ства S эквивалентна ν. Итак, мы показали, что в полурешетке $L(S)$ из вычислимых нумераций семейства S факторизованных по отношению к эквивалентности, имеется минимальный элемент, задаваемый однозначной нумерацией ν. При этом все однозначные вычислимые нумерации семейства S лежат в том же смежном классе, что и ν, но ν не является наименьшим в $L(S)$. Теорема доказана.

Заметим, что ввиду теоремы 1 [9] в $L(S)$ существует счетное число попарно несравнимых минимальных элементов, задаваемых позитивными вычислимыми нумерациями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Мальцев А. И.** Позитивные и негативные нумерации // Докл. АН СССР.— 1965.— Т. 160, № 2.— С. 278—280.
2. **Марченков С. С.** О вычислимых нумерациях семейств общерекурсивных функций // Алгебра и логика.— 1972.— Т. 11, № 5.— С. 588—607.
3. **Freedberg R. M.** Three theorems on recursive enumeration // J. symbol. log.— 1958.— V. 23, N 3.— P. 309—319.
4. **Pour-El M. B.** Gödel Numberings versus Friedberg Numberings // Proc. Amer. Math. Soc.— 1964.— V. 15, N 2.— P. 252—255.
5. **Pour-El M. B., Howard W. A.** A structural criterion for recursive enumeration without repetition // Z. math. Log. und Grundl. Math.— 1964.— V. 10, N 2.— P. 105—114.
6. **Lachlan A. N.** On recursive enumeration without repetition // Z. math. Log. und Grundl. Math.— 1965.— V. 11, N 3.— P. 209—220; 1967.— V. 13, N 2.— P. 99—100.
7. **Лавров И. А.** Computable numberinds, Lodic // Foundation of Mathematics and Computability Theory. Dordrecht-Holland: D. Reidel Rublishing Company.— 1977.— P. 195—206.
8. **Гончаров С. С.** Позитивные нумерации семейств с однозначными нумерациями // Алгебра и логика.— 1983.— Т. 22, № 5.— С. 481—488.
9. **Гончаров С. С.** Вычислимые однозначные нумерации // Алгебра и логика.— 1980.— Т. 19, № 5.— С. 507—511.
10. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций.— М.: Наука, 1977.
11. **Мальцев А. И.** Алгоритмы и рекурсивные функции.— М.: Наука, 1965.

НАСЛЕДСТВЕННО ТРАНЗИТИВНЫЕ ГРУППЫ И КВАЗИУРБАНИКОВЫ СТРУКТУРЫ

Б. И. ЗИЛЬБЕР

Пусть G — группа перестановок множества V. Для произвольного $X\subseteq V$ положим $G_X=\{g\in G\colon \forall x\in X\ gx=x\}$, $[X]=\{y\in V\colon \forall g\in G_X\ gy=y\}$. Группу G будем называть *наследственно транзитивной*, если для любого конечного $X\subseteq V$ подгруппа G_X транзитивна на $V-[X]$, т. е. для любых $y_1, y_2\in V-[X]$ найдется $g\in G_X$ такое, что $gy_1=y_2$. Наследственно транзитивными являются, например, группы $\mathrm{GL}(V)$ для произвольного векторного пространства V, в этом случае $[X]$ есть линейная оболочка подмножества $X\subseteq V$. Более общо, если W — линейное подпространство V, обозначим $\mathrm{GL}_W(V)$ группу всех линейных преобразований V, тождественных на W. Эта группа также наследственно транзитивна. Такой же является группа $\mathrm{AGL}_W(V)$, заданная как произведение $T(V)\cdot\mathrm{GL}_W(V)$, где $T(V)$ — группа параллельных переносов пространства V. Другой тип примеров наследственно транзитивных групп — это n-кратно транзитивные для некоторого n группы, в которых n различных точек V фиксируются только единицей. Все конечные такие группы описал Титс [1]. Очевидно для таких групп $[v_1, \ldots, v_{n-1}]=[v_1]\cup\ldots\cup[v_{n-1}]$ для любых $v_1, \ldots, v_{n-1}$.

Наследственно транзитивные группы возникают при изучении моделей стабильных теорий с условием $\mathrm{acl}=\mathrm{dcl}$ (необходимые сведения по теории стабильности можно найти в [2]). Более точно, пусть p —

сильно минимальный тип, т. е. такой, что $p(M)$ бесконечно и для любой формулы $\varphi(x)$ с параметрами из M $p(M)\cap\varphi(M)$ или $p(M)\cap\neg\varphi(M)$ конечно для любой модели M данной теории. Стандартные теоретико-модельные рассуждения показывают:

0.1. *Для любого сильно минимального типа p над $\varnothing$ группа* $\mathrm{Aut}(p(M))$ *наследственно транзитивна, если* $\mathrm{acl}(X)\cap p(M)=\mathrm{dcl}(X)\cap \cap p(M)$ *для любого* $X\subseteq p(M)$. *При этом* $[X]=\mathrm{dcl}(X)\cap p(M)$ *для* $X\subseteq \subseteq p(M)$. Здесь $\mathrm{Aut}(p(M))$ — группа элементарных биекций множества $p(M)$ в модели M.

Этот пример подчеркивает связь наследственной транзитивности с некоторыми понятиями теории моделей. Настоящая работа идейно связана с работами [3—5].

Еще один источник наследственно транзитивных групп — это v^*-алгебры, введенные Марчевским [6].

Множество V с заданными на нем операциями F называется *v^*-алгеброй*, если из равенства $f(a_1, \ldots, a_n)=g(a_1, \ldots, a_n)$ для различных термальных над F операций f и g следует существование терма h и $i< <n$ таких, что $a_{i+1}=h(a_1, \ldots, a_i)$.

Нетрудно установить непосредственно из определения, что:

0.2. *Группа автоморфизмов v^*-алгебры наследственно транзитивна, причем для любого подмножества X $[X]=F(X)$ — замыкание X относительно операций F.*

Урбаник [7] описал все v^*-алгебры размерности выше 2. Это (с точностью до выразимости операций) либо (а) векторное пространство V с выделенным подпространством констант W, либо (б) аффинное пространство, ассоциированное с V, с выделенными параллельными сдвигами из W, либо (в) так называемый свободный H-модуль, дополненный множеством констант, для некоторой группы H. Здесь *свободный H-модуль* — это множество A с действием группы H (как множества одноместных операций) таким, что $h\cdot a=a$ для $a\in A$, только если $h=1$. *H-модуль A, дополненный множеством констант C*,— это $A\cup C$ (причем $A\cap C=\varnothing$) с тождественным действием H на C.

Системы (а)—(в) будем называть *урбаниковыми*. В связи с 0.2 будем называть алгебраическую систему (структуру) *квазиурбаниковой*, если группа автоморфизмов этой системы наследственно транзитивна.

Ниже мы приведем доказательство следующего факта:

0.3. *Если для пары* (G, V) V *конечномерно* (т. е. $V=[X]$ для конечного $X\subseteq V$), *то G наследственно транзитивна тогда и только тогда, когда на V можно задать квазиурбаникову структуру $\langle V, \sigma\rangle$ так, что* $G=\mathrm{Aut}(\langle V, \sigma\rangle)$.

Таким образом, описание конечномерных наследственно транзитивных групп сводится к описанию конечномерных квазиурбаниковых структур.

На квазиурбаниковой структуре V *оператор замыкания* [ ] *задает предгеометрию* [8], т. е. для любых $X, Y\subseteq V$, $x, y\in V$ выполняются следующие условия:

0.4. $X\subseteq[X]$;

0.5. $X\subseteq[Y]\Rightarrow[X]\subseteq[Y]$;

0.6. $x\in[X, y]-[X]\Rightarrow y\in[X, x]$ для конечных X.

Утверждения 0.4, 0.5 тривиальны, 0.6 доказано ниже.

Как хорошо известно [8], в любой конечномерной предгеометрии корректно определено понятие независимости элементов, базиса и размерности. Для квазиурбаниковой структуры V *размерность обозначается* $\dim V$. Сформулируем теперь основные результаты работы.

Теорема А. *Пусть V — квазиурбаникова структура* $\dim V\geqslant k+4\geqslant 8$. *Тогда имеет место одно из следующих условий*:

(а) *существуют векторное пространство V' с выделенным подпространством констант W такие, что $V'-W=V-[\varnothing]$ и для любых*

$v_1, \ldots, v_k$ *из* $V-[\varnothing]$

$$[v_1, \ldots, v_k]-[\varnothing]=\mathrm{lin}_W(v_1, \ldots, v_k)-W,$$

где $\mathrm{lin}_W(X)$ — *линейная оболочка множества* $X\cup W$; $\mathrm{Aut}(V)\leqslant GL_W(V')$;

(б) *на* $V'=V-[\varnothing]$ *можно задать структуру аффинного пространства с выделенным подмножеством параллельных переносов* W *так, что для любых* $v_1, \ldots, v_k$ *из* $V-[\varnothing]$

$$[v_1, \ldots, v_k]-[\varnothing]=\mathrm{aff}_W(v_1, \ldots, v_k),$$

где $\mathrm{aff}_W(X)$ — *наименьшее аффинное подпространство, содержащее* X *и замкнутое относительно параллельных переносов* W; $\mathrm{Aut}(V)\leqslant\leqslant \mathrm{AGL}_W(V')$;

(в) *на* V *можно задать структуру свободного* H-*модуля с дополнительным множеством констант* $[\varnothing]$ *так, что для любых* $v_1, \ldots, v_k\in V$

$$[v_1, \ldots, v_k]=[v_1]\cup\ldots\cup[v_k]=Hv_1\cup\ldots\cup Hv_k\cup[\varnothing].$$

Назовем две предгеометрии $(V, [\ ])$ и (V', cl) *изоморфными с точностью до констант*, если существует биекция между точками $V-[\varnothing]$ и $V'-\mathrm{cl}(\varnothing)$, при которой $[X]-[\varnothing]$ переходит в $\mathrm{cl}(X')-\mathrm{cl}(\varnothing)$, если $X\subseteq V$ переходит в $X'\subseteq V'$.

Прямым следствием теоремы А является

Теорема Б. *Если* $\dim V$ *бесконечно для квазиурбаниковой структуры* V, *то предгеометрия* $(V, [\ ])$ *изоморфна с точностью до констант: либо*

(а) *предгеометрии векторного пространства* V' *с выделенным подпространством констант* W *относительно оператора* $\mathrm{lin}_W(\ )$, *либо*

(б) *предгеометрии аффинного пространства* V' *с выделенным линейным подпространством параллельных переносов* W *на нем относительно оператора* $\mathrm{aff}_W(\ )$, *либо*

(в) *предгеометрии некоторого свободного* H-*модуля для некоторой группы* H.

Заметим, что данная теорема описывает и группу G — это произвольная подгруппа группы $\mathrm{Aut}(V')$, обладающая следующим свойством: для любого $g'\in\mathrm{Aut}(V')$ и конечного $X\subseteq V'-\mathrm{cl}(\varnothing)$ найдется $g\in G$ такой, что $g\restriction X=g'\restriction X$. Здесь мы для простоты полагаем $V'-\mathrm{cl}(\varnothing)=V-[\varnothing]$. Указанное свойство достаточно проверять только для независимых X. Эквивалентность этого свойства наследственной транзитивности следует из того, что понятия зависимости в V и V' совпадают. Очевидно, при бесконечной $\dim V$ существует более чем одна наследственно транзитивная подгруппа $\mathrm{Aut}(V)$.

Из теоремы А с помощью теоремы Кантора — Камерона [9] получается

Теорема В. *Если* G — *конечная наследственно транзитивная группа на* V, $\dim V=k+4\geqslant 8$ *и существуют* $v_1, \ldots, v_k\in V$ *такие, что* $[v_1, \ldots, v_k]\neq[v_1]\cup\ldots\cup[v_k]$, *то* $G\cong GL_W(V')$ *либо* $G\cong\mathrm{AGL}_W(V')$ *для некоторого векторного пространства* V' *с выделенным подпространством* W.

Приведем доказательства 0.3, 0.6 и некоторые свойства квазиурбаниковых структур.

Доказательство 0.3. Пусть F — совокупность всех частичных операций на V, инвариантных относительно наследтственно транзитивной группы G, т. е. для $f\in F$, $x_1, \ldots, x_n$, $y\in V$, $g\in G$

$$f(x_1, \ldots, x_n)=y \Leftrightarrow f(gx_1, \ldots, gx_n)=gy.$$

Очевидно, F замкнуто относительно суперпозиций. Обозначим для $X\subseteq V$

$$F(X)=\{f(x_1, \ldots, x_n):\ f\in F,\quad x_1, \ldots, x_n\in X\}$$

и покажем, что $F(X)=[X]$ для любого конечного X. Действительно, $F(X)\subseteq[X]$ очевидно. Покажем обратное. Пусть $y\in[X]=[x_1, \ldots, x_n]$. Рассмотрим подмножество V^{n+1}

$$\varphi = \{\langle gx_1, \ldots, gx_n, gy\rangle: g \in G\}.$$

Если $\langle gx_1, \ldots, gx_n\rangle = \langle g'x_1, \ldots, g'x_n\rangle$ при $g, g' \in G$, то $gy = g'y$, так как $g'g^{1} \in G_X$. Тем самым установлено, что φ является графиком некоторой функции f: $V^n \to V$, которая по построению лежит в F, причем $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. $y \in F(X)$; $\langle V, F\rangle$ можно рассматривать как алгебраическую систему $\langle V, \sigma\rangle$, полагая σ графиками операций F. □

Доказательство 0.6. Пусть $x \in [X, y] - [X]$. Отсюда сразу следует $y \notin [X]$. Поэтому найдется $g \in G_X$, для которого $gy = x$. Допустим, вопреки доказываемому, что $y \notin [X, x]$. Тогда $gy \notin [gX, gx]$, т. е. $x \notin [X, gx]$. С другой стороны, $[X, gx] \subseteq [X, gy] = [X, x]$. Из транзитивности $G_{[X, gx]}$ на $V - [X, gx]$ найдется h из этой подгруппы такой, что $hx = y$, т. е. $hgy = y$. Так как $hg \in G_X$, то $hg \in G_{[X, y]}$, а так как $x \in [X, y]$, то $hgx = x$. С другой стороны, по выбору h, $hgx = gx$. Отсюда $gx = x$, $g^{-1}x = x$, в противоречии с тем, что $g^{-1}x = y$, $y \notin [X, x]$. □

Для квазиурбаниковой структуры V подмножество X будем называть *независимым*, если $[X'] \cap X = X'$ для любого конечного $X' \subseteq X$. *Базисом* V назовем независимое множество X такое, что $V = \cup\{[X']: X' \subseteq X, X'$ конечно$\}$.

