5. **Зильбер Б. И.** Сильно минимальные счетно категоричные теории. III // Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 25, № 4.— С. 63—77.
6. **Marczewski E.** Independence in some abstract algebras // Bull. Pol. Acad. sci. Math.— 1959.— V. 7, № 10.— P. 611—616.
7. **Urbanik K.** A representation theorem for v^*-algebras // Fund. math.— 1963.— V. 53, № 3.— P. 291—317.
8. **Айгнер М.** Комбинаторная теория.— М.: Мир, 1982.
9. **Cameron P. J., Kantor W. M.** 2-Transitive and antiflag transitive collineation groups of finite projective spaces // J. algebra.— 1979.— V. 60, № 2.— P. 384—422.
10. **Cherlin G.** Groups of small Morley ranks // Ann. math. log.— 1979.— V. 17, № 1.— P. 1—28.

О ЧИСЛЕ ОДНОРОДНЫХ МОДЕЛЕЙ ПОЛНОЙ ТЕОРИИ

К. Ж. КУДАЙБЕРГЕНОВ

Пусть $h_T(\lambda)$ — число однородных моделей теории T мощности λ. В работе Кейслера и Морли [1, с. 78] поставлены следующие вопросы. Существуют ли в предположении обобщенной континуум-гипотезы (ОКГ) полные теории T, для которых h_T удовлетворяют одному из условий:

$$\omega > h_T(\omega) > 3h_T(\omega_1),$$

$$h_T(\omega) = \omega,\ 1 < h_T(\omega_1) < \omega,$$

$$h_T(\omega) = \omega_1,\ h_T(\omega_1) \leqslant \omega,$$

$$h_T(\omega) \geqslant \omega,\ h_T(\omega_1) > h_T(\omega_2)?$$

Эти вопросы отмечены также в обзоре Е. А. Палютина [2, проблема 8.17, с. 372]. В § 2 данной работы мы докажем, что такие теории существуют.

В § 3 для каждого $0 < n < \omega$ построена полная теория T такая, что $h_T(\lambda) = n$ для любого $\lambda \geqslant \omega$. Это дает ответ на вопрос, поставленный в книге Кейслера и Чэна [3, с. 263]. В работе построены также серии других теорий с различными функциями h_T. Результаты статьи частично анонсированы в [4].

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В определениях и обозначениях мы в основном придерживаемся книги Кейслера и Чэна [3]. Модели обозначаем прописными готическими буквами, а их основные множества (универсумы) — соответствующими латинскими; например: $\mathfrak{M}$ и M. Через $P^{\mathfrak{M}}$ обозначаем интерпретацию предикатного символа P в модели $\mathfrak{M}$. Будем использовать также следующие обозначения: $|A|$ — мощность множества A; $\varphi(\mathfrak{M})$ — множество $\{a \in M\colon \mathfrak{M} \models \varphi(a)\}$, где $\varphi(x)$ — формула; α, β, γ, δ — ординалы; λ, $\varkappa$ — кардиналы; ω_α — α-й бесконечный кардинал; $\omega = \omega_0$; ${}^{\alpha}2$ — множество всех функций из α в $\{0, 1\}$. Пусть ${}^{\beta>}2 = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} {}^{\alpha}2$, ${}^{\beta\geqslant}2 = {}^{\beta>}2 \cup {}^{\beta}2$.

Определение 1.1. *Модель $\mathfrak{M}$ называется λ-однородной, если для любых $X \subseteq M$ мощности меньшей, чем λ, и $a \in M$ любое элементарное отображение $f\colon X \to M$ продолжается до элементарного отображения $g\colon X \cup \{a\} \to M$. Модель $\mathfrak{M}$ называется однородной, если она $|M|$-однородна.*

Напомним, что элементарность отображения f означает $(\mathfrak{M}, x)_{x\in X} \equiv (\mathfrak{M}, f(x))_{x\in X}$.

Для сингулярного λ бывает трудно доказать существование однородных моделей мощности λ. Поэтому Кейслер и Морли [1] ввели следующее определение.

