\left|\int_T u(x)\,d\mu(x)\right|\leqslant\int_T|u(x)|\,d|\mu|(x).$$

Пусть даны вектор-функция u: $T\to\mathbf{R}^m$ и векторная мера μ: $S\to\mathbf{R}^m$, $u=(u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $\mu=(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$. Тогда полагаем

$$\int_T\langle u(x), d\mu(x)\rangle=\sum_{i=1}^{m}\int_T u_i(x)\,d\mu_i(x).$$

Справедлива оценка

$$\left|\int_T\langle u(x), d\mu(x)\rangle\right|\leqslant\int_T|u(x)|\,d|\mu|(x).$$

§ 2. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПОВЕРХНОСТЯХ ФРЕШЕ

Поверхность здесь понимается в смысле Фреше. Это понятие является частным случаем общего понятия многообразия Фреше. Приведем необходимые определения.

Пусть дано некоторое непустое семейство $\mathfrak{M}$ топологических пространств, любые два из которых гомеоморфны и для каждой пары $X, Y\in\mathfrak{M}$ выделено некоторое непустое множество $\mathcal{T}(X, Y)$ топологических отображений X на Y. Будем предполагать, что $\mathcal{T}(X, Y)$ удовлетворяет следующим естественным условиям.

А. Если $\varphi\in\mathcal{T}(X, Y)$, $\psi\in\mathcal{T}(Y, Z)$, то $\psi\circ\varphi\in\mathcal{T}(X, Z)$.

Б. Если $\varphi\in\mathcal{T}(X, Y)$, то $\varphi^{-1}\in\mathcal{T}(Y, X)$.

Из А и Б, в частности, следует, что для каждого X множество $\mathcal{T}(X, X)$ образует группу относительно композиции отображений $(\varphi, \psi)\mapsto\psi\circ\varphi$.

Предположим, что задано метрическое пространство $\mathfrak{R}$ с метрикой ρ. *Параметризованным многообразием типа* $\mathfrak{M}$ называется всякое непрерывное отображение u: $X\to\mathfrak{R}$, где $X\in\mathfrak{M}$. Пусть u: $X\to\mathfrak{R}$, v: $Y\to\mathfrak{R}$ — произвольные параметризованные многообразия типа $\mathfrak{M}$. Полагаем

$$\rho(u, v)=\inf_{\varphi}\left(\sup_{x\in X}\rho(u(x), v[\varphi(x)])\right),$$

где точная нижняя граница взята по множеству всех гомеоморфизмов

$\varphi \in \mathscr{T}(X, Y)$. Легко проверяется, что для любых u, v, w

$$0 \leqslant \rho(u, v) = \rho(v, u) \leqslant \infty, \quad \rho(u, w) \leqslant \rho(u, v) + \rho(v, w).$$

Параметризованные многообразия u: $X \to \mathfrak{R}$ и v: $Y \to \mathfrak{R}$ типа $\mathfrak{M}$ считаем *эквивалентными*, если $\rho(u, v) = 0$. Совокупность всех параметризованных многообразий типа $\mathfrak{M}$ распадается на классы эквивалентных. Каждый такой класс P называется *многообразием Фреше типа* $\mathfrak{M}$. Элементы класса P называются *параметризациями многообразия* P.

Отметим два частных случая.

I. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех отрезков $[a, b] \subset \mathbf{R}$, а $\mathscr{T}(X, Y)$ — совокупность всех топологических отображений отрезка $X = [a, b]$ на отрезок $Y = [c, d]$. Многообразие Фреше типа $\mathfrak{M}$ в этом случае называется *кривой в пространстве* $\mathfrak{R}$.

II. Пусть M — компактное двумерное многообразие с краем, $\mathfrak{M}$ — совокупность всех топологических пространств, гомеоморфных M. В этом случае многообразие Фреше типа $\mathfrak{M}$ будем называть *поверхностью типа* M *в пространстве* $\mathfrak{R}$. В том частном случае, когда M есть круг $\bar{B} \subset \mathbf{C}$, поверхность типа M будем называть *поверхностью типа круга в пространстве* $\mathfrak{R}$.

Пусть P и Q — два многообразия Фреше типа $\mathfrak{M}$ в пространстве $\mathfrak{R}$. Полагаем $\rho(P, Q) = \rho(u, v)$, где $u \in P$, $v \in Q$. (От выбора u и v величина $\rho(P, Q)$, очевидно, не зависит.) Величина $\rho(P, Q)$ является метрикой на совокупности всех многообразий Фреше типа $\mathfrak{M}$. Говорят, что *последовательность поверхностей* (P_m), $m = 1, 2, \ldots$, *сходится к поверхности* P_0 *при* $m \to \infty$, если $\rho(P_m, P_0) \to 0$ при $m \to \infty$. Это условие равносильно следующему. Существуют параметризации u_m: $X \to \mathfrak{R}$, $m = 1, 2, \ldots$, и u_0: $X \to \mathfrak{R}$ поверхностей P_m и P_0 соответственно такие, что $u_m \to u_0$ равномерно при $m \to \infty$.

Поверхность P типа круга в метрическом пространстве $\mathfrak{R}$ называется *невырожденной*, если она допускает параметризацию u: $\bar{B} \to \mathfrak{R}$ такую, что множество $u[\Gamma]$ содержит более одной точки и для всякой точки $p \in u[\bar{B}]$ множество $u^{-1}(p)$ не разбивает круг $\bar{B}$.

Лемма 2.1. *Пусть P — невырожденная поверхность типа круга в метрическом пространстве $\mathfrak{R}$, u: $X \to \mathfrak{R}$ — произвольная параметризация P, где X — замкнутый круг в плоскости $\mathbf{C}$. Тогда по всякому $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $L \subset X$ есть континуум, для которого диаметр множества $u(L)$ меньше δ и множество $X \setminus L$ несвязно, то по крайней мере для одной из связных компонент G множества $X \setminus L$ диаметр множества $u(G)$ меньше ε.*

Доказательство. Предположим, вопреки доказываемому, что для некоторого $\varepsilon = \varepsilon_0$ требуемое $\delta > 0$ не существует. Пусть v: $Y \to \mathfrak{R}$ — параметризация P, удовлетворяющая условию, указанному в определении невырожденности P. Каково бы ни было натуральное число m, в силу сделанного предположения найдется континуум $L_m \subset X$ такой, что $\operatorname{diam} u(L_m) < 1/m$, множество $X \setminus L_m$ несвязно, и $\operatorname{diam} u(G) \geqslant \varepsilon_0$ для любой связной компоненты G множества $X \setminus L_m$. Так как $X \setminus L_m$ несвязно, то множество $X \setminus L_m$ имеет по крайней мере две различные компоненты G'_m и G''_m. Диаметры множества $u(G'_m)$ и $u(G''_m)$ не меньше ε_0. Отсюда вытекает, что найдутся точки $z_{1m} \in G'_m$ и $z_{2m} \in G''_m$ такие, что каждая из точек $u(z_{1m})$ и $u(z_{2m})$ отстоит от множества $u(L_m)$ на расстоянии, не меньшем $\varepsilon_0/2 - 1/2m$. Пусть φ_m: $X \to Y$ — топологическое отображение X на Y такое, что $\rho(u(z), v[\varphi_m(z)]) < 1/m$ для всех $z \in X$. Положим $K_m = \varphi_m(L_m)$, $\zeta_{1m} = \varphi_m(z_{1m})$, $\zeta_{2m} = \varphi_m(z_{2m})$. Так как $\operatorname{diam} v(K_m) \leqslant 3/m$ и каждая точка $u(L_m)$ отстоит от множества $v(K_m)$ на расстоянии, меньшем $1/m$, то точки $v(\zeta_{1m})$ и $v(\zeta_{2m})$ отстоят от $v(K_m)$ на расстоянии, не меньшем $\varepsilon_0/2 - 1/2m - 1/m - 1/m = \varepsilon_0/2 - 5/2m$. Пусть $l_1 < l_2 < \ldots < l_m < \ldots$ — последовательность натуральных чисел такая, что последовательность континуумов K_{l_m} топологически сходится к некоторому континууму K_0, а последовательности точек ζ_{1l_m} и ζ_{2l_m}, $m = 1, 2, \ldots$, сходятся к некоторым точкам ζ_1 и ζ_2 соответственно. Диаметры множеств $v(K_m)$ стремятся к нулю при $m\to\infty$, откуда вытекает, что $\operatorname{diam} v(K_0)=0$, т. е. множество $v(K_0)$ состоит из единственной точки q_0. Каждая из точек $v(\zeta_1)$ и $v(\zeta_2)$ отстоит от q_0 на расстоянии, не меньшем $\varepsilon_0/2>0$, поэтому ζ_1 и ζ_2 не принадлежат K_0. Пусть M — произвольная кривая в круге Y, соединяющая ζ_1 и ζ_2. Кривая, составленная из M и отрезков $\zeta_{1m}\zeta_1$ и $\zeta_2\zeta_{2m}$, пересекает континуум K_m, так как ζ_{1m} и ζ_{2m} принадлежат различным связным компонентам множества $Y\backslash K_m$. Отсюда следует в пределе, что кривая M пересекает K_0. Таким образом, любая кривая, соединяющая точки ζ_1 и ζ_2, пересекает континуум K_0, поэтому ζ_1 и ζ_2 принадлежат различным связным компонентам множества $Y\backslash K_0$, так что континуум K разбивает Y. Следовательно, также и множество $v^{-1}(q_0)$ разбивает Y. Мы приходим к противоречию с выбором параметризации v. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть P_m, $m=0, 1, 2, \ldots$, — невырожденные поверхности типа круга, u_m: $X\to\mathfrak{R}$ — параметризация P_m, $m=0, 1, 2, \ldots$. Предположим, что при $m\to\infty$ функции u_m равномерно сходятся к u_0 в круге X. Тогда по всякому $\varepsilon>0$ найдется $\delta>0$ такое, что если $L\subset X$ есть континуум, разбивающий X и такой, что $\operatorname{diam} u_m(L)<\delta$, то по крайней мере для одной из связных компонент G множества $X\backslash L$ диаметр множества $u_m(G)$ меньше ε.*

Доказательство. Зададим произвольно $\varepsilon>0$. Положим $\varepsilon_0=\varepsilon/3$. Так как поверхность P_0 невырожденная, то согласно лемме по числу ε_0 найдется соответствующее ему $\delta_0>0$.