Из 0.4—0.6 следует, что мощности всех базисов V совпадают.

0.7. *Если X_1, X_2 — два базиса квазиурбаниковой структуры V и α: $X_1 \to X_2$ — биекция, то α продолжается единственным образом до автоморфизма V.*

Доказательство. Индукцией по n легко устанавливается, что для любых $x_1, \ldots, x_n$ из X_1 существует $g_\alpha \in G = \mathrm{Aut}(V)$, для которого $g_\alpha x_i = \alpha(x_i)$ при $i \leqslant n$. Для $y \in [x_1, \ldots, x_n]$ значение $g_\alpha y$ не зависит от произвола в выборе g_α и $x_1, \ldots, x_n$, ибо если g'_α — другой такой автоморфизм, то $g_\alpha^{-1} g'_\alpha \in G_{[x_1, \ldots x_n]}$, т. е. $g_\alpha^{-1} g'_\alpha y = y$. Положим для произвольного $y \in V$ $\alpha(y) = g_\alpha y$, где g_α найдено по некоторым $x_1, \ldots, x_n \in X$, $y \in [x_1, \ldots, x_n]$. По построению $\alpha \in \mathrm{Aut}(V)$. □

Из 0.7 непосредственно следует

0.8. *Подструктура вида $[X]$ квазиурбаниковой структуры квазиурбаникова.*

0.9. *Для любого X в квазиурбаниковой структуре*

$$[X] = \cup\{[X']: X' \subseteq X, \quad X' \text{ конечно}\}.$$

§ 1. ОПРЕДЕЛИМОСТЬ

Везде далее V — квазиурбаникова структура, $G = \mathrm{Aut}(V)$. Подмножество $S \subseteq V^n$ будем называть *X-определимым* ($X \subseteq V$), если S инвариантно относительно действия группы G_X. Настоящее определение шире общепринятого в теории моделей понятия [2, 3], однако эти понятия совпадают, если в качестве исходных предикатов структуры V взять все $\varnothing$-инвариантные предикаты на V. Вводимые в настоящем параграфе определения подчеркивают связь квазиурбаниковой структуры с понятием сильно минимального множества и дают возможность использовать методы работ [3—5].

X-определимым множеством в V будем называть любое фактор-множество $U = {}^{S}/_{E}$, где $S \subseteq V^n$, $E \subseteq S^2$, E — X-определимое отношение эквивалентности на X-определимом подмножестве S. Множество ${}^{S}/_{E}$ будем называть *X-бездефектным*, если из $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle E \langle s'_1, \ldots, s'_n\rangle$ следует $[s_1, \ldots, s_n, X] = [s'_1, \ldots, s'_n, X]$.

Обозначим V_X квазиурбаникову структуру на V с группой автоморфизмов G_X, т. е. полученную из V введением X в качестве констант.

Очевидно, множество $U = {}^S/_E$ X-определимо в V тогда и только тогда, когда оно $\varnothing$-определимо в V_X.

Для $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle \in S \subseteq V^n$ положим:

$$\dim(\bar{s}/X) = \dim[s_1, \ldots, s_n, X] - \dim[X],$$
$$\operatorname{rank}(S/X) = \max\{\dim(\bar{s}/X): \bar{s} \in S\}.$$

Для отношения эквивалентности E на S будем обозначать $\bar{s}E = \{\bar{s}' \in S: \bar{s}E\bar{s}'\}$. Все X-определимые множества в данной работе X-бездефектны, и следующие определения мы даем при этом предположении. Аналогичные определения в общем случае более громоздки.

Если $U = {}^S/_E$, $u = \bar{s}E \in U$, то

$$[u, X] = [s_1, \ldots, s_n, X],$$
$$\operatorname{rank}(u/X) = \dim[u, X] - \dim[X] = \dim(\bar{s}/X),$$
$$\operatorname{rank}(U/X) = \max\{\operatorname{rank}(u/X): u \in U\} = \operatorname{rank}(S/X).$$

Если $Y \subseteq U$, то

$$[X \cup Y] = \cup\{[u, X]: u \in Y\}, \quad \operatorname{rank}(u/X \cup Y) = \operatorname{rank}(u/[X \cup Y]).$$

1.1. *Группа G_X естественно действует на $U = {}^S/_E$, X-определимом множестве. При этом U G_X-инвариантно и $U' \subseteq U$ G_X-инвариантно, если и только если $U' = {}^S/_E$ X-определимо.*

Для X-определимых множеств U_1, U_2 теоретико-множественное произведение $U_1 \times U_2$ не является, вообще говоря, множеством вида ${}^S/_E$. Поэтому, если $U_1 = {}^{S_1}/_{E_1}$, $U_2 = {}^{S_2}/_{E_2}$, то полагаем $U_1 \times U_2 = {}^{S_1 \times S_2}/_{E_1 \times E_2}$, где $\bar{s}_1{}^\frown\bar{s}_2 E_1 \times E_2 \bar{s}_1'{}^\frown\bar{s}_2'$ означает $\bar{s}_1 E_1 \bar{s}_1' \,\&\, \bar{s}_2 E_2 \bar{s}_2'$, т. е. $\bar{s}_1{}^\frown\bar{s}_2 E_1 \times E_2 = \bar{s}_1 E_1 \times \bar{s}_2 E_2$. Очевидно, $U_1 \times U_2$ X-бездефектно, если таковы U_1 и U_2.

1.2. *Если $U = {}^S/_E$ X-определимо и X'-определимо, $X' \supseteq X$, $\operatorname{rank}(U/X) + \dim[X'] \leqslant \dim V$, то $\operatorname{rank}(U/X) = \operatorname{rank}(U/X')$.*

Доказательство. Очевидно, $\operatorname{rank}(U/X) \geqslant \operatorname{rank}(U/X')$. Докажем обратное неравенство. Для этого найдем $\bar{s} \in S \subseteq V^n$ такое, что $\dim(\bar{s}/X) = r = \operatorname{rank}(U/X)$. С точностью до нумерации можно считать, что $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle$, $s_1, \ldots, s_r$ независимы над X, а $s_{r+1}, \ldots, s_n \in [s_1, \ldots, s_r, X]$. Так как $r + \dim[X'] \leqslant \dim V$, то существуют $s_1', \ldots, s_r' \in V$, независимые над X'. Ввиду наследственной транзитивности G_X, найдется $g \in G_X$ такой, что $g\langle s_1, \ldots, s_r\rangle = \langle s_1', \ldots, s_r'\rangle$. Полагая $\bar{s}' = g\bar{s}$, имеем $\bar{s}' \in S$, $\dim(\bar{s}'/X) \geqslant r$, $\operatorname{rank}(U/X') \geqslant r$. □

Из определений непосредственно следует для $u_1 \in U_1$, $u_2 \in U_2$

1.3. (а) $\operatorname{rank}(u_1/\{u_2\} \cup X) = \operatorname{rank}(\langle u_1, u_2\rangle/X) - \operatorname{rank}(u_2/X)$;

(б) $\operatorname{rank}(u_1/\{u_2\} \cup X) = \operatorname{rank}(u_1/X) \Leftrightarrow \operatorname{rank}(u_2/\{u_1\} \cup X) = \operatorname{rank}(u_2/X)$.

Положим для X-определимых множеств U, U' и $Y \subseteq U'$

$$G_{X \cup Y} = \{g \in G_X: \forall y \in Y \quad gy = y\},$$
$$U_X[Y] = \{u \in U: \forall g \in G_{X \cup Y} \quad gu = u\}.$$

1.4. (а) $u \in U_X[Y] \Rightarrow u \in U_X[[X \cup Y]] \Rightarrow \operatorname{rank}(u/X \cup Y) = 0$, *если* $\operatorname{rank}(U/X) + \dim[X \cup Y] < \dim V$;

(б) $\operatorname{rank}(u/\{u_1', \ldots, u_k'\} \cup X \cup Y) = 0 \,\&\, \operatorname{rank}(u_1'/X \cup Y) = 0 \,\&\, \ldots \,\&\operatorname{rank}(u_k'/X \cup Y) = 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(u/X \cup Y) = 0$;

(в) $\operatorname{rank}(u/\{u'\} \cup X \cup Y) = 0 \,\&\, \operatorname{rank}(u'/\{u\} \cup X \cup Y) = 0 \Rightarrow \operatorname{rank}(u/X \cup Y) = \operatorname{rank}(u'/X \cup Y)$.

Доказательства. (а) Имеем $U_X[Y] \subseteq U_X[[X \cup Y]]$ в силу $G_{[X \cup Y]} \subseteq G_{X \cup Y}$. Пусть $u \in U = {}^S/_E$, $u = sE$, $\bar{s} = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle$, $u \in U_X[[X \cup Y]]$. Тогда $\operatorname{rank}(u/X \cup Y) = \dim(\bar{s}/[X \cup Y])$. Очевидно, $g\bar{s}E\bar{s}$ при $g \in G_{[X \cup Y]}$, а так как U X-бездефектно, то $[\bar{s}, X] = [g\bar{s}, X]$, т. е. $gs_i \in [s_1, \ldots, s_n, X]$ для любого $i \leqslant n$. Если теперь допустить, что $s_i \notin [X \cup Y]$, то $V-[X\cup Y]\subseteq[s_1, \ldots, s_n, X]$, так как $G_{[X\cup Y]}$ транзитивно на $V-[X\cup Y]$. Однако последнее включение противоречит неравенству $\operatorname{rank}(u/X)+\dim[X\cup Y]<\dim V$.

(б) Пусть $\operatorname{rank}(u/\{u_1', \ldots, u_k'\}\cup X\cup Y)=0$, $\operatorname{rank}(u_i'/X\cup Y)=0$ $(i=1, \ldots, k)$, $u'=\langle u_1', \ldots, u_k'\rangle$. Тогда $\operatorname{rank}(u/\{u'\}\cup X\cup Y)=0$, $\operatorname{rank}(u'/X\cup Y)=0$. Покажем, что из (в) следует (б). Действительно, при наших условиях $\operatorname{rank}(u/\{u'\}\cup X\cup Y)=0$, $\operatorname{rank}(u'/\{u\}\cup X\cup Y)=0$, откуда по (в) $\operatorname{rank}(u/X\cup Y)=\operatorname{rank}(u'/X\cup Y)$, а последнее равно нулю.

(в) При наших условиях из 1.3(а) следует $\operatorname{rank}(\langle u, u'\rangle/X\cup Y)=\operatorname{rank}(u/X\cup Y)$, $\operatorname{rank}(\langle u', u\rangle/X\cup Y)=\operatorname{rank}(u'/X\cup Y)$, так как $\operatorname{rank}(u'/\{u\}\cup X\cup Y)=0$, $\operatorname{rank}(u/\{u'\}\cup X\cup Y)=0$. □

1.5. *Пусть U и U' — X-определимые множества, f — X-определимое отображение U на U', $\operatorname{rank}(f^{-1}(u')/\{u'\}\cup X)=r$ для всех $u'\in U$ и $r+\operatorname{rank}(U'/X)+\dim[X]<\dim V$. Тогда $r+\operatorname{rank}(U'/X)=\operatorname{rank}(U/X)$.*

Доказательство. Пусть $u\in U$, $u'=f(u)$. Согласно 1.3

$$\operatorname{rank}(\langle u, u'\rangle/X)=\operatorname{rank}(u/\{u'\}\cup X)+\operatorname{rank}(u'/X),$$

$$\operatorname{rank}(\langle u', u\rangle/X)=\operatorname{rank}(u'/\{u\}\cup X)+\operatorname{rank}(u/X),$$

но ввиду 1.4(а) $\operatorname{rank}(u'/\{u\}\cup X)=0$, поэтому $\operatorname{rank}(u/\{u'\}\cup X)+\operatorname{rank}(u'/X)=\operatorname{rank}(u/X)$. Выбрав теперь u так, что $\operatorname{rank}(u/X)=\operatorname{rank}(U/X)$, получим $\operatorname{rank}(U'/X)+r\geqslant\operatorname{rank}(U/X)$. Если же выбрать сначала u' так, что $\operatorname{rank}(u'/X)=\operatorname{rank}(U'/X)$, а затем $u=f^{-1}(u')$ так, что $\operatorname{rank}(u/\{u'\}\cup X)=r$, то $r+\operatorname{rank}(U'/X)\leqslant\operatorname{rank}(U/X)$. □

§ 2. ОПРЕДЕЛИМЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КВАЗИУРБАНИКОВОЙ СТРУКТУРЫ

В соответствии с обозначениями, использованными выше, пусть F_X^n — множество всех X-определимых n-местных частичных операций на V; $F_\varnothing^n=F^n$; $F_X=\bigcup\limits_n F_X^n$; $\operatorname{orb}_X(u)=\{gu\colon g\in G_X\}$, где u — элемент X-определимого множества U.

