Доказательство. Так как в интуиционистской арифметике НА выводима формула $x = y \vee \neg x = y$, то по следствию 4 любая c-модель НА является конструктивной. В [10] доказано, что любая конструктивная модель НА рекурсивно изоморфна стандартной модели арифметики. Следовательно, НА не имеет нестандартных c-моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воронков А. А.** Логические программы и их синтез.— Новосибирск, 1986.— 32 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 23).
2. **Воронков А. А.** Синтез логических программ.— Новосибирск, 1986.— 42 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 24).
3. **Ершов Ю. Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели.— М.: Наука, 1980.
4. **Scott D. S.** Domains for denotational semantics // Lecture Notes in Computer Science.— Berlin, 1982.— V. 140.— P. 577—612.
5. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций.— М.: Наука, 1977.
6. **Гончаров С. С.** Ограниченные теории конструктивных булевых алгебр // Сиб. мат. журн.— 1976.— Т. 17, № 4.— С. 797—812.
7. **Harrop R.** Concerning formulas of the types $A \to B \vee C$, $A \to (Ex)B(x)$ in intuitionistic formal system // J. of Symb. Logic.— 1960.— V. 25, N 1.— P. 27—32.
8. **Марков А. А., Нагорный Н. М.** Теория алгорифмов.— М.: Наука, 1984.
9. **Клини С. К.** Введение в математику.— М.: ИЛ, 1957.
10. **Tannenbaum C.** Non-archimedian models for arithmetic // Notices Amer. Math. Soc.— 1959.— V. 6, N 3.— P. 270.

СЕМЕЙСТВО С ЕДИНСТВЕННОЙ ОДНОЗНАЧНОЙ, НО НЕ НАИМЕНЬШЕЙ НУМЕРАЦИЕЙ

С. С. ГОНЧАРОВ

Алгебраическая характеризация полурешеток вычислимых нумераций семейств рекурсивно-перечислимых множеств (РПМ) — одна из основных проблем теории нумераций. В связи с этим вопрос о существовании и числе минимальных нумераций семейств РПМ привлекал внимание многих авторов (см. [1—6]). В содержательном обзоре И. А. Лаврова [7] о вычислимых нумерациях отмечается тесная связь этих проблем с изучением однозначных и позитивных нумераций и обсуждаются полученные в этом направлении результаты.

В работе [8] показано, что семейство с однозначной, но не наименьшей нумерацией имеет счетное число позитивных неэквивалентных вычислимых нумераций. В [9] построены семейства с любым заданным числом $n \leqslant \omega$ неэквивалентных однозначных вычислимых нумераций. В настоящей работе продолжаются эти исследования, решается вопрос: не будет ли единственная однозначная нумерация наименьшей? На этот вопрос получен отрицательный ответ.

В обозначениях и определениях будем следовать монографиям [10, 11]. Напомним некоторые из основных, используемых в дальнейшем, понятий и обозначений.

Через $\mathbf{N}$ будем обозначать множество всех натуральных чисел с нулем, c, l, r — канторовские функции, нумерующие пары натуральных чисел, т. е. $c\colon \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$, $c(l(x), r(x)) = x$, $l(c(x, y)) = x$ и $r(c(x, y)) = y$.

Обозначим через $K(x, y)$ частично-рекурсивную функцию (ЧРФ), универсальную для класса одноместных ЧРФ. Через $K^t(x, y)$ будем обозначать значение $K(x, y)$, если оно вычисляется не более чем за t шагов; в противном случае $K^t(x, y)$ не определено.

Вычисляемая нумерация ν называется *наименьшей*, если ν сводится к любой вычислимой нумерации данного семейства.

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема. *Существует семейство* РПМ *с единственной (с точностью до эквивалентности) однозначной вычислимой нумерацией, не являющейся наименьшей.*

В доказательстве используется идея конструкции из работы [9].

Мы хотим построить однозначную вычислимую нумерацию ν и вычислимую нумерацию μ одного и того же семейства S так, что $\urcorner(\nu \leqslant \mu)$, но любая однозначная вычислимая нумерация ξ семейства S эквивалентна ν. Нам нужно для любой рекурсивной функции f сконструировать элемент Δ_f такой, что $\nu(\Delta_f) \neq \mu f(\Delta_f)$, а для любой вычислимой однозначной нумерации ξ — рекурсивную функцию $\widehat{\xi}$ такую, что $\nu(n) = \xi(\widehat{\xi}(n))$ для любого n. Трудность в совмещении этих двух конструкций состоит в том, что для построения Δ_f мы должны переопределять $\nu^t(\Delta_f)$, расширяя его, за счет чего может испортиться некоторое сведéние $\widehat{\xi}$, которое нужно будет исправлять.

Основная идея конструкции состоит в выборе для каждого строящегося сведéния $\widehat{\xi}$ некоторой стопорящей функции $s(\xi)(t)$ такой, что любое нарушение условия сводимости ν к ξ посредством функции $\widehat{\xi}$ обязательно нарушится и на стопорящем значении $s(\xi)(t)$; а оно обладает тем свойством, что $a = \widehat{\xi}(s(\xi)(t))$ не изменяется с изменением t, т. е. определяет один и тот же номер в нумерации ξ. Если в этом случае $s(\xi)(t)$ принимает бесконечно много значений, причем не возвращаясь к предыдущим, то в результате мы построим в нумерации ξ множество $\xi(a)$, которое является предельным для построенного семейства $S = \{\nu(n) \mid n \in \mathbf{N}\}$, но не лежит в нем. Таким образом, бесконечно встречающееся нарушение условия сводимости ν к ξ посредством $\widehat{\xi}$ будет гарантировать, что ξ нумерует другое семейство множеств.

Условием работы стопорящей функции $s(\xi)(t)$ является следующий механизм работы со строящимися нумерациями ν и μ. Если мы хотим изменить множества $\nu^t(n)$ и $\nu^t(m)$ на шаге $t+1$, причем так, чтобы для $\widehat{\xi}$ либо не нарушалось условие сводимости

$$\xi^{t'}(\widehat{\xi}(l)) \supseteq \nu^t(l) \text{ для всех } t' \geqslant t,$$

(где $\xi^t(l)$ — конечная часть множества $\xi(l)$, вычисленная к шагу t в точках l из множества $\{a_1, \ldots, a_n\}$, включающего точки n и m), либо условие сводимости нарушалось на всех указанных точках одновременно, то мы выбираем новые еще не использованные попарно различные элементы $\delta_1, \ldots, \delta_n$, которые будем добавлять в множества. Можем определить

$$\nu^{t+1}(a_i) = \nu^t(a_i) \cup \nu^t(a_{i+1}) \cup \{\delta_{i+1}\},\ i < n,$$
$$\nu^{t+1}(a_n) = \nu^t(a_1) \cup \nu^t(a_n) \cup \{\delta_1\}.$$

Мы строим множества на шаге t так, что $\nu^t(m) \not\subseteq \bigcup_{i \neq m} \nu^t(i)$. Если ξ нумерует то же семейство, что и ν, $i \neq m$ должен существовать шаг $t' > t$ такой, что $\xi^{t'}(\widehat{\xi}(l)) \supseteq \nu^{t+1}(l)$ или $\xi^{t'}(\widehat{\xi}(l)) \supseteq \nu^{t+1}(l^*)$, где $l^* = a_i$, если $l = a_{i+1}$, либо $l^* = a_n$, если $l = a_1$. Это происходит из-за того, что кусок $\nu^t(l)$ содержится лишь в двух множествах: $\nu^{t+1}(l)$ и $\nu^{t+1}(l^*)$, а $\xi^{t'}(\widehat{\xi}(l)) \supseteq \nu^t(l)$ по условию сводимости. Но тогда, если найдутся s и p такие, что $s \neq p$ и $\xi^{t'}(s) \supseteq \nu^{t+1}(l)$, $\xi^{t''}(p) \supseteq \nu^{t+1}(l)$, то, не меняя больше $\nu^{t+1}(l)$, получаем: ξ либо не нумерует то же семейство, что и ν, либо неоднозначна, а в таком случае о сводимости к ней не нужно беспокоиться. Если же ξ — однозначная нумерация и именно того же семейства, то для всех l или $\xi^{t'}(\widehat{\xi}(l)) \supseteq \nu^{t+1}(l)$ при подходящем t', или $\xi^{t'}(\widehat{\xi}(l)) \supseteq \nu^{t+1}(l^*)$. Но тогда сводимость либо нарушена во всех точках a_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, либо не нарушена нигде.

Заметим, что если $\widehat{\xi}(l)$ определена на начальном отрезке $a_1, \ldots, a_n$, то из того, что для некоторого $l \in \{a_1, \ldots, a_n\}$ выполнено $\xi^{t'}(\widehat{\xi}(l)) \supseteq \supseteq \nu^{t+1}(l^*)$ (т. е. сводимость нарушается) следует, что для всех a_i, $i < i_0$, где $a_{i_0} = l$, также выполнено $\xi^{t'}(\widehat{\xi}(a_i)) \supseteq \nu^{t+1}(a_i^*)$ (т. е. сводимость нарушается и на всех предшествующих номерах списка $a_1, \ldots, a_n$).

Теперь перед нами стоит следующая задача: равномерно для всех однозначных вычислимых нумераций ξ семейства S построить $\widehat{\xi}$ и для рекурсивных функций f найти Δ_f. Ситуация осложняется тем, что априори мы не можем работать только с однозначными нумерациями и рекурсивными функциями; нам придется взять $\{\gamma_i | i \in \mathrm{N}\}$ — вычислимую нумерацию всех вычислимых нумераций семейств РПМ и $K(x, y)$ — ЧРФ универсальную для всего класса ЧРФ.

В процессе построения нумераций ν и μ для ЧРФ $\lambda y K(x, y)$ будем определять и на шаге t серию элементов Δ_n^i, π_n^i, $i \leqslant k_n^t$, на которых попытаемся испортить сводимость ν к μ посредством функции $\lambda y K(n, y)$.

Для каждой вычислимой нумерации γ_j мы будем делать несколько попыток свести ν к γ_j. Через $\widehat{j}_i^t$ обозначаем часть «сводящей» функции ν к γ_j в i-й попытке на шаге t.

В каждой нетривиальной попытке сведéния строятся стопорящая функция $s^t(j, i)$ и вспомогательная для нее функция $l^t(j, i)$. С каждой попыткой $\langle n, s\rangle$ испортить сводимость ν к μ посредством функции $\lambda y K(n, y)$ мы свяжем множество $\Pi_n^s(t)$, состоящее из пар $[j, i]$, представляющих i-ю попытку свести ν к γ_j. Для $[j, i]$ сводимость посредством $\widehat{j}_i^t$ нумерации ν к γ_j может испортиться в связи с попыткой изменить строящиеся ν-множества для порчи $\lambda y K(n, y)$. Причем для каждого j в $\Pi_n^s(t)$ может входить пара $[j, i]$ лишь для одного i.