Пусть $\rho=\min\{\varepsilon/3, \delta_0/3\}$. Так как $u_m\to u_0$ равномерно, то найдется m_0 такое, что $\rho[u_m(t), u_0(t)]<\rho$ при $m\geqslant m_0$ для всех $t\in X$. Пусть $m\geqslant m_0$. Предположим, что континуум L разбивает X (т. е. множество $X\backslash L$ несвязно) и $\operatorname{diam} u_m(L)<\delta_0/3$. Так как $\rho[u_0(t), u_m(t)]<\rho$ при всех $t\in X$, то $\operatorname{diam} u_0(L)<\delta_0/3+2\rho\leqslant\delta_0$ и, значит, $\operatorname{diam} u_0(G)<\varepsilon_0=\varepsilon/3$ по крайней мере для одной из связных компонент G множества $X\backslash L$. Тогда $\operatorname{diam} u_m(G)<\varepsilon/3+2\rho\leqslant\varepsilon$. При каждом $m<m_0$ по данному ε найдется число $\delta_m>0$ такое, что если континуум $L\subset X$ разбивает X и $\operatorname{diam} u_m(L)<\delta$, то $\operatorname{diam} u_m(G)<\varepsilon$ хотя бы для одной из связных компонент G множества $X\backslash L$. Наименьшее из чисел $\delta_0/3, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{m_0-1}$, очевидно, и есть искомое $\delta>0$. Следствие доказано.

§ 3. ПОНЯТИЕ δ-СУБГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ. СВОЙСТВА δ-СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть G — риманова поверхность. Тогда $L_{p,\mathrm{loc}}(G)$, $p\geqslant 1$, означает совокупность всех функций u: $G\to\mathbf{C}$ таких, что для всякой допустимой локальной системы координат φ: $U\to\mathbf{C}$ поверхности G функция $u[\varphi^{-1}(z)]$ интегрируема в степени p на всяком компактном множестве $A\subset\varphi(U)$.

Мерой на римановой поверхности G будем называть всякую меру μ, определенную на σ-алгебре борелевских подмножеств G.

Функция u: $G\to\mathbf{R}^n$ называется *δ-субгармонической*, если $u\in L_{1,\mathrm{loc}}(G)$ и существует мера μ со значениями в $\mathbf{R}^n$, определенная в G и такая, что для всякой функции $\varphi\in C_0^\infty(G)$ выполняется равенство

$$\int_G \Delta\varphi(z)\,u(z)\,dxdy=\int_G \varphi(z)\,d\mu(z). \tag{3.1}$$

Мера μ в правой части (3.1) определяется функцией $u(z)$ однозначно, обозначается символом Δu и называется *лапласианом функции* u.

Лемма 3.1. *Пусть α: $G_1\to G_2$ — голоморфная функция комплексной переменной z, топологически отображающая открытое множество $G_1\subset\mathbf{C}$ на множество G_2. Тогда, если u: $G_2\to\mathbf{R}^n$ — δ-субгармоническая функция, то функция $v=u\circ\alpha$ также является δ-субгармонической и* *для всякого множества* $E \subset G_1$

$$(\Delta v)(E) = \Delta u[\alpha(E)].$$

Лемма есть простое следствие известных свойств голоморфных отображений.

Для множества $A \subset \mathbf{C}$ и числа $h > 0$ определим множество $U_h(A) = \{z \in \mathbf{C} \mid \rho(z, A) < h\}$, которое будем называть *h-окрестностью множества A.*

Функцию θ: $\mathbf{C} \to \mathbf{R}$ назовем *усредняющим ядром*, если

1) $\forall z \in \mathbf{C}$ $\theta(z) \geqslant 0$, $\theta(z) = 0$ при $|z| \geqslant 1$;
2) $\theta \in C^\infty(\mathbf{C})$;
3) $\int\limits_G \theta(z)\, dxdy = 1$.

Пусть G — открытое множество в $\mathbf{C}$, $h > 0$. Множество $G_h = \{z \in G \mid \rho(z, \mathbf{C} \setminus G) < h\}$ открытое, и для всякого компактного $A \subset G$ существует число $h(A) > 0$ такое, что если $0 < h < h(A)$, то $A \subset G_h$. Зададим произвольно усредняющее ядро θ и возьмем определенную и интегрируемую в G функцию $u(z)$. Пусть $h_0 > 0$ таково, что G_h не пусто при $0 < h < h_0$. Для $z \in G_h$ положим

$$u_h(z) = \frac{1}{h^2}\int\limits_G u(\zeta)\,\theta\left(\frac{z-\zeta}{h}\right) d\xi d\eta = \int\limits_{|\zeta|<h} u(z - h\zeta)\,\theta(\zeta)\, d\xi d\eta.$$

Функция u_h называется *усреднением функции u*. Имеем: $u_h \in C^\infty(G_h)$ и для всякого компактного $A \subset G$

$$\int\limits_A |u_h(z)|^p\, dxdy \leqslant \int\limits_{U_h(A)} |u(z)|^p\, dxdy$$

(предполагается, что $0 < h < h(A)$),

$$\int\limits_A |u_h(z) - u(z)|^p\, dxdy \to 0$$

при $h \to 0$. Если $u \in W_r^1(G)$, $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$ и p_h, q_h — усреднения функций p, q соотв., то $p_h = \frac{\partial u_h}{\partial x}$, $q_h = \frac{\partial u_h}{\partial y}$. Для всякого компактного $A \subset G$ при $0 < h < h(A)$

$$\int\limits_A [|p_h(z)|^2 + |q_h(z)|^2]^{r/2}\, dxdy \leqslant \int\limits_{U_h(A)} [|p(z)|^2 + |q(z)|^2]^{r/2}\, dxdy$$

и при $h \to 0$

$$\int\limits_A \left(|p_h(z) - p(z)|^r + |q_h(z) - q(z)|^r\right) dxdy \to 0.$$

Пусть $u(z)$ — δ-субгармоническая функция в открытом множестве $G \subset \mathbf{C}$, $\mu = \Delta u$. Тогда для всякого $z \in G_h$ выполняется равенство

$$\Delta u_h(z) = \frac{1}{h^2}\int\limits_{|\zeta - z|<h} \theta\left(\frac{z-\zeta}{h}\right) d\mu(\zeta), \tag{3.2}$$

непосредственно вытекающее из определения того, что $\mu = \Delta u$. Для компактного множества $A \subset G$ при $0 < h < h(A)$ имеет место оценка

$$\int\limits_A |\Delta u_h(z)|\, dxdy \leqslant |\mu|[U_h(A)], \tag{3.3}$$

где $\mu = \Delta u$. Действительно, согласно (3.2),

$$\Delta u_h(z) = \frac{1}{h^2}\int\limits_{B(z,h)} \theta\left(\frac{z-\zeta}{h}\right) d\mu(\zeta),$$

откуда

$$|\Delta u_h(z)|\leqslant\frac{1}{h^2}\int\limits_{B(z,h)}\theta\left(\frac{z-\zeta}{h}\right)d|\mu|(\zeta).$$

Так как круг $B(z, h)\subset G$ при $z\in G_h$, то из последнего неравенства следует, что

$$|\Delta u_h(z)|\leqslant\frac{1}{h^2}\int\limits_G\theta\left(\frac{z-\zeta}{h}\right)d|\mu|(\zeta).$$

Интегрируя по z и применяя теорему Фубини, получим

$$\int\limits_A|\Delta u_h(z)|\,dxdy\leqslant\int\limits_G\left\{\int\limits_A\frac{1}{h^2}\theta\left(\frac{z-\zeta}{h}\right)dxdy\right\}d|\mu|(\zeta).$$

Осталось заметить, что

$$\eta(\zeta)=\int\limits_A\frac{1}{h^2}\theta\left(\frac{z-\zeta}{h}\right)dxdy\leqslant 1$$

и $\eta(\zeta)=0$ при $\zeta\notin U_h(A)$. Отсюда

$$\int\limits_A|\Delta u_h(z)|\,dxdy\leqslant|\mu|\,[U_h(A)],$$

и оценка (3.3) доказана.

Для z, $\zeta\in B$ полагаем

$$G(z, \zeta)=\frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{1-\bar{\zeta}z}{z-\zeta}\right|.$$

Функция G есть функция Грина оператора Лапласа в круге B.

Пусть μ есть мера со значениями в $\mathbf{R}^n$, определенная в круге B. Для $z\in B$ полагаем

$$u(z, \mu)=\int\limits_B G(z, \zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Применяя теорему Фубини, нетрудно показать, что функция $u(z, \mu)$ интегрируема и, следовательно, величина $u(z, \mu)$ определена для почти всех $z\in B$.

Лемма 3.2. *Пусть μ — векторная мера в круге B. Функция v: $\mathbf{C}\to\mathbf{R}^n$ такая, что $v(z)=0$ при $z\in B$ и $v(z)=u(z, \mu)$ при $z\in B$, является δ-субгармонической. При этом мера $\Delta v(E)$ допускает представление*

$$\Delta v(E)=\lambda(E)-\mu(E\cap B),$$

где λ — мера, сосредоточенная на окружности Γ, т. е. $\lambda(E)=\lambda(E\cup\Gamma)$ для всякого E. Кроме того, $|\lambda|(\Gamma)\leqslant|\mu|(B)$.

Доказательство. Для любой функции $\varphi\in C_0^\infty$

$$I(\varphi)=\int\limits_{\mathbf{C}}\Delta\varphi(z)\,v(z)\,dxdy=\int\limits_B\Delta\varphi(z)\,u(z, \mu)\,dxdy. \tag{3.4}$$

Подставляя в интеграл справа выражение функции $u(z, \mu)$ через μ и применяя теорему Фубини, получим

$$I(\varphi)=\int\limits_B\left(\int\limits_B G(z, \zeta)\,\Delta\varphi(z)\,dxdy\right)d\mu(\zeta). \tag{3.5}$$

По известным формулам для оператора Лапласа

$$\int\limits_B G(z, \zeta)\,\Delta\varphi(z)\,dxdy=-\varphi(\zeta)+\int\limits_\Gamma\varphi(z)\frac{\partial G}{\partial\nu}(z, \zeta)\,|dz|. \tag{3.6}$$

(Здесь $\frac{\partial}{\partial\nu}$ означает дифференцирование по внешней нормали к Γ.)