X-преобразованием на V назовем любое X-определимое отображение $f\colon V\to V$ такое, что $\operatorname{Range} f\subseteq[X]$. Для $q\in F^{n+1}$, $\bar{x}=\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ будем обозначать через $q_{\bar{x}}$ отображение $v\to q(x_1, \ldots, x_n, v)$.

2.1. *Пусть $X\subseteq V$, $y, z\in V$. Тогда $z\in[X, y]-[X]$ если и только если существует X-преобразование вида $q_{\bar{x}}$ $(q\in F^{n+1}, \bar{x}\in X^n)$ такое, что $q_{\bar{x}}(y)=z$.*

Доказательство. Как показано в доказательстве 0.3, если $z\in[X, y]$, то существует $q\in F^{n+1}$ такое, что $q(x_1, \ldots, x_n, y)=z$. При этом $z\notin[X]$ тогда и только тогда, когда $q(x_1, \ldots, x_n, v)\notin[x_1, \ldots, x_n]$ для всех $v\in V-[x_1, \ldots, x_n]$, т. е. когда $q_{\bar{x}}$ — X-преобразование.

2.2. *Всякое X-преобразование f биективно отображает $V-[X]$ на себя. Более того, существует X-преобразование h такое, что $f\circ h$ и $h\circ f$ тождественны на $V-[X]$.*

Доказательство. Пусть $z\in V-[X]$, $y=f(z)$. Тогда $y\in[X, z]-[X]$, а, следовательно, $z\in[X, y]-[X]$ (согласно 0.6). Теперь $h(y)=z$ для некоторого X-преобразования h. Но тогда $f\circ h(y)=y$, $h\circ f(z)=z$, а это значит, ввиду транзитивности G_X, что $f\circ h$ и $h\circ f$ тождественны на $V-[X]$. □

На множестве всех X-преобразований при $\dim[X]<\dim V$ зададим отношение эквивалентности E_X: fE_Xf' означает, что существует v из $V-[X]$, $f(v)=f'(v)$. Ясно, что в этом определении «существует» можно заменить на «для всех».

2.3. *Очевидно, $E_X=E_{X\cup Y}=E_Y$, если $\dim[X\cup Y]<\dim V$.*

Последнее замечание позволяет писать E вместо E_X, не опасаясь двусмысленности, когда $2\dim[X] < \dim V$ для рассматриваемых значений X.

В следующих определениях предполагается $\dim[X] \leqslant \dim V - 2$.

X-преобразование f назовем

гомотетией, если для некоторой пары v_0, v_1 независимых над X элементов V $f(v_1) \in [v_0, v_1, f(v_0)]$;

линейной гомотетией, если существует $v \in V - [X]$, для которого $f(v) \in [v]$;

нерегулярным, если v_0, v_1, $f(v_0)$, $f(v_1)$ независимы для некоторых независимых над X элементов $v_0, v_1 \in V$.

Очевидно, линейная гомотетия является гомотетией, и при $\dim[X] \leqslant \dim V - 2$ нерегулярными являются в точности X-преобразования, не являющиеся гомотетиями.

Если в качестве V рассмотреть векторное или аффинное пространство, то отображения вида $f(v) = k(v-a)+b$ являются гомотетиями. Линейные гомотетии векторного пространства имеют вид kv, аффинного — тождественное преобразование.

2.4. *Для любой линейной гомотетии f найдется $\varnothing$-преобразование f^0, эквивалентное f.*

Доказательство. Имеем $f(v) \in [v] - [\varnothing]$ для некоторого $v \in V - [X]$, поэтому $f(v) = f^0(v)$ для некоторого $f^0 \in F^1$ (согласно 2.1). □

2.5. *При* $\dim[X] \leqslant \dim V - 3$ *следующие условия для X-преобразования f равносильны*;

(а) *f — гомотетия*;

(б) *существуют $s \in F^3$, $a \in V - [X]$ такие, что $fEs_{af(a)}$*;

(в) *существует такое $s \in F^3$, что для любого $a \in V - [\varnothing]$ найдется $b \in [X, a]$, для которых fEs_{ab}*;

(г) *существуют такие $s \in F^3$, $a \in V - [X]$, $b \in V$, что fEs_{ab}.*

Для (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в) $\Rightarrow$ (г) *достаточно* $\dim[X] \leqslant \dim V - 2$.

Доказательство. (а) $\Rightarrow$ (б) Действительно, взяв $a \in V - [X]$, $v \in V - [X, a]$, мы получим из определения (и наследственной транзитивности) $f(v) \in [v, a, f(a)]$. Согласно 2.1 существует $s \in F^3$ такое, что $fEs_{af(a)}$.

(б) $\Rightarrow$ (в) Заметим сначала, что если fEs_d для некоторых $s \in F^2$, $d \in V$, то (в) выполнено. Поэтому можно считать $f(a_0) \notin [a, a_0]$, когда $a_0 \notin [X, a]$. Очевидно, $f(a_0) \in [X, a_0] - ([X] \cup [a, a_0])$. Пусть a_1 — любой элемент из этой разности (например $a_1 = f(a_0)$). Тогда согласно (б) $fEs_{a_0 f(a_0)}$, $fEs_{a_1 f(a_1)}$ для некоторого $s \in F^3$. Так как $[X, a_0, a_1] = [X, a_0] \neq V$, то $s_{a_0 f(a_0)}(v) = f(v) = s_{a_1 f(a_1)}$ для некоторого $v \in V - [X, a_0, a_1]$, т. е. $s_{a_0 f(a_0)} E s_{a_1 f(a_1)}$. Пусть теперь $a \in [X] - [\varnothing]$, тогда $d \notin [a_0, f(a_0)]$, так же как и $a_1 \notin [a_0, f(a_0)]$. Ввиду транзитивности $G_{[a_0, f(a_0)]}$, $s_{a_0 f(a_0)} E s_{ab}$, где $b = s_{a_0 f(a_0)}$, так как $f(a_1) = s_{a_0 f(a_0)}(a_1)$. Поскольку $[X, a_0, a_1] = [X, a_0] \neq V$, то fEs_{ab}, а так как $f(v) \in [a, b, v] - [a, v]$ для всех $v \notin [X, b]$, то $b \in [f(v), a, v] \subseteq [X, v]$, т. е. $b \in [X]$.

(в) $\Rightarrow$ (г) Очевидно.

(г) $\Rightarrow$ (а) Пусть fEs_{ab}, $a \in V - [X]$. Заметим, что можно считать $b \in [X, a]$, $f(v) \notin [a, v]$ для $v \in V - [X, a, b]$. Действительно, если $f(v) \in [a, v]$, то из транзитивности $G_{[X, v]}$ имеем $f(v) \in [a', v]$ для любого $a' \in V - [X, a, v]$, т. е. $f(v) \in [v]$, f — линейная гомотетия. Если же $f(v) \in [a, v]$, то $b \in [a, v, f(v)] \subseteq [a, v, X]$, т. е. $b = h(v)$ для некоторого $[X, a]$-преобразования h, если $b \notin [X, a]$. Последнее противоречит обратимости h (см. 2.2), так как $v \notin [X, a, b]$. Поскольку $[X, a, b] = [X, a]$ и $\dim V - \dim[X] \geqslant 3$, то найдутся v_0, v_1 из V, независимые над $[X, a, b]$. Имеем $f(v_0) \in [a, b, v_0] - [a, v_0]$, $f(v_1) \in [a, b, v_1]$, отсюда $b \in [a, v_0, f(v_0)]$, $f(v_1) \in [a, v_0, v_1, f(v_0)]$, что влечет $f(v_1) \in [v_0, v_1, f(v_0)]$, ибо иначе $a \in [v_0, v_1, X]$, что противоречит выбору a, v_0, v_1. □

2.6. *Пусть f — нерегулярное X-преобразование* $\dim[X] \leqslant \dim V - 2$. *Тогда найдутся $Y \subseteq X$, $x_1, x_2 \in X$ и $q \in F_Y^3$ такие, что $f = q_{x_1x_2}$ — нерегулярное преобразование на V_Y*, $\dim[Y] = \dim[X] - 2$.

Доказательство. Так как $[X]$-преобразование является также X-преобразованием, можно считать, что $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ независимые элементы. Для $n \leqslant 2$ утверждение очевидно, поэтому можно предполагать $n \geqslant 3$ и доказывать по индукции.

Достаточно показать, что f — нерегулярное преобразование V_Y для $Y = \{x_i\}$ при некотором $i \leqslant n$. В противном случае, выбрав v_0, v_1 независимыми над X, имеем $f(v_1) \in [v_0, v_1, f(v_0), x_i] - [v_0, v_1, f(v_0)]$ для всех $i \leqslant n$. Это влечет $X \subseteq [v_0, v_1, f(v_0), f(v_1)]$, $\dim[v_0, v_1, X] \leqslant 4$, противоречие. □

n-Преобразованием будем называть X-преобразование для $|X| \leqslant n$.

2.7. *Если $3 \leqslant n \leqslant \dim V - 2$, то имеет место одно из трех следующих утверждений*:

(а) *существует 2-преобразование, не являющееся линейной гомотетией; все n-преобразования являются гомотетиями, суперпозиция 2-преобразований — снова гомотетия*;

(б) *для любых $y_1, \ldots, y_{n+1} \in V$ $[y_1, \ldots, y_n] = [y_1] \cup \ldots \cup [y_{n+1}]$*;

(в) *существуют $Y \subseteq V$, $\dim[Y] \leqslant n - 2$, a, $b \in V$, $q \in F_Y^3$ такие, что q_{ab} — нерегулярное преобразование на V_Y и на V.*

Доказательство. Если не выполнено (а), то либо существуют две гомотетии s_{ab} и r_{ac}, суперпозиция которых, $q_{abc} = s_{ab} \circ r_{ac}$, нерегулярна, либо некоторое n-преобразование нерегулярно, либо все 2-преобразования — линейные гомотетии. В первых двух случаях выполняется (в), в последнем — $[x_1, x_2, x_3] = [x_1] \cup [x_2] \cup [x_3]$ для любых x_1, x_2, $x_3 \in V$ согласно 2.1. В последнем случае рассмотрим наименьшее k, для которого найдется $z \in [x_1, \ldots, x_{k+1}] - ([x_1] \cup \ldots \cup [x_{k+1}])$. Ясно, что $z \notin [x_1, \ldots, x_k]$, поэтому по 2.1 существует $[x_1, \ldots, x_k]$-преобразование f, для которого $f(x_{k+1}) = z$. Если $k \leqslant n$, f — гомотетия, то fEs_{x_1x} (см. 2.5(в)) для некоторого $x \in [x_1, \ldots, x_k] = [x_1] \cup \ldots \cup [x_k]$. При этом $z \in [x_1, x, x_{k+1}] = [x_1] \cup [x] \cup [x_{k+1}] \subseteq [x_1] \cup [x_2] \cup \ldots \cup [x_{k+1}]$, что противоречит выбору z. Итак, $k > n$ либо f — нерегулярное преобразование и 2.6 дает Y, a, b, q, $\dim[Y] \leqslant k - 2 \leqslant n - 2$, $q \in F_Y^3$ и q_{ab} — нерегулярное преобразование. □

Замечание. Мы покажем в § 4, что при $\dim V \geqslant 8$, $n \leqslant \dim V - 5$ (в) невозможно.

2.8. *Если имеет место* 2.7(б), *то имеет место случай* (в) *теоремы* А.

Доказательство. Пусть H — совокупность всех $\varnothing$-преобразований V. Очевидно, что H является группой относительно суперпозиции, действующей на $V - [\varnothing]$. Причем, если $h(v) = v$ для $h \in H$, $v \in V - [\varnothing]$, то $h(v) = v$ для всех v из $V - [\varnothing]$. Тем самым показано, что $V - [\varnothing]$ является свободным H-модулем. Полагая $h(v) = v$ для всех $h \in H$, $v \in [\varnothing]$, получим на V структуру свободного H-модуля с дополнительными константами $[\varnothing]$. Очевидно, $[v] = H \cdot v \cup [\varnothing]$ для любого $v \in V$, где $H \cdot v = \{h(v)\colon h \in H\}$, G — подгруппа группы автоморфизмов H-модуля. □

§ 3. НЕРЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В настоящем параграфе предполагается существование нерегулярного преобразования вида q_{ab}, $q \in F^3$. Обозначение q фиксируется за данной операцией. Везде предполагается $\dim V \geqslant 5$.

3.1. *Для произвольных x, $y \in V$ преобразование q_{xy} нерегулярно тогда и только тогда, когда x, y независимы.*

Доказательство. Если $q_{x,y}$ нерегулярно, $z_1 \in V - [x, y]$, $z_2 = q_{xy}(z_1)$, то $x \notin [y]$, ибо иначе $z_2 = s_y(z_1)$ для подходящего $s \in F^2$, что противоречит нерегулярности q_{xy} (см. 2.5(в)). Точно так же $y \notin [x]$.

Если q_{ab} нерегулярно для некоторой пары независимых a, b из V, то q_{xy} нерегулярно для любой пары независимых x, y из V, ввиду наследственной транзитивности G. □

3.2. *Существует* $q^* \in F^3$ *такая, что для независимых* $x, y \in V$ *и произвольных* v, w *из* $V-[x, y]$

$$\overset{*}{q}_{vw}(x) = y \Leftrightarrow q_{xy}(v) = w.$$

Доказательство. Учитывая нерегулярность q_{xy}, при $v \in V - [x, y]$, $w = q_{xy}(v)$ имеем $y \in [x, v, w] - [v, w]$, т. е. $y = q^*(v, w, x)$ для некоторой $q^* \in F^3$. По 2.2 отображение $y \to q(x, y, v)$ инъективно на $V - [x, v]$, поэтому $q(x, y, v) = w \Leftrightarrow q^*(v, w, x) = y$ для любых независимых x, y, v. □

3.3. *Если* $q_{ab} E q_{xy}$ *для некоторых* $x, y \in V$, *то* $[x, y] = [a, b]$.