Определение 1.2. Пусть $\mathfrak{A}$ — модель мощности $\varkappa$.

(1) *Пусть $\varkappa$ — регулярный кардинал. Модель $\mathfrak{A}$ называется однородной, если выполняются условия определения* 1.1.

(2) *Пусть $\varkappa$ — сингулярный кардинал. Модель $\mathfrak{A}$ называется однородной, если $\mathfrak{A}$ есть объединение элементарной цепи, $\mathfrak{A} = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathfrak{A}_\alpha$, где $\mathfrak{A}_\alpha$ — однородная модель регулярной мощности и $D(\mathfrak{A}_\alpha) = D(\mathfrak{A})$, $\alpha<\beta$.* (Через $D(\mathfrak{M})$ обозначено множество всех типов, которые реализуются в $\mathfrak{M}$.)

Обозначим через $h_T(\lambda)$ число однородных в смысле определения 2 моделей теории T мощности λ. Перечислим некоторые известные факты о функции h_T:

$h_T(\omega) > 0$ (Вот [3, 3.28]);

(при ОКГ) $h_T(\lambda) > 0$ для любого $\lambda \geqslant \omega$ (Морли и Вот [5]);

если $h_T(\omega) \leqslant \omega$, то $h_T(\lambda) \leqslant h_T(\omega)$ для любого $\lambda \geqslant \omega$ (Кейслер и Морли [1]);

(при ОКГ) $h_T(\lambda) \leqslant h_T(\varkappa)$ для любых $\lambda > \varkappa > \omega$ (Кейслер и Морли [1]);

если $h_T(\omega) > \omega$, то $h_T(\omega) = 2^\omega$ (Либо Ло [6]).

Приведем еще несколько определений. Линейно упорядоченные подмножества частично упорядоченного множества называются *цепями*. Когда мы будем говорить об изоморфизме цепей, то, разумеется, будем иметь в виду биекцию, сохраняющую порядок. Частично упорядоченное множество $(M; \leqslant)$ называется *деревом*, если оно имеет наименьший элемент и для любого $a \in M$ множество $\{b \in M\colon b \leqslant a\}$ вполне упорядочено отношением $\leqslant$. Как обычно, вместо $a \leqslant b \& a \neq b$ будем писать $a < b$.

§ 2. ОТВЕТЫ НА ВОПРОСЫ КЕЙСЛЕРА И МОРЛИ

Теорема 2.1. *В предположении* ОКГ *для любого $1 < m < \omega$ существует полная теория $T(m)$ такая, что $h_{T(m)}(\omega) = 5 + m$, $h_{T(m)}(\omega_1) = 2$ (и $h_{T(m)}(\lambda) = 2$ для любого $\lambda \geqslant \omega_1$).*

Доказательство. Зафиксируем $1 < m < \omega$. Теория $T(m)$ будет иметь язык $L(m) = \{\leqslant^2, A^1, R_i^1, F^4, c_j\colon i < m, j < \omega\}$ (при описании языка верхний индекс всегда будет указывать арность соответствующего предикатного символа, c_j — константный символ) и следующие аксиомы:

I_1 $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$, *где* $\mathfrak{M} = ({}^{\omega\geqslant}2; \leqslant^{\mathfrak{M}}, A^{\mathfrak{M}})$, $A^{\mathfrak{M}} = {}^{\omega}2$, $\leqslant^{\mathfrak{M}} = \{\langle a, b\rangle\colon a, b \in {}^{\omega\geqslant}2, a \subseteq b\}$;

II_1 $(\forall x)(c_0 \leqslant x) \& c_i \ll c_{i+1}$, $i < \omega$ (через $\ll$ обозначено отношение непосредственного следования, т. е. $x \ll y$ означает $x < y \& \neg(\exists z)(x < z < y)$);

III_1 $(\forall x)\left[A(x) \leftrightarrow \bigvee_{i<m} R_i(x)\right]$;

IV_1 $\neg(\exists x)[R_i(x) \& R_j(x)]$, $i < j < m$;