Для $\theta \in (0, 2\pi)$ и $\zeta \in \bar{B}$ положим

$$\omega(\zeta, \theta) = \int_0^\theta \frac{\partial G}{\partial \nu}(e^{i\alpha}, \zeta)\, d\alpha.$$

Функция $\zeta \mapsto \omega(\zeta, \theta)$ является гармонической в круге B. При $\zeta = e^{i\beta} \in \Gamma$ имеем: $\omega(\zeta, \theta) = 1$, если $0 < \beta < \theta$, $\omega(\zeta, \theta) = 0$, если $0 < \beta < 2\pi$. При каждом фиксированном ζ $\omega(\zeta, \theta)$ есть неубывающая функция θ. Подставляя выражение для $\frac{\partial G}{\partial \nu}(e^{i\theta}, \zeta) = \frac{d}{d\theta}\omega(\zeta, \theta)$ в правую часть (3.6) и выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\int_B G(z, \zeta)\, \Delta\varphi(z)\, dxdy = -\varphi(\zeta) + \varphi(1) - \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}(\varphi(e^{i\theta}))\, \omega(\zeta, \theta)\, d\theta. \tag{3.7}$$

Из (3.7) очевидно следует

$$I(\varphi) = -\int_B \varphi(\zeta)\, d\mu(\zeta) + \int_B \left[\varphi(1) - \int_0^{2\pi} \left(\frac{d}{d\theta}\varphi(e^{i\theta})\right)\omega(\zeta, \theta)\, d\theta\right] d\mu(\zeta). \tag{3.8}$$

Положим

$$F_\mu(\theta) = \int_B \omega(\zeta, \theta)\, d\mu(\zeta).$$

Для любых $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi]$ таких, что $\theta_1 < \theta_2$,

$$|F_\mu(\theta_2) - F_\mu(\theta_1)| = \left|\int_B [\omega(\zeta, \theta_2) - \omega(\zeta, \theta_1)]\, d\mu(\zeta)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_B [\omega(\zeta, \theta_2) - \omega(\zeta, \theta_1)]\, d|\mu|(\zeta).$$

Отсюда вытекает, что для всякой конечной системы значений $\theta_0 = 0 < \theta_1 < \ldots < \theta_m = 2\pi$ из отрезка $[0, 2\pi]$

$$\sum_{k=1}^m |F_\mu(\theta_k) - F_\mu(\theta_{k-1})| \leqslant \int_B \omega(\zeta, 2\pi)\, d|\mu|(\zeta) = |\mu|(B).$$

Это позволяет заключить, что $F_\mu(\theta)$ есть функция ограниченной вариации, при этом вариация F_μ не превосходит $|\mu|(B)$. Отметим, что $F_\mu(0) = 0$, $F_\mu(1) = \mu(B)$.

Преобразуя второй интеграл в равенстве (3.8), по теореме Фубини получаем

$$\int_B \left\{\varphi(1) - \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}[\varphi(e^{i\theta})]\, \omega(\zeta, \theta)\right\} d\mu(\zeta) =$$

$$= \varphi(1)\mu(B) - \int_0^{2\pi} \frac{d}{d\theta}[\varphi(e^{i\theta})]\, F_\mu(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})\, dF_\mu(\theta).$$

Окончательно заключаем

$$\int_C \Delta\varphi(z)\, v(z)\, dxdy = -\int_B \varphi(z)\, d\mu(z) + \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta})\, dF_\mu(\theta). \tag{3.9}$$

В силу установленной выше оценки для вариации функции F_μ лемма доказана.

Следствие. *Функция $u(z, \mu)$ является δ-субгармонической в круге B. При этом $\Delta u(E) = -\mu(E)$.*

Для доказательства достаточно заметить, что если $\varphi \in C_0^\infty(B)$, то равенство (3.9) превращается в следующее:

$$\int_B \Delta\varphi(z)\,u(z, \mu)\,dxdy = -\int_B \varphi(\zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Лемма 3.3. *Пусть μ — мера в круге B. Величина*

$$\gamma(r) = \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta}, \mu)|\,d\theta.$$

определена и конечна для всех $r \in (0, 1)$, и

$$\lim_{r\to 1} \gamma(r) = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда μ есть неотрицательная мера в B. Тогда $u(z, \mu) \geqslant 0$ для всех z и

$$\gamma(r) = \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}, \mu)\,d\theta = \int_B \left(\int_0^{2\pi} G(re^{i\theta}, \zeta)\,d\theta\right) d\mu(\zeta). \tag{3.10}$$

Положим

$$H_r(\zeta) = \int_0^{2\pi} G(re^{i\theta}, \zeta)\,d\theta.$$

Простое вычисление показывает, что $H_r(\zeta) = \ln 1/|\zeta|$ для $r \leqslant |\zeta| < 1$ и $H_r(\zeta) = \ln 1/r$ для $|\zeta| < r$. При $r \to 1$ $H_r(\zeta) \to 1$ равномерно в круге B.

В силу (3.10)

$$\gamma(r) = \int_0^{2\pi} |u(re^{i\theta}, \mu)|\,d\theta = \int_B H_r(\zeta)\,d\mu(\zeta).$$

Отсюда вытекает, что $\gamma(r)$ определено и конечно для всех $r \in (0, 1)$ и $\gamma(r) \to 0$ при $r \to 0$.

Общий случай очевидным образом сводится к рассмотренному.

Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть вещественная функция $u(z)$ определена и является δ-субгармонической в круге B. Тогда если*

$$\int_0^{2\pi} |u(re^{i\varphi})|\,d\varphi \to 0$$

при $r \to 1$, то $u(z)$ допускает представление

$$u(z) = \int_B G(z, \zeta)\,d\mu(\zeta), \tag{3.11}$$

где $\mu = -\Delta u$.

Доказательство. Правую часть равенства (3.11) обозначим через $u^*(z)$. Функция $h(z) = u(z) - u^*(z)$ является δ-субгармонической и $\Delta h \equiv 0$ в круге B в обогащенном смысле. Отсюда следует, что h есть гармоническая в B функция. В силу леммы 3.3

$$\int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|\,d\theta \to 0$$

при $r \to 1$. Это позволяет заключить, что $h(z) \equiv 0$ в B и, значит, $u(z) \equiv u^*(z)$, что и требовалось доказать.

Лемма 3.5. *Функция $u(z, \mu)$, где μ есть мера в круге B, имеет в B обобщенные в смысле Соболева первые производные* $\frac{\partial u}{\partial x}(z; \mu)$ *и* $\frac{\partial u}{\partial y}(z; \mu)$.

При этом для почти всех $z \in B$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z, \mu) = \int\limits_B \frac{\partial G}{\partial x}(z, \zeta)\, d\mu(\zeta),\ \frac{\partial u}{\partial y}(z, \mu) = \int\limits_B \frac{\partial G}{\partial y}(z, \zeta)\, d\mu(\zeta).$$

Функции $\frac{\partial u}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *интегрируемы в* B *любой степени* p *такой, что* $1 \leqslant p < 2$.

Доказательство. В силу оценок

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x}(z, \zeta)\right| \leqslant \frac{1}{\pi |z-\zeta|},\ \left|\frac{\partial G}{\partial y}(z, \zeta)\right| \leqslant \frac{1}{\pi |z-\zeta|}$$

функции

$$p(z) = \int\limits_B \frac{\partial G}{\partial x}(z, \zeta)\, d\mu(\zeta),\ q(z) = \int\limits_B \frac{\partial G}{\partial y}(z, \zeta)\, d\mu(\zeta)$$

интегрируемы в любой степени $p < 2$. Стандартными рассуждениями устанавливается, что $p(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z, \mu)$, $q(z) = \frac{\partial u}{\partial y}(z, \mu)$. Лемма доказана.

Лемма 3.6. *Пусть* G *— открытое множество в* $\mathbf{C}$, u: $G \to \mathbf{R}^n$ *— δ-субгармоническая функция. Тогда, если функция* u *непрерывна, то она принадлежит классу* $W^1_{2,\mathrm{loc}}(G)$ *и для всякой вещественной функции* $\varphi \in C_0^\infty(G)$ *выполняется равенство*

$$\int\limits_G \varphi(z)\,(|u_x(z)|^2 + |u_y(z)|^2)\, dxdy =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_G |u(z)|^2 \Delta\varphi(z)\, dxdy - \int\limits_G \varphi(z) \langle u(z), d\mu(z)\rangle. \qquad (3.12)$$

Доказательство. Предположим сначала, что $u \in C^\infty(G)$. Зададим произвольно функцию $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Применяя правило интегрирования по частям, получим

$$\int\limits_G \varphi(\langle u_x, u_x\rangle + \langle u_y, u_y\rangle)\, dxdy = -\int\limits_G [\langle \varphi u_x, u\rangle_x + \langle \varphi u_y, u\rangle_y]\, dxdy =$$
$$= -\int\limits_G [\varphi_x \langle u_x, u\rangle + \varphi_y \langle u_y, u\rangle]\, dxdy - \int\limits_G \varphi \langle u, \Delta u\rangle\, dxdy.$$

Первый интеграл справа преобразуем, замечая, что

$$\langle u_x, u\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\langle u, u\rangle,\ \langle u_y, u\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\langle u, u\rangle.$$

В результате получим

$$-\int\limits_G [\varphi_x \langle u_x, u\rangle + \varphi_y \langle u_y, u\rangle]\, dxdy =$$
$$= -\frac{1}{2}\int\limits_G \left[\varphi_x \frac{\partial}{\partial x}\langle u, u\rangle + \varphi_y \frac{\partial}{\partial y}\langle u, u\rangle\right] dxdy = \frac{1}{2}\int\limits_G \langle u, u\rangle\, \Delta\varphi\, dxdy.$$

Отсюда

$$\int\limits_G \varphi(z)\,[|u_x(z)|^2 + |u_y(z)|^2]\, dxdy =$$
$$= \frac{1}{2}\int\limits_G |u(z)|^2 \Delta\varphi(z)\, dxdy - \int\limits_G \varphi(z) \langle u(z), \Delta u(z)\rangle\, dxdy.$$

Для случая $u \in C^\infty(G)$ равенство (3.12) доказано.

Предположим теперь, что $u(z)$ есть произвольная непрерывная δ-субгармоническая функция. Тогда, по доказанному, для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$ выполняется равенство

$$\int_{G_h} \varphi(z)\,[|u_{hx}(z)|^2 + |u_{hy}(z)|^2]\,dxdy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{G_h} |u_h(z)|^2\,\Delta\varphi(z)\,dxdy - \int_{G_h} \varphi(z)\,\langle u_h(z), \Delta u_h(z)\rangle\,dxdy. \qquad (3.13)$$

Функцию $\varphi(z)$ теперь выберем некоторым специальным способом. Зададим произвольно открытое множество V такое, что замыкание V компактно и содержится в G, построим неотрицательную функцию $\varphi \in C_0^\infty(G)$ такую, что $\varphi(z) = 1$ при $z \in V$, $0 \leqslant \varphi(z) \leqslant 1$ для всех $z \in G$, и пусть $A = S(\varphi)$ — носитель φ. Очевидно, $A \supset V$. Рассмотрим усреднение $u_h(z)$ функции $u(z)$, определенное на множестве G_h. При $0 < h < h(A)$ имеем $A \subset G_h$. Будем считать, что $h \leqslant h_0 = h(A)/3$. Пусть $\mathscr{B} = \overline{U}_{h_0}(A)$ — замкнутая h_0-окрестность множества A. Ясно, что $\mathscr{B} \subset G$. Так как, по условию, функция $u(z)$ непрерывна, то $|u(z)| \leqslant L = \mathrm{const} < \infty$ для всех $z \subset \mathscr{B}$. При $0 < h \leqslant h_0$ имеем $|u_h(z)| \leqslant L$ для всякого $z \in A$. Подставляя в (3.13) данную функцию φ, после очевидных преобразований получим оценку

$$\int_V [|u_{h,x}(z)|^2 + |u_{h,y}(z)|^2]\,dxdy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L^2}{2}\int_{\mathscr{B}} |\Delta\varphi(z)|\,dxdy + L\int_{\mathscr{B}} |\Delta u_h(z)|\,dxdy. \qquad (3.14)$$