Доказательство. По 2.5(г) $x, y \in [a, b]$. При этом нерегулярность q_{xy} очевидна, поэтому x, y независимы (3.1), т. е. $[x, y] = [a, b]$. □

3.4. *Преобразование* $\overset{*}{q}_{xy}$ *нерегулярно, если* x, y *независимы.*

Доказательство. Допустим, $\overset{*}{q}_{xy}$ — гомотетия, тогда $\overset{*}{q}_{xy}(v) = w \in [v, v_0, w_0]$, где $w_0 = \overset{*}{q}_{xy}(v_0)$, v_0, v независимы над $\{x, y\}$. При этом, когда x, y независимы, то $q_{vw}(x) = y = q_{v_0 w_0}(x)$. Если $[v_0, v, w] \neq [v_0, v]$, то 3.3 дает $x \in [v_0, w_0, v, w]$, т. е. $[v_0, w_0, v, w, x, y] = [v, v_0, w_0]$, что противоречит независимости v_0, v над $\{x, y\}$. Если же $[v_0, v, w] = [v_0, v]$, то $[v_0, v, x, y] = [v, w, x, y] = [v, x, y]$, что опять противоречит независимости v_0, v, x, y. □

3.5. *Если для* X*-преобразования* f

$$f(v_1) = q_{ab}(v_1), \; f(v_2) = q_{ab}(v_2)$$

при $\dim(\langle v_1, v_2\rangle/X) = \dim(\langle v_1, v_2\rangle/\{a, b\}) = 2$, $\dim[X] \leqslant \dim V - 3$, *то* $f E q_{ab}$ *и* $a, b \in X$.

Доказательство. По 3.2 $q^*(v_1, f(v_1), a) = b = q^*(v_2, f(v_2), a)$. Отображение h: $v \to q^*(v, f(v), a)$ $[X, a]$-определимо, поэтому $b \in [X, a]$, ибо иначе h противоречит 2.2. Так как $[X, a] \neq [X, v_1, v_2]$ ввиду разных размерностей, то $v_1 \notin [X, a, b]$ или $v_2 \notin [X, a, b]$. Поэтому f эквивалентно q_{ab}. Из нерегулярности f и 2.5(г) следует $a, b \in [X]$. □

3.6. *Если* $\dim[v_1, v_2, w_1, w_2] = 4$, *то существуют* $x, y \in V$ *такие, что* $\dim[x, y, v_1, v_2] = 4$, $q_{xy}(v_1) = w_1$, $q_{xy}(v_2) = w_2$.

Доказательство. Элементы $q_{xy}(v_1)$, $q_{xy}(v_2)$, v_1, v_2 независимы при $\dim[v_1, v_2, x, y] = 4$, так как q_{xy} нерегулярно. Ввиду наследственной транзитивности можно считать $q_{xy}(v_1) = w_1$, $q_{xy}(v_2) = w_2$. □

3.7. *Если* $\dim[X] \leqslant \dim V - 3$, *то для любого* X*-преобразования* f *найдутся* $s \in F^3$ *и* $x, y \in V$ *такие, что* f *эквивалентно* s_{xy}. *Если* f *нерегулярно, то можно выбирать* $s = q$ *или* $s = q^*$.

Доказательство. Если f — гомотетия, то s дается 2.5. Если f нерегулярно, то 3.6 позволяет найти x, y, v_1, v_2 такие, что $f(v_1) = q_{xy}(v_1)$, $f(v_2) = q_{xy}(v_2)$, $\dim[x, y, v_1, v_2] = 4$, $\dim(\langle v_1, v_2\rangle/X) = 2$. Тогда 3.5 утверждает $f E q_{xy}$. Так как $\overset{*}{q}_{ab}$ тоже нерегулярно, то можно в 3.5, 3.4 заменить q на q^*. □

Геометрическая интерпретация результатов настоящего параграфа может быть сформулирована следующим образом: назовем элементы V^2 точками, а графики преобразований s_{xy} — прямыми, задав таким образом некоторую систему инцидентности. Эта система аналогична псевдоплоскости из [3]; будем называть ее так же. При условиях § 3 через «почти» любые две точки проходит прямая (3.6), причем только одна (с точностью до эквивалентности) (3.5). Аналогия между данной псевдоплоскостью и аффинной плоскостью над полем позволяет в § 4 воссоздать над V группу, аналогичную группе линейных преобразований прямой и затем прийти к противоречию с предположением § 3. Исследование этой группы в § 4 проводится по схеме доказательства Черлина [10] разрешимости групп ранга Морли 2.

Очевидно, при переходе от квазиурбаниковой структуры V к расширению $V' = V \cup C$, где C — множество констант, т. е. действие G на C определено тождественно, свойство наследственной транзитивности G на V' сохраняется, V' — квазиурбаникова структура, $V'[\varnothing] = V[\varnothing] \cup C$. Поэтому, не теряя общности, можно предполагать $|[\varnothing]| \geqslant |F^3|$.

4.1. *Если* $\dim V \geqslant 8$, $a \in V - [\varnothing]$ *и на* V *существует 2-преобразование, не являющееся линейной гомотетитей, то в* V_a *определимы множество* H_a *и двуместная операция* $\cdot$ *на нем такие, что*

(а) $\langle H_a, \cdot \rangle$ — *группа;*

(б) $\varnothing$*-определимо частичное действие* $*$: $H_a \times V \to V$; $h * v$ *для* $h \in H_a$, $v \in V$ *определено, если* $v \notin [h, a]$; *если* $v \in V - [h_1, h_2, a]$, $h_1, h_2 \in H_a$, *то* $h_1 * (h_2 * v) = (h_1 \cdot h_2) * v$;

(в) *каждый элемент* $h \in H_a$ *задает* $[h, a]$*-преобразование* $v \to h * v$; *для каждого* X*-преобразования* f *при условии* $\dim V_a[X] \leqslant \dim V_a - 3$ *существует единственный* $h \in H_a[X]$, *задающий преобразование, эквивалентное* f;

(г) $1 \leqslant \operatorname{rank}(H_a/\{a\}) \leqslant 2$; $\operatorname{rank}(h/\{a\}) = 2$ *тогда и только тогда, когда* h — *нерегулярное преобразование* V_a; H_a *не разбивается на два* X*-определимых подмножества ранга* 2.

Доказательство. Множество H_a зададим в виде $\widetilde{F}_a/\widetilde{E}_a$, где $\widetilde{F}_a$ и $\widetilde{E}_a$ — a-определимые множество и отношение эквивалентности, $\widetilde{F}_a \subseteq V^3$. Более точно, F_a зададим в зависимости от того, какое из двух возможных условий — (а) или (в) из 2.7 — имеет место. Случай 2.7(б) противоречит условию доказываемого утверждения.

Если имеет место 2.7(а), то, фиксируя некоторую инъекцию $s \to \tilde{s}$ из F^3 в $[\varnothing]$, положим $\widetilde{F}_a = \widetilde{F}_a^2 = \{\langle a, x, \tilde{s}\rangle : x \in V, \tilde{s} \in F^3, s_{ax}$ — преобразование, $x \in V_a[\varnothing] \leftrightarrow \forall v \in V s_{ax}(v) \in V_a[v]\}$. Каждая тройка $\langle a, x, \tilde{s}\rangle$ из $\widetilde{F}_a$ задает однозначно преобразование s_{ax}. Полагаем $\langle a, x, \tilde{s}\rangle \widetilde{E}_a \langle a, x', \tilde{s}\rangle$, если имеет место $s_{ax} E s'_{ax'}$. Заметим, что в этом случае $x' \in V_a[x]$, так как либо $x \in V_a[\varnothing]$, либо $s_{ax}(v) = s_{ax'}(v) \in [a, x', v] - [a, v]$, для любого $v \in V - [x, x', a]$, т. е. $x' \in [a, s_{ax}(v), v] \subseteq [a, x, v]$, откуда $x' \in [a, x]$. Таким образом, $H_a = \widetilde{F}_a/\widetilde{E}_a$ — бездефектное $\varnothing$-определимое в V_a множество, $\operatorname{rank}(H_a/\{a\}) = 1$.

Операцию на H_a определим в соответствии с суперпозицией преобразований: когда $h^i \in H_a$ представляется тройками $\langle a, x^i, \tilde{s}^i\rangle$ $(i = 1, 2, 3)$, то $h^1 \cdot h^2 = h^3$, если и только если $s^1_{ax^1} \circ s^2_{ax^2}$ эквивалентно $s^3_{ax^3}$. В условиях 2.7(а) результат операции всегда определен.

В случае 2.7(в) при $n = 3$, когда не выполнено 2.7(а), на V_a существует нерегулярное 2-преобразование q_{axy} $(q_a \in F_a^3)$ и любое нерегулярное X-преобразование имеет такой вид при фиксированном q_a, если $\dim V_a[X] \leqslant \dim V_a - 3$ (см. 3.7). Положим $\widetilde{F}_a = \widetilde{F}_a^2 \cup \widetilde{F}_a^3$, где $\widetilde{F}_a^2$ определено выше, $\widetilde{F}_a^3 = \{\langle a, x, y\rangle : x, y \in V, \dim V_a[x, y] = 2\}$. Тройкам $\langle a, x, \tilde{s}\rangle$ из $\widetilde{F}_a^2$ сопоставляем, как и раньше, преобразование s_{ax}, тройкам $\langle a, x, y\rangle$ из $\widetilde{F}_a^3$ — преобразование q_{axy}. Как и в первом случае, отношение $\widetilde{E}_a$ на $\widetilde{F}_a$ соответствует отношению между преобразованиями. Бездефектность на $\widetilde{F}_a^3$ следует из 3.3. Произведение на $H_a = \widetilde{F}_a/\widetilde{E}_a$ задается так же, как и в первом случае,— по суперпозиции соответствующих преобразований. Замкнутость H_a относительно произведения следует из 3.7.

Тождественное преобразование — линейная гомотетия, поэтому в обоих вариантах H_a содержит единицу. Обратимость элементов H_a следует из 2.2.

Действие $h * v$ элемента $h \in H_a$, представленного $\langle a, x, \bar{s} \rangle$ или $\langle a, x, y \rangle$ на $v \in V - [h, a]$, зададим как $s_{ax}(v)$ или $q_{axy}(v)$ соответственно. Из построения H_a следует корректность этого определения, преобразование $v \to h * v$ эквивалентно s_{ax} или q_{axy} соответственно. Отсюда же следует $h_1 * (h_2 * v) = (h_1 \cdot h_2) * v$ для $v \notin V_a[h_1, h_2]$.

Если $v \in V - V_a[h_1, h_2, h_3]$, то $(h_1 \cdot h_2) \cdot h_3$ и $h_1 \cdot (h_2 \cdot h_3)$ задают одинаковые преобразования v, т. е. совпадают. Так как $\dim V_a[h_1, h_2, h_3] \leqslant 6 < \dim V_a$, то такое v всегда существует, что доказывает ассоциативность операции на H_a, H_a — группа. Проверены утверждения (а)—(в). Из построения следует $\operatorname{rank}(H_a/\{a\}) \leqslant 2$; $\operatorname{rank}(h/\{a\}) = 2$ тогда и только тогда, когда h представлено $\langle a, x, y \rangle$, т. е. нерегулярным преобразованием q_{axy}. Если h_1, h_2 из H_a представлены $\langle a, x_1, y_1 \rangle$, $\langle a, x_2, y_2 \rangle$ соответственно и $\operatorname{rank}(\langle x_1, y_1 \rangle / X, a) = \operatorname{rank}(\langle x_2, y_2 \rangle / X, a)$, то (ввиду наследственной транзитивности $G_{[X, a]}$) h_1 и h_2 не могут лежать в двух непересекающихся X-определимых множествах. Тем самым одно из этих множеств должно быть ранга меньше, чем 2.

До конца этого параграфа мы предполагаем выполненными условия 4.1 и для простоты обозначений полагаем $V_a = V$, $H_a = H$, $\dim V \geqslant 7$. Любая гомотетия на V имеет вид s_a ($s \in F^2$, $a \in V$).

X-определимое множество A при $X \subseteq V$ назовем *минимальным*, если существует X-определимая биекция f: $V - V_X[\varnothing] \to A - A_X[\varnothing]$. Напомним, $V_X[\varnothing] = [X]$. *Минимальная подгруппа* — это X-определимая подгруппа группы H, множество элементов которой минимально.

4.2. *Минимальная X-определимая подгруппа не содержит X-определимых подгрупп ненулевого ранга.*

Доказательство. Можно считать, что $X = \varnothing$ и рассматриваемая минимальная подгруппа есть V с групповой операцией. Если V_0 — подгруппа V, $\operatorname{rank}(V_0/\varnothing) = 1$, то $V - V_0 \subseteq [\varnothing]$. Взяв $v \in V - V_0$, $v_0 \in V$, $\operatorname{rank}(v_0/\varnothing) = 1$, получим $v \cdot v_0 \in V - V_0$, т. е. $v \cdot v_0 \in [\varnothing]$, $v \in [\varnothing]$, отсюда и $v_0 \in [\varnothing]$; противоречие. □

Будем использовать стандартные групповые обозначения; $C(X)$ — централизатор X, $N(X)$ — нормализатор X, C — центр группы, $x^y = y^{-1}xy$.