Определим для пары $[j, i]$ трассу $M(i, j) = \cup M^t(i, j)$, где $M^t(i, j) \rightleftharpoons \rightleftharpoons \{s^t(j, i), l^t(j, i)\}$. Трасса по построению рекурсивна, и для разных пар трассы не пересекаются. Для $\langle n, s\rangle$, где $s \leqslant k_n^t$, *$\langle n, s\rangle$-список на шаге $t+1$* — это линейно-упорядоченное множество $L_{\langle n,s\rangle}^t = \langle L_{\langle n,s\rangle}^t, \prec\rangle$, где

$$L_{\langle n,s\rangle}^t = \{\Delta_n^s, \pi_n^s\} \cup \bigcup_{[j,i] \in \Pi_n^s(t)} M_{ji}^t,$$

а порядок $\prec$ на $L_{\langle n,s\rangle}^t$ определен следующим образом:

$$l^t(j_0, i_0) \prec s^t(j_0, i_0) \prec l^t(j_1, i_1) \prec \ldots \prec s^t(j_m, i_m) \prec \Delta_n^s \prec \pi_n^s,$$

где $\Pi_n^s(t) = \{[j_0, i_0], \ldots, [j_m, i_m]\}$ $j_0 < j_1 < \ldots < j_m$. В нашей конструкции на $\langle n, s\rangle$-списках и будет происходить изменение множеств как на последовательности $a_1, \ldots, a_d$. Под $\langle n, s, j, i\rangle$-списком понимаем подпорядок $L_{\langle n,s,j,i\rangle}^t$ порядка $L_{\langle n,s\rangle}^t$ с основным множеством

$$\{l^t(j_\beta, i_\beta), s^t(j_\beta, i_\beta) \mid [j, i] \leqslant_{\text{lex}} [j_\beta, i_\beta]\} \cup \{\Delta_n^s, \pi_n^s\}.$$

Для каждой попытки i-й попытке $\widehat{j}_i^t$ мы будем определять множество D_{ji}^t, которое задает требование на область определения $\widehat{j}_i^t$.

Будут строиться функции $\varphi^t(s)$ и $\psi^t(s)$, $\nu(s) = \mu \underline{\lim}\, \varphi^t(s) = \mu\, \underline{\lim}\, \psi^t(s)$, которые устанавливают совпадение семейств S_ν и S_μ РПМ, нумеруемых соответственно ν и μ.

На пары, соответствующие попыткам испортить сводимость ν к μ (обозначаем их $\langle n, i\rangle$), ставятся (и больше не снимаются) метки $\boxed{+}$. Метка $\boxed{+}$ на $\langle n, s\rangle$ указывает, что сводимость ν к μ посредством функции $\lambda y K(n, y)$ нарушается на элементах из $\{\Delta_n^s, \pi_n^s\}$. На пары $[j, i]$, соответствующие i-й попытке свести ν к γ_j, ставятся (и больше не снимаются) метки $\boxed{-}$. Они соответствуют исключению i-й попытки из дальнейшего рассмотрения. На тройки чисел $\langle l, l_1, l_2\rangle$ будем иногда ставить метку Z_j, которая соответствует установлению включений

$$\gamma_j^{t+1}(l_1) \supseteq \nu^t(l) \text{ и } \gamma_j^{t+1}(l_2) \supseteq \nu^t(l),$$

причем $l_1 \neq l_2$. В таком случае мы больше по возможности не изменяем $\nu^t(l)$, и γ_j не будет однозначной вычислимой нумерацией нашего семейства.

Элементы из $\bigcup_{n\geqslant 0} \nu^t(n)$ называем *занятыми на шаге* $t+1$. Мы строим наши множества так, что $\bigcup_{n\geqslant 0} \nu^t(n)$ рекурсивно равномерно по t и $\mathbf{N}\setminus\left(\bigcup_{n\geqslant 0} \nu^t(n)\right)$ бесконечно.

Будем говорить, что *ν-номер s не использовался до шага* $t+1$, если он не являлся значением Δ_n^i, π_n^i, $l^{t_1}(j, i)$, $s^{t_1}(j, i)$ для $t_1 \leqslant t$ и не входил в тройки, на которые была поставлена метка Z_j.

Через δ_f будем обозначать область определения функции f. *Функция* $\hat{j}_i^t$ *вполне определена на* n, если $n \in \delta\hat{j}_i^t$ и $\nu^t(n) \subseteq \gamma_j^{t+1}(\hat{j}_i^t(n))$ либо $n \in \bigcup_{t'\leqslant t} M^{t'}(j', i') \cup \bigcup_{i'<k_p^t} \{\Delta_p^{i'}, \pi_p^{i'}\}[j', i'] <_{\mathrm{lex}} [j, i]$ и $p \leqslant j'$. *Функция* $\hat{j}_i^t$ *вполне определена на множестве* $D \subseteq \mathbf{N}$, если для всех $n \in D$ она вполне определена на n.

Мы говорим, что *оставляем на шаге* $t+1$ *без изменений*

в точке n функцию $\lambda n k_n^{t+1}$, если $k_n^{t+1} \rightleftharpoons k_n^t$,

в точке n нумерацию ν (или μ), если $\nu^{t+1}(n) \rightleftharpoons \nu^t(n)$ (или $\mu_i^{t+1}(n) \rightleftharpoons \mu^t(n)$),

множество $\Pi_n^i(t+1)$, если $\Pi_n^i(t+1) \rightleftharpoons \Pi_n^i(t)$,

значение функции $f^{t+1}(j, i)$, если $f^{t+1}(j, i) \rightleftharpoons f^t(j, i)$ где $f \in \{s, l\}$,

множество D_{ji}^{t+1}, если $D_{ji}^{t+1} \rightleftharpoons D_{ji}^t$,

в точке n функцию φ (или ψ), если $\varphi^{t+1}(n) \rightleftharpoons \varphi^t(n)$ (или $\psi^{t+1}(n) = \psi^t(n)$),

какую-либо метку, если она на шаге $t+1$ не ставится и не снимается.

В конструкции будут использоваться нулевой шаг и шаги типов $5t+1$, $5t+2$, $5t+3$, $5t+4$, $5t+5$.

Мы говорим, что

$\varkappa$-номер n используется в конструкции на шаге $t+1$, если $\varkappa^{t+1}(n) \neq \varkappa^t(n)$ или $n \in \delta\hat{j}_i^{t+1} \cup D_{ji}^{t+1} \cup \{\Delta_m^i \mid m \in \mathbf{N}$ и $i \leqslant k_m^{t+1}\} \cup \{\pi_m^i \mid m \in \mathbf{N}\ \&\ i \leqslant k_m^{t+1}\} \cup M^{t+1}(j, i)$ для некоторых $i, j \in \mathbf{N}$;

число n используется на шаге $t+1$ как номер, если оно использовано как ν- или μ-номер;

пара $\langle m, i\rangle$ используется на шаге T, если для этой пары проводится конструкция шагов типа $5t+1$ (случай 2 или 3) или $5t+2$;

пара $[j, i]$ используется на шаге T, если либо она добавляется или извлекается из некоторого множества Π_m^s, либо для нее проводится конструкция шагов типа $5t+2$, $5t+3$ или $5t+4$, либо на $[j, i]$ ставится метка $\boxed{-}$.

Пара $[j, i]$ определена на шаге T, если значение $s^T(j, i)$ определено.

Шаг 0. Полагаем $\nu^0(n) \rightleftharpoons \{2n\}$, $\mu^0(2n) \rightleftharpoons \mu^0(2n+1) \rightleftharpoons \{2n\}$, $\varphi^0(n) \rightleftharpoons 2n$, $\psi^0(n) \rightleftharpoons 2n+1$, $k_n^0 \rightleftharpoons 0$, $\Delta_n^0 \rightleftharpoons 4n$, $\pi_n^0 \rightleftharpoons 4n+1$, $l^0(0, 0) \rightleftharpoons 2$, $s^0(0, 0) \rightleftharpoons 6$, $D_{m,j}^0 \rightleftharpoons \varnothing$, $\Pi_{m'}^i(0) \rightleftharpoons \varnothing$.

Шаг $5t+1$. Рассмотрим $T = 5t$ и проверим, существует ли $n \leqslant T$ такое, что n не отмечено меткой $\boxed{+}$ и выполнен один из следующих случаев.

Случай 1. Функция $\lambda x K^T(n, x)$ определена на Δ_n^k и π_n^k; $K(n, \Delta_n^k) \in \{\varphi^T(\Delta_n^k), \psi^T(\Delta_n^k)\}$, $K(n, \pi_n^k) \in \{\varphi^T(\pi_n^k), \psi^T(\pi_n^k)\}$; $\Pi_n^k(T) = \varnothing$, ни Δ_n^k, ни π_n^k не принадлежат D_{ji}^T, $j < n$, если на $[j, i]$ нет $\boxed{-}$ и ни Δ_n^k, ни π_n^k не являются первой координатой в тройке, отмеченной Z_j, где $j < n$ и $k = k_n^T$.

Случай 2. Функция $\lambda x K^T(n, x)$ определена на Δ_n^k и π_n^k, и либо $K(n, \Delta_n^k) \notin \{\varphi^T(\Delta_n^k), \psi^T(\Delta_n^k)\}$, либо $K(n, \pi_n^k) \notin \{\varphi^T(\pi_n^k), \psi^T(\pi_n^k)\}$, где $k = k_n^T$.

Случай 3. Не выполнены условия предыдущих случаев, но существует $i \leqslant k_n^T$ такое, что $\lambda x K^T(n, x)$ определена на $\{\Delta_n^i, \pi_n^i\}$; $\Pi_n^i(T) = \{[j_0, i_0], [j_1, i_1], \ldots, [j_s, i_s]\}$, где $j_0 < j_1 < \ldots < j_s$, и, кроме того,

3а) для всех $\delta \leqslant s$, если на $[j_\delta, i_\delta]$ нет метки $\boxed{-}$, то функция $\widehat{j}^T_{\delta i_\delta}$ вполне определена на элементах множества $L^T_{\langle n,i,j_\delta,i_\delta\rangle}$;

3б) нет пары $[j', i']$ такой, что $j' < n$, но существует число δ', для которого $0 \leqslant \delta' \leqslant s$, $(j' = j_{\delta'} \,\&\, i' < i_{\delta'}) \vee (j_{\delta'} < j' < j_{\delta'+1}) \vee (\delta' = s \,\&\, j_{\delta'} < j') \vee (\delta' = 0 \,\&\, j' < j_0)$, $L^T_{\langle n,i,j',i'\rangle} \cap \left(\delta \widehat{j}'^T_{i'} \cap D^T_{j'i'}\right) \neq \varnothing$, и на $[j', i']$ не стоит метка $\boxed{-}$;

3в) нет $j' < n$ такого, что $Z_{j'}$ стоит на тройке, первая координата которой входит в $L^T_{\langle n,i\rangle}$.

Случай 4. Условия предыдущих случаев не выполнены, но существуют $i \leqslant k_n^T$ такое, что $\lambda x K^T(n, x)$ определена на $\{\Delta_n^i, \pi_n^i\}$; пара $[j', i']$, $j' < n$, на которой нет метки $\boxed{+}$; $\left(D^T_{j'i'} \cup \delta \widehat{j}'^T_{i'}\right) \cap L^T_{\langle n,i,j',i'\rangle} \neq \varnothing$ и ни одно из чисел $L^T_{\langle n,i\rangle}$ не является первой координатой тройки, на которой стоит $Z_{j'}$, $j' < n$; $j' < n$; число δ', $0 \leqslant \delta' \leqslant s + 1$, такое, что $\Pi_n^i(T) = \{[j_0, i_0], \ldots, [j_s, i_s]\}$, $j_0 < j_1 < \ldots < j_s$, $j_{s+1} = n$, $i_{s+1} = 0$, функция $\widehat{j}^T_{\delta' i_{\delta'}}$ вполне определена на $L^T_{\langle n,i,j_{\delta'},i_{\delta'}\rangle}$ и имеет место одно из следующих условий:

4а) $((j_{\delta'-1} < j' < j_{\delta'}) \vee (j' = j_{\delta'} \,\&\, i' < i_\delta))$;

4б) $j' < j_0 \,\&\, \delta' = 0$ или $\Pi_n'(T) = \varnothing$; $[j', i'] \notin \Pi^{i_*}_{m_*}(T)$ (где $\langle m_*, i_*\rangle <_{\text{lex}} \langle n, i\rangle$ либо на $\langle m_*, i_*\rangle$ стоит метка $\boxed{+}$); не существует пары $[j'', i'']$ такой, что $\left(D^T_{j''i''} \cup \delta \widehat{j}''^T_{i''}\right) \cap L^T_{\langle n,i,j'',i''\rangle} \neq \varnothing$; причем, если $j'' \neq j'$, то $[j', i'] <_{\text{lex}} [j'', i''] <_{\text{lex}} [j_{\delta'}, i_{\delta'}]$, если же $j'' = j'$, то $i'' < i'$;

4в) либо $i = k_n^T$, Δ_n^i или π_n^i является первой координатой некоторой тройки, на которой стоит $Z_{j'}$, $j' < n$, либо не выполняются условия 4а и 4б ни для каких $[j', i']$, но существует пара $[j', i']$ такая, что $\{\Delta_n^i, \pi_n^i\} \cap \left(D^T_{j'i'} \cup \delta \widehat{j}'^T_{i'}\right) \neq \varnothing$ где на $[j', i']$ нет метки $\boxed{-}$.