В силу (3.2)

$$\Delta u_h(z) = \frac{1}{h^2}\int_G \theta\left(\frac{z-\zeta}{h}\right) d\mu(\zeta),$$

откуда заключаем, что

$$\int_{\mathscr{B}} |\Delta u_h(z)|\,dxdy \leqslant \int_{\mathscr{B}} \left(\frac{1}{h^2}\int_G \theta\left(\frac{z-\zeta}{h}\right) d|\mu|(\zeta)\right) dxdy.$$

В качестве области интегрирования во внутреннем интеграле можно взять множество $U_{h_0}(\mathscr{B})$, так как при $0 < h \leqslant h_0$, $z \in \mathscr{B}$ величина $\theta\left(\frac{z-\zeta}{h}\right)$ обращается в нуль, если ζ лежит вне $U_{h_0}(\mathscr{B})$. Меняя по теореме Фубини порядок интегрирования и замечая, что $\frac{1}{h^2}\int \theta\left(\frac{z-\zeta}{h}\right) dxdy = 1$, получим, что

$$\int_{\mathscr{B}} |\Delta u_h(z)|\,dxdy \leqslant |\mu|\,[U_{h_0}(\mathscr{B})],$$

откуда вытекает оценка

$$\int_V (|u_{h,x}(z)|^2 + |u_{h,y}(z)|^2)\,dxdy \leqslant M, \qquad (3.15)$$

где постоянная M не зависит от h. При $h \to 0$ $u_h(z) \to u(z)$ равномерно на множестве V. Ввиду (3.15) отсюда следует, что $u \in W_2^1(V)$. Поскольку открытое множество $V \subset G$ взято произвольно, то производные $u_x(z)$ и $u_y(z)$ интегрируемы с квадратом на всяком компактном подмножестве G, т. е. $u \in W_{2,\mathrm{loc}}^1(G)$.

Для завершения доказательства осталось установить равенство (3.12). Зададим произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Пусть $A = S(\varphi)$. При $h \to 0$ $u_h(z) \to u(z)$ равномерно на множестве A в силу непрерывности $u(z)$. Пусть $h_0 > 0$ таково, что $U_{h_0}(A) \subset G$. Множество $G_h = \{z | \rho(z, \mathbf{C} \setminus G) > h\}$, $0 < h < h_0$, содержит A. Функции u_h определены на G_h. При $h \to 0$

$$\int_A (|u_{h,x}(z) - u_x(z)|^2 + |u_{h,y}(z) - u_y(z)|^2)\, dx dy \to 0,$$

$$\int_A |u_h(z)|^2 \Delta\varphi(z)\, dx\, dy \to \int_A |u(z)|^2 \Delta\varphi(z)\, dx dy.$$

В силу (3.2) для всякого $z \in G_h$

$$\Delta u_h(z) = \frac{1}{h^2} \int_G \theta\left(\frac{z-\zeta}{h}\right) d\mu(\zeta).$$

Положим

$$v_h(\zeta) = \frac{1}{h^2} \int_{G_h} \varphi(z)\, u_h(z)\, \theta\left(\frac{z-\zeta}{h}\right) dx dy.$$

Простое преобразование показывает, что

$$\int_{G_h} \varphi(z) \langle u_h(z), \Delta u_h(z)\rangle\, dx dy = \int_G \langle v_h(\zeta), d\mu(\zeta)\rangle.$$

При $h \to 0$ $v_h(\zeta) \to \varphi(\zeta) u(\zeta)$ равномерно в G. Отсюда вытекает, что

$$\int_{G_h} \varphi(z) \langle u_h(z), \Delta u_h(z)\rangle\, dx dy \to \int_G \varphi(z) \langle u(z), d\mu(z)\rangle$$

при $h \to 0$. Переходя в (3.13) к пределу при $h \to 0$, в силу доказанного получим равенство (3.12). Лемма доказана.

Следствие. *Пусть функция $u(z)$ определена и непрерывна в круге $\overline{B}$, причем $u(z) = 0$ при $z \in \Gamma$. Тогда, если $u(z)$ есть δ-субгармоническая в B функция, то ее обобщенные производные суммируемы с квадратом в B и справедлива оценка*

$$\int_B (|u_x|^2 + |u_y|^2)\, dx dy \leqslant |\Delta u|(B) \max_{z \in B} |u(z)|.$$

Доказательство. Положим $v(z) = u(z)$ при $z \in B$, $v(z) = 0$ при $z \in B$. Согласно лемме 3.1' функция $v(z)$ δ-субгармоническая, и полная вариация меры Δv на плоскости не превосходит $2|\Delta u|(B)$. Пусть $\varphi(z)$ — функция класса $C_0^\infty(\mathbf{C})$, равная единице в круге B. Имеем: $\Delta\varphi(z) = 0$ при $z \in B$, $v(z) = 0$ при $z \notin B$. Полагая в равенстве (3.12) $u(z) = v(z)$, $G = \mathbf{C}$ и подставляя данную функцию φ, получим

$$\int_B (|u_x(z)|^2 + |v_y(z)|^2)\, dx dy = - \int_B \langle v(z), d\mu(z)\rangle.$$

Осталось заметить, что $v_x(z) = u_x(z)$, $v_y(z) = u_y(z)$ для всех $z \notin B$ и

$$\left| \int_B \langle v(z), d\mu(z)\rangle \right| \leqslant \int_B |v(z)|\, d|\mu|(z) \leqslant |\mu|(B) \max_{z \in B} |v(z)|.$$

Следствие доказано.

Лемма 3.7. *Пусть u: $B_r \to \mathbf{R}^n$ — вектор-функция класса $W_2^1(B_r)$,*

$$\int_{B_r} (|u_x(z)|^2 + |u_y(z)|^2)\, dx dy = M.$$

Тогда для всякой точки $z_0 = (x_0, y_0) \in B_r$ и любого $\rho \leqslant \min\{1, r^2\}$ найдется число h такое, что $\rho < h < \sqrt{\rho}$, функция $u(z)$ непрерывна на дуге $\Gamma(z_0, h) \cap B_r$, причем колебание функции u на этой дуге не превосходит

$$\sqrt{\frac{4\pi(M+1)}{\ln(1/\rho)}}.$$

Замечание. В данной формулировке предполагается, что функция u является точной, т. е. $u(z)$ равно правой части интегрального представления Соболева функции u в каждой точке z, в которой значение этой правой части определено.

Доказательство. Положим

$$\gamma(z) = (|u_x(z)|^2 + |u_y(z)|^2)^{1/2}.$$

Зададим произвольно точку $z_0 \in B_r$. Обозначим через C_h дугу $\Gamma(z_0, h) \cap B_r$, и пусть D_ρ, где $\rho < \min\{1, r^2\}$, есть множество тех $z \in B_r$, для которых $\rho \leqslant |z - z_0| \leqslant \sqrt{\rho}$. В силу известных свойств функций класса W_2^1 функция u абсолютно непрерывна на дуге C_h для почти всех $h \in (\rho, \sqrt{\rho})$, и ее колебание вдоль этой дуги не превосходит

$$\int_{C_h} \gamma(z)\,|dz| = \delta(h).$$

В силу неравенства Буняковского

$$[\gamma(h)]^2 = \left(\int_{C_h} \gamma(z)\,|dz|\right)^2 \leqslant 2\pi h \int_{C_h} [\gamma(z)]^2\,|dz|.$$

Интегрируя по h в пределах от ρ до $\sqrt{\rho}$, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_\rho^{\sqrt{\rho}} \frac{[\delta(h)]^2}{h}\,dh \leqslant \int_\rho^{\sqrt{\rho}} \left(\int_{C_h} [\gamma(z)]^2\,|dz|\right) dh = \int_{D_\rho} [\gamma(z)]^2\,dx\,dy =$$
$$= \int_{D_\rho} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x}(z)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}(z)\right|^2\right) dx\,dy. \tag{3.16}$$

Отсюда следует, что найдется h_0 такое, что $\rho < h_0 < \sqrt{\rho}$ и

$$[\delta(h_0)]^2 < \frac{2\pi(M+1)}{\displaystyle\int_\rho^{\sqrt{\rho}} \frac{dh}{h}} = \frac{4\pi(M+1)}{\ln(1/\rho)}. \tag{3.17}$$

При этом мера множества таких h положительна. Действительно, предположим, что $[\delta(h)]^2 \geqslant 4\pi(M+1)/\ln(1/\rho)$ для почти всех $h \in (\rho, \sqrt{\rho})$. Разделив обе части этого неравенства на $2\pi h$ и интегрируя по h почленно, будем иметь

$$\frac{1}{2\pi}\int_\rho^{\sqrt{\rho}} \frac{[\delta(h)]}{h}\,dh \geqslant M + 1,$$

что противоречит (3.16). Из доказанного, в частности, вытекает, что найдется такое значение $h \in (\rho, \sqrt{\rho})$, что функция $u(z)$ абсолютно непрерывна на окружности C_h и выполняется неравенство (3.17). Лемма доказана.

§ 4. ПОВЕРХНОСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ ИНТЕГРАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

Определим теперь основной объект исследования данной статьи — поверхности ограниченной интегральной средней кривизны.

Пусть P есть невырожденная поверхность типа круга в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Будем говорить, что P есть *поверхность ограниченной интегральной средней кривизны* или, короче, *поверхностного класса* $\mathscr{H}$, если она допускает параметризацию $u(z)$, $z \in \bar{B}$, такую, что функция $u(z)$ является δ-субгармонической и для почти всех $z \in B$ выполняются равенства

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(z)\right|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial y}(z)\right|^2 = \lambda(z), \left\langle\frac{\partial u}{\partial x}(z), \frac{\partial u}{\partial y}(z)\right\rangle = 0.$$

Параметризацию $u(z)$ поверхности P, удовлетворяющую перечисленным условиям, будем называть ее *изотермической параметризацией.*

Определена функция множества

$$h(E) = \Delta u(E).$$

Вариацию функции $h(E)$ будем называть *абсолютной средней кривизной поверхности* P, величину $|H|(P) = |h|(B)$ — *вариацией средней кривизны поверхности* P.

Фиксируем произвольно невырожденную поверхность P_0 типа круга и сходящуюся к ней последовательность (P_m), $m = 1, 2, \ldots$, невырожденных поверхностей типа круга. Далее $u_m(z)$, где $|z| \leqslant 1$, означает параметризацию поверхности P_m. Мы будем предполагать, что последовательность $(u_m(z))$, $m = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет некоторым из перечисляемых далее условий A — D.

A. Каждая параметризация u_m изотермическая.

B. Функция $u_m(z)$ — δ-субгармоническая при каждом m, причем последовательность $|\Delta u_m|(B)$, $m = 1, 2, \ldots$, полных вариаций функций множества Δu_m на круге B является ограниченной.