4.3. *Минимальная подгруппа A абелева. Если $x \in N(A)$, то либо $C(x) \cap A = 1$, либо $C(x) \supseteq A$.*

Доказательство. Опять отождествляем нашу группу с V. Отображение $v \to x^v x^{-1}$ для фиксированного x из V (ввиду 1.5 и 4.2) либо константно, если $C(x) \supseteq V$, либо есть x-преобразование, если $\operatorname{rank}(C(x)/\{x\}) = 0$. Во втором случае это отображение инъективно на $V - [x]$, что возможно, только если $V \cap C(x)$ — единичная подгруппа. Тем самым всегда $C(x) \supseteq V$ при $x \in V$, т. е. $V \subseteq C(V)$. □

4.4. *Пусть T — X-определимое минимальное подмножество H, $X \subseteq V$, $\dim [X] \leqslant \dim V - 4$ и $St(T) = \{h \in H$: $\operatorname{rank}((h \cdot T \dotdiv T)/\{X, h\}) = 0\}$. Тогда $St(T)$ — X-определимая подгруппа H, если $\operatorname{rank}(St(T)/X) > 0$, то $St(T)$ минимальна.*

Доказательство. X-определимость $St(T)$ очевидна. Если $h \in St(T)$, $t_1, t_2 \in h \cdot T \cap T$, $t_2 = h \cdot t_1$, $\operatorname{rank}(t_1/\{X, h\}) = 1$, то $h = t_1^{-1} \cdot t_2$ $\operatorname{rank}(h/\{X, t_1\}) = \operatorname{rank}(t_2/\{X, t_1\}) \leqslant 1$ (см. 1.4). Из того, что $\operatorname{rank}(h/\{X, t_1\}) \leqslant 1$ и $\operatorname{rank}(t_1/\{X, h\}) = \operatorname{rank}(t_1/X)$, из 1.3(б) следует $\operatorname{rank}(h/X) \leqslant 1$. Тем самым $\operatorname{rank}(St(T)/X) \leqslant 1$.

Если $h_1, h_2 \in St(T)$, то $\operatorname{rank}(h_1/X) \leqslant 1$, $\operatorname{rank}(h_2/X) \leqslant 1$, $\operatorname{rank}((T \dotdiv h_1^{-1} \cdot T)/\{X, h_1\}) = \operatorname{rank}((h_1 \cdot T \dotdiv T)/\{X, h_1\}) = 0$, $h_1^{-1} \cdot h_2 \cdot T \dotdiv T \subseteq h_1^{-1} \cdot (h_2 \cdot T \dotdiv T) \cup (h_1^{-1} \cdot T \dotdiv T)$, $\operatorname{rank}((h_1^{-1} \cdot h_2 \cdot T \dotdiv T)/\{X, h_1, h_2\}) = 0$, т. е. $h_1^{-1} \cdot h_2 \in St(T)$. Тем самым доказано, что $St(T)$ — подгруппа.

Если $t_1 \in T$, $\operatorname{rank}(t_1/X) = 1$, $h \in St(T)$, $\operatorname{rank}(h/\{X, t_1\}) = 1$, то для $t_2 = h \cdot t_1$ $\operatorname{rank}(t_2/\{X, h\}) = 1$, поэтому $t_2 \notin h \cdot T \dotdiv T$, т. е. $t_2 \in h \cdot T \cap T$, $\operatorname{rank}(t_2/\{X, t_1\}) = 1$ и отображение $h \to h \cdot t_1$ является $[X, t_1]$-определимой биекцией $\{h \in St(T)$: $\operatorname{rank}(h/X) = 1\}$ на $\{t \in T$: $\operatorname{rank}(t/X) = 1\}$. Осталось заметить, что $t_1 \in T_X[y]$, $y \in [X, t_1]$ для некоторого y из V. Это следует из минимальности T, отсюда же непосредственно вытекает $\{t \in T: \operatorname{rank}(t/\{X, t_1\}) = 0\} = T_X[y]$. Если же $h' \in St(T)$, $\operatorname{rank}(h'/\{X, t_1\}) = 0$, $t_2' = h' \cdot t_1$, то $\operatorname{rank}(t_2'/\{X, t_1\}) = 0$, и, значит, опять по минимальности T получается $t_2' \in T_X[y]$; с другой стороны, очевидно, $h' \in H[t_1, t_2]$. Следовательно, $h' \in St(T)_X[y]$. Таким образом, имеем $[X, y]$-определимую биекцию $St(T) - St(T)_{[X, y]}[\varnothing]$ на $T - T_{[X, y]}[\varnothing]$, а тем самым на $V - [X, y]$. □

4.5. *Всякая X-определимая подгруппа $A \leqslant H$ ранга 1 при $\dim[X] \leqslant \dim V - 4$ обладает единственной X-определимой минимальной подгруппой A^0, которая нормальна в A.*

Доказательство. Пусть $h \in A$, $\operatorname{rank}(h/X) = 1$. Тогда $h = s_b$ для некоторого $s \in F_X^2$, $b \in V - [X]$. Пусть $T = \{s_y: y \in V - [X]\}$. Ясно, что T — X-определимое минимальное множество, так как $y \to s_y(v)$ — биекция ввиду 2.2. Положим $A^0 = St(T)$ и покажем, что $\operatorname{rank}(A^0/X) > 0$, это и даст минимальность A^0 в силу 4.4.

Рассмотрим $h_1, h_2 \in A$ такие, что $\operatorname{orb}_X(h_1) = \operatorname{orb}_X(h_2)$, $\operatorname{rank}(h_1/\{X, b\}) > 0$. Тогда $h_1 \cdot h = h_1 \cdot s_b = r_c$ для некоторого $c \in V$, $\operatorname{rank}(c/\{X, h_1\}) > 0$. Положив $R = \{r_y: y \in V - [X]\}$, видим из построения R, что $\operatorname{rank}((h_1 \cdot T \dot{-} R)/\{X, h_1\}) = 0$, поэтому и $\operatorname{rank}((h_2 \cdot T \dot{-} R)/\{X, h_2\}) = 0$, отсюда $h_1^{-1} \cdot h_2 \in St(T)$ и если h_2 сразу выбрать так, что $\operatorname{rank}(h_2/\{X, h_1\}) = 1$, то $0 < \operatorname{rank}(h_1^{-1} \cdot h_2/X) \leqslant \operatorname{rank}(A^0/X)$, что и требовалось.

Для доказательства нормальности A^0 для произвольного $h \in A$ выберем $h_1, h_2 \in A$ так, что $\operatorname{orb}_{X,h}(h_1) = \operatorname{orb}_{X,h}(h_2)$, $\operatorname{rank}(h_2/\{X, h, h_1\}) = 1$. Тогда $\operatorname{orb}_{X,h}(h_1^h) = \operatorname{orb}_{X,h}(h_2^h)$, поэтому, как замечено выше, $h_1^{-1} \cdot h_2 \in A^0$, $(h_1^h)^{-1} \cdot h_2^h \in A^0 \cap A^{0h}$ и $\operatorname{rank}((h_1^{-1} \cdot h_2)^h/\{X, h\}) > 0$. Ввиду 4.2 $A^0 = A^{0h}$.

Наконец, покажем единственность. Если A^1 — другая X-определимая минимальная подгруппа, то по 4.2 $\operatorname{rank}(A^0 \cap A^1/X) = 0$, поэтому отображение f: $A^0 \times A^1 \to A$, заданное правилом $f(h_0, h_1) = h_0 \cdot h_1$, удовлетворяет условию $\operatorname{rank}(f^{-1}(h)/\{X, h\}) = 0$ для любой точки h из образа f. Это противоречит 1.5, так как $\operatorname{rank}(A^0 \times A^1/X) = 2$, $\operatorname{rank}(A/X) = 1$. □

В ситуации, описанной в 4.5, будем называть A^0 *минимальной компонентой* A.

4.6. *В группе H существует $\varnothing$-определимая минимальная подгруппа.*

Доказательство. Пусть $s_b \in H$, $s \in F^2$, $b \in V - [\varnothing]$, s_b не является линейной гомотетией, т. е. $\operatorname{rank}(s_b/\varnothing) = 1$. Такое s_b существует ввиду условия 4.1. Положим $T = \{s_x: x \in V - [\varnothing]\}$, T — минимальное множество. Пусть $h \in H$, $u \in h \cdot T$, $\operatorname{rank}(u/\{h\}) = 1$, тогда $\operatorname{orb}_h(u) \subseteq h \cdot T$, $\operatorname{rank}((h \cdot T \dot{-} \operatorname{orb}_h(u))/\{h\}) = 0$. При этом либо $u = r_c$ для $r \in F^2$, $c \in V - [h]$, либо $u = q_{bc}$, где $\operatorname{rank}(\langle b, c\rangle/\{h\}) = 1$, $b, c \in V$. В первом случае положим $U_h = \{r_x: x \in V - [\varnothing]\}$. Второй распадается на три подслучая: (а) $b \in [h]$, (б) $c \in [h]$, (в) $b \in V - [h]$ и $c = f(b)$ для некоторого $[h]$-преобразования f. Положим соответственно: (а) $U_h = \{q_{by}: y \in V - [b]\}$, (б) $U_h = \{q_{yc}: y \in V - [c]\}$, (в) $U_h = \{q_{xf(x)}: x \in V - [h]\}$. Во всех случаях U_h — $[h]$-определимое минимальное множество, $U_h \supseteq \operatorname{orb}_h(u)$, $\operatorname{rank}((h \cdot T \dot{-} U_h)/\{h\}) = 0$.

При $\operatorname{rank}(H/\varnothing) = 1$ минимальную подгруппу дает 4.5. Если при $\operatorname{rank}(h/\varnothing) = 2$ множество U_h b-определимо для некоторого $b \in V$, то $St(T)$ — искомая минимальная подгруппа ввиду 4.4, так как $\operatorname{rank}(h/\{b\}) > 0$, а значит, взяв $h' \in \operatorname{orb}_b(h)$, $\operatorname{rank}(h'/\{b, h\}) > 0$, получим $\operatorname{rank}(b^{-1} \cdot h'/\{b\}) > 0$, $h^{-1} \cdot h' \in St(T)$.

Итак, можно считать, что $\operatorname{rank}(h/\varnothing) = 2$ для некоторого $h \in H$ и для U_h имеет место последний вариант, причем f — нерегулярное 2-преобразование. Из 3.7 следует $f = q^*_{b'c'}$ для некоторых $b', c' \in V$ таких, что $[b', c'] = [h]$. Тогда (согласно определению q^* (см. 3.2)) $q_{xf(x)}(b') = c'$ для всех $x \in V - [h]$. Другими словами, $u * b' = c'$ для всех $u \in U_h$, т. е. для всех t из T, если $\mathrm{rank}(t/\{h\})=1$, то $(h\cdot t)*b'=c'$. Фиксируем вслед за h, b', $c'=\mathrm{rank}(c/\{h_1, v\})$ также $t\in T$ и $g\in H$ так, что $\mathrm{rank}(t/\{h\})=1$, $\mathrm{rank}(g/\{h, t\})=2$. Ввиду формул 1.3 $\mathrm{rank}(h/\{t\})=2$, $\mathrm{rank}(b'/\{t\})=1$, $\mathrm{rank}(g/\{h, t, b'\})=2$, $\mathrm{rank}(g\cdot h/\{t, b'\})=2=\mathrm{rank}(g\cdot h/ /\{t\})$. Из последних равенств имеем $\mathrm{rank}(b'/\{g\cdot h, t\})=\mathrm{rank}(b'/\{t\})=1$. Поэтому из 4.1(б) $(g\cdot h\cdot t)*b'=(g\cdot h)*d$, где $d=t*b'$. Заметим, что, так как T минимально, отображение $w\to w*b'$ из $T-T_{b'}[\varnothing]$ в $V-[b']$ индуцирует неконстантное отображение $V-[b']$ в себя. Ввиду 2.2 все эти отображения являются биекциями, отсюда, в частности, $[d, b']=[s, b']$, $d\notin[g, h]$. Поскольку отображение $v\to(g\cdot h)*v$ есть биекция $V-[g, h]$ на себя, то также $(g\cdot h)*d\notin[g, h]$, т. е. $(g\cdot h\cdot t)*b'\notin \notin[g, h]$.

С другой стороны, $\mathrm{rank}(g/\{h\cdot t, b'\})=2$, так как $[h\cdot t, b']\subseteq[h, t]$, поэтому $\mathrm{rank}(b'/\{g, h\cdot t\})=1$. Теперь $(g\cdot h\cdot t)*b'=g*((h\cdot t)*b')= =g*c'\in[g, h]$; противоречие. Итак, последний вариант U_h невозможен. В остальных случаях минимальная подгруппа построена. □

В дальнейшем найденную в 4.6 минимальную подгруппу будем обозначать B.

4.7. *Пусть* $\mathrm{rank}(H/\varnothing)=2$, *тогда* $\mathrm{rank}(C/\varnothing)=0$.

Доказательство. Допустим противное, $c\in C$, $\mathrm{rank}(c/\varnothing)=1$. Пусть $v\in V$, $\mathrm{rank}(v/\{c\})=1$, $c*v=w$. Выбрав $h\in H$ так, что $\mathrm{rank}(h/\{v, c\})=2$, имеем $\mathrm{rank}(v/\{h, c\})=1$, $\mathrm{rank}(w/\{h, c\})=1$, поэтому определены все значения в следующих преобразованиях: $c*(h*v)= =(c\cdot h)*v=(h\cdot c)*v=h*(c*v)=h*w$, т. е. $c*v'=w'$, если $v'= =h*v$, $w'=h*w$. По 1.5 ранг множества $\{h\in H\colon \mathrm{rank}(h/\{v, c\})= =2\&h*v=v'\}$ над $\{v, v', c\}$ равен 1 при $v'\in V-[v]$. Выберем из этого множества h_1, h_2 так, чтобы $\mathrm{rank}(h_2/\{h_1, v, c\})=1$. Ясно, что $1\leqslant \leqslant\mathrm{rank}(h_2/\{h_1, v\})\leqslant\mathrm{rank}(h_2/\{v, v'\})\leqslant 1$. Поэтому по 1.3(б) $\mathrm{rank}(c/\{h_1, h_2, v\})=1$ и по 1.4(в) $\mathrm{rank}(w/\{h_1, h_2\})=1$.