V_1 $(\forall x)[\neg A(x) \to (\exists y)(x < y \& R_i(y))]$, $i < m$;

VI_1 $(\forall xy)[(\exists zt) F(x, y, z, t) \leftrightarrow A(x) \& A(y)]$;

VII_1 *для любых $x, y \in A$ множество $f_{xy} = \{\langle z, t\rangle\colon F(x, y, z, t)\}$ есть изоморфизм $\pi(x)$ на $\pi(y)$, где $\pi(v)$ — максимальная цепь, содержащая элемент $v \in A$, причем f_{xy} тождественна $\pi(x) \cap \pi(y)$ и $f_{yu} f_{xy} = f_{xu}$ для любых $x, y, u \in A$* (отсюда, в частности, следует, что $f_{yx} = f_{xy}^{-1}$).

Описание теории $T(m)$ закончено. Эта теория непротиворечива, потому что модель $\mathfrak{M}$ из аксиомы I_1 нетрудно обогатить до модели теории $T(m)$. Чтобы удобнее было исследовать теорию $T(m)$, обогатим ее до теории $T^0(m)$ языка $L^0(m) = L(m) \cup \{\wedge, \ll_i\colon i < \omega\}$, добавив следующие аксиомы:

VIII_1 *$x \wedge y$ — точная нижняя грань элементов x и y, т. е.* $x \wedge y = z \leftrightarrow z \leqslant x \& z \leqslant y \& \neg(Et)(z < t \& t \leqslant x \& t \leqslant y)$;

IX$_1$ $\ll_0$ — *отношение непосредственного следования;*

X$_1$ $x \ll_{i+1} y \leftrightarrow (\exists z)(x \ll_i z \,\&\, z \ll_0 y)$, $i < \omega$.

Очевидно, что любая модель теории $T(m)$ имеет единственное обогащение до модели теории $T^0(m)$, а обеднение любой модели теории $T^0(m)$ до языка $L(m)$ есть модель теории $T(m)$.

Вкратце опишем устройство моделей теории $T^0(m)$. Пусть $\mathfrak{M} \models T^0(m)$. Из аксиомы I$_1$ следует, что $(M, \leqslant^{\mathfrak{M}})$ есть частично упорядоченное множество с наименьшим элементом $c_0^{\mathfrak{M}}$ и максимальными элементами $a \in A(\mathfrak{M})$. В дальнейшем вместо $c_0^{\mathfrak{M}}$ будем писать просто c_0. Из I$_1$ также следует, что для любого $a \in A$ множество $\pi = \{b \in M\colon \mathfrak{M} \models b \leqslant a\}$ есть цепь. Если $a \in A(\mathfrak{M})$, то эта цепь максимальна. В некоторых моделях теории $T^0(m)$ существуют максимальные цепи, не имеющие наибольшего элемента. Например, в счетных моделях любой немаксимальный элемент содержится в такой цепи.

Для $x, y \in M$ положим $x \sim y$, если $x = y$ или существуют $n < \omega$ и элементы $t_0, \ldots, t_n \in M$ такие, что $t_0 = x$, $t_n = y$ и для любого $i < n$ выполняется $\mathfrak{M} \models t_i \ll_0 t_{i+1} \vee t_{i+1} \ll_0 t_i$. Число n назовем *расстоянием* между x и y. Ясно, что $\sim$ — отношение эквивалентности. Классы эквивалентности будем называть *блоками*. Блок, содержащий элемент x, обозначим через $[x]$. Блок $[c_0]$ назовем *стандартным*, а остальные блоки — *нестандартными*. Любая модель теории $T^0(m)$ состоит из стандартного блока и некоторого количества нестандартных блоков. Если $x \in A(\mathfrak{M})$, то блок $[x]$ одноэлементен. Все остальные блоки счетны. Нетрудно понять, что любые два счетных нестандартных блока, рассматриваемые как подмодели в $\mathfrak{M}$, изоморфны.