Если такого n нет, то оставляем все без изменений и переходим к следующему шагу. Если же n с указанными свойствами существуют, то выберем среди них наименьшее и обозначим n_0.

Пусть для n_0 выполнены условия случая 1. Взяв два первых нечетных числа $a < b$, больших любого нечетного числа из $\bigcup\limits_{n \geqslant 0} \nu^T(n)$, определим

$$\Pi^i_{n_0}(T+1) = \varnothing \quad \text{для} \quad i < k = k_n^T,$$
$$\varphi^{T+1}\left(\Delta^k_{n_0}\right) \leftrightharpoons \varphi^T\left(\pi^k_{n_0}\right),$$
$$\varphi^{T+1}\left(\pi^k_{n_0}\right) \leftrightharpoons \varphi^T\left(\Delta^k_{n_0}\right), \quad \psi^{T+1}\left(\Delta^k_{n_0}\right) \leftrightharpoons \psi^{T+1}\left(\pi^k_{n_0}\right),$$
$$\psi^{T+1}\left(\pi^k_{n_0}\right) \leftrightharpoons \psi^T\left(\Delta^k_{n_0}\right),$$
$$\nu^{T+1}\left(\Delta^k_{n_0}\right) = \nu^T\left(\Delta^k_{n_0}\right) \cup \nu^T\left(\pi^k_{n_0}\right) \cup \{a\},$$
$$\nu^{T+1}\left(\pi^k_{n_0}\right) = \nu^T\left(\Delta^k_{n_0}\right) \cup \nu^T\left(\pi^k_{n_0}\right) \cup \{b\};$$

для $m \notin \left\{\Delta^k_{n_0}, \pi^k_{n_0}\right\}$

$$\psi^{T+1}(m) \rightleftharpoons \psi^T(m),\ \varphi^{T+1}(m) \rightleftharpoons \varphi^T(m),\ \nu^{T+1}(m) \rightleftharpoons \nu^T(m);$$

для всех $x \in \mathbf{N}$

$$\mu^{T+1}\varphi^{T+1}(x) = \mu^{T+1}(\psi^{T+1}(x)) \rightleftharpoons \nu^{T+1}(x).$$

На n_0 и $\langle n_0, k\rangle$ поставим метку $\boxed{+}$, все остальное оставим без изменений и перейдем к следующему шагу.

Если для n_0 выполнены условия случая 2, то поставим на n_0 и $\langle n_0, k\rangle$ метку $\boxed{+}$, все остальное оставим без изменений и перейдем к следующему шагу.

Если для n_0 выполнены условия случая 3, то рассмотрим наименьшее i_0, для которого этот случай выполняется, и проделаем следующее построение. Пусть $L^T_{\langle n_0, i_0\rangle} = \left\langle L^T_{\langle n_0, i_0\rangle}, \prec\right\rangle$ — $\langle n_0, i_0\rangle$- список, $m_0 \prec \prec m_1 \prec \ldots \prec m_l$ — все элементы $L^T_{\langle n_0, i_0\rangle}$ в указанном порядке и $m_l = \pi^{i_0}_{n_0}$, $m_{l-1} = \Delta^{i_0}_{n_0}$. Взяв элементы $\bar a_1$, $\bar a_2$, b_1, b_2 такие, что

$$\{\bar a_1, b_1\} = \left\{\varphi^T\left(\Delta^{i_0}_{n_0}\right), \psi^T\left(\Delta^{i_0}_{n_0}\right)\right\},\ \{\bar a_2, b_2\} = \left\{\varphi^T\left(\pi^{i_0}_{n_0}\right), \psi^T\left(\pi^{i_0}_{n_0}\right)\right\},$$

причем $\bar a_1 = K\left(n, \Delta^{i_0}_{n_0}\right)$ и $\bar a_2 = K\left(n, \pi^{i_0}_{n_0}\right)$, для всех $0 \leqslant i < l-2$ полагаем $\varphi^{T+1}(m_i) = \psi^T(m_i)$, $\psi^{T+1}(m_{l-2}) \rightleftharpoons \bar a_1$, $\psi^{T+1}(m_i) = \varphi^T(m_{i+1})$, $\varphi^{T+1}(m_{l-2}) \rightleftharpoons \rightleftharpoons \psi^T(m_{l-2})$, $\varphi^{T+1}(m_{l-1}) \rightleftharpoons \bar a_2$, $\psi^{T+1}(m_{l-1}) \rightleftharpoons b_1$, $\varphi^{T+1}(m_l) \rightleftharpoons \varphi^T(m_0)$, $\psi^{T+1}(m_l) \rightleftharpoons \rightleftharpoons b_2$. Для всех других m

$$\varphi^{T+1}(m) \rightleftharpoons \varphi^T(m),\ \psi^{T+1}(m) \rightleftharpoons \psi^T(m).$$

Пусть $a_l > a_{l-1} > \ldots > a_1 > a_0 > T$ — первые нечетные числа, не лежащие в $\bigcup\limits_{n \geqslant 0} \nu^T(n)$. Положим

$$\nu^{T+1}(m_i) \rightleftharpoons \nu^T(m_i) \cup \nu^T(m_{i+1}) \cup \{a_i\},\ i < l,$$
$$\nu^{T+1}(m_l) = \nu^T(m_l) \cup \nu^T(m_0) \cup \{a_l\}.$$

Теперь мы можем определить μ^{T+1}:

$$\mu^{T+1}(\varphi^{T+1}(m)) = \mu^{T+1}(\psi^{T+1}(m)) \rightleftharpoons \nu^{T+1}(m)$$

для всех $m \in \mathbf{N}$. На n_0 и $\langle n_0, i_0\rangle$ поставим метку $\boxed{+}$. Если $[j, i] \in \Pi^{i_0}_{n_0}(T)$, $i < i'$ на $[j, i']$ нет метки $\boxed{-}$ и $[j, i'] \in \Pi^{i^*}_{m^*}(T)$ (где i^*, m^* такие, что на $\langle m^*, i^*\rangle$ нет $\boxed{+}$), то на $[j, i']$ поставим метку $\boxed{-}$ и положим

$$\Pi^{i^*}_{m^*}(T+1) \rightleftharpoons \Pi^{i^*}_{m^*}(T) \setminus \{[j'', i''] \mid [j'', i''] \leqslant_{\text{lex}} [j, i']\},$$

где $[j, i'] \in \Pi^{i^*}_{m^*}(T)$ имеет наибольшую первую координату среди всех пар с указанными свойствами. На все пары $[j, i']$ такие, что $i' > i_0$ и $[j, i']$ определена, поставим метку $\boxed{-}$. Взяв для каждой $[j, i] \in \Pi^{i_0}_{n_0}(T)$ число i' такое, что $s^T(j, i')$ не определено, и два первых еще неиспользованных числа a, b бо́льших T, определим $l^{T+1}(j, i') \rightleftharpoons a$, $s^{T+1}(j, i') \rightleftharpoons b$, $\Pi^{i''}_{n_0}(T+1) = \varnothing$, где $i'' \neq i_0$ и $i'' \leqslant k^T_{n_0}$. Оставив все остальное без изменений, перейдем к следующему шагу.

Если для n_0 имеет место случай 4, то выберем наименьшее i_0, для которого выполнено одно из условий 4а — 4в. Возьмем наибольшее j', для которого существует i' такое, что $[j', i']$ удовлетворяет одному из условий 4а — 4в. Рассмотрим наименьшее i' такое, что для $[j', i']$ выполняется одно из этих условий на паре $\langle n_0, i_0\rangle$.

Если для $[j', i']$ выполнено 4а и $[j', i'] \notin \Pi^{i_*}_{m_*}(T)$ (где $\langle m_*, i_*\rangle <_{\text{lex}} \langle n_0, i_0\rangle$ или на $\langle m_*, i_*\rangle$ стоит $\boxed{+}$) либо выполнено 4б, то определим

$\Pi_{n_0}^{i_0}(T+1) \rightleftharpoons \left(\Pi_{n_0}^{i_0}(T) \cup \{[j', i']\}\right) \setminus (\{[j_{\delta''}, i_{\delta''}] \mid \delta'' < \delta'\} \cup \{[j_{\delta'}, i_{\delta'}]/j_{\delta'} = j'\})$ и для всех $\langle m_*, i_* \rangle >_{\text{lex}} \langle n_0, i_0 \rangle$, если $[j', i'] \in \Pi_{m_*}^{i_*}(T)$, положим $\Pi_{m_*}^{i_*}(T+1) \rightleftharpoons \Pi_{m_*}^{i_*}(T) \setminus \{[j'', i''] \mid [j'', i''] <_{\text{lex}} [j', i']\}$. На все пары $[j', i'']$ такие, что $i'' > i'$ и $s^T(j', i'') \in \mathbf{N}$, поставим метку $\boxed{-}$ и рассмотрим два первых еще не использованных номера $T < a < b$. Определим $l^{T+1}(j', i^*) \rightleftharpoons a$, $s^{T+1}(j', i^*) = b$, где i^* — первое число, при котором $s^T(j', i^*)$ не определено. Если $i_0 = k_{n_0}^T$, то $k_{n_0}^{T+1} \rightleftharpoons k_{n_0}^T + 1$, и взяв два первых номера $a > b > T$, еще не использованных в конструкции, положим $\Delta_{n_0}^{i_0+1} \rightleftharpoons a$, $\pi_{n_0}^{i_0+1} \rightleftharpoons b$, $\Pi_{n_0}^{i_0+1}(T+1) = \varnothing$.

Если же для $[j', i']$ выполнено 4а, но существует $\langle m_*, i_* \rangle$ такой, что $[j', i'] \in \Pi_{m_*}^{i_*}(T)$ и $\langle m_*, i_* \rangle <_{\text{lex}} \langle n_0, i_0 \rangle$, или на $\langle m_*, i_* \rangle$ стоит $\boxed{+}$, то

$$\Pi_{n_0}^{i_0}(T+1) = \Pi_{n_0}^{i_0}(T) \setminus (\{[j_{\delta''}, i_{\delta''}] \mid \delta'' < \delta'\} \cup \{[j_{\delta'}, i_{\delta'}] \mid j_{\delta'} = j'\}).$$

Оставив все остальное без изменений, перейдем к следующему шагу.

Если для $[j', i']$ выполнено условие 4в, то взяв два первых числа $a > b > T$, еще не использованных в конструкции, положим $\Pi_{n_0}^{i_0}(T+1) \rightleftharpoons \varnothing$, $k_{n_0}^{T+1} \rightleftharpoons k_{n_0}^T + 1$ и $\Delta_{n_0}^{i_0+1} \rightleftharpoons a$, $\pi_{n_0}^{i_0+1} \rightleftharpoons b$. Все остальное оставим без изменений и перейдем к следующему шагу.