C. Существует постоянная $\varepsilon_0 > 0$ такая, что для всех m точка $u_m(0)$ отстоит от граничного контура поверхности P_m на расстоянии, не меньшем ε_0.

D. Для каждого круга B_r существует постоянная $H(r) < \infty$ такая, что для всех m

$$\int_{B_r}\left(\left|\frac{\partial u_m}{\partial x}(z)\right|^2 + \left|\frac{\partial u_m}{\partial y}(z)\right|^2\right) dxdy \leqslant H(r).$$

Так как последовательность поверхностей (P_m) сходится, то она ограничена, т. е. существует число $L < \infty$ такое, что

$$\forall m = 1, 2, \ldots, \quad \forall z \in B \quad |u_m(z)| \leqslant L. \tag{4.1}$$

Лемма 4.1. *Если вектор-функции* u_m, $m = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяют условиям* A *и* D, *то последовательность функций* (u_m), $m = 1, 2, \ldots$, *равностепенно равномерно непрерывна в круге* B_r *при любом* $r \in (0, 1)$.

Доказательство. Предположим, что последовательность вектор-функций u_m, $m = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условиям A и D. Зададим произвольно $r \in (0, 1)$, и пусть $r_1 = (r+1)/2$. Для всякой точки $z_0 \in B_r$ круг $\overline{B}(z_0, \sqrt{\rho})$ содержится в B_{r_1}, если только $\rho < [(1-r)/2]^2$.

Так как поверхности P_m все невырожденные и при $m \to \infty$ сходятся к невырожденной поверхности P_0, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любой области $G \subset B$ образ границы которой при отображении u_m имеет диаметр, меньший δ, диаметр множества $u_m(G)$ меньше ε (см. следствие леммы 2.1). Зададим произвольно $\varepsilon > 0$ и найдем отвечающее ему в указанном смысле число $\delta > 0$. Пусть $\rho_0 > 0$ таково, что $\sqrt{\rho_0} < (1-r)/2$ и

$$\xi = \frac{4\pi[H(r_1)+1]}{\ln 1/\rho_0} < \delta^2.$$

Пусть $z_0 \in \overline{B}_r$. На основании леммы 3.7 найдется $h_m \in (\rho_0, \sqrt{\rho_0})$ такое, что колебание функции u_m на окружности $\Gamma(z, h_m) = S_h$ не превосходит $\sqrt{\xi} < \delta$. Это означает, что образ окружности S_m при отображении u_m имеет диаметр, меньший δ. Отсюда вытекает, что образ круга $B(z_0, h_m)$, а значит, и круга $B(z_0, \rho_0) \subset B(z_0, h_m)$ при отображении u_m имеет диаметр, меньший ε_0.

Пусть z_1 и z_2 — две произвольные точки круга $\overline{B}_r$ такие, что $|z_1 - z_2| < 2\rho_0$. Положим $z_0 = (1/2)(z_1 + z_2)$. Точки z_1 и z_2 лежат в круге $B(z_0, \rho_0)$.

Величина $|u_m(z_1) - u_m(z_2)|$ не превосходит диаметра множества $u_m[B(z_0, \rho_0)]$ и, значит, $|u_m(z_1) - u_m(z_2)| < \varepsilon$. Таким образом, задав произвольно $\varepsilon > 0$, мы нашли по нему число $\eta = 2\rho_0$ такое, что если $z_1, z_2 \in B_{r_1}$ и $|z_1 - z_2| < \eta$, то $|u_m(z_1) - u_m(z_2)| < \varepsilon$ для любого $m = 0, 1, 2, \ldots$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. *Если последовательность вектор-функций* (u_m), $m = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяет условиям* A *и* B, *то она удовлетворяет также и условию* D *и, следовательно, равностепенно равномерно непрерывна в круге* $\overline{B}_r$ *при любом* $r \in (0, 1)$.

Доказательство. Предположим, что последовательность функций (u_m) удовлетворяет условиям леммы. Обозначим через $v_m(z)$ вектор-функцию, для которой $u_m(z) = v_m(z)$ при $|z| = 1$ и $\Delta v_m(z) \equiv 0$. Положим $w_m(z) = u_m(z) - v_m(z)$.

Так как все поверхности P_m лежат в некоторой ограниченной области пространства $\mathbf{R}^n$, то существует постоянная $L_1 < \infty$ такая, что $|v_m(z)| \leq L_1$ для всех m. Отсюда в силу известных свойств гармонических функций вытекает, что для каждого $r \in (0, 1)$ существует число $M_1(r) < \infty$ такое, что

$$\int\limits_{Br} \left(\left| \frac{\partial v_m}{\partial x}(z) \right|^2 + \left| \frac{\partial v_m}{\partial y}(z) \right|^2 \right) dxdy \leq M_1(r) \tag{4.2}$$

для всех $m = 1, 2, \ldots$.

Функции $w_m(z)$ — δ-субгармонические и обращаются в нуль на границе круга B. При этом $\Delta w_m = \Delta u_m$ и существует $L_2 < \infty$ такое, что $|w_m(z)| \leq L_2$ для всех $m = 1, 2, \ldots$ и $z \in B$. На основании леммы 3.6 отсюда следует, что существует постоянная $M_2 < \infty$ такая, что

$$\int\limits_{B} \left(\left| \frac{\partial w_m}{\partial x}(z) \right|^2 + \left| \frac{\partial w_m}{\partial y}(z) \right|^2 \right) dxdy \leq M_2 \tag{4.3}$$

для всех $m = 1, 2, \ldots$. Из неравенств (4.2) и (4.3), очевидно, вытекает, что для последовательности вектор-функций $(u_m(z))$, $m = 1, 2, \ldots$, выполняется условие D. Лемма доказана.

Лемма 4.3. *Если последовательность вектор-функций* $(u_m(z))$, $m = 1, 2, \ldots$, *удовлетворяет условиям* A, B, *и* C *одновременно, то она равностепенно равномерно непрерывна в круге* $\overline{B}$.

Доказательство. В силу леммы 4.2 последовательность $(u_m(z))$ равностепенно равномерно непрерывна в круге $\overline{B}_r$ при любом $r \in (0, 1)$.

Предположим, вопреки доказанному, что последовательность $(u_m(z))$ не является равностепенно равномерно непрерывной в круге $\overline{B}$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, для которого не существует $\delta > 0$, отвечающее ε согласно определению равностепенной равномерной непрерывности. Для этого ε, каково бы ни было натуральное k, найдется $m = m_k$ такое, что в круге B существуют точки z_k' и z_k'', для которых $|z_k' - z_k''| < 1/k$, и в то же время $\left| u_{m_k}(z_k') - u_{m_k}(z_k'') \right| \geq \varepsilon$. Так как любое конечное подсемейство последовательности (u_m) тривиальным образом равностепенно равномерно в круге B_1, то $m_k \to \infty$ при $k \to \infty$.

Так как последовательность $(u_m(z))$, $m = 1, 2, \ldots$, равностепенно равномерно непрерывна в круге B_r при любом $r \in (0, 1)$, то $|z_k'| \to 1$ и $|z_k''| \to 1$ при $k \to \infty$. Будем считать, что z_k' и z_k'' сходятся в некоторой точке $z_0 = e^{i\varphi_0}$ при $k \to \infty$. Очевидно, это требование не умаляет общности, поскольку его выполнения всегда можно добиться переходом к подпоследовательности.

Положим $v_k(z) = u_{m_k}(e^{i\varphi_0} z)$, $\zeta_k' = e^{-i\varphi_0} z_k'$, $\zeta_k'' = e^{-i\varphi_0} z_k''$. Тогда

$$\left| v_k(\zeta_k') - v_k(\zeta_k'') \right| = \left| u_{m_k}(z_k') - u_{m_k}(z_k'') \right| \geq \varepsilon_0$$

для всех k. При $k \to \infty$ $\zeta_k' \to 1$ и $\zeta_k'' \to 1$. Последовательность функций

(v_k), $k=1, 2, \ldots$, как нетрудно видеть, удовлетворяет каждому из условий A, B и C.

Обозначим через h_k векторную меру Δv_k. В силу условия B существует число $M<\infty$ такое, что $|h_k(B)|\leqslant M$ для всех $k=1, 2, \ldots$. Из подпоследовательности векторных мер (h_k) можно извлечь подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой векторной мере h_0. Будем, для простоты, считать, что уже последовательность мер (h_k) является слабо сходящейся.

Пусть Γ_k — граничный контур поверхности P_{m_k}, Γ_0 — граничный контур P_0. При $k\to\infty$ кривые Γ_k сходятся к кривой Γ_0. Пусть f_k: $[-1, 1]\to\mathbf{R}^n$, $k=0, 1, 2, \ldots$, — параметризации кривых Γ_k такие, что $f_k(-1)=f_k(1)$ при каждом k и $f_k\to f_0$ равномерно при $k\to\infty$. Будем считать, что каждая из параметризаций f_k нормальная, т. е. не постоянна ни на каком отрезке $[\alpha, \beta]\subset[-1, 1]$.

При всяком $k=0, 1, \ldots v_k(e^{i\varphi})=f_k[t_k(\varphi)]$, где $t_k(\varphi)$ $(\varphi\in[-\pi, \pi])$ — непрерывная неубывающая функция такая, что $t_k(-\pi)=-1$, $t_k(\pi)=1$. Параметризацию f_k кривой Γ_k можно выбрать так, что $t_k(0)=0$ при всех k.

В силу теоремы выбора Хелли из последовательности $t_k(\varphi)$ $(\varphi\in[-\pi, \pi])$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся всюду на $[-\pi, \pi]$ к некоторой неубывающей функции $t_0(\varphi)$. Будем считать, что уже исходная последовательность (v_k) устроена так, что для всех $\varphi\in[-\pi, \pi]$ существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} t_k(\varphi)=t_0(\varphi)$.

Возможны два случая.

I. Функция $t_0(\varphi)$ непрерывна в точке $\varphi=0$.

II. Функция $t_0(\varphi)$ в точке $\varphi=0$ разрывна.

Сначала рассмотрим случай I. Положим $v_k(z)=\xi_k(z)+\eta_k(z)$, где η_k — гармоническая в круге $\overline{B}$, причем $\eta_k(z)=v_k(z)$ при $|z|=1$. Функции $\eta_k(z)$ и $\xi_k(z)$ равномерно ограничены в $\overline{B}$, а ξ_k — субгармоническая и обращается в нуль на Γ.

Для последовательности функций (u_m) по предположению выполняется условие C. Положим $\varepsilon_1=\min\{\varepsilon, \varepsilon_0/2\}$. Так как поверхности P_m невырожденные и сходятся при $m\to\infty$ к невырожденной поверхности P_0, то по числу $\varepsilon_1>0$ найдется $\delta>0$ такое, что если замкнутая кривая $L\subset\overline{B}$ такова, что $\operatorname{diam} u_m(L)<\delta$, то образ относительно отображения u_m хотя бы одной из двух областей, на которые L делит $\overline{B}$, имеет диаметр, меньший ε_1. Фиксируем такое значение $\delta>0$.