На фактор-множестве $M/_\sim$ определим отношение $\leqslant$:

$$[a] \leqslant [b] \Leftrightarrow (\exists c \in [a])(\exists d \in [b])(\mathfrak{M} \models c \leqslant d).$$

Все остальные предикаты и операции определим на $M/_\sim$ естественным образом, например $[a] \wedge [b] = [a \wedge b]$. Легко проверить, что это определение корректно (F и $\ll_i$ можно не рассматривать). Определенная таким образом *фактор-модель* $\mathfrak{M}/_\sim$ представляет собой частично упорядоченное множество с наименьшим элементом $[c_0]$ и максимальными элементами $[a] \in A(\mathfrak{M})/_\sim$ Это частично упорядоченное множество может быть деревом. В этом случае говорим, что $\mathfrak{M}/_\sim$ — *дерево высоты* α, где α — порядковый тип произвольной максимальной цепи в $\mathfrak{M}/_\sim$, содержащей элемент из $A(\mathfrak{M})/_\sim$. В силу аксиомы VII$_1$ определение высоты корректно. Ясно, что это дерево бесконечное число раз ветвится в каждой немаксимальной точке. Но $\mathfrak{M}/_\sim$ может и не быть деревом, $\mathfrak{M}/_\sim$ может содержать плотно упорядоченные цепи. Если все максимальные цепи в $\mathfrak{M}/_\sim$ плотно упорядочены, то, допуская вольность речи, будем говорить, что $\mathfrak{M}/_\sim$ — плотное дерево.

Заметим, что если π — максимальная цепь в $\mathfrak{M}/_\sim$ с наибольшим элементом $[a]$, то $a \in A(\mathfrak{M})$. Действительно, по аксиоме I$_1$ или III$_1$ и V$_1$ существует $b \in A(\mathfrak{M})$ такой, что $\mathfrak{M} \models a \leqslant b$. В силу максимальности π имеем $[a] = [b] = \{b\}$, поэтому $a = b$. Отсюда и из аксиомы VII$_1$ следует, что если $\mathfrak{M}/_\sim$ — дерево конечной высоты, то все его максимальные цепи изоморфны. Отметим также, что высота дерева $\mathfrak{M}/_\sim$ не меньше, чем 2.

Лемма 2.1. *Теория $T^0(m)$ допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство. Будем использовать следующий факт [7, с. 41]: теория T допускает элиминацию кванторов тогда и только тогда, когда любая диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M} & & \mathfrak{N} \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "f_0"] \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd} \qquad \text{(A)}$$

(где $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — модели теории T, f_0 и f_1 — изоморфные вложения) может быть дополнена до коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{B} & \\ \mathfrak{M} \arrow[ur, "g"] & & \mathfrak{N} \arrow[ul, "h"'] \\ & \mathfrak{A} \arrow[ul, "f_0"] \arrow[ur, "f_1"'] & \end{tikzcd} \tag{B}$$

где $\mathfrak{B} \vDash T$, h — изоморфное, а g — элементарное вложение. Как следует из доказательства этого факта в [7], можно считать, что $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ счетны.

Итак, пусть дана диаграмма вида (А), где $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — счетные модели теории $T^0(m)$. Надо дополнить ее до диаграммы (В). В качестве $\mathfrak{B}$ возьмем ω_1-насыщенное элементарное расширение модели $\mathfrak{M}$, а в качестве g — тождественное вложение $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{B}$. Операция $\bigwedge$ и отношения $\ll_i$, $i < \omega$, обеспечивают, что если a, b, ...— элементы из $\mathfrak{A}$, то элементы $f_0(a)$, $f_0(b)$, ... и $f_1(a)$, $f_1(b)$, ... «одинаково расположены» в моделях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно (например, $f_0(a) \sim f_0(b) \Leftrightarrow f_1(a) \sim f_1(b)$ и т. п.). Поэтому, пользуясь ω_1-насыщенностью модели $\mathfrak{B}$, нетрудно по шагам построить нужное изоморфное вложение h. Лемма 2.1 доказана.