Шаг $5t+2$. Определим $T \rightleftharpoons 5t+1$, $j \rightleftharpoons l(t)$ и будем искать i_*, n_*, i такие, что $i_*, n_*, i \leqslant T$, метка Z_j, $j < n_*$, не стоит и выполнен один из следующих случаев.

Случай 1. Существуют l_1, l_2, l_3 такие, что $l_2 \neq l_3$, $\nu^T(l_1) \subseteq \gamma_j^{T+1}(l_2)$, $\nu^T(l_1) \subseteq \gamma_j^{T+1}(l_3)$, $l_1 \notin \bigcup\limits_{t' \leqslant T} M^{t'}(j', i')$, где $j' < j$ и $l_1 \notin \{\Delta_m^i, \pi_m^i \mid i \leqslant k_m^T \,\&\, m < j\}$.

Случай 2. Пара $[j, i]$ — элемент с наименьшей левой координатой из $\Pi_{n_*}^{i_*}(T)$, на $\langle n_*, i_* \rangle$ и n_* стоит метка $\boxed{+}$. Случай 1 не имеет места, но выполнен один из следующих вариантов.

Случай 2.1. Для всех элементов $k_0 \prec k_1 \prec \ldots \prec k_q$ из $\langle n_*, i_*, j, i \rangle$-списка, если $0 < i \leqslant q$, то $\nu^T(k_i) \subseteq \gamma^{T+1}(\widehat{j}_i^T(k_i))$; существует d_0 такое, что $\nu^T(k_0^i) \subseteq j_j^{T+1}(d_0)$; на $[j, i]$ нет $\boxed{-}$.

Случай 2.2. Выполнено $\nu^T(k_0) \subseteq \gamma_j^{T+1}(\widehat{j}_i^T(k_1))$, на $[j, i]$ нет $\boxed{-}$.

Случай 2.3. На $[j, i]$ стоит метка $\boxed{-}$.

Случай 3. Пара $[j, i]$ не принадлежит $\Pi_{m_{**}}^{i_{**}}$, где m_{**}, i_{**} такие, что $\langle m_{**}, i_{**} \rangle <_{\text{lex}} \langle n_*, i_* \rangle$. Для любого $i'' < i$, если $[j, i'']$ — элемент с наименьшей левой координатой в $\Pi_{n'}^{i'}(T)$, то $\widehat{j}_i^T$ вполне определена на $\langle n', i', j, i'' \rangle$-списке. Нет $i'' < i$ такого, что $[j, i''] \notin \Pi_{n'}^{i'}(T)$ для всех $\langle n', i' \rangle$. Предыдущие случаи не выполнены; но на $\langle n_*, i_* \rangle$ нет метки $\boxed{+}$ или $[j, i] \notin \Pi_{n_*}^{i_*}(T)$; для всех l элементов из $L_{(n_*, i_*, j, i)}^T$ существует d_l такое, что $\nu^T(l) \subseteq \gamma_j^{T+1}(d_l)$; если $\widehat{j}_i^T(l)$ определено, то $\widehat{j}_i^T(l) = d_l$; $\widehat{j}_i^T$ вполне определена на всех элементах $L_{(m_{**}, i_{**})}^T$ для $\langle m_{**}, i_{**} \rangle <_{\text{lex}} \langle n_*, i_* \rangle$ и не вполне определена на $\langle n_*, i_* \rangle$-списке.

Если n_*, i_* и i с указанными свойствами нет, то оставляем все без изменений и переходим к следующему шагу. Если же такие числа существуют, то выберем среди них наименьшую тройку (n_*, i_*, i) относительно лексикографического порядка. Пусть для нее выполнен случай 1. Поставим на $\langle l_1, l_2, l_3 \rangle$ метку Z_j. Если $l_1 \in \bigcup\limits_{t \leqslant T} M^t(j', i')$, где $j' > j$, то поставим на $[j', i']$ метку $\boxed{-}$. Взяв наименьшее i'', при котором $s^T(j', i'')$ не определено, и два еще не использованных номера $a > b > T$, положим

$$l^{T+1}(j', i'') \rightleftharpoons a, \; s^{T+1}(j', i'') \rightleftharpoons b,$$

и для любой $\langle m_{**}, i_{**}\rangle$ такой, что $[j', i'] \in \Pi^{i_{**}}_{m_{**}}(T)$, на $\langle m_{**}, i_{**}\rangle$ нет $\boxed{+}$,

$$\Pi^{i_{**}}_{m_{**}}(T+1) \leftrightharpoons \Pi^{i_{**}}_{m_{**}}(T) \setminus \{[j'', i''] \mid [j'', i''] \leqslant_{\text{lex}} [j', i']\}.$$

На все $[j, i']$ ставим метку $\boxed{-}$ и переходим к этапу А.

Пусть для (n_*, i_*, i) выполнен случай 2.1. Определим $\widehat{j}_i^{T+k}(k_0) \leftrightharpoons d_0$, $s^{T+1}(j, i) \leftrightharpoons s^T(j, i)$, $\psi^{T+1}(s^T(j, i)) \leftrightharpoons \varphi^T(s^T(j, i))$, $\varphi^{T+1}(s^T(j, i)) \leftrightharpoons \psi^T(s^T(j, i))$. Взяв первое еще не использованное число $a > T$, положим $l^{T+1}(j, i) \leftrightharpoons a$, $\Pi^{i_*}_{n_*}(T+1) \leftrightharpoons \Pi^{i_*}_{n_*}(T) \setminus \{[j, i]\}$ и перейдем к этапу А.

Если для выбранной тройки выполнен случай 2.2, то $s^{T+1}(j, i) \leftrightharpoons \leftrightharpoons l^T(j, i)$, $\widehat{j}_i^{T+1}(k_0) \leftrightharpoons \widehat{j}_i^T(k_1)$ (в остальных случаях $\widehat{j}_i^{T+1}$ не определено), $D^{T+1}_{ji} \leftrightharpoons \varnothing$, $\Pi^{i_*}_{n_*}(T+1) \leftrightharpoons \Pi^{i_*}_{n_*}(T) \setminus \{[j, i]\}$. Взяв первое еще не использованное в конструкции число $a > T$, полагаем $l^{T+1}(j, i) \leftrightharpoons a$.

Если выполнен случай 2.3, то $\Pi^{i_*}_{n_*}(T+1) \leftrightharpoons \Pi^{i_*}_{n_*}(T) \setminus \{[j, i]\}$. Затем перейдем к этапу А.

Если выполнен случай 3, то доопределим $\widehat{j}_i^T$, положив $\widehat{j}_i^{T+1}(l) = d_l$, и перейдем к этапу А.

Этап А. Оставив все еще не определенные объекты без изменений, перейдем к следующему шагу.

Шаг $5t+3$. Положив $T = 5t+2$, $j \leftrightharpoons l(T)$, проверим, существует ли i такое, что на $[j, i]$ нет метки $\boxed{-}$, функция $\widehat{j}_i^T$ вполне определена на D^T_{ji}, $[j, i] \notin \Pi^{i_*}_{n_*}(T)$, где $L^T_{\langle n_*, i_*\rangle} \subseteq D^T_{ji}$. Если такие i существуют, то выбрав наименьшее среди них (пусть это — i_0), определим $D^{T+1}_{ji_0} \leftrightharpoons D^T_{ji_0} \cup \cup \{l\} \cup L^T_{\langle m, i\rangle}$, где l — наименьшее число такое, что $l \notin D^T_{ji_0}$, $\langle m, i\rangle$ — наименьшая пара относительно лексикографического порядка, для которой $\widehat{j}_i^T$ не вполне определена на $L^T_{\langle m, i\rangle}$. Для всех $i' > i$, при которых $s^T(j, i')$ определено, и пар $\langle m_{**}, i_{**}\rangle$ таких, что $[j, i] \in \Pi^{i_{**}}_{m_{**}}(T)$, положим

$$\Pi^{i_{**}}_{m_{**}}(T+1) \leftrightharpoons \Pi^{i_{**}}_{m_{**}}(T) \setminus \{[j'', i''] \mid [j'', i''] \leqslant_{\text{lex}} [j, i']\},$$

если на $\langle m_{**}, i_{**}\rangle$ нет метки $\boxed{+}$. На $[j, i']$ поставим метку $\boxed{-}$ и, оставив все остальное без изменений, перейдем к следующему шагу.

Шаг $5t+4$. Положив $T \leftrightharpoons 5t+3$ и $j \leftrightharpoons l(T)$, проверим, существует ли i такое, что на $[j, i]$ нет метки $\boxed{-}$; не существует $i' < i$ такого, что $[j, i']$ есть пара с наименьшей левой координатой в некотором множестве $\Pi^{i_{**}}_{m_{**}}(T)$ и $\widehat{j}_{i'}^T$ не вполне определена на $L^T_{\langle m_{**}, i_{**}\rangle}$, либо $[j, i'] \notin \notin \Pi^{i_{**}}_{m_{**}}(T)$ для всех $i_{**}, m_{**} \in N$; существуют $l \in D^T_{ji}$ и $d_l \in N$ такие, что $\widehat{j}_i^T(l)$ не определено,

$$l \notin \bigcup_{[j'', i''] <_{\text{lex}} [j, i]} \bigcup_{t \leqslant T} M^t(j'', i'') \cup \{\Delta^i_m, \pi^i_m \mid m \leqslant j,\ i \leqslant k^T_m\}$$

и $\gamma^T(l) \subseteq \gamma_j^{T+1}(d_l)$, если $[j, i] \in \Pi^{i_*}_{m_*}(T)$, то $\widehat{j}_i^T$ вполне определена на $L^T_{\langle m_*, i_*\rangle} \vee l \not< m_* \vee l \in \bigcup_{\langle m', i'\rangle \leqslant_{\text{lex}} \langle m_*, i_*\rangle} L^T_{\langle m', i'\rangle}$. В этом случае $\widehat{j}_i^T(l) \leftrightharpoons d_l$. Для всех $i' > i$ таких, что $s^T(j, i')$ определено, поставим на $[j, i']$ метку $\boxed{-}$. Для пары $\langle m_{**}, i_{**}\rangle$ такой, что $[j, i] \in \Pi^{i_{**}}_{m_{**}}(T)$ и на $\langle m_{**}, i_{**}\rangle$ нет $\boxed{+}$, положим

$$\Pi^{i_{**}}_{m_{**}}(T+1) \leftrightharpoons \Pi^{i_{**}}_{m_{**}}(T) \setminus \{[j'', i''] \mid [j'', i''] \leqslant_{\text{lex}} [j, i']\}.$$

Оставив все остальное без изменений, переходим к следующему шагу.

Шаг $5t+5$. Выберем два номера $a > b > T$, еще не использованных в конструкции, где $T \leftrightharpoons 5t+4$, и определим $l^{T+1}(t, 0) \leftrightharpoons a$, $s^{T+1}(t, 0) \leftrightharpoons b$. Все остальное оставим без изменений и перейдем к следующему шагу.

Сделаем несколько простых замечаний о приведенной конструкции.

Замечания. 1. Для любых n и t

$$\nu^t(n)=\mu^t\varphi^t(n)=\mu^t\psi^t(n).$$

2. Для любых n и t существует элемент $a\in\nu^t(n)$ такой, что $a\notin\nu^t(m)$ для всех $m\neq n$.

3. Для любых t и $n\neq m$ не выполнено включение $\nu^t(n)\subseteq\nu^t(m)$.