Как замечено выше, $c*v'=w'$, где $h_1*w=w'=h_2*w$, последнее противоречит тому, что h_1, h_2 задают различные преобразования V. □

4.8. *При* $\mathrm{rank}(H/\varnothing)=2$, $X\subseteq V$, $\dim[X]\leqslant\dim V-4$ *для двух минимальных X-определимых подгрупп* B_1 *и* B_2 *либо* $B_1=B_2$, *либо* $B_1\cap B_2\subseteq C$.

Доказательство. Ясно, что группа $\langle B_1, B_2\rangle$, порожденная этими подгруппами, X-определима и $B_1\cap B_2\subseteq C(\langle B_1, B_2\rangle)$. Если $\mathrm{rank}(\langle B_1, B_2\rangle/X)=2$, то $\langle B_1, B_2\rangle=H$ ввиду 4.1(г). При $\mathrm{rank}(\langle B_1, B_2\rangle/X)=1$ имеем: $B_1=B_2$ — единственная минимальная компонента этой группы. □

Для $T\subseteq H$ будем обозначать $T^H=\cup\{T^h\colon h\in H\}$.

4.9. *Пусть A — минимальная X-определимая подгруппа H, не являющаяся нормальной,* $\dim[X]\leqslant\dim V-6$. *Тогда* $\mathrm{rank}(A^H/X)=2$, $\mathrm{rank}(N(A)/X)=1$.

Доказательство. Рассмотрим $A'=A-C$ и отображение $f\colon A'\times \times H\to A^H-C$, задаваемое условием $f(a, h)=a^h$. Подсчитаем $\mathrm{rank}(f^{-1}(a^h)/ /\{X, a^h\}$ для $a^h\in A^H-C$. Если $a_1\in A'$, $h_1\in H$ и $a_1^{h_1}=a^h$, то $a_1=a^{hh_1^{-1}}\in \in A\cap A^{h\cdot h_1^{-1}}-C$. По 4.8 получаем $A=A^{h\cdot h_1^{-1}}$, $h_1\in N(A)\cdot h$. Ввиду 4.1(г) $\mathrm{rank}(N(A)/X)=1$. Отсюда $a_1\in a^{N(A)}$, $\mathrm{rank}(a_1/\{a, X\})=0$; последнее следует из 1.5. Теперь легко видеть, что $1\leqslant\mathrm{rank}(f^{-1}(a^h)/\{X, a^h\})\leqslant \leqslant\mathrm{rank}(a^{N(A)}\times N(A)/X)=1$. Поэтому по 1.5 имеем $\mathrm{rank}((A^H-C)/X)= =2$. □

Доказательство 4.10 — 4.14 аналогичны доказательствам [10].

4.10. *Допустим в H нет X-определимых нормальных подгрупп ранга 1 при* $\dim[X]=1$. *Тогда* $H-B^H\subseteq C$.

4.11. *При допущениях* 4.10 $H=N(B)\cup B\cdot d\cdot B$ *для* $d\in H-N(B)$.

4.12. *При допущениях* 4.10 *найдется* $g\in H-C$, *для которого* $g^2\in C$.

4.13. *При допущениях* 4.10 $g^2\neq 1$, *если* $g\notin C$.

Доказательство. Допустим противное: $g^2=1$, $g\notin C$. Поскольку $g\in B^H$, то можно считать $g\in B$. Отображение $x\to x^2$ минимальной подгруппы B в себя является гомоморфизмом с нетривиальным ядром, следовательно, по 3.2 этот гомоморфизм константен, т. е. $x^2=1$ для всех $x\in B$. Это же имеет место и для всех x из B^H. Так как $c\cdot B^H\cap B^H\neq\varnothing$ для любого $c\in C$ $(\operatorname{rank}(cB^H/\{c\})=\operatorname{rank}(B^H/\varnothing)=2)$, то $(c\cdot x)^2=1$, $x^2=1$ для некоторого $x\in B^H$, следовательно, $c^2=1$. Отсюда H — группа экспоненты 2, т. е. H абелева; противоречие. □

4.14. *В H найдется минимальная X-определимая для* $\dim[X]\leqslant 1$ *нормальная подгруппа.*

4.15. $\operatorname{rank}(H/\varnothing)=1$.

Доказательство. Пусть B_0 — X-определимая $(\dim[X]\leqslant 1)$ нормальная минимальная подгруппа, найденная в 4.14. Допустим, $\operatorname{rank}(H/\varnothing)=2$. Тогда согласно 4.7 $B_0\subseteq C$, а из 4.3 следует, что $C\cap B_0=1$.

Групповую операцию на B_0 обозначим $+$, а действие элемента h из H на x из B_0 сопряжением — xh. По определению $x\to xh$ — групповой автоморфизм; H действует на $B_0-\{0\}$ транзитивно, так как $\operatorname{rank}(xH/\{x\})=1=\operatorname{rank}(yH/\{y\})$, $xH\cap yH\neq\varnothing$ при $x, y\in B_0-\{0\}$.

Если f — произвольный X-определимый гомоморфизм B_0 в себя, $X'\supseteq X$, $\dim[X']\leqslant\dim V-3$, то ввиду 1.5 и минимальности B_0, либо f — автоморфизм, либо f — нулевой гомоморфизм. Поэтому сумма (разность) автоморфизмов $x\to x(h_1\pm h_2)=xh_1\pm xh_2$ есть либо нуль, либо автоморфизм. Отсюда следует, что автоморфизм $x\to xh$ $X\cup\{x_0, x_h\}$-определим, где $x_0\in B_0-\{0\}$, $x_h=x_0h$, поскольку h — единственный автоморфизм вида $x\to xg$, $g\in H$, удовлетворяющий условию $x_0g=x_h$. Если h_1+h_2 — автоморфизм, то гомоморфизм f: $x\to x(h_1+h_2-h)$, где $h\in H$, $x_0h=x_0(h_1+h_2)$, имеет ненулевое ядро, при этом f $X\cup\{x_1, x_2, x_0\}$-определим, $x_1=x_0h_1$, $x_2=x_0h_2$. Следовательно, $f=0$, $h=h_1+h_2$ и гомоморфизмы вида $x\to xh$, $h\in H$, вместе с нулевым образуют тело. Это тело, фиксировав $x_0\in B_0-\{0\}$, можно интерпретировать элементами $x_h\in B_0$, где $x_h=x_0h$, для $h\in H$. Тем самым мультипликативная группа тела минимальна, а поэтому абелева. Таким образом, на B_0 X-определимы операции $+$ и $\cdot$, относительно которых B_0 является полем. Можно считать (ввиду минимальности B_0), что это поле (т. е. операции $+$ и $\cdot$) определено на V. Пришли к противоречию, так как многочлен $f(x)=x^2-x$ является x_0-преобразованием, но не является биекцией на $V-[x_0]$. □

4.16. *В условиях* 4.1 *все* 2-*преобразования* V_a *являются гомотетиями.*

Доказательство следует из 4.15 и 4.1(г). □

§ 5. ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО КВАЗИУРБАНИКОВЫХ СТРУКТУР

5.1. *Пусть* $\dim V\geqslant n+5\geqslant 8$ *и существуют* $y_1, \ldots, y_{n+1}\in V$, *для которых* $[y_1, \ldots, y_{n+1}]\neq[y_1]\cup\ldots\cup[y_{n+1}]$. *Тогда существует* 2-*преобразование, не являющееся линейной гомотетией, все* n-*преобразования являются гомотетиями (и, следовательно, эквивалентны* 2-*преобразованиям) и суперпозиция* 2-*преобразований — гомотетия.*

Доказательство следует непосредственно из 2.7 и 4.16. □

Далее рассмотрения проводятся при допущениях 5.1. Пусть $a\in V-[\varnothing]$, $U_a=H_a^0$ — минимальная компонента группы H_a, построенной в 4.1. Согласно определению существует a-определимая биекция φ: $V-[a]\to U_a\dot{-}U_a[\varnothing]$. Эта биекция позволяет переносить преобразования V на U_a, точнее, для $u\in U_a-U_a[\varnothing]$, $h\in H_a$ положим $h*u=\varphi(h*\varphi^{-1}(u))$.

При наших допущениях любое n-преобразование на U_a эквивалентно преобразованию вида $u\to h\underset{\varphi}{*}u$ для подходящего $h\in H_a$.

Так как $U_a \leqslant H_a$, то с каждым элементом h из U_a можно связать преобразование $u \to h \cdot u$ на U_a. Оно эквивалентно некоторому преобразованию $u \to \psi(h) \underset{\varphi}{*} u$ для подходящего $\psi(h) \in H_a$. Легко видеть, что ψ изоморфно вкладывает U_a в H_a и ψ a-определимо. Поэтому $\psi(U_a)$ — минимальная подгруппа, а, следовательно (см. 4.5), $\psi(U_a) = U_a$. Итак, ψ — автоморфизм U_a для $h, u \in U_a$: $h \underset{\varphi}{*} u = \psi^{-1}(h) \cdot u$.

Зададим теперь новую биекцию χ: $V - [a] \to U_a - U_a[\varnothing]$ как $\chi = \psi\varphi$. Тогда для соответствующего действия H_a на U_a при $h, u \in U_a$ имеем

$$h \underset{\chi}{*} u = \psi\varphi(h * \varphi^{-1}\psi^{-1}(u)) = \psi(h \underset{\varphi}{*} \psi^{-1}(u)) =$$
$$= \psi(\psi^{-1}(h) \cdot \psi^{-1}(u)) = \psi(\psi^{-1}(h \cdot u)) = h \cdot u.$$

Упрощая запись ($h * u$ вместо $h \underset{\varphi}{*} u$), можно утверждать:

5.2. *Существует a-определимая биекция φ_a: $V - [a] \to U_a - U_a[\varnothing]$ такая, что действие U_a на U_a, индуцированное φ_a, эквивалентно умножению, т. е. $\varphi_a(h * \varphi_a^{-1}(u)) = h * u = h \cdot u$ при $h \in U_a$, $u \in U_a - U_a[h]$.*

5.3. *Всякое X-преобразование f на U_a при $a \in X \subseteq V$, $|X| \leqslant n$, эквивалентно преобразованию вида $u \to u^h \cdot c$, где $h \in H_a[X]$, $c \in U_a[X]$.*

Доказательство. Согласно 5.1 f эквивалентно единственному преобразованию из H_a (обозначим его h^{-1}). Ясно, что $h \in H_a[X]$. Пусть $u \in U_a - U_a[X]$, $v \in U_a - U_a[u, X]$, $w = u \cdot v^{-1}$. Тогда $w \in U_a - U_a[X]$, $v \in U_a - U_a[w, X]$, $f(w) = h^{-1} * w = h^{-1} * (u \cdot v^{-1}) = h^{-1} * (u * v^{-1}) = (h^{-1} \cdot u) * v^{-1} = (u^h \cdot h^{-1}) * v^{-1} = (w^h \cdot v^h \cdot h^{-1}) * v^{-1} = w^h * ((v^h \cdot h^{-1}) * v^{-1}) = w^h \cdot ((v^h \cdot h^{-1}) * v^{-1})$. Обозначим $c = (v^h \cdot h^{-1}) * v^{-1}$. Из приведенных выше равенств имеем также $c = (w^h)^{-1} \cdot f(w)$, т. е. $c \in U_a[v, X] \cap U_a[w, X]$, отсюда $c \in U_a[X]$. □

5.4. *На U_a можно задать структуру векторного пространства над телом так, что для любых $u_1, \ldots, u_n \in U_a$ имеем: $U_a[u_1, \ldots, u_n] = \mathrm{lin}_W(u_1, \ldots, u_n)$ — линейная оболочка векторов $u_1, \ldots, u_n$ и пространства $W = U_a[\varnothing]$.*

Доказательство. Групповую операцию на U_a будем записывать аддитивно, а действие элемента $h \in H_a$ на $u \in U_a$ — в виде hu. Тогда согласно 5.3 каждое X-преобразование ($|X| \leqslant n$, $a \in X$) на U_a эквивалентно преобразованию вида $hu + c$ ($h \in H_a[X]$, $c \in U_a[X]$).

Изучим X-преобразования U_a вида $u \to hu$. Ввиду 1.5 при подсчете ранга множества $H_a \cdot u$ с помощью отображения $h \to hu$ получаем $\mathrm{rank}(H_a \cdot u / \{u, a\}) = 0$, т. е. при всех $h \in H_a$, $u \in U_a - U_a[h]$ имеем $hu \in U_a[u]$. Значит, $u \to hu$ — линейная гомотетия на U_a, в частности, это преобразование на U_a $\varnothing$-определимо по 2.4; кроме того, оно есть автоморфизм группы U_a. Сумма и разность двух таких автоморфизмов является автоморфизмом либо нулевым гомоморфизмом. По 5.3 всякий автоморфизм имеет вид hu, $h \in H_a$. Таким образом, показано, что преобразования вида $u \to hu$ $\varnothing$-определимы и образуют тело автоморфизмов группы U_a, которая тем самым превращается в векторное пространство над этим телом.