Если $\mathfrak{M} \vDash T(m)$, то пусть $\Delta(\mathfrak{M}) = \{a \in M\colon (\forall i < \omega) \mathfrak{M} \vDash c_i < a\}$.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ — однородная модель теории $T(m)$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

(1) $\mathfrak{M}/_\sim$ *— плотное дерево и* $\Delta(\mathfrak{M}) \neq \varnothing$;

(2) $\mathfrak{M}/_\sim$ *— плотное дерево и* $\Delta(\mathfrak{M}) = \varnothing$;

(3) $\mathfrak{M}/_\sim$ *— дерево высоты 3 и* $\Delta(\mathfrak{M}) \neq \varnothing$;

(4) $\mathfrak{M}/_\sim$ *— дерево высоты 3 и* $\Delta(\mathfrak{M}) = \varnothing$;

(5) $\mathfrak{M}/_\sim$ *— дерево высоты 2 и* $\Delta(\mathfrak{M}) = \varnothing$;

(6) $\mathfrak{M}/_\sim$ *— дерево высоты 2 и* $\Delta(\mathfrak{M}) \neq \varnothing$.

Доказательство. Допустим, что в $\neg A(\mathfrak{M})/_\sim$ имеется цепь π_0 такая, что $|\pi_0| \geqslant 3$. Покажем, что тогда выполняется (1) или (2). Пусть $\pi_0 = \{[c_0], [a], [b], \ldots\}$, $\mathfrak{M}/_\sim \vDash [c_0] < [a] < [b]$. Возможны два случая: или $\mathfrak{M} \vDash c_k < a \,\&\, \neg(c_{k+1} \leqslant a)$ для некоторого $k < \omega$, или $\mathfrak{M} \vDash c_k < a$ для всех $k < \omega$. Ограничимся первым случаем; второй рассматривается точно так же.

Пусть $\pi_1 = \{[c_0], [b_1], \ldots\}$, где $\mathfrak{M}/_\sim \vDash [c_0] < [b_1]$ есть произвольная максимальная цепь в $\neg A(\mathfrak{M})/_\sim$ такая, что $\mathfrak{M} \vDash c_k < b_1 \,\&\, \neg(c_{k+1} \leqslant b_1)$. Возможно, $\pi_1 = \pi_0$. Докажем, что π_1 плотна. Покажем, например, что в π_1 имеется элемент между $[c_0]$ и $[b_1]$. Легко видеть, что пары $\langle c_0, b\rangle$ и $\langle c_0, b_1\rangle$ удовлетворяют одним и тем же бескванторным формулам языка $L^0(m)$. По лемме 2.1 $(\mathfrak{M}, c_0, b) \equiv (\mathfrak{M}, c_0, b_1)$. Так как $\mathfrak{M}$ однородна, то существует элемент $a_1 \in M$ такой, что $(\mathfrak{M}, c_0, b, a) \equiv (\mathfrak{M}, c_0, b_1, a_1)$. Тогда $\mathfrak{M}/_\sim \vDash [c_0] < [a_1] < [b_1]$. Ввиду максимальности π_1 имеем $[a_1] \in \pi_1$.

Итак, цепь π_1 плотна. В силу I_1 (или V_1 и III_1) существует элемент $b_2 \in A(\mathfrak{M})$ такой, что $\mathfrak{M} \vDash c_k < b_2 \,\&\, \neg(c_{k+1} \leqslant b_2)$. Пусть $\pi_2 = \{[x]\colon \mathfrak{M} \vDash x < b_2\}$. По доказанному выше цепь π_2 плотна, так как для некоторого $[b_3] \in \pi_2$ выполняется $\mathfrak{M} \vDash c_k < b_3 \,\&\, \neg(c_{k+1} \leqslant b_3)$. Пусть π_3 — произвольная максимальная цепь в $\neg A(\mathfrak{M})/_\sim$. Она удовлетворяет одному из следующих условий:

(i) $\mathfrak{M} \vDash c_n < a_3 \,\&\, \neg(c_{n+1} \leqslant a_3)$ для некоторого $n < \omega$ и некоторого $[a_3] \in \pi_3$;

(ii) $\mathfrak{M} \vDash c_n < a_3$ для всех $n < \omega$ и некоторого $[a_3] \in \pi_3$.