Функция f_0 непрерывна в точке $t=0$. Значит, найдется $\alpha\in(0, 1)$ такое, что диаметр дуги $f_0([-\alpha, \alpha])$ меньше $\delta/12$. При $k\to\infty$ $f_k\to f_0$ равномерно и, следовательно, существует k_1 такое, что при $k\geqslant k_1$ диаметр дуги $f_k([-\alpha, \alpha])$ также меньше $\delta/12$.

Функция $t_0(\varphi)$, по предположению, непрерывна в точке $\varphi=0$, $t_0(0)=0$. Поэтому найдется $\beta\in(0, \pi)$ такое, что $t_0([-\beta, \beta])\subset(-\alpha, \alpha)$. Так как $t_k(-\beta)\to t_0(-\beta)$, $t_k(\beta)\to t_0(\beta)$, то существует k_2 такое, что $t_k(-\beta)>-\alpha$ и $t_k(\beta)<\alpha$ при $k\geqslant k_2$ и, значит, $t_k([-\beta, \beta])\subset(-\alpha, \alpha)$ при $k\geqslant k_2$. Так как $v_k(e^{i\varphi})=f_k[t_k(\varphi)]$, то из доказанного следует, что при $k\geqslant k_0=\max\{k_1, k_2\}$ образ отрезка $[-\beta, \beta]$ при отображении $\varphi\mapsto v_k(e^{i\varphi})$ содержится в дуге $f_k([-\alpha, \alpha])$ и, следовательно, имеет диаметр, меньший $\delta/12$.

Пусть η_k' и η_k'' — гармонические функции такие, что $\eta_k=\eta_k'+\eta_k''$, причем $\eta_k'(z)=\eta_k(1)$ при $z=e^{i\varphi}$, где $-\beta\leqslant\varphi\leqslant\beta$ и $\eta_k'(z)=\eta_k(z)$ при $z=e^{i\varphi}$, где $\varphi\notin[-\beta, \beta]$, $|\varphi|\leqslant\pi$. Очевидно, $\eta_k''(z)=\eta_k(z)-\eta_k(1)$ на дуге $-\beta\leqslant\varphi\leqslant\beta$ и $\eta_k''(z)=0$ вне этой дуги. При $z=e^{i\varphi}$ имеем $\eta_k(z)=v_k(z)$. Колебание функции $v_k(e^{i\varphi})$ на отрезке $[-\beta, \beta]$ меньше $\delta/12$. Отсюда следует, что $|\eta_k''(z)|<\delta/12$ для всякого z, для которого $|z|=1$ и, так как η_k'' — гармоническая функция, то $|\eta_k''(z)|<\delta/12$ при всех $z\in\overline{B}$.

Для любого $k=1, 2, \ldots$ в силу гармоничности функции η_k' и равномерной ограниченности последовательности функций v_k найдется число L_1 такое, что $|\eta_k'(z)| \leqslant L_1 < \infty$ для всех z, принадлежащих Γ, а значит, и вообще для всех $z \in \overline{B}$.

При $\varphi \in [-\beta, \beta]$ $\eta_k'(e^{i\varphi}) = \eta_k(1)$. Гармоническая функция η_k', таким образом, является постоянной на некоторой дуге $-\beta \leqslant \varphi \leqslant \beta$ границы круга $\overline{B}$ и ограничена по абсолютной величине числом L_1. При $z = re^{i\varphi}$, $r<1$,

$$\eta_k'(z) - \eta_k'(1) = \int\limits_{|\varphi| \geqslant \beta} \left[v_k(re^{i\varphi}) - v_k(1) \right] \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2} d\varphi.$$

Пусть $|\theta| \leqslant \beta/2$. Тогда при $|\varphi| \geqslant \beta$

$$1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2 = [1-r\cos(\varphi-\theta)]^2 + r^2\sin^2(\varphi-\theta) \geqslant$$
$$\geqslant r^2 \sin^2(\varphi-\theta) \geqslant r^2 \sin^2\frac{\beta}{2}.$$

Отсюда получаем, что при $z = re^{i\varphi}$, где $|\theta| \leqslant \beta/2$, $r > 1/2$,

$$|\eta_k'(z) - \eta_k'(1)| \leqslant M |1-z|, \tag{4.4}$$

где $M = 6L_1/\sin^2(\beta/2)$.

Оценка (4.4) позволяет заключить, что найдется $\rho_1 > 0$ такое, что при $|z-1| < \rho_1$ для всех $k=1, 2, \ldots$

$$|\eta_k'(z) - \eta_k'(1)| < \delta/12.$$

Обозначим через C_h дугу окружности с центром в точке $z=1$ и радиусом h, лежащую в круге $\overline{B}$. При $h<\rho_1$ для всякого $z \in C_h$ имеем: $|\eta_k'(z) - \eta_k'(1)| < \delta/12$ и $|\eta_k''(z)| < \delta/12$ при $k \geqslant k_2$ для всех $z \in C_h$. Отсюда вытекает, что $|\eta_k(z) - \eta_k(1)| \leqslant |\eta_k''(z)| + |\eta_k'(z) - \eta_k'(1)| < \delta/6$ при $k \geqslant k_2$, $z \in C_h$, $0 < h < \rho_1$, и, значит, колебание функции η_k на дуге C_h не превосходит $\delta/3$.

Рассмотрим функцию $\xi_k(z)$. По условию существует $L_2 < \infty$ такое, что $|\xi_k(z)| \leqslant L_2 < \infty$ для всех z при любом $k=1, 2, \ldots$. Абсолютные вариации вектор-функций $\Delta\xi_k = \Delta v_k$ на круге $\overline{B}$ также ограничены в совокупности и

$$|\Delta\xi_k|(\overline{B}) \leqslant L_3 < \infty$$

для всех k. Отсюда в силу леммы 5.6 вытекает, что

$$\int\limits_{\overline{K}} (|\xi_{k,x}(z)|^2 + |\xi_{k,y}(z)|^2)\, dxdy \leqslant L_4 < \infty,$$

где $L_4 = \mathrm{const}$.

По лемме 3.7 для всякого $\rho < 1$ найдется h такое, что $\rho < h < \sqrt{\rho}$ и колебание функции ξ_k на дуге C_h меньше $\gamma(\rho) = (4\pi(L_4+1)/\ln(1/\rho))^{1/2}$. Пусть $\rho_2 \in (0, 1)$ таково, что $\gamma(\rho_2) < \delta/6$. Положим $\rho_0 = \min\{\rho_1^2, \rho_1^2, |1-e^{i\beta}|^2\}$. Фиксируем произвольно $\rho < \rho_0$. При $\rho < h < \sqrt{\rho}$ концы C_h лежат на дуге $-\beta \leqslant \varphi \leqslant \beta$ окружности Γ в силу того, что $\sqrt{\rho_0} \leqslant |1-e^{i\beta}|$. При $\rho < h < \sqrt{\rho}$ колебание функции $\eta_k(z)$ на дуге C_h в силу условия $h < \rho_1$ меньше $\delta/3$. При каждом $k=1, 2, \ldots$ найдется $h_k \in (\rho, \sqrt{\rho})$ такое, что функция ξ_k на C_h непрерывна и ее колебание меньше $\gamma(\rho)$. В силу выбора ρ $\gamma(\rho) < \delta/6$, так что колебание функции ξ_k на дуге C_{h_k} меньше $\delta/6$. В силу доказанного отсюда следует, что колебание функции $v_k = \xi_k + \eta_k$ на дуге C_{h_k} меньше $(\delta/6) + (\delta/3) = \delta/2$.

Обозначим через S_k замкнутый контур, образованный C_{h_k} и той дугой окружности Γ, которая содержит точку $z=1$. Колебание функции v_k на каждой из этих дуг, составляющих S_k при $k \geqslant k_2$, меньше $\delta/2$

и, значит, диаметр замкнутой кривой $v_k(S_k)$ меньше δ. Дуга C_{h_k} делит круг $\overline{B}$ на области $\overline{B}'$ и $\overline{B}''$. В силу выбора δ диаметр хотя бы одного из множеств $v_k(\overline{B}')$, $v_k(\overline{B}'')$ меньше ε_1. Предположим, что $\operatorname{diam} v_k(B')<\varepsilon_1$. Так как $\varepsilon_1 \leqslant \delta_0/2<\varepsilon_0$, точка 0 не принадлежит B'. Отсюда ясно, что B' есть пересечение B с кругом, ограниченным окружностью C_{h_k}. Поскольку $\xi_k' \to 1$, $\xi_k'' \to 1$ при $k\to\infty$, при достаточно больших k будут выполняться неравенства $|\zeta_k'-1|<\rho$ и $|\zeta_k''-1|<\rho$ и точки ζ_k' и ζ_k'' будут принадлежать кругу $B(1,\rho)\subset B(1,h_k)$. Значит, $\zeta_k'\in B'$, $\zeta_k''\in B'$ при достаточно больших k. Для таких k диаметр множества $v_k(K')$ будет не меньше $|v_k(\zeta_k')-v_k(\zeta_k'')|\geqslant\varepsilon_0$. Это, однако, противоречит тому, что $\operatorname{diam} v_k(B')<\varepsilon_1<\varepsilon_0$. Предположение непрерывности функции $t_0(\varphi)$ в точке $\varphi=0$ приводит, таким образом, к противоречию.

Теперь рассмотрим случай II. Пусть

$$t_- = \lim_{\varphi\to -0} t_0(\varphi), \quad t_+ = \lim_{\varphi\to +0} t_0(\varphi).$$

Положим

$$\tau(z) = i\frac{1-z}{1+z}.$$

Функция τ отображает круг $\overline{B}$ на полуплоскость $\{z \mid \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$. При этом $\tau(0)=i$, $\tau(1)=0$, $\tau(-1)=\infty$. Для произвольного $\alpha>0$ полагаем

$$w_\alpha(z) = \tau^{-1}[\alpha\tau(z)] = \frac{1-\alpha+(1+\alpha)z}{1+\alpha+(1-\alpha)z}.$$

Функция w_α отображает круг $\overline{B}$ на себя, и для любых $\alpha>0$, $\beta>0$

$$w_\alpha[w_\beta(z)] = w_{\alpha\beta}(z).$$

Пусть $\rho>0$, $Q_\rho=\{z \mid |z|\leqslant\rho,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0\}$, $D_\rho=\tau^{-1}(Q_\rho)$. Очевидно, D_ρ есть часть круга $\overline{B}$, отделяемая дугой C_ρ окружности, ортогональной Γ, и содержащая точку $z=1$. Положим $\Delta_\rho=\overline{\overline{B}\setminus D_\rho}$. Если $z=e^{i\varphi}$, то $\tau(\varphi)=\operatorname{tg}(\varphi/2)$. Отсюда вытекает, что если x — точка на прямой $\operatorname{Im} z = 0$, то $\tau^{-1}(z)=\exp(2i\operatorname{arctg} x)$.