4. Для любых i, j и t

$$\nu^t s^t(j,\ i)=\mu^{t-1}s^{t-1}(j,\ i),\ \nu^t l^t(j,\ i)=\nu^{t-1}s^{t-1}(j\ i),$$

если на паре $\langle m_*,\ i_*\rangle$ такой, что $[j,\ i]\in\Pi^{i*}_{m*}(t)$, не стоит метка $\boxed{+}$, а на $[j,\ i]$ стоит метка $\boxed{-}$.

5. Для любых t значение k^t_0 равно 0 и $\Pi^0_0(t)=\varnothing$.

6. Если $[j,\ i]\in\Pi^{i*}_{m*}(t)$ для всех $t\geqslant t_0$, то начиная с некоторого шага $t''\geqslant t_0$ множества $\widehat{\delta j}^t_i$ и D^t_{ij} не изменяются при $\lim k^t_n<\infty$ для $n<m_*$.

7. Если $[j,\ i]\in\Pi^{i*}_{m*}(t)$ для всех $t\geqslant t_0$, то пара $[j,\ i]$ может использоваться в конструкции лишь конечное число раз.

8. Для любого k существует не более одного i такого, что на $\langle k,\ i\rangle$ ставится метка $\boxed{+}$. Эта метка ставится и больше не снимается.

9. Если после шага t_0 множество $\Pi^{i*}_{m*}(t)$ не изменяется и на $\langle m_*,\ i_*\rangle$ не ставится метка $\boxed{+}$, то $\nu^t(l)=\nu^{t_0}(l)$ для всех $l\in L^t_{\langle m_*,i_*\rangle}$.

10. Для любых $[j',\ i']\neq[j'',\ i'']$ множества $M(j',\ i')$ и $M(j'',\ i'')$ не пересекаются.

Аналогично леммам 2, 4 и 5 из [9] можно доказать следующие утверждения.

Лемма 1. *Для любых n и i существуют $\lim\limits_{t\to\infty}k^t_n<\infty$, $\lim\limits_{t\to\infty}\Pi^i_{n+1}(t)$; и множество пар*

$$X_n\leftrightharpoons\{[j',\ i']\mid[j',\ i']\in\lim\Pi^{i*}_{m*}\ \&m_*\leqslant n+1\&i_*\in\mathbf{N}\}$$

конечно.

Лемма 2. *Для любого j существует лишь конечное число элементов i, для которых $[j,\ i]\in\lim\Pi^{i*}_{m*}(t)$ при подходящей паре $\langle m_*,\ i_*\rangle$.*

Лемма 3. *Для любого j выполняется одна из следующих возможностей:*

а) *множество I_j чисел i таких, что $s^t(j,\ i)$ определено для некоторого t, конечно и все функции $\lambda tl^t(j,\ i)$ $\lambda ts^t(j,\ i)$ стабилизируются;*

б) *существует i_0 такое, что для некоторого t множество $s^t(j,\ i_0)$ определено, на $[j,\ i_0]$ не ставится метка $\boxed{-}$.* (Эта пара используется в конструкции бесконечно часто, но для всех $i'>i_0$ на $[j,\ i']$ или ставится метка $\boxed{-}$, или $s^t(j,\ i')$ не определено для всех t.)

Лемма 4. *Пусть $[j,\ i]$ используется в конструкции бесконечно часто, а после шага t_0 стабилизируется $\lambda ts^t(j,\ i)$ и $a_0\in\nu^{t_0}s^{t_0}(j,\ i)\ \&a_0\notin\nu^{t_0}(l)$ для всех $l\neq s^{t_0}(j,\ i)$. Тогда для любых $t\geqslant t_0$, $l\neq s^{t_0}(j,\ i)$, если $a_0\in\nu^t(l)$, то существует t_1 такой, что $t_0\leqslant t_1\leqslant t$, $l=l^{t_1}(j,\ i)$ и на шаге t_1 для $[j,\ i]$ выполнен случай 3 шага типа $5t+1$.*

Лемма 4 доказывается индукцией по $t\geqslant t_0$ на основе того факта, что добавляются в множество либо новые элементы, либо элементы из ближайшего множества по некоторому списку.

Лемма 5. *Для любого l существует $\varphi(l)\leftrightharpoons\underline{\lim}_{t\to\infty}\varphi^t(l)$ и $\nu(l)=\mu\varphi(l)$, $\psi(l)\leftrightharpoons\underline{\lim}_{t\to\infty}\psi^t(l)$, $\nu(l)=\mu\psi(l)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное l и несколько возможных случаев.

Случай 1: $l \notin \bigcup_{t\geqslant 0}\left(\bigcup_{[j,i]} M^t(j,i) \cup \bigcup_{n\geqslant 0}\{\Delta_n^i, \pi_n^i \mid i \leqslant k_n^t\}\right)$. Тогда $\varphi^t(l) = \varphi^0(l)$, $\psi^t(l) = \psi^0(l)$, $\nu^t(l) = \nu^0(l)$ и $\psi(t) = \psi^0(l) = \lim_{t\to\infty}\psi^t(l)$, $\varphi(l) = \varphi^0(l) = \lim_{t\to\infty}\varphi^t(l)$. Так как $\nu^t(l) = \mu^t\varphi^t(l) = \mu^t\psi^t(l)$, то $\nu(l) = \mu\varphi(l) = \mu\psi(l)$.

Случай 2: $l \in \bigcup_{n\geqslant 0}\{\Delta_n^i, \pi_n^i \mid i \leqslant k_n^t\}$. Поскольку все элементы этого множества для разных пар разные и $\Delta_n^i \neq \pi_n^i$, то существуют единственные n и i такие, что $l = \Delta_n^i$ или $l = \pi_n^i$. Если на $\langle n, i\rangle$ никогда не ставится $\boxed{+}$, то все выполнено как и в случае 1. Если же ставится $\boxed{+}$ на шаге t_1, то после этого шага $\varphi^t(l) = \varphi^{t_1}(l)$, $\psi^t(l) = \psi^{t_1}(l)$, $\nu^t(l) = \nu^{t_1}(l)$ для всех $t \geqslant t_1$. Как и раньше, получаем, что $\varphi(l) = \varphi^{t_1}(l)$, $\psi(l) = \psi^{t_1}(l)$ и $\nu(l) = \mu\varphi(l) = \mu\psi(l)$.

Случай 3. $l \in \bigcup_{[j,i]}\bigcup_{t\geqslant 0} M^t(j,i)$. В силу замечания 10 существует единственная пара $[j, i]$ такая, что $l \in \bigcup_{t\geqslant 0} M^t(j,i)$. Если, начиная с некоторого шага t_0, имеем $l \in M^t(j, i)$ или пара $[j, i]$ больше не используется в конструкции по случаю 3 шага типа $5t+1$, то как и в случае 2 $\varphi^t(l) = \varphi^{t_0}(l)$, $\psi^t(l) = \psi^{t_0}(l)$ для $t \geqslant t_0$, и наше утверждение доказано. Если же $l \in M^t(j, i)$ для всех $t \geqslant t_0$ и $[j, i]$ используется в конструкции по случаю 3 шага $5t+1$ бесконечно часто, то рассмотрим два варианта.

Случай 3.1. Начиная с некоторого шага $t_1 \geqslant t_0$, для $[j, i]$ выполняется только случай 3 шага типа $5t+2$. Рассмотрим l_0 такое, что $l_0 \in M^t(j, i)$ для всех $t \geqslant t_1$. Пусть $t_1 \leqslant t_0' < t_1' < t_2' < \ldots$ — все шаги такие, что для $[j, i]$ имеет место случай 3 шага типа $5t+2$. Тогда $\psi^{t_k'}(l) = \psi^{t_0'}(l)$ для всех k, и все другие значения принимаются в качестве ψ-значения на l только конечное число раз. Следовательно, $\varliminf_{t\to\infty}\psi^t(l) = \psi^{t_0}(l)$, и так как бесконечно часто $\nu^t(l) = \mu^t\varphi^t(l)$, то $\nu(l) = \mu\psi(l)$. Но когда на шаге $T > t_0'$ типа $5t+1$ для $[j, i]$ выполнен случай 3, $\varphi^T(l) = \psi^{t_0'}(l)$ и другие значения принимаются лишь конечное число раз, имеем

$$\varliminf \varphi^t(l) = \psi^{t_0'}(l),\ \nu(l) = \mu\varphi(l).$$

Случай 3.2. Если случай 3.1 не имеет места, то бесконечно часто выполняются условия случая 2 шага типа $5t+2$, так как пара $[j, i]$ должна освободиться из П-множества, чтобы снова быть использованной по случаю 3 шага типа $5t+1$, а это можно сделать лишь за счет случая 1 или 2 шага типа $5t+2$. Так как для l выполняется случай 3 шага типа $5t+1$ бесконечно часто, то на некотором шаге t^* имеем $s^{t^*}(j, i) = l$. Рассмотрим первый шаг $t' > t^*$ такой, что для $[j, i]$ выполнится случай 2 шага типа $5t+2$ (такой обязательно существует по условию). Но тогда $l \notin M^{t'}(j, i)$ ввиду конструкции этого шага. Значит, случай 3.2 невозможен.

Лемма 6. *Для любого $l \in N$ существует l' такое, что $\varphi(l') = l$ или $\psi(l') = l$.*

Доказательство. Для любых t и l существует l' такое, что $\varphi^t(l') = l$ или $\psi^t(l') = l$. Пусть l' — такое, что $\varphi^t(l') = l$ или $\psi^t(l') = l$ для бесконечно многих t. Тогда по определению φ и ψ наше утверждение справедливо. Если же для всех l' равенства выполняются лишь конечное число раз, то это означает, что l есть значение некоторого элемента, который будет использоваться в конструкции. Очевидно, что это возможно лишь когда l является φ^t-, ψ^t-значениями лишь элементов из

$M^t_{j'i'}$ для некоторых фиксированных j' и i' с некоторого шага t_0. Но если существует l' такой, что l' появляется в $M^t_{j'i'}$ бесконечно часто, то бесконечно часто $\psi^t(l') = l$ или $\varphi^t(l') = l$. Если же такого l' нет, то бесконечно часто для $[j', i']$ имеет место случай 2.2 шага $5t+2$. Но тогда l с некоторого шага не будет φ^t- или ψ^t-значением l' из $M^t_{j'i'}$ и, следовательно, будет значением на элементе, который больше уже не попадает в $M^t_{j'i'}$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. *Для любых $n \neq m$ существует t_1, для которого $\nu^{t_1}(n) \not\subseteq \nu(m)$ и $\nu^{t_1}(m) \not\subseteq \nu(n)$, следовательно, $\nu(n) \not\subseteq \nu(m)$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 8 [9].

Лемма 8. *Отображения ν, μ нумеруют одно и то же семейство, и ν — однозначная нумерация.*

Доказательство. Нумерация ν однозначная по лемме 7. Покажем, что ν и μ нумеруют одно и то же семейство. По лемме 5 $\nu(l) = \mu\varphi(l)$ для любого l, а поэтому $S_\nu \leftrightharpoons \{\nu(l) \mid l \in N\} \subseteq S_\mu \leftrightharpoons \{\mu(l) \mid l \in N\}$. В силу леммы 6 для любого l существует l' такое, что $\varphi(l') = l$ или $\psi(l') = l$; отсюда $\nu(l') = \mu(l)$ и, следовательно, $S_\mu \subseteq S_\nu$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Нумерация ν не сводится к μ.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть f — рекурсивная функция и $\nu = \mu f$. Тогда существует n_0 такое, что $f = \lambda x K(n_0, x)$. Если на n_0 стоит метка $\boxplus$, то нетрудно видеть, что будет выполнен один из случаев 1—3 шага типа $5t+1$ для $\langle n_0, i\rangle$. Поэтому найдется m такое, что $\nu(m) \neq \mu f(m)$. Если же на n_0 не стоит метка $\boxplus$, то рассмотрим пару $\langle n_0, i_0\rangle$, где $i_0 \leftrightharpoons \lim\limits_{t\to\infty} k^t_n$. Так как f — всюду определенная функция, то на некотором шаге должна определиться пара $\langle n_0, i+1\rangle$, что противоречит предположению.