В силу I_1 существует элемент $b_4 \in A(\mathfrak{M})$ такой, что цепь $\pi_4 = \{[x]\colon \mathfrak{M} \vDash x < b_4\}$ удовлетворяет тому же из условий вида (i), (ii), что и π_3. Из аксиомы VII_1 следует, что цепь π_4 изоморфна π_2, поэтому π_4

плотна; в частности $|\pi_4| \geqslant 3$. Ситуация с π_4 и π_3 аналогична ситуации с π_0 и π_1, поэтому цепь π_3 плотна.

Мы доказали, что все максимальные цепи в $\urcorner A(\mathfrak{M})/_\sim$ плотны, точно так же можно доказать, что они не имеют наибольших элементов. Следовательно, все максимальные цепи в $\mathfrak{M}/_\sim$ плотны.

Итак, если в $\urcorner A(\mathfrak{M})/_\sim$ имеется цепь, содержащая не менее трех элементов, т. е. если в $\mathfrak{M}/_\sim$ имеется цепь, содержащая не менее четырех элементов, то выполняется одно из утверждений (1), (2). Допустим, что все максимальные цепи в $\mathfrak{M}/_\sim$ содержат не более трех элементов. Если в $\mathfrak{M}/_\sim$ существует максимальная цепь, содержащая ровно три элемента, то в силу аксиомы VII_1 все максимальные цепи в $\mathfrak{M}/_\sim$ трехэлементны, т. е. выполняется одно из утверждений (3), (4); в противном случае выполняется одно из утверждений (5), (6). Лемма 2.2 доказана.

Замечание 2.1. Если выполняется одно из утверждений (1)—(4), то для любого $a \in [c_0]$ существует $b \in \urcorner A(\mathfrak{M})$ такой, что $\mathfrak{M} \models a < b$ и $\mathfrak{M}/_\sim \models [c_0] < [b]$. Это следует из аксиом I_1, VII_1.

Пусть $\mathfrak{N} \models T(m)$, $B \subseteq N$. Обозначим через B^* наименьшее подмножество в N, содержащее B и замкнутое относительно операции точной нижней грани. Назовем B^* *замыканием* B.

Лемма 2.3. (1) $|(B \cup \{a\})^*| \leqslant |B^*| + 2$.

(2) *Замыкание конечного множества конечно.*

(3) $(\mathfrak{N}, a)_{a \in B} \equiv (\mathfrak{N}, b)_{b \in C}$, *если и только если* $(\mathfrak{N}, a)_{a \in B^*} \equiv (\mathfrak{N}, b)_{b \in C^*}$.

Доказательство. (1) Если $a \wedge b \in B^*$ для любого $b \in B^*$, то, очевидно, $(B \cup \{a\})^* = B^* \cup \{a\}$. Допустим, что $a \wedge b \notin B^*$ для некоторого $b \in B^*$. Покажем, что $(B \cup \{a\})^* = B^* \cup \{a, a \wedge b\}$. Достаточно показать, что для любого $c \in B^*$ имеем $c \wedge a \in \{a \wedge b, c \wedge b\}$ и $c \wedge (a \wedge b) \in \{a \wedge b, c \wedge b\}$. Очевидно, что элементы $c \wedge a$, $c \wedge b$, $a \wedge b$ попарно сравнимы. Пусть $c \wedge a \leqslant a \wedge b \leqslant c \wedge b$. Тогда $c \wedge a \geqslant (c \wedge b) \wedge (a \wedge b) = a \wedge b$, и потому $c \wedge a = a \wedge b$; отсюда следует, что $a \wedge b \leqslant c$, поэтому $c \wedge (a \wedge b) = a \wedge b$. Аналогично рассматриваются другие случаи. Некоторые из них приведут к противоречию. Например, если $a \wedge b \leqslant c \wedge b \leqslant c \wedge a$, то $a \wedge b = c \wedge b \in B^*$, чего быть не может. Утверждение (2) доказывается с помощью (1) индукцией по мощности множества; (3) очевидно. Лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. $h_{T(m)}(\omega_1) = 2$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — однородная модель теории $T(m)$ мощности ω_1. Покажем, что для $\mathfrak{M}$ не выполняется ни одно из утверждений (3)—(6) леммы 2.2. Допустим противное. Тогда все цепи в $\mathfrak{M}$ не более чем счетны. По аксиоме V_1 существуют $b_i \in R_i^{\mathfrak{M}}$, $i < 2$, такие, что