Включение $\mathrm{lin}_W(u_1, \ldots, u_n) \subseteq U_a[u_1, \ldots, u_n]$ очевидно. Обратное включение докажем индукцией по $n \leqslant \dim V - 5$. Пусть $u \in U_a[u_1, \ldots, u_n]$. Можно считать, что $u \notin U_a[u_1, \ldots, u_{n-1}] = \mathrm{lin}_W(u_1, \ldots, u_{n-1})$. Тогда $u = f(u_n)$, где f — некоторое $U_a[u_1, \ldots, u_{n-1}]$-преобразование (согласно 2.1), или X-преобразование, где $X = [a, u_1, \ldots, u_{n-1}]$. В силу 5.2 $u = hu_n + c$, $c \in U_a[u_1, \ldots, u_{n-1}]$. Как замечено выше, $U_a[u_1, \ldots, u_{n-1}] = \mathrm{lin}_W(u_1, \ldots, u_{n-1})$, $hu_n \in \mathrm{lin}(u_n)$. Поэтому $u \in \mathrm{lin}_W(u_1, \ldots, u_n)$. □

5.5. *Если для некоторого $x \in V - [a]$ $\varphi_a(x)$ эквивалентно y-преобразованию на V при некотором $y \in V$, то имеет место случай* (а) *теоремы* А.

Доказательство. По условию $\varphi_a(x)$ представляет некоторое преобразование s_y для $y \in V$, $s \in F^2$. Так как $\varphi_a(x) \in U_a - U_a[\varnothing]$, то $y \notin [a]$, $y = f(x)$ для некоторого a-преобразования f. Зададим теперь отображение σ: $V - [\varnothing] \to H_a$ следующим образом: $\sigma(y)$ — единственный элемент из H_a, представляющий преобразование s_y. Поскольку f обратим и φ_a инъективно, то разным значениям y из $V - [a]$ соответствуют неэквивалентные преобразования s_y. Так как a можно выбирать произвольно, то это верно для всех y из $V - [\varnothing]$. Другими словами, σ — инъекция.

По построению $\sigma(y) \in U_a$ для всех $y \in V - [a]$. В группе U_a для произвольного $y \in V - [a]$ легко найти $y_1, y_2 \in V - [a, y]$ такие, что $\sigma(y) = \sigma(y_1) \cdot \sigma(y_2)$, т. е. $s_y E s_{y_1} \circ s_{y_2}$. Если теперь $y \in [a] - [\varnothing]$, то также $y E s_{y_1} \circ s_{y_2}$ для некоторых $y_1, y_2 \in V - [y] = V - [a]$. При этом $\sigma(y_1)$, $\sigma(y_2) \in U_a$, откуда $\sigma(y) \in U_a$ при нашем $y \in [a]$. Тем самым показано, что σ — инъекция $V - [\varnothing]$ в U_a для любого $a \in V - [\varnothing]$.

Образ σ содержит все преобразования вида s_y $(y \notin [\varnothing])$, т. е. все преобразования, представленные в $U_a - U_a[\varnothing]$ при каком-нибудь a. Следовательно, среди элементов U_a в образ σ не попадают те и только те элементы, которые представлены в $U_b[\varnothing]$ для любого $b \in V - [\varnothing]$. Соответствующие им преобразования b-определимы для всех b, поэтому $\varnothing$-определимы. Доопределим σ на некотором подмножестве $W' \subseteq [\varnothing]$ так, чтобы σ стала биекцией $W' \cup (V - [\varnothing])$ на U_a. Это можно сделать, так как в 4.1 предполагается $|[\varnothing]| \geqslant |F^1|$.

Пусть $V' = W' \cup (V - [\varnothing])$; V', очевидно, квазиурбаникова структура, автоморфизмы которой — ограничения автоморфизмов V. Отображение σ переносит структуру векторного пространства с U_a на V', точнее, мы полагаем $v_1 + v_2 = v_3$, если $\sigma(v_1) + \sigma(v_2) = \sigma(v_3)$, $hv_1 = v_2$ — если $h\sigma(v_1) = \sigma(v_2)$. Операция $+$ $\varnothing$-определима, поскольку $\sigma(v_1) + \sigma(v_2)$ можно отождествить с суперпозицией преобразований $\sigma(v_1)$ и $\sigma(v_2)$, такое определение $+$ инвариантно относительно G.

Любое преобразование f на V' соответствует преобразованию f_a на U_a по правилу $f_a(\sigma(v)) = \sigma(f(v))$. Поэтому 5.3 дает: всякое X-преобразование на V' при $a \in X \subseteq V$, $|X| \leqslant n$, эквивалентно преобразованию вида $v \to hv + c$, $h \in H_a[X]$, $c \in [X]$. Так же как и при доказательстве 5.4 легко заметить, что $v \to hv$ — $\varnothing$-определимые автоморфизмы, образующие тело скаляров K. Так как a выбрано произвольно, то ограничение $a \in X$ можно опустить. Теперь, повторяя рассуждения 5.4 для векторного пространства V', получаем

$$[v_1, \ldots, v_{n+1}] \cap V' = \mathrm{lin}_{W'}(v_1, \ldots, v_{n+1}).$$

Ввиду $\varnothing$-определимости W' и отношений $v + w = u$, $kv = w$ $(k \in K)$ оказывается, что $G = \mathrm{Aut}\, V' \leqslant \mathrm{GL}_{W'}(V')$. □

5.6. *Если для всех h из $U_a - U_a[\varnothing]$ преобразование на V, задаваемое h, не эквивалентно никакому y-преобразованию для $y \in V$, то имеет место случай* (б) *теоремы* А.

Доказательство. Согласно 5.1 любое h из H_a задает гомотетию, поэтому для данного h из $U_a - U_a[\varnothing]$ по 2.5 существует $s \in F^3$ такое, что $hEs_{c,h*c}$ для любого $c \in V - [h]$. Если $v \in V - [h]$, то $h * v = s_{c,h*c}(v)$ при $c \notin [h, v]$. Если же $v \in [h] - [\varnothing]$, то $v \notin [c, h * c]$, иначе, $h * c \in [c, v]$, что означало бы, что h эквивалентно v-преобразованию. Таким образом, $s_{c,h*c}\, v$ определено для всех $v \in [h] - [\varnothing]$. Это позволяет доопределить действие h на всех элементах v из $V - [\varnothing]$, полагая $h * v = w$, если существует $c \in V - [h, v]$, для которого $s_{c,h*c}(v) = w$. Определение w здесь не зависит от выбора c, так как для любого другого $c' \in V - [h, v]$ можно выбрать $d \in V - [h, c, c', v]$, и тогда $s_{c,h*c}$, $s_{d,h*d}$, $s_{c',h*c'}$ эквивалентны. Следовательно, $w = s_{c,h*c}(v) = s_{d,h*d}(v) = s_{c',h*c'}(v)$. Более того, если f — X-преобразование, эквивалентное h и $v \notin [X]$, то аналогичные рассуждения показывают $h * v = f(v)$. Ввиду наследственной транзитивности G_a на $U_a - U_a[\varnothing]$, выбранное $s \in F^3$ годится для всех h из $U_a - U_a[\varnothing]$. По той же причине $s_{c,d}$ эквивалентно некоторому h' из $U_b - U_b[\varnothing]$, если b, c, d независимы, так как a, c, $h * c$ независимы ($a \notin [h]$).

Рассмотрим теперь элементы h из $U_a[\varnothing]$. Так как U_a — минимальная группа, любой ее элемент может быть представлен как $h_1 \cdot h_2$, $h_1, h_2 \in U_a - U_a[\varnothing]$. Пусть $h = h_1 \cdot h_2$, $h_1 E s_{c,d_1}$, $h_2 E s_{c,d_2}$, где $c \in V - [a]$, $d_1 = h_1 * c$, $d_2 = h_2 * c$. Выбрав b из $V - [a]$ так, что b, c, d_1 и b, c, d_2 независимы, получим $h_1', h_2' \in U_b - U_b[\varnothing]$, $h_1' E s_{c,d_1}$, $h_2 E s_{c,d_2}$, откуда $hEh' = h_1' \cdot h_2'$, $h' \in U_b$. Более точно, $h' \in U_b[\varnothing]$, так как h' a-определимо. Поэтому $h * v = h' * v \in [a, v] \cap [b, v] = [v]$ для $v \in V - [a, b]$, т. е. h эквивалентно $\varnothing$-преобразованию h^0. Положив $h * v = h^0 * v$ для всех $v \in V - [\varnothing]$, мы доопределим действие h на $V - [\varnothing]$ и в этом случае.

Наконец покажем, что при таком доопределении действия U_a на $V - [\varnothing]$ выполняется $(h_1 \cdot h_2) * v = h_1 * (h_2 * v)$ при всех $h_1, h_2 \in U_a$. Для этого достаточно для любого $v \in V - [\varnothing]$ найти $X \subseteq V$ и X-преобразования f_1, f_2 такие, что $f_1 E h_1$, $f_2 E h_2$ и $v \notin [X]$. Если $h_1 \in U_a[\varnothing]$, то f_1 можно выбрать $\varnothing$-преобразованием, а в качестве f_2 взять также $\varnothing$-преобразование при $h_2 \in U_a[\varnothing]$ либо $s_{c,h_2 * c}$ при $c \notin [h_2]$. Покажем, что можно выбрать $c \in V - [\varnothing]$ для $h_1, h_2 \in U_a - U_a[\varnothing]$ так, что $v \notin [c, h_1 * c, h_2 * c]$. Последнее множество можно тогда взять за X, $f_1 = s_{c,h_1 * c}$, $f_2 = s_{c,h_2 * c}$. Заметим сначала, что для $d \in V - [v, h_1, h_2]$ имеет место $v \notin [d, (h_2 \cdot h_1^{-1}) * d]$, когда $(h_2 \cdot h_1^{-1}) \notin U_a[\varnothing]$; это показано в начале доказательства. При $(h_2 \cdot h_1^{-1}) \in U_a[\varnothing]$ выполняется $(h_2 \cdot h_1^{-1}) * d \in [d]$. Если сейчас $v \in [h_1^{-1} * d, d, (h_2 \cdot h_1^{-1}) * d]$, то $h_1^{-1} * d \in [d, v, (h_2 \cdot h_1^{-}) * d] - [v, (h_2 \cdot h_1^{-1}) * d]$, поэтому h_1^{-1} эквивалентно $[v, (h_2 \cdot h_1^{-1}) * d]$-преобразованию. Следовательно, $h_1^{-1} * d \in [d', v, (h_2 \cdot h_1^{-1}) * d] \cap [d', v, (h_2 \cdot h_1^{-1}) * d'] = [d', v]$ при $d' \in V - [h_1, h_2, v, d]$, что противоречит условию $h_1^{-1} \in U_a - U_a[\varnothing]$. Итак, $v \notin [h_1^{-1} * d, d, (h_2 \cdot h_1^{-1}) * d]$. Положив $d = h_1 * c$, получим требуемое.

Таким образом, группа U_a действует на $V - [\varnothing]$. Это действие транзитивно, так как $U_a * v_1 \cap U_a * v_2 \neq \varnothing$ ввиду $\operatorname{rank}(U_a * v_1/\{v_1, a\}) = 1 = \operatorname{rank}(U_a * v_2/\{v_2, a\})$ для любых $v_1, v_2 \in V - [\varnothing]$. Кроме того, $h_1 * v = h_2 * v$, при $h_1, h_2 \in U_a$, $v \in V - [\varnothing]$ возможно (по определению) только когда $h_1 = h_2$. Тем самым $V - [\varnothing]$ становится аффинным пространством с векторным пространством U_a параллельных переносов. Обозначим для $v, w \in V - [\varnothing]$ через $\overrightarrow{v, w_a}$ единственный h из U_a, для которого $h * v = w$. Из определения действия непосредственно следует также, что $h_1 * v = h_2 * v$ при $h_1 \in U_a$, $h_2 \in U_b$, $v, a, b \in V - [\varnothing]$ тогда и только тогда, когда $h_1 E h_2$. Следовательно, ψ_{ab}: $\overrightarrow{v, w_a} \to \overrightarrow{v, w_b}$ — изоморфизм групп $U_a \to U_b$, который сопоставляет также $\{a, b\}$-определимым автоморфизмам группы U_a $\{a, b\}$-определимые автоморфизмы группы U_b. Но, как отмечалось в 5.4, эти автоморфизмы совпадают с a-определимыми (соответственно b-определимыми) автоморфизмами на U_a (соответственно на U_b), составляющими тело скаляров. Тем самым указанный изоморфизм является изоморфизмом векторных пространств U_a и U_b, согласованным с их действием на $V' = V - [\varnothing]$. При этом $U_a[\varnothing]$ соответствует $U_b[\varnothing]$, так как каждое из них соответствует $\{\langle v, w \rangle : w \in [v]\}$. Ввиду наличия изоморфизма ψ_{ab}, можно писать $\overrightarrow{v, w}$ вместо $\overrightarrow{v, w_a}$. Из отмеченных свойств ψ_{ab} следует, что отношения $\overrightarrow{v_1, w_1} = \overrightarrow{v_2, w_2}$, $\overrightarrow{v_1, w_1} = k\,\overrightarrow{v_1, w_2}$ $\varnothing$-определимы: это означает $G \leqslant \operatorname{Aut}(V') \leqslant \mathrm{AGL}_W(V')$ $(W = U_a[\varnothing])$.

Пусть теперь $v_1, \ldots, v_n, v_{n+1} \in V'$. Ясно, что биекция $v \to \overrightarrow{a, v_a}$ при $a = v_{n+1}$ отображает множество $[v_1, \ldots, v_{n+1}] \cap V'$ на подпространство

$U_a[u_1, \ldots, u_n]$ векторного пространства, равное по 5.4 $\mathrm{lin}_W(u_1, \ldots, u_n)$, где $u_i = \overrightarrow{a, v_{ia}}$, $i = 1, \ldots, n$. Поэтому

$$V' \cap [v_1, \ldots, v_{n+1}] = \mathrm{aff}_W(v_1, \ldots, v_{n+1}). \ \square$$

5.7. *Из* 2.6, 5.5 *и* 5.6 *следует теорема* А.