Лемма 10. *Для любой вычислимой однозначной нумерации ξ семейства $S_\nu = \{\nu(n) \mid n \in \mathrm{N}\}$ существует рекурсивная функция g такая, что $\nu(n) = \xi g(n)$ для любого n.*

Доказательство. Так как ξ — вычислимая нумерация, то существует j такое, что $\gamma_j = \xi$. В силу леммы 3 имеет место один из следующих трех случаев.

Случай 1. Существует i_0 такое, что $[j, i_0]$ используется в конструкции бесконечно часто и, начиная с некоторого шага, $s^t(j, i_0)$ стабилизируется.

Случай 2. Существует i_0 такое, что $[j, i_0]$ используется в конструкции бесконечно часто и $s^t(j, i_0)$ не стабилизируется.

Случай 3. Существует лишь конечное число i таких, что пара $[j, i]$ используется в конструкции, и каждая пара используется в конструкции лишь конечное число раз.

В случае 1 указанное i_0 единственно. Выберем шаг t_0, после которого ни одна метка $[j, i]$, где $i < i_0$, больше не используется в конструкции. Такой шаг существует, так как иначе на $[j, i_0]$ была бы поставлена метка $\boxminus$ и $[j, i_0]$ не использовалась бы бесконечно часто. Покажем теперь, что для $[j, i_0]$ бесконечно часто выполняется шаг типа $5t+3$. Предположив противное, получаем, что найдется $t_1 \geqslant t_0$, после которого шаг типа $5t+3$ не выполняется для $[j, i_0]$. Но в таком случае $D^T_{ji_0}$ больше не изменяется. Рассмотрим наименьшее $l_0 \in D^t_{ji_0}$ такое, что $\widehat{j}^t_{i_0}(l_0)$ не определено для всех t и

$$l_0 \notin \widehat{D}_{ji_0} \leftrightharpoons \bigcup_{t\geqslant 0} \bigcup_{[j',i'] <_{\mathrm{lex}} [j,i_0]} M^t(j', i') \cup \left\{\Delta^i_n, \pi^i_n \,\middle|\, n \leqslant j,\ i \leqslant \lim_{t\to\infty} k^t_n\right\}.$$

Выберем шаг $t_2 \geqslant t_1$ так, что $\widehat{j}^t_{i_0}$ определена для всех $l' < l_0$, которые не принадлежат

$$\bigcup_{t\leqslant t_2}\ \bigcup_{[j',i']<_{\mathrm{lex}}[j,i_0]} M^t(j',i') \cup \left\{\Delta_n^i,\ \pi_n^i \,\middle|\, n\leqslant j\,\&\, i\leqslant \lim_{t\to\infty} k_n^t\right\},$$

и $\widehat{j}_{i_0}^t$ на этих числах не изменяется.

После шага t_2 не будет больше выполняться для $[j,\ i_0]$ и шаг типа $5t+4$. Таким образом, для $[j,\ i_0]$, после шага t_2 могут быть шаги лишь типа $5t+1$ и $5t+2$. После шага t_2 множество $\nu^t(l_0)$ уже больше не изменится, так как оно может изменяться лишь в случае, когда $l_0 \in L^t_{\langle m_*, i_*\rangle}$, $t\geqslant t_2$, для некоторых m_*, i_* и на шаге t на $\langle m_*,\ i_*\rangle$ ставится метка $\boxed{+}$. В этом случае, поскольку $l_0\in L^t_{\langle m_*,i_*\rangle}$ и $l_0\in D^t_{ji_0}$, то в $\Pi^{i_*}_{m_*}(t)$ входят либо $[j,\ i_0]$, либо $[j,\ i']$, где $i'<i_0$. Но так как $t\geqslant t_2\geqslant t_0$, то никакая пара $[j,\ i']$, $i<i_0$, больше в конструкции не используется. Поэтому $[j,\ i_0]\in \Pi^{i_*}_{m_*}(t)$. Однако, чтобы поставить $\boxed{+}$ на шаге t на $\langle m_*,\ i_*\rangle$ необходимо, чтобы $j^t_{i_0}$ была вполне определена на $\langle m_*,\ i_*\rangle$-списке, и следовательно, на l_0, что противоречит нашему предположению. Таким образом, $\nu^t(l_0)$ после шага t_2 больше не изменяется.

Рассмотрим $\nu(l_0)=\nu^{t_2}(l_0)$. Так как γ_j — нумерация $S_\nu=\{\nu(n)\,|\,n\in \mathbf{N}\}$, то существуют $t_3\geqslant t_2$, d_0 такие, что $\gamma_j^{t_3}(d_0)\supseteq \nu(l_0)$. Поскольку $[j,\ i_0]$ используется в конструкции бесконечно часто, то после шага t_0 для всех $i'<i_0$ на $[j,\ i']$ стоит метка $\boxed{-}$ или $[j,\ i']\in \Pi^i_m(t)$ для всех $t\geqslant t_0$. Тогда для пар $[j,\ i_0]$ выполняются на шаге $T=5t_3'+4$ условия шага типа $5t+4$ для $[j,\ i_0]$. Следовательно, для l_0 и $t_3'=c(j,\ t_3)$ значение $\widehat{j}^T_{i_0}(l_0)$ определится, что противоречит нашему предположению. Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} D^t_{ji_0}=\mathbf{N}$, а так как шаг $5t+3$ выполняется бесконечно часто, то $\bigcup\limits_{t\geqslant t_2}\widehat{j}^t_{i_0}$ определено для всех $l\in \mathbf{N}\setminus \widehat{D}_{ji_0}$. Из нашей конструкции следует, что значение $\widehat{j}^t_{i_0}(l)$ может измениться на новое, если $l=l^t(j,\ i_0)$ и на шаге t для $[j,\ i_0]$ выполняется подслучай 2.1 шага типа $5t+2$.

Рассмотрим альтернативу:

$$\lambda t l^t(j,\ i_0) \quad \text{стабилизируется,}$$

$$\lambda t l^t(j,\ i_0) \quad \text{не стабилизируется.}$$

В первом случае, взяв $t_4\geqslant t_2$, после которого $\lambda t l^t(j,\ i_0)$ уже стабилизируется, получим, что значение $\widehat{j}^t_{i_0}(l)$ после этого также не изменится. Если же $\lambda t l^t(j,\ i_0)$ не стабилизируется, то $[j,\ i_0]$ используется бесконечно часто в конструкции шага $5t+1$ по случаю 3. Тогда для любого $l\in \bigcup\limits_{t\geqslant 0} M^t(j,\ i_0)$ необходим шаг $t_l\geqslant \max\{t,\ t_3\}$ такой, что либо $l\notin M^{t_l}(j,\ i_0)$ и $\widehat{j}^{t_l}_{i_0}(l)$ определено, либо $l=\lim\limits_{t\to\infty} s^t(j,\ i_0)$ и $\widehat{j}^{t_l}_{i_0}(l)$ определено. После этого шага l уже не может стать равным $l^t(j,\ i_0)$ для $t\geqslant t_0$, так как $\lambda t l^t(j,\ i_0)$ принимает значение только из $M^{t-1}(j,\ i_0)$ или еще ни разу не использованное в конструкции.

Опишем теперь алгоритм, задающий искомую сводящую функцию g. Чтобы определить значение $g(l)$, мы ищем шаг t_l' такой, что выполнено одно из следующих условий:

(1) $\widehat{j}^t_{i_0}(l)$ определено и $t_l'\geqslant t_l(1)$,

(2) $l\in \bigcup\limits_{\substack{n\leqslant j\\ i\leqslant \lim k_n^t}} L^{t_5}_{\langle n,i\rangle}$ и $t_l'=t_5$, где после шага t_5 для $n\leqslant j$ и

$i \leqslant \lim\limits_{t\to\infty} k_n^t$ множества $\Pi_n^i(t)$ уже больше не изменяются и на $\langle n, i\rangle$ не ставится метка $\boxed{+}$,

(3) $l \in M^{t'_l}(j', i']$, где $[j', i') <_{\text{lex}} [j, i_0]$.

Предварительно для каждого $j' < j$ зафиксируем (если такой существует) $i_{j'}$, для которого пара $[j', i_{j'}]$ используется в конструкции бесконечно часто. Пусть J — все такие числа $j' < j$, для которых $i_{j'}$ существует. Для $j' \in J$ зафиксируем шаг $t^0_{j'}$, после которого никакая пара $[j', i']$ не используется больше в конструкции, где $j' < j \,\&\, (j' \in J \Rightarrow i' < i_{j'})$. Определим $J_0 \leftrightharpoons \{j' \in J \mid$ (для $[j', i_{j'}]$ значение $s^t(j, i_{j'})$ стабилизируется) $\&\, l_{j'} = \lim s^t(j', i_{j'}\}$. Для $j' \in J_0$ пусть $t_{j'}$ — такой шаг, что для $[j', i_{j'}]$ после этого шага значение $s^t(j', i_{j'})$ не изменяется. Для каждого $l \in \bigcup\limits_{n<j} \bigcup\limits_{i \leqslant \lim k_n^t} L^{t_5}_{\langle n, i\rangle}$ рассмотрим число d_l^* такое, что $\nu(l) = \gamma_j(d_l^*)$. Так как множество $\bigcup\limits_{n<j} \bigcup\limits_{i \leqslant \lim k_n^t} L^{t_5}_{\langle n, i\rangle}$ конечно, то это доопределение не будет влиять на рекурсивность g.

Теперь будем непосредственно определять функцию g. Полагаем $g(l) = \widehat{j}^{\,t''_l}_{i_0}(l)$ при условии (1) и $g(l) = d_l^*$ при условии (2). В случае (3) придется рассматривать несколько вариантов.

(3.1) Если $l \in M^{t'_l}(j', i')$ $(j' = j \,\&\, i' < i) \vee (j' < j \,\&\, j' \notin J) \vee (j' < < j \,\&\, j' \in J \,\&\, i' < i_{j'})$, то рассмотрим шаг $t' = \max\{t'_l, t_{j'}, t_5\}$ и найдем d_l, t''_l такие, что $\nu^{t'}(l) \subseteq \gamma_j^{t''_l}(d_l)$. Полагаем $g(l) \leftrightharpoons d_l$.

(3.2) Если $l \in M^{t'_l}(j', i')$, $j' < j \,\&\, j' \in J \,\&\, i_{j'} < i'$, то найдем d_l t', t'' такие, что $t'' > t' \geqslant \max\{t'_l, t_{j'}\}$, и на $[j', i']$ после шага t' стоит метка $\boxed{-}$ и $\nu^{t'}(l) \subseteq \gamma_j^{t''}(d_l)$. Полагаем $g(l) = d_l$.

(3.3) Если $l \in M^{t'_l}(j', i_{j'})$, $j' \notin J_0$, то найдем d_l, $t'' > t' > t'_l$ такие, что $l \notin M^{t'}(j', i_{j'})$, $\nu^{t'}(l) \subseteq \gamma_j^{t''}(d_l)$ полагаем $g(l) = d_l$.

(3.4) Если $l \in M^{t'_l}(j', i_{j'})$, $j' \in J_0$ и $\lambda t M^t(j, i_{j'})$ не стабилизируется, то полагаем $g(l) = d^*_{j'}$, если $l = l_{j'} \,\&\, \gamma_j(d^*_{j'}) = \nu(l)$. Иначе найдем $t'' \geqslant t' > t_l$, d_l такие, что $l \notin M^{t'}(j', i_{j'})$, $\nu^{t'}(l) \subseteq \gamma_j^{t''}(d_l)$. Полагаем $g(l) = d_l$.