$$\mathfrak{M} \models c_0 < b_i \,\&\, \urcorner(c_1 < b_i), \quad i < 2. \tag{$*$}$$

Пусть $\tau_i = \{a \in M\colon \mathfrak{M} \models a < b_i\}$, $i < 2$. Ясно, что τ_i — цепи. По аксиоме VII_1 существует изоморфизм $f = f_{b_0 b_1} \restriction \tau_0$ цепи τ_0 на τ_1. В силу леммы 2.1 и условия $(*)$ отображение f элементарно. Так как $\mathfrak{M}$ однородна, то f можно продолжить до элементарного отображения $g\colon \tau_0 \cup \{b_0\} \to M$. Из элементарности g имеем $g(b_0) \in R_0^{\mathfrak{M}}$ и $\mathfrak{M} \models g(a) < g(b_0)$ для любого $a \in \tau_0$, т. е. $\mathfrak{M} \models b < g(b_0)$ для любого $b \in \tau_1$. Но тогда $g(b_0) = b_1 \in R_1^{\mathfrak{M}}$, и потому $R_0^{\mathfrak{M}} \cap R_1^{\mathfrak{M}} \neq \varnothing$, что противоречит аксиоме IV_1.

Таким образом, для $\mathfrak{M}$ должно выполняться одно из утверждений (1), (2) леммы 2.2. Покажем, что на самом деле существуют однородные модели $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ мощности ω_1 такие, что $\mathfrak{M}_1$ удовлетворяет (1), а $\mathfrak{M}_2$ — (2). В качестве $\mathfrak{M}_1$ возьмем насыщенную модель теории $T(m)$ мощности ω_1;

такая модель существует в предположении ОКГ (см. [3, с. 254]). В качестве $\mathfrak{M}_2$ возьмем подмодель в $\mathfrak{M}_1$ с основным множеством $M_2 = M_1 - \Delta(\mathfrak{M}_1)$. Методом игр Эренфойхта легко доказать, что $\mathfrak{M}_2 \restriction L \equiv \mathfrak{M}_1 \restriction L$ для любого конечного языка $L \subseteq L(m)$. Поэтому $\mathfrak{M}_2 \models T(m)$. Ясно, что $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ однородны.

Пусть $n \leqslant 2$ и $\mathfrak{N}_n$ — однородная модель теории $T(m)$ мощности ω_1, удовлетворяющая условию (n) леммы 2.2. Покажем, что $\mathfrak{N}_n$ изоморфна $\mathfrak{M}_n$. Достаточно доказать, что в $\mathfrak{N}_n$ реализуются те же самые типы, что и в $\mathfrak{M}_n$ (см. [3, теорема 5.1.22]). Пусть $\bar{a}$ — конечная последовательность элементов из M_n. По лемме 2.3 замыкание $\bar{a}^*$ этой последовательности конечно. Ясно, что $\left(\bar{a}^*, \leqslant^{\mathfrak{M}_n} \restriction \bar{a}^*\right)$ есть конечное дерево. Из условия (n) и замечания 2.1 следует, что такое дерево можно изоморфно вложить в модель $\mathfrak{N}_n$ с сохранением отношений $\ll_i$: сначала вкладываем наименьший элемент этого дерева, затем непосредственно следующие за ним элементы дерева и т. д. Пусть $\bar{b}$ есть образ $\bar{a}$ при этом вложении. По лемме 2.1 $\bar{a}$ и $\bar{b}$ реализуют один и тот же тип.