5.8. *Из теоремы* А *следует теорема* Б.

Доказательство. По теореме А на V можно задать (с точностью до констант) структуру либо векторного пространства с выделенным подпространством W, либо аффинного пространства с выделенными параллельными переносами W, либо свободного H-модуля. Изменив, если надо, множество $[\varnothing]$, можно считать, что такая структура задана на V. По теореме А замыкание конечных подмножеств X относительно введенных структур совпадает с $[X]$. Ввиду 0.9 это же верно и для бесконечных X. $\square$

5.9. *Из теоремы* А *следует теорема* В.

Доказательство. По условию теоремы В случай А(в) невозможен. Поэтому возможно А(а) или А(б). Изменяя, если надо, $[\varnothing]$, можно считать, что на V задана структура либо векторного пространства с подпространством W, либо аффинного пространства с параллельными переносами W так, что $[v_1, \ldots, v_k] = \mathrm{lin}_W(v_1, \ldots, v_k)$ или $[v_1, \ldots, v_k] = \mathrm{aff}_W(v_1, \ldots, v_k)$ при $4 \leqslant k \leqslant \dim V - 4$.

Рассмотрим первый случай. Пусть k — наибольшее число, для которого при всех $v_1, \ldots, v_k \in V$ имеем $[v_1, \ldots, v_k] = \mathrm{lin}_W(v_1, \ldots, v_k)$. Если $k = \dim V$, то предгеометрия относительно $\mathrm{lin}_W(\ )$ совпадает с предгеометрией относительно $[\ ]$, поэтому, как замечено в комментарии к теореме Б, $G = \mathrm{GL}_W(V)$.

Таким образом, следует рассмотреть случай $\dim V > k \geqslant 4$. Покажем, что этот случай невозможен с помощью теоремы Кантора — Камерона [9]: если подгруппа G_0 группы $\Gamma\mathrm{L}(d, q)$ всех коллинеаций векторного пространства V_0 размерности d над полем из q элементов действует 2-транзитивно на $PG(V_0)$, проективном пространстве, полученном из V_0 отождествлением коллинеарных векторов, то либо $G_0 \geqslant SL(d, q)$, либо $d = 4$, $q = 2$ и $G_0 \cong A_7 \leqslant SL(4, 2)$.

Пусть $v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}$ — линейно независимые над W векторы, которые также независимы относительно $[\ ]$, в силу выбора k. Ввиду 0.8 $[v_1, \ldots, v_{k+1}]$ — квазиурбаникова структура размерности $k+1$. Можно считать, что $[v_1, \ldots, v_{k+1}] = V$. Обозначим через d размерность векторного пространства $\overline{V} = V/W$ или (что то же самое) размерность V относительно $\mathrm{lin}_W(\ )$. По выбору k имеем $d > k+1 \geqslant 5$. Для дальнейших рассуждений достаточно $k + 1 \geqslant 4$, т. е. $d > 4$.

Действие G на V индуцирует ее действие на фактор-пространстве $\overline{V}$. При этом G представляется как некоторая подгруппа $\overline{G}$ группы $\mathrm{GL}(\overline{V})$. Так как любые $k+1$ линейно независимых над W векторов из V являются независимыми в смысле $[\ ]$, то из наследственной транзитивности G следует транзитивность $\overline{G}$ на множестве всех линейно независимых кортежей из $\overline{V}$ длины $k+1$. Это влечет 2-кратную транзитивность $\overline{G}$ на $\mathrm{PG}(\overline{V})$, поэтому $\overline{G} \geqslant SL(\overline{V})$.

Фиксируем базис $v_1, \ldots, v_d$ векторного пространства V над W. Пусть $A = (a_{ij})$ — $(d \times d)$-матрица, $\overline{\overline{w}}$ — столбец векторов $(w_1, \ldots, w_d)$ из W. Будем обозначать через $(A, \overline{\overline{w}})$ элемент g из G, который определяется условием $g(v_i) = \Sigma a_{ij} v_j + w_i$. Легко проверить, что произведение элементов G при таком представлении вычисляется по формуле $(A_1, \overline{\overline{w}}_1) \times (A_2, \overline{\overline{w}}_2) = (A_1 \cdot A_2, \overline{\overline{w}}_1 + A_1 \overline{\overline{w}}_2)$, единица имеет вид $(E, \overline{\overline{0}})$, где E — единичная матрица.

Обозначим через p характеристику поля скаляров V. Пусть B — неединичная матрица из $SL(2, q)$ такая, что $B^p \neq E$, а A — $(d \times d)$-матрица с матрицей B в левом верхнем углу, единицами на остальных местах диагонали и нулями на оставшихся местах. Так как $\overline{G}$ содержит преобразование с матрицей A, то $(A, \overline{\overline{w}})\in G$ для некоторого $\overline{\overline{w}}$. Легко видеть, что $(A, \overline{\overline{w}})^p=(A^p, (E+A+\ldots+A^{p-1})\overline{\overline{w}})=(A^p, (w_1', w_2', 0, \ldots \ldots, 0))$, поскольку матрица $E+A+\ldots+A^{p-1}$ имеет только нули ниже второй строки. Тем самым $(A, \overline{\overline{w}})^p$ — неединичный элемент G, действующий тождественно на $v_3, v_4, \ldots, v_d$. Отсюда $V\neq[v_3, \ldots, v_d]$ и $d-2< <k+1$, т. е. $k+1=d-1$.

Рассмотрим случай $p=2$. Выберем теперь в качестве B матрицу $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ и A построим из B так же, как выше. Пусть $(A, \overline{\overline{w}})\in G$, тогда $(A, \overline{\overline{w}})^2=(A^2, (E+A)\overline{\overline{w}})=(E, (w_2, 0, \ldots, 0))\in G$. Этот элемент тождествен на $v_2, v_3, \ldots, v_d$, поэтому он совпадает с единицей, т. е. $w_2=0$. Пусть теперь $(E, \overline{\overline{w}}')\in G$, тогда $(E, \overline{\overline{w}}')\cdot(A, \overline{\overline{w}})=(A, \overline{\overline{w}}'+\overline{\overline{w}})\in G$, и по доказанному выше $w_2'+w_2=0$, т. е. $w_2'=0$. Ввиду произвола в нумерации базисных векторов $\overline{\overline{w}}'=\overline{\overline{0}}$, если $(E, \overline{\overline{w}}')\in G$.

Для случая $p=3$ в качестве B возьмем $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ и построим A из B так же, как раньше. Тогда $(A, \overline{\overline{w}})^3=(E, (w_3, 0, \ldots, 0))$. Отсюда опять $\overline{\overline{w}}'=\overline{\overline{0}}$, если $(E, \overline{\overline{w}}')\in G$.

Наконец, если $p>3$, то можно всегда выбрать диагональную матрицу $A\in \mathrm{SL}(d, q)$ так, что $a_{ii}=1$ для фиксированного i, а все остальные элементы диагонали неединичны. Для такой A матрица $(E+A+\ldots \ldots+A^{p-2})$ имеет -1 на месте ii и нули на остальных местах, т. е. если $(A, \overline{\overline{w}})\in G$, то $(A, \overline{\overline{w}})^{p-1}=(E, (0, \ldots, -w_i, \ldots, 0))\in G$. Отсюда $w_i=0$, и опять $\overline{\overline{w}}'=\overline{\overline{0}}$, если $(E, \overline{\overline{w}}')\in G$.

Во всех трех случаях показано, что ядро гомоморфизма $G\to\overline{G}$ тривиально. Теперь подсчитаем число элементов в подгруппе $S=\{g\in G: g(v_i)-v_i\in W,\ i=1, 2, \ldots, d-1\}$. Эта подгруппа изоморфна $\overline{S}=\{\overline{g}\in\overline{G}: \overline{g}(\overline{v}_i)=\overline{v}_i,\ i=1, 2, \ldots, d-1\}$. Любой элемент g из S однозначно задается набором $w_1, \ldots, w_{d-1}\in W$ таким, что $g(v_i)=v_i+w_i$, $i=1, \ldots, d-1$. Поэтому $|S|=(q^r)^{d-1}$, где $q^r=|W|$. С другой стороны, $|\overline{S}|=s\cdot q^{d-1}\cdot q^r$, где s — индекс $S\cap \mathrm{SL}(d, q)$ в $\overline{S}$. Так как $|\mathrm{GL}(d, q):\mathrm{SL}(d, q)|=q-1$, то $q-1\,\vdots\, s$, отсюда $s=1$, $d-1+r=r(d-1)$. Последнее возможно только, если $r=2=d-1$; противоречие. Случай векторного пространства рассмотрен.

Если на квазиурбаниковой структуре V задана структура аффинного пространства, фиксируем $a\in V$ и рассмотрим V относительно группы G_a. Фиксация a отождествляет V_a с векторным пространством размерности $\dim V-1\geqslant 7$. По доказанному выше $G_a=\mathrm{GL}_W(V_a)$. Отсюда сразу следует, что если $v_1, \ldots, v_{d-1}, a$ независимы в смысле $\mathrm{aff}_W(\ )$, то этот же набор независим в смысле оператора [ ], поэтому $G\geqslant \mathrm{AGL}_W(V)$, что и означает $G=\mathrm{AGL}_W(V)$. □

ЛИТЕРАТУРА

1. **Tits J.** Groupes triplement transitifs et generalisation // Algebre et theorie des nombres. Colloques inter. du cenre nat. rech scien.— Paris, 1950.— № 24.— P. 207—208.

2. **Shelah S.** Classification theory and the number of non-isomorphic models.— Amsterdam a. o.: North-Holland, 1978.

3. **Зильбер Б. И.** Тотально категоричные структуры и комбинаторные геометрии // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 259, № 5.— С. 1039—1041.

4. **Зильбер Б. И.** Сильно минимальные счетно категоричные теории. II // Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 25, № 3.— С. 71—88.

5. **Зильбер Б. И.** Сильно минимальные счетно категоричные теории. III // Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 25, № 4.— С. 63—77.
6. **Marczewski E.** Independence in some abstract algebras // Bull. Pol. Acad. sci. Math.— 1959.— V. 7, № 10.— P. 611—616.
7. **Urbanik K.** A representation theorem for v^*-algebras // Fund. math.— 1963.— V. 53, № 3.— P. 291—317.
8. **Айгнер М.** Комбинаторная теория.— М.: Мир, 1982.
9. **Cameron P. J., Kantor W. M.** 2-Transitive and antiflag transitive collineation groups of finite projective spaces // J. algebra.— 1979.— V. 60, № 2.— P. 384—422.
10. **Cherlin G.** Groups of small Morley ranks // Ann. math. log.— 1979.— V. 17, № 1.— P. 1—28.

О ЧИСЛЕ ОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОЛНОЙ ТЕОРИИ

К. Ж. КУДАЙБЕРГЕНОВ

Пусть $h_T(\lambda)$ — число однородных моделей теории T мощности λ. В работе Кейслера и Морли [1, с. 78] поставлены следующие вопросы. Существуют ли в предположении обобщенной континуум-гипотезы (ОКГ) полные теории T, для которых h_T удовлетворяют одному из условий:

$$\omega > h_T(\omega) > 3h_T(\omega_1),$$
$$h_T(\omega) = \omega,\ 1 < h_T(\omega_1) < \omega,$$
$$h_T(\omega) = \omega_1,\ h_T(\omega_1) \leqslant \omega,$$
$$h_T(\omega) \geqslant \omega,\ h_T(\omega_1) > h_T(\omega_2)?$$

Эти вопросы отмечены также в обзоре Е. А. Палютина [2, проблема 8.17, с. 372]. В § 2 данной работы мы докажем, что такие теории существуют.

В § 3 для каждого $0 < n < \omega$ построена полная теория T такая, что $h_T(\lambda) = n$ для любого $\lambda \geqslant \omega$. Это дает ответ на вопрос, поставленный в книге Кейслера и Чэна [3, с. 263]. В работе построены также серии других теорий с различными функциями h_T. Результаты статьи частично анонсированы в [4].

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В определениях и обозначениях мы в основном придерживаемся книги Кейслера и Чэна [3]. Модели обозначаем прописными готическими буквами, а их основные множества (универсумы) — соответствующими латинскими; например: $\mathfrak{M}$ и M. Через $P^{\mathfrak{M}}$ обозначаем интерпретацию предикатного символа P в модели $\mathfrak{M}$. Будем использовать также следующие обозначения: $|A|$ — мощность множества A; $\varphi(\mathfrak{M})$ — множество $\{a \in M\colon \mathfrak{M} \vDash \varphi(a)\}$, где $\varphi(x)$ — формула; α, β, γ, δ — ординалы; λ, $\varkappa$ — кардиналы; ω_α — α-й бесконечный кардинал; $\omega = \omega_0$; ${}^\alpha 2$ — множество всех функций из α в $\{0, 1\}$. Пусть ${}^{\beta>}2 = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} {}^\alpha 2$, ${}^{\beta\geqslant}2 = {}^{\beta>}2 \cup {}^\beta 2$.

Определение 1.1. *Модель $\mathfrak{M}$ называется λ-однородной, если для любых $X \subseteq M$ мощности меньшей, чем λ, и $a \in M$ любое элементарное отображение $f\colon X \to M$ продолжается до элементарного отображения $g\colon X \cup \{a\} \to M$. Модель $\mathfrak{M}$ называется однородной, если она $|M|$-однородна.*

Напомним, что элементарность отображения f означает $(\mathfrak{M}, x)_{x\in X} \equiv (\mathfrak{M}, f(x))_{x\in X}$.

Для сингулярного λ бывает трудно доказать существование однородных моделей мощности λ. Поэтому Кейслер и Морли [1] ввели следующее определение.