(3.5) Если $\lambda t M^t(j', i_{j'})$ стабилизируется и не выполнены условия (3.1)—(3.4), то рассмотрим шаг $t^2_{j'}$, после которого для пары $[j', i_{j'}]$ не выполняется случай 3 шага типа $5t+1$. Найдем d_l, $t'' > t^2_{j'}$ такие, что $t'' \geqslant t'_l$, $\nu^{t''}(l) \subseteq \gamma_j^{t''}(d_l)$. Положим $g(l) = d_l$.

Докажем теперь, что построенная таким образом функция g всюду определена и является сводящей. Ее рекурсивность следует из описания алгоритма вычисления. Покажем, что для любого l значение $g(l)$ определено и $\nu(l) = \gamma_j(g(l))$. Предположим, что это неверно. Выберем наименьшее l, для которого это не так. Если для l выполнено (1), то $g(l)$ определено. Отсюда $\nu(l) \neq \gamma_j g(l)$. Но так как для $[j, i_0]$ бесконечно часто выполняется шаг $5t+3$, то для бесконечно многих t имеет место $\nu^t(l) \subseteq \gamma_j^{t+1}(\widehat{j}^{\,t}_{i_0}(l))$, а как мы заметили, после шага t'_l значение $\widehat{j}^{\,t}_{i_0}(l)$ не изменяется и равно $g(l)$. Поэтому $\nu^t(l) \subseteq \gamma^{t+1}(g(l))$ для бесконечно многих t, следовательно, $\nu(l) \subseteq \gamma_j(g(l))$. Но для элементов из S_ν в силу леммы 7 нет собственных включений, откуда $\nu(l) = \gamma_j g(l)$, и (1) выполниться не может. Условие (2) не выполняется непосредственно из определения. Таким образом, остается (3).

При (3.3), поскольку $j' \notin J_0$, то в силу леммы 3, существует t' такой, что $l \notin M^{t'}(j', i_{j'})$ и $t' \geqslant t'_l$. Тогда так же, как и в (3.1), (3.2), множество $\nu^t(l)$ уже не изменяется больше после t' и конечно. Поэтому, если γ_j — нумерация S, то найдутся t'', d_l такие, что $\nu^{t'}(l) \subseteq \gamma_j^{t''}(d_l)$, но тогда значение $g(l)$ определено и $\nu(l) \subseteq \gamma_j g(l)$. Вновь в силу леммы 7 $\nu(l) = \gamma_j g(l)$, а значит, (3.1)—(3.3) также не имеют места для l. Если же для l выполнено (3.4) или (3.5), то $l \neq l_{j'}$. Когда $s^t(j', i_{j'})$ стабилизируется, пара $[j', i_{j'}]$ уже не используется с шага $t_{j'}$ по случаю 3 шага типа $5t+1$. Поэтому $\nu^t(l)$ после этого шага не изменяется, и тогда, как и раньше, $g(l)$ определено и $\nu(l) = \gamma_j g(l)$. Если же $\lambda t s^t(j', i_{j'})$ не стабилизируется, то все элементы $M^t(j', i_{j'})$, кроме $l_{j'}$, будут через некоторое время обновляться. Поэтому найдется шаг $t' > t'_l$ такой, что $l \in M^{t'}(j', i_{j'})$. Но тогда l больше не будет использоваться в конструкции и $\nu^t(l)$ не изменяется. В таком случае найдутся t'' и d_l такие, что $\nu^{t'}(l) \subseteq \gamma_j^{t''}(d_l)$. Как и раньше, замечаем, что $g(l)$ определено и $\nu(l) = \gamma_j g(l)$.

Рассмотрим случай 2. Так как пара $[j, i_0]$ используется в конструкции бесконечно часто, то пары $[j, i]$ для $i < i_0$ используются в конструкции лишь конечное число раз. Пусть t_0 — шаг, после которого ни одна из таких пар не используется в конструкции. Рассмотрим все шаги $\ldots > t_k > \ldots > t_3 > t_2 > t_1$, на которых значение $s^t(j, i_0)$ изменяется, $t_i > t_0$, и d такое, что $\widehat{j}_{i_0}^{t_1}(s^{t_1}(j, i_0)) = d$. Покажем, что для любых $t \geqslant t_1$ выполнено $\widehat{j}_{i_0}^{t}(s^t(j, i_0)) = d$.

Возьмем наименьшее $t > t_1$, при котором это равенство нарушено. Тогда $\widehat{j}_{i_0}^{t-1}(s^{t-1}(j, i_0)) = d$, но если $t_{k-1} < t < t_k$, то ввиду $s^t(j, i_0) = s^{t-1}(j, i_0)$ значение $\widehat{j}_{i_0}^{t}(s^{t-1}(j, i_0))$ не изменится, а поэтому наше предположение не выполняется. Итак, $t = t_k$, и на шаге t значение $\lambda t s^t(j, i_0)$ изменяется, но это происходит лишь на шаге типа $5t+2$ (случай 2.2) и должны выполняться условия

$$s^t(j, i_0) \neq l^{t-1}(j, i_0),$$
$$\widehat{j}_{i_0}^{t}(s^t(j, i_0)) = \widehat{j}_{i_0}^{t-1}(s^{t-1}(j, i_0)) = d,$$
$$\gamma_j^{t+1}(\widehat{j}_{i_0}^{t}(s^t(j, i_0))) \supseteq \nu^t(s^t(j, i_0)).$$

Таким образом, $\gamma_j(d) \supseteq \nu^{t_i}(s^{t_i}(j, i_0))$ для всех $i > 0$. Но все $\nu^0(l)$, $l \in \mathbf{N}$, попарно различны и непусты, а значения $\lambda i s^{t_i}(j, i_0)$ попарно различны, отсюда $\gamma_j(d)$ — бесконечное множество. Так как γ_j — нумерация S_ν, то найдется l такое, что $\nu(l) = \gamma_j(d)$. Однако $\nu(l)$ может быть бесконечным лишь когда найдется пара $[j', i']$, использующаяся бесконечно часто по случаю 3 шага $5t+1$, и $\lim\limits_{t\to\infty} s^t(j', i') = l$. Пусть t'_0 — шаг, после которого $\lambda t s^t(j', i')$ уже больше не изменяется. Выберем шаг $t'_1 > t'_0$ такой, что на этом шаге на $\langle m_*, i_* \rangle$ поставлена метка $\boxed{+}$ и $[j', i'] \in \Pi_{m_*}^{i_*}(t_1)$. Так как для $[j, i_0]$ функция $\lambda t s^t(j, i_0)$ не стабилизируется, а $\lambda t s^t(j', i')$ стабилизируется, то $[j', i'] \neq [j, i_0]$, причем $j \neq j'$. Для каждого $l \in \{s^t(j, i_0) \mid t \geqslant 0\}$ возьмем элемент a_l такой, что $a_l \notin \nu^{t_1}(l')$ для любого $l' \neq l$. Покажем, что при $t = t'_1$ выполнено $a_l \notin \nu^t(s^t(j', i'))$. Для $t = t'_1$ это верно в силу выбора a_l. Предположим, что при некотором $t > t'_1$ это не так и рассмотрим наименьшее $t > t'_1$, для которого условие нарушается. Тогда $a_{l'} \in \nu^t(s^t(j', i'))$, а $l' = s^{t*}(j, i_0)$ для некоторого t^*. Но $s^{t-1}(j', i') = s^t(j', i')$, и по индукционному предположению $a_{l'} \notin \nu^{t-1}(s^{t-1}(j', i'))$. Значит, на шаге t выполнен шаг типа $5t+1$ и $\nu^t(s^t(j', i')) \rightleftharpoons \nu^{t-1}(s^t(j', i')) \cup \nu^{t-1}(l^t(j', i')) \cup \cup \{a\}$, причем a не лежит в $\nu^{t-1}(z)$ для всех $z \in \mathbf{N}$. Тогда $a_{l'} \notin \nu^{t-1}(l^{t-1}(j', i'))$.

Рассмотрим наименьшее $t' \geqslant t_1'$ такое, что $l^{t'}(j', i') = l^{t-1}(j', i')$. Имеем: либо на шаге t' в качестве $l^{t'}(j', i')$ взят ν — номер еще не использованный ранее в конструкции, либо $t' = t_1'$. Так как $\lambda t l^t(j', i')$ до шага t не меняется и $a_{l'} \notin \nu^{t'} l^{t'}(j', i')$, то не меняется и $\nu^t(l^t(j', i'))$. Так что и в этом случае $a_{l'} \notin \nu^{t-1}(l^{t-1}(j', i'))$, $a_{l'} \notin \nu^t s^t(j', i')$; противоречие. Из доказанного непосредственно следует, что $\nu^{t_1}(l') \nsubseteq \nu^t s^t(j', i') = \nu^t(l)$ для любого t. Но мы показали, $\nu^{t_k}(s^{t_k}(j, i_0)) \subseteq \gamma_j(d) = \nu(l)$. Полученное противоречие показывает, что случай 2 невозможен.

Покажем, что случай 3 тоже не выполнится. Рассмотрим шаг t_0, после которого в конструкции не используется ни одна пара $[j, i]$, где $i \in \mathbf{N}$. Заметим, что после шага $5j+5$ всегда существует пара $[j, i]$, на которой нет метки $\boxed{-}$, если не стоит с некоторого шага Z_j. Если с шага t_1 на $\langle l, l_1, l_3 \rangle$ стоит Z_j, то $\nu^{t_1}(l) \subseteq \gamma_j^{t_1+1}(l_1)$, $\nu^{t_1}(l) \subseteq \gamma_j^{t-1}(l_2)$ для $l_1 \neq l_2$ и номер l больше в конструкции не используется. Отсюда $\nu^t(l) = \nu^{t_1}(l)$ для $t \geqslant t_1$ и $\nu(l) \subseteq \gamma_j(l_1)$, $\nu(l) \subseteq \gamma_j(l_2)$. Ввиду отсутствия собственных включений в S_ν имеем $\gamma_j(l_1) = \gamma_j(l_2) = \nu(l)$. Но $l_1 \neq l_2$, а в таком случае γ_j — неоднозначная нумерация, поэтому Z_j не стоит ни на какой тройке. Выберем теперь пару $[j, i_0]$ такую, что на ней нет метки $\boxed{-}$ и i_0 наибольшее с таким свойством на шаге t_0. Для нее не существует пара $\langle m_*, i_* \rangle$ такой, что $[j, i_0] \in \Pi_{m_*}^{i_*}(t_0)$, иначе определялась бы бóльшая пара без метки $\boxed{-}$. Действительно, метка $\boxed{-}$ может ставиться лишь за счет пар $[j, i]$ с меньшей координатой i, но вторая координата у нее должна быть больше i_0, так как иначе на $[j, i_0]$ была бы поставлена метка $\boxed{-}$.

Выберем наименьшее $i_0' \leqslant i_0$ такое, что на $[j, i_0']$ нет метки $\boxed{-}$ и $[j, i_0'] \notin \Pi_{m_*}^{i_*}(t_0)$ для всех пар $\langle m_*, i_* \rangle$. Если существует t такое, что $\widehat{j}_{i_0'}^t$ вполне определена на $D_{ji_0'}^t$, то либо выполнится шаг типа $5t+3$ для пары $[j, i_0']$ после шага t_0, либо существует $i_0'' < i_0'$ такое, что на $[j, i_0'']$ нет метки $\boxed{-}$, $[j, i_0''] \in \Pi_{m_*}^{i_*}(t)$ для некоторой пары $\langle m_*, i_* \rangle$, функция $\widehat{j}_{i_0''}^t$ не вполне определена на $\langle m_*, i_* \rangle$-списке. Так как после шага t_0 пары $[j, i]$ не используются в конструкции, то остается второй случай. Выберем наименьшее i_0'', удовлетворяющее указанным условиям.