Зададим последовательность значений ρ_m, $m=0, 1, 2, \ldots$, полагая $\rho_m=1/(m+1)!$ при каждом m. Отметим, что здесь существенно только, что $\rho_m\to 0$ и $\rho_m/\rho_{m+1}\to\infty$ при $m\to\infty$. Положим $\varphi_m=2\operatorname{arctg}\rho_m$, $z_m=e^{i\varphi_m}$, $z_m=e^{-i\varphi_m}$. Для упрощения записи введем обозначение $C_m=C_{\rho_m}$, $D_m=D_{\rho_m}$. Полагаем $R_m=\overline{D_{m-1}\setminus D_{m+1}}$.

Пусть μ_k есть полная вариация векторного заряда $\Delta v_k(E)$. В силу условий леммы последовательность $(\mu_k(\overline{K}))$, $k=1, 2, \ldots$, ограниченная. Поэтому из $(v_k(z))$, $k=1, 2, \ldots$, можно извлечь подпоследовательность, для которой последовательность мер μ_k слабо сходится к некоторой мере μ_0. Чтобы не усложнять обозначений, будем считать, что уже исходная последовательность мер (μ_k) является слабо сходящейся.

Пусть L_m' и L_m'' — дуги граничного контура поверхности P_0, отвечающие значениям параметра $t\in[t_0(\varphi_{m+1}), t_0(\varphi_{m-1})]$, $t\in[t_0(-\varphi_{m-1}), t_0(-\varphi_{m+1})]$. Обозначим через U_m и U_m' $(1/m)$-окрестности дуг L_m, и L_m' соотв. При $k\to\infty$ функции $f_k(t)$ сходятся равномерно к функции $f_0(t)$, а $t_k(-\varphi_m)\to t_0(-\varphi_m)$, $t_k(\varphi_m)\to t_0(\varphi_m)$ при $k\to\infty$ для любого $m=0, 1, 2, \ldots$. Поэтому найдется k_m' такое, что при всяком $k\geqslant k_m'$ дуги кривой Γ_k, отвечающие значениям t из промежутков $[t_k(-\varphi_{m-1}), t_k(-\varphi_{m+1})]$, $[t_k(\varphi_{m+1}), t_k(\varphi_{m-1})]$, лежат в множествах U_m' и U_m соотв.

Так как функция f_0 непрерывна и $t_0(\varphi_m)\to t_1$, а $t_0(-\varphi_m)\to t_2$ при $m\to\infty$, то $f_0[t_0(\varphi_m)]\to f_0(t_2)$, $f_0[t_0(-\varphi_m)]\to f_0(t_1)$ и области U_m и U_m' сходятся топологически при $m\to\infty$ к точкам $f_0(t_1)$, $f_0(t_2)$ соотв.

Множество R_m замкнуто, поэтому

$$\mu_0(R_m)\geqslant\varlimsup_{k\to\infty}\mu_k(R_m).$$

Пусть k_m'' таково, что при $k \geqslant k_m''$

$$\mu_k(R_m) < \mu_0(R_m) + 1/m.$$

При $k \to \infty$ $\zeta_k' \to 1$ и $\zeta_k'' \to 1$. Пусть k_m''' таково, что при $k \geqslant k_m'''$ точки ζ_k' и ζ_k'' лежат в области D_{m+1}.

Пусть (k_m), $m = 1, 2, \ldots,$ — последовательность натуральных чисел такая, что $k_1 < k_2 < \ldots < k_m < \ldots$, и при каждом m $k_m \geqslant \max\{k_m', k_m'', k_m'''\}$. Положим $\alpha_m(z) = w_{1/\rho_m}(z) = \tau^{-1}((m+1)!\,\tau(z))$, $\beta_m = \alpha_m^{-1}$ (отображение, обратное к α_m, $\beta_m = w_{\rho_m}$) и $\alpha_m(z_{m-1}) = a_m$, $\alpha_m(z_{m+1}) = b_m$, $\alpha_m(\bar z_{m-1}) = c_m$, $\alpha_m(\bar z_{m+1}) = d_m$. Тогда, как показывают простые вычисления, $a_m = e^{ip_m}$, $b_m = e^{iq_m}$, $c_m = e^{-ip_m}$, $d_m = e^{-iq_m}$, где $p_m = 2\operatorname{arctg}(1/(m+2))$, $q_m = 2\operatorname{arctg}(m+1)$. При $m \to \infty$ точки a_m и c_m стремятся к $z = 1$, а b_m и d_m — к $z = -1$.

Область $V_m = \alpha_m(R_m)$ ограничена дугами $a_m b_m$, $c_m d_m$ окружности Γ и дугами $a_m c_m$, $b_m d_m$ окружностей, ортогональных Γ. При $m \to \infty$ дуги $a_m c_m$ и $b_m d_m$ топологически сходятся к точкам $z = 1$, $z = -1$ соотв. Отсюда вытекает, что, какова бы ни была окрестность W множества $H = \{-1, 1\}$, найдется m_0 такое, что $V_m \subset \bar B \setminus W$ при $m \geqslant m_0$. Отметим, что $\alpha_m(z_m) = i$, $\alpha_m(\bar z_m) = -i$.

Исследуем свойства вектор-функций $\sigma_m(z) = v_{k_m}[\beta_m(z)]$. Когда z лежит на дуге $a_m b_m$ окружности Γ, точка $\zeta = \beta_m(z)$ лежит на не содержащей точку 1 дуге $z_{m-1} z_{m+1}$ окружности Γ. Так как $k_m \geqslant k_m'$, то $\sigma_m(z) \in U_m$. Аналогичным образом заключаем, что при z, лежащей на дуге $c_m d_m \subset \Gamma$, не содержащей точки 1, имеем $\sigma_m(z) \in U_m'$. При $m \to \infty$ области U_m сходятся топологически к точке $f(t_1)$, а области U_m' — к точке $f(t_2)$. Отсюда вытекает, что $\sigma_m(z) \to f(t_1)$, $\sigma_m(z) \to f(t_2)$ при $m \to \infty$ для всякой $z \in \Gamma$, лежащей в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. При этом на каждой из дуг окружности Γ, определяемых неравенствами $\operatorname{Im} z > \varepsilon = \mathrm{const} > 0$, $\operatorname{Im} z < -\varepsilon = \mathrm{const} < 0$, сходимость равномерна.

В силу леммы 3.1 вектор-функция σ_m — δ-субгармоническая. При этом для всякого борелевского множества $E \subset \bar B$

$$\Delta\sigma_m(E) = \Delta v_{k_m}[\beta_m(E)],$$

откуда

$$|\Delta\sigma_m|(E) = |\Delta v_{k_m}|[\beta_m(E)] = \mu_{k_m}[\beta_m(E)].$$

В частности, мы получаем, что последовательность $(|\Delta\sigma_m|(\bar B))$, $m = 1, 2, \ldots$, является ограниченной. Кроме того, очевидно, $|\Delta\sigma_m|(V_m) = |\Delta v_{k_m}|(R_m) \leqslant \mu_0(R_m) + 1/m$ в силу того, что $k_m \geqslant k_m''$. При $m \to \infty$ $\mu_0(R_m) \to 0$, поэтому $|\Delta\sigma_m|(R_m) \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда, в частности, следует, что $|\Delta\sigma_m|(\bar B \setminus W) \to 0$ при $m \to \infty$ для любой окрестности W множества $H = \{-1, 1\}$.

При каждом m для всех $z \in \bar B$ в силу (4.1) $|\sigma_m(z)| \leqslant L < \infty$, где L — постоянная. Положим $\sigma_m(z) = \psi_m(z) + \chi_m(z)$, где функция ψ_m — гармоническая, причем $\psi_m(z) = \sigma_m(z)$ на Γ. Тогда $\chi_m(z) = 0$ при $z \in \Gamma$ и $\Delta\chi_m = \Delta\sigma_m$. В силу принципа максимума для гармонических функций точка $\psi_m(z)$ принадлежит выпуклой оболочке граничного контура поверхности P_{k_m}. Отсюда следует, что $|\psi_m(z)| \leqslant L = \mathrm{const} < \infty$ для всех $z \in \bar B$ и, значит, $|\chi_m(z)| \leqslant 2L$ для всех $z \in \bar B$ при каждом $m = 1, 2, \ldots$. При $m \to \infty$ $\sigma_m(z) \to f(t_1)$, $\sigma_m(z) \to f(t_2)$ для всякой $z \in \Gamma$ такой, что $\operatorname{Im} z < 0$. Принимая во внимание ограниченность последовательности функций $\psi_m(z)$ и применяя классическую формулу решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа, получим, что $\psi_m(z) \to \psi_0(z)$ при $m \to \infty$, где $\psi_0(z)$ — гармоническая функция в круге $\bar B$ такая, что при $z \in \Gamma$ $\psi_0(z) = f(t_1)$, если $\operatorname{Im} z < 0$ и $\psi_0(z) = f(t_2)$, если $\operatorname{Im} z > 0$. При этом $\psi_m(z) \to \psi_0(z)$ равномерно на всяком замкнутом множестве $E \subset \bar B$, не содержащем точек

-1 и 1, а на всяком замкнутом $E \subset B$ производные любого порядка функции ψ_m сходятся равномерно к соответствующим производным ψ_0.

Докажем, что при $m \to \infty$ для любого замкнутого множества $A \subset \overline{B}$ такого, что $-1 \notin A$ и $1 \notin A$,

$$\lim_{m\to\infty} \int_A |\nabla \chi_m(z)|^2 \, dxdy = 0.$$

Пусть $\gamma_m(z)$ есть аналитическая функция, отображающая единичный круг $\overline{B}$ на V_m и такая, что $\gamma_m(0) = 0$, $\gamma_m'(0) > 0$. При $m \to \infty$ $\gamma_m(z) \to z$ равномерно в $\overline{B}$ и на всяком замкнутом подмножестве круга $\overline{B}$, не содержащем точек -1, 1, производные любых порядков функции γ_m равномерно сходятся к соответствующим производным функции $\gamma_0(z) \equiv z$. Пусть $p_m = \gamma_m^{-1}(a_m)$, $q_m = \gamma_m^{-1}(b_m)$, $r_m = \gamma_m^{-1}(c_m)$, $s_m = \gamma_m^{-1}(d_m)$. Тогда $p_m \to -1$, $r_m \to -1$, $q_m \to 1$, $s_m \to 1$ при $m \to \infty$. Точки p_m, q_m, r_m и s_m лежат на окружности Γ. Положим

$$\xi_m(z) = \chi_m[\gamma_m(z)].$$

В силу леммы 3.1 функция ξ_m — δ-субгармоническая. При этом $\Delta\xi_m(E) = (\Delta\chi_m)[\gamma_m(E)]$ для всякого $E \subset \overline{B}$. Отсюда, в частности, следует, что $|\Delta\xi_m|(\overline{B}) \to 0$ при $m \to \infty$. На дугах $[p_m q_m]$ и $[r_m s_m]$ окружности Γ при всех m имеем $\xi_m(z) = 0$ и $|\xi_m(z)| \leqslant 2L$. Обозначим через $\eta_m(z)$ гармоническую в круге $\overline{B}$ функцию такую, что $\eta_m(z) = \xi_m(z)$ при $z \in \Gamma$, и положим $\theta_m(z) = \xi_m(z) - \eta_m(z)$. Очевидно, $|\xi_m(z)| \leqslant 2L$ для всех $z \in \overline{B}$, откуда следует, что также и $|\eta_m(z)| \leqslant 2L$ и, значит, $|\theta_m(z)| \leqslant |\xi_m(z)| + |\eta_m(z)| \leqslant 4L$ для всех $z \in \overline{B}$. В силу следствия леммы 3.6

$$\int_B (|\theta_{m,x}|^2 + |\theta_{m,y}|^2) \, dxdy \leqslant 4L \, |\Delta\theta_m|(B). \tag{4.5}$$