Итак, $h_{T(m)}(\omega_1) = 2$. Точно такое же доказательство показывает, что $h_{T(m)}(\lambda) = 2$ для любого $\lambda \geqslant \omega_1$. Лемма 2.4 доказана.

Лемма 2.5. $h_{T(m)}(\omega) = 5 + m$.

Доказательство. В силу леммы 2.2 достаточно показать, что каждое из утверждений (1)—(5) леммы 2.2 и каждое из условий

$$(6_i)\quad \mathfrak{M}/_\sim \text{ — дерево высоты } 2,\ \Delta(\mathfrak{M}) = \{a\},\ a \in R_i^{\mathfrak{M}},\ i < m,$$

однозначно определяет тип изоморфизма счетной однородной модели теории $T(m)$. По теореме компактности существует модель $\mathfrak{N} \models T(m)$ такая, что в $\Delta(\mathfrak{N})/_\sim$ есть бесконечные цепи. Пусть $\mathfrak{M}_1$ — счетное однородное элементарное расширение модели $\mathfrak{N}$. По лемме 2.2 $\mathfrak{M}_1$ удовлетворяет (1). (На самом деле $\mathfrak{M}_1$ даже насыщена.) Пусть $\mathfrak{M}_2$ — подмодель в $\mathfrak{M}_1$ с основным множеством $M_2 = M_1 - \Delta(\mathfrak{M}_1)$. Ясно, что $\mathfrak{M}_2$ — однородная модель теории $T(m)$, удовлетворяющая (2). Тот факт, что счетные однородные модели, для которых выполняется одно из утверждений (1), (2) леммы 2.2, единственны с точностью до изоморфизма, доказывается так же, как в лемме 2.4.

Нетрудно понять, что теория $T(m)$ имеет счетные модели $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$, $\mathfrak{M}_5$, $\mathfrak{M}_{6_i}$, удовлетворяющие утверждениям (3)—(5) леммы 2.2 и условиям (6_i) соответственно. Пусть $\mathfrak{M}$ — одна из этих моделей. Докажем, что $\mathfrak{M}$ однородна. Пусть $B \subseteq M$, B конечно, $f\colon B \to M$ — элементарное отображение, $d \in M$. Нужно доказать, что f можно продолжить до элементарного отображения $g\colon B \cup \{d\} \to M$.

В силу леммы 2.3 можно считать, что $B = B^*$. Будем говорить, что множество $X \subseteq M$ — дерево, если $\left(X, \leqslant^{\mathfrak{M}} \restriction X\right)$ — дерево. Таким образом, B — конечное дерево. По лемме 2.3 $(B \cup \{d\})^* = B \cup \{d, c\}$, где $c = d \wedge b$ для некоторого $b \in B$, и потому $\mathfrak{M} \models c \leqslant b$. Из строения модели $\mathfrak{M}$ и элементарности f следует, что существует элемент $a_0 \in M$ такой, что f можно продолжить до изоморфизма f_0 деревьев $B \cup \{c\}$ и $f(B) \cup \{a_0\}$ (с сохранением расстояний между элементами). Нетрудно понять, что существует элемент $d_0 \in M$ такой, что f_0 можно продолжить до изоморфизма f_1 деревьев $B \cup \{c, d\}$ и $f(B) \cup \{a_0, d_0\}$ (например, если $d \in R_i(\mathfrak{M})$, то существование d_0 вытекает из изоморфизма деревьев $B \cup \{c\}$, $f(B) \cup \{a_0\}$ и аксиомы V_i). Полагаем $g = f_1 \restriction (B \cup \{d\})$. По лемме 2.1 получаем, что g элементарно.

Единственность (с точностью до изоморфизма) счетных однородных моделей, удовлетворяющих одному из утверждений (3)—(5) леммы 2.2 или (6_i), можно доказать так же, как в лемме 2.4. Лемма 2