Рассмотрим шаг $t_1 > t_0$ такой, что множество $\Pi_{m_{**}}^{i_{**}}(t)$ для любой пары $\langle m_{**}, i_{**} \rangle \leqslant_{\mathrm{lex}} \langle m_*, i_* \rangle$ после шага t_1 уже не изменяется и $\langle m_{**}, i_{**} \rangle$ больше не используется в конструкции. Это возможно сделать в силу леммы 1. Покажем, что $\widehat{j}_{i_0''}^{t_1}$ вполне определена на $L_{\langle m_{**}, i_{**} \rangle}^{t_1}$ для любой пары $\langle m_{**}, i_{**} \rangle <_{\mathrm{lex}} \langle m_*, i_* \rangle$. Предположим противное и рассмотрим наименьшую пару $\langle m_{**}, i_{**} \rangle$, для которой это нарушается.

Выберем элементы $l_1, \ldots, l_k$ из $L_{\langle m_{**}, i_{**}, j, i_0'' \rangle}^{t_1}$. Если значение $\widehat{j}_{i_0''}^{t_1}(l_i)$ определено при всех $1 \leqslant i \leqslant k$, то ввиду замечания 9 и свойства доопределения множеств на шаге типа $5t+1$ имеем $\nu^{t_1}(l_i) \subseteq \gamma_j\left(\widehat{j}_{i_0''}^{t_1}(l)\right)$ и $\nu^t(l_i) = \nu^{t_1}(l_i)$ для всех $t \geqslant t_1$ и $1 \leqslant i \leqslant k$. Так как γ_j — нумерация S_ν, то для каждого $1 \leqslant i \leqslant k$ найдется d_i такое, что $\nu^{t_1}(l_i) \subseteq \gamma_j(d_i)$. Выберем шаг $t_2 \geqslant t_1$ такой, что $\gamma_j^{t_2}(d_i) \supseteq \nu^{t_1}(l_i)$. Рассмотрим шаг $T =$

$=5t+2$, где $l(t)=j$ и $r(t)>t_2$. На этом шаге для $[j, i_0'']$ выполнятся условия случая 3 или случая 1. Но Z_j не может ставиться, так как тогда γ_j — либо не нумерация S_ν, либо неоднозначна, что противоречит предположению. Таким образом, $\widehat{j}^T_{i_0''}$ должна доопределиться на $L^T_{\langle m_{**}, i_{**}, j, i_0''\rangle} = L^{t_1}_{\langle m_{**}, i_{**}, j, i_0''\rangle}$, но это противоречит выбору t_0, что доказывает наше утверждение. Если же на $\langle m_*, i_*\rangle$ нет метки $\boxed{+}$, то аналогичными рассуждениями можно показать, что функция $\widehat{j}^{t_1}_{i_0''}$ вполне определена на $L^{t_1}_{\langle m_*, i_*\rangle}$. Осталось рассмотреть случай, когда на $\langle m_*, i_*\rangle$ стоит метка $\boxed{+}$.

Пусть теперь $l_1<l_2<\ldots<l_k$ — все элементы из $L^{t_1}_{\langle m_*, i_*\rangle}$. Выберем шаг $t_2\leqslant t_1$, на котором на $\langle m_*, i_*\rangle$ была бы поставлена метка $\boxed{+}$. Тогда $l_2=s^{t_1}(j, i_0'')$, $l_1=l^{t_1}(j, i_0'')$. В силу условий случая 3 шага типа $5t+1$ имеем

$$\nu^{t_2-1}(l_{i+1})\subseteq\nu^{t_2}(l_{i+1}),\quad \nu^{t_2-1}(l_{i+1})\subseteq\nu^{t_2}(l_i)$$

для $0<i<k$. Значение $\nu^t(l_i)$ для всех $i\leqslant k$ после шага t_2 уже больше не изменяется. Так как на $\langle m_*, i_*\rangle$ поставлена метка $\boxed{+}$ и $[j, i_0'']\in\in\Pi^{i_*}_{m_*}(t_2)$, то $\widehat{j}^{t_2-1}_{i_0''}(l_i)$ определено для всех $1\leqslant i\leqslant k$ и

$$\nu^{t_2-1}(l_i)\subseteq\gamma_j^{t_2}\left(\widehat{j}^{t_2-1}_{i_0''}(l_i)\right).$$

Поскольку ν — номера $l_1, l_2, \ldots, l_k$ после шага t_2 больше в конструкции не используются, то нет $l\notin\{l_1, \ldots, l_k\}$ таких, что $\nu^t(l)\supseteq\nu^{t_2-1}(l_i)$, где $1<i\leqslant k$ и $t\geqslant t_2$. Поэтому множество $\gamma_j\left(\widehat{j}^{t_2-1}_{i_0''}(l_i)\right)$ для $1<i\leqslant k$ может содержать лишь один из двух элементов: $\nu(l_i)$ или $\nu(l_{i-1})$. Если $\nu^t(l_i)\subseteq\subseteq\gamma_j\left(\widehat{j}^{t_2-1}_{i_0''}(l_i)\right)$ для всех $0<i\leqslant k$, то найдем d_0, $t_3>t_1$ такие, что $\nu^{t_2}(l_i)\subseteq\gamma_j^{t_3}\left(\widehat{j}^{t_2-1}_{i_0''}(l_i)\right)$, $1<i\leqslant k$, и $\nu^{t_2}(l_1)\subseteq\gamma_j^{t_3}(d_0)$. Тогда на шаге $T==5(c(j, \max\{d_0, t_3\}))+2$ для пары $[j, i_0'']$ выполнится случай 2 шага типа $5t+2$ и будет проведена конструкция для некоторой пары $[j, i']$, что невозможно. Если же $\nu^{t_2'}(l_{i-1})\subseteq\gamma_j\left(\widehat{j}^{t_2-1}_{i_0''}(l_i)\right)$ для некоторых i, $1<i\leqslant k$, то рассмотрим наименьшее такое i. При $i>2$ имеем

$$\gamma_j\left(\widehat{j}^{t_2-1}_{i_0''}(l_i)\right)=\nu^{t_2}(l_{i-1}),\quad \gamma_j\left(\widehat{j}^{t_2-1}_{i_0''}(l_{i-1})\right)=\nu^{t_2}(l_{i-1}),$$

но $\widehat{j}^{t_2-1}_{i_0''}(l_i)\neq\widehat{j}^{t_2-1}_{i_0''}(l_{i-1})$, что противоречит однозначности нумерации γ_j. Следовательно, $i=2$. Рассмотрим $t_3\geqslant t_1$ такой, что $\nu^{t_2}(l_1)\subseteq\gamma_j^{t_3}\left(\widehat{j}^{t_2}_{i_0''}(l_2)\right)$. На шаге $5c(j, t_3)+2$ для $[j, i_0'']$ выполнится случай 2 шага типа $5t+2$ и будет использована в конструкции некоторая пара $[j, i']$, что невозможно в силу выбора t_0. Полученное противоречие заканчивает доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Нумерация ν однозначна, вычислима и нумерует семейство $S_\nu=\{\nu(n)\mid n\in\mathbf{N}\}$. В силу леммы 8 вычислимая нумерация μ нумерует то же семейство S_ν. Согласно лемме 9 ν не сводится к μ и, следовательно, ν не является наименьшей нумерацией для S. По лемме 10 любая однозначная вычислимая нумерация семейства S эквивалентна ν. Итак, мы показали, что в полурешетке $L(S)$ из вычислимых нумераций семейства S факторизованных по отношению к эквивалентности, имеется минимальный элемент, задаваемый однозначной нумерацией ν. При этом все однозначные вычислимые нумерации семейства S лежат в том же смежном классе, что и ν, но ν не является наименьшим в $L(S)$. Теорема доказана.

Заметим, что ввиду теоремы 1 [9] в $L(S)$ существует счетное число попарно несравнимых минимальных элементов, задаваемых позитивными вычислимыми нумерациями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мальцев А. И.** Позитивные и негативные нумерации // Докл. АН СССР.— 1965.— Т. 160, № 2.— С. 278—280.
2. **Марченков С. С.** О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций // Алгебра и логика.— 1972.— Т. 11, № 5.— С. 588—607.
3. **Freedberg R. M.** Three theorems on recursive enumeration // J. symbol. log.— 1958.— V. 23, N 3.— P. 309—319.
4. **Pour-El M. B.** Gödel Numberings versus Friedberg Numberings // Proc. Amer. Math. Soc.— 1964.— V. 15, N 2.— P. 252—255.
5. **Pour-El M. B., Howard W. A.** A structural criterion for recursive enumeration without repetition // Z. math. Log. und Grundl. Math.— 1964.— V. 10, N 2.— P. 105—114.
6. **Lachlan A. N.** On recursive enumeration without repetition // Z. math. Log. und Grundl. Math.— 1965.— V. 11, N 3.— P. 209—220; 1967.— V. 13, N 2.— P. 99—100.
7. **Лавров И. А.** Computable numberinds, Lodic // Foundation of Mathematics and Computability Theory. Dordrecht-Holland: D. Reidel Rublishing Company.— 1977.— P. 195—206.
8. **Гончаров С. С.** Позитивные нумерации семейств с однозначными нумерациями // Алгебра и логика.— 1983.— Т. 22, № 5.— С. 481—488.
9. **Гончаров С. С.** Вычислимые однозначные нумерации // Алгебра и логика.— 1980.— Т. 19, № 5.— С. 507—511.
10. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций.— М.: Наука, 1977.
11. **Мальцев А. И.** Алгоритмы и рекурсивные функции.— М.: Наука, 1965.

НАСЛЕДСТВЕННО ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ И КВАЗИУРБАНИКОВЫ СТРУКТУРЫ

Б. И. ЗИЛЬБЕР

Пусть G — группа перестановок множества V. Для произвольного $X \subseteq V$ положим $G_X = \{g \in G\colon \forall x \in X\ gx = x\}$, $[X] = \{y \in V\colon \forall g \in G_X\ gy = y\}$. Группу G будем называть *наследственно транзитивной*, если для любого конечного $X \subseteq V$ подгруппа G_X транзитивна на $V - [X]$, т. е. для любых $y_1, y_2 \in V - [X]$ найдется $g \in G_X$ такое, что $gy_1 = y_2$. Наследственно транзитивными являются, например, группы $\mathrm{GL}(V)$ для произвольного векторного пространства V, в этом случае $[X]$ есть линейная оболочка подмножества $X \subseteq V$. Более общо, если W — линейное подпространство V, обозначим $\mathrm{GL}_W(V)$ группу всех линейных преобразований V, тождественных на W. Эта группа также наследственно транзитивна. Такой же является группа $\mathrm{AGL}_W(V)$, заданная как произведение $T(V)\cdot\mathrm{GL}_W(V)$, где $T(V)$ — группа параллельных переносов пространства V. Другой тип примеров наследственно транзитивных групп — это n-кратно транзитивные для некоторого n группы, в которых n различных точек V фиксируются только единицей. Все конечные такие группы описал Титс [1]. Очевидно для таких групп $[v_1, \ldots, v_{n-1}] = [v_1] \cup \ldots \cup [v_{n-1}]$ для любых $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Наследственно транзитивные группы возникают при изучении моделей стабильных теорий с условием $\mathrm{acl} = \mathrm{dcl}$ (необходимые сведения по теории стабильности можно найти в [2]). Более точно, пусть p —