Функция $\eta_m(z)$ равна нулю на дугах $[p_m q_m]$ и $[r_m s_m]$ окружности Γ и $|\eta_m(z)| \leqslant 2L$ для всех m. Используя представление $\eta_m(z)$ по формуле Пуассона и применяя известные теоремы о предельном переходе под знаком интеграла, получим, что на всяком замкнутом множестве $A \subset \overline{B}$, не содержащем точек 1 и -1, при $m \to \infty$ функция η_m вместе со всеми ее производными стремится к нулю. Принимая во внимание оценку (4.5) заключаем, что для любого замкнутого множества $A \subset \overline{B} \backslash H$ при $m \to \infty$

$$\int_B (|\eta_{m,x}(z)|^2 + |\eta_{m,y}(z)|^2) \, dxdy \to 0. \tag{4.6}$$

Покажем, что для всякого замкнутого множества $A \subset \overline{B} \backslash H$ также и

$$\int_A |\nabla \chi_m(z)|^2 \, dxdy \to 0$$

при $m \to \infty$. Обозначим через 2ρ наименьшее из расстояний от точек -1 до 1 до множества A, и пусть $\mathscr{B}$ — совокупность всех точек $z \in \overline{B}$, для которых $|z-1| \geqslant \rho$ и $|z+1| \geqslant \rho$. При достаточно больших m множество A содержится в V_m, причем его прообраз $\gamma_m^{-1}(A)$ содержится в $\mathscr{B}$. Для таких m в силу свойства инвариантности интеграла Дирихле относительно конформных преобразований имеем

$$\int_A |\nabla \chi_m(z)|^2 \, dxdy = \int_{\gamma_m^{-1}(A)} |\nabla \xi_m(z)|^2 \, dxdy \leqslant \int_B |\nabla \xi_m(z)|^2 \, dxdy.$$

В виду (4.6) отсюда следует, что при $m \to \infty$

$$\int_A |\nabla \chi_m(z)|^2 \, dxdy \to 0. \tag{4.7}$$

Мы имеем последовательность δ-субгармонических функций $\sigma_m = \psi_m + \chi_m$, $m = 1, 2, \ldots$, и гармоническую функцию σ_0. Для всякого замкнутого множества $A \subset \overline{B} \backslash H$ при $m \to \infty$ на основании доказанного

$$\int_A |\nabla \psi_m - \nabla \sigma_0|^2 \, dxdy \to 0,$$

$$\int_A |\nabla \chi_m(z)|^2 \, dxdy \to 0,$$

откуда следует, что

$$\int_A |\nabla (\sigma_m - \sigma_0)|^2 \, dxdy \to 0 \tag{4.8}$$

при $m \to \infty$. Вектор-функция σ_m при каждом $m > 0$ такова, что для всех $z \in \overline{B}$

$$\left| \frac{\partial \sigma_m}{\partial x}(z) \right| = \left| \frac{\partial \sigma_m}{\partial y}(z) \right|, \quad \left\langle \frac{\partial \sigma_m}{\partial x}(z), \frac{\partial \sigma_m}{\partial y}(z) \right\rangle = 0.$$

В силу (4.8) отсюда вытекает, что в каждой точке $z \in \overline{B}$

$$\left| \frac{\partial \sigma_0}{\partial x}(z) \right| = \left| \frac{\partial \sigma_0}{\partial y}(z) \right|, \quad \left\langle \frac{\partial \sigma_0}{\partial x}(z), \frac{\partial \sigma_0}{\partial y}(z) \right\rangle = 0. \tag{4.9}$$

Точками -1 и 1 окружность Γ делится на полуокружности, на каждой из которых гармоническая функция σ_0 постоянна. Отсюда в силу известных свойств гармонических функций следует, что $\sigma_0(z)$ аналитична на множестве $\overline{B} \backslash H$. Производная функция $\sigma_0(z)$ по длине дуги на полуокружности $\Gamma^+ = \{z \in \Gamma \mid \operatorname{Im} z > 0\}$ равна нулю. Отсюда в силу изотермичности вектор-функции $\sigma_0(z)$, т. е. равенств (4.9), следует, что производная функции $\sigma_0(z)$ по нормали на дуге Γ^+ также равна нулю. В силу известной теоремы об единственности решения задачи Коши для уравнения Лапласа это позволяет заключить, что функция $\sigma_0(z)$ является тождественно постоянной в круге $\overline{B}$, в частности $f(t_1) = f(t_2)$.

Пусть P есть совокупность всех точек $z \in \overline{B}$ таких, что $-1/2 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1/2$. Множество P замкнуто и не содержит точек $z = -1$ и $z = 1$. Имеем: $\sigma_m(z) \psi_m(z) + \chi_m(z)$.

В силу доказанного выше $\psi_m(z) \to \sigma_0(z) \equiv \sigma_0 = \mathrm{const}$ при $m \to \infty$ равномерно на P и

$$\nu_m = \int_P |\nabla \chi_m(z)|^2 \, dxdy \to 0$$

при $m \to \infty$. Справедливо равенство

$$\int_P |\chi_{m,y}(z)|^2 \, dxdy = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} |\chi_{m,y}(z)|^2 \, dy \right) dx.$$

Пусть E_m — совокупность всех $x \in [-1/2, 1/2]$, для которых

$$\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} |\chi_{m,y}(z)|^2 \, dy \leqslant 2\nu_m.$$

Очевидно, E_m есть множество положительной меры. Выберем $x_m \in E_m$ такое, что $\chi_m(x + iy)$ при $x = x_m$ абсолютно непрерывна как функция y. Таковы почти все $x \in (-1, 1)$, откуда в силу положительности меры множества E_m вытекает существование требуемого $x = x_m$. Хорде $l_m = \{z \in \overline{K} \mid \operatorname{Re} z = x_m\}$ круга $\overline{B}$ отвечает некоторая дуга L_m на поверхности P_{k_m}. Диаметр дуги L_m не превосходит суммы колебаний функций ψ_m и χ_m на отрезке l_m. Колебание λ_m функции ψ_m на этом отрезке стремится к нулю при $m \to \infty$, так как ψ_m равномерно сходится к постоянной на множестве P. Колебание функции χ_m на отрезке l_m допускает следующую оценку:

$$\underset{z\in l_m}{\cos}\ \chi_m(z)\leqslant \int\limits_{-\sqrt{1-x_m^2}}^{\sqrt{1-x_m^2}} |\chi_{m,y}(x_m+iy)|\,dy\leqslant$$

$$\leqslant\left(2\sqrt{1-x_m^2}\right)^{1/2}\left(\int\limits_{-\sqrt{1-x_m^2}}^{\sqrt{1-x_m^2}} |\chi_{m,y}(x_m+iy)|^2\,dy\right)^{1/2}\leqslant 2\sqrt{\nu_m}.$$

Окончательно получаем, что диаметр дуги L_m на поверхности P_{k_m} не превосходит $\lambda_m+2\sqrt{\nu_m}$ и, следовательно, стремится к нулю при $m\to\infty$.

Круг $\overline{B}$ разбивается хордой l_m на две части. Пусть B_m' — та из них, которая лежит слева от l_m, B_m'' — другая. При $m\to\infty$ диаметр дуги $L_m=\sigma_m(l_m)$ на поверхности P_{k_m} стремится к нулю. Так как P_{k_m} невырожденные поверхности типа круга, сходящиеся при $m\to\infty$ к невырожденной поверхности, то на основании следствия леммы 2.1 диаметр, по крайней мере одной из тех поверхностей, на которые P_{k_m} разбивается дугой L_m, стремится к нулю при $m\to\infty$. Следовательно, колебание функций $\sigma_m(z)$, по крайней мере на одной из областей B_m' и B_m'', стремится к нулю при $m\to\infty$. Отсюда мы придем к противоречию.

Положим $z_m=\alpha_m(\zeta_{k_m})$, $z_m'=\alpha_m(\zeta_{k_m}')$. Так как $k_m\geqslant k_m''$, точки z_m' и z_m'' принадлежат пересечению $\overline{B}$ и круга, на границе которого лежит дуга $[a_mc_m]$, ортогональная Г. При достаточно больших m точки z_m' и z_m'', очевидно, принадлежат B_m''. Имеем

$$|\sigma_m(z_m)-\sigma_m(z_m')|=\left|v_{k_m}(\zeta_{k_m})-v_{k_m}(\zeta_{k_m}')\right|\geqslant\varepsilon_0>0$$

и, значит, колебание $\sigma_m(z)$ на B_m'' не стремится к нулю при $m\to\infty$.

Точка $\alpha_m(0)\to-1$ при $m\to\infty$ и поэтому при достаточно больших m $\alpha_m(0)$ лежит в области B_m'. Имеем: $\sigma_m(\alpha_m(0))=v_{k_m}(0)$. В силу условия С точка $v_{k_m}(0)$ отстоит от граничного контура поверхности P_{k_m} на расстоянии не меньше $\delta_0>0$. Отсюда вытекает, что при достаточно больших m колебание функции $\sigma_m(z)$ на множестве B_m^1 не меньше $\delta_0>0$.

Таким образом установлено, что колебание функции σ_m на каждой из областей B_m' и B_m'' ограничено снизу некоторым положительным числом и тем самым получено противоречие. Итак, рассматриваемый случай также невозможен. Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Данелич И. А.** О поверхностях ограниченной абсолютной средней кривизны и их плоских сечениях.— Сиб. мат. журн., 1963, т. 4, № 3, с. 519—538.
2. **Данелич И. А.** Поверхности ограниченной абсолютной средней интегральной кривизны с краем.— Сиб. мат. журн., 1964, т. 5, № 5, с. 1035—1060.
3. **Данелич И. А.** Поверхности Фреше ограниченной абсолютной средней интегральной кривизны.— Сиб. мат. журн., 1978, т. 19, № 3, с. 498—524.
4. **Решетняк Ю. Г.** Изотермические координаты на поверхностях ограниченной интегральной средней кривизны.— Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 5, с. 1024—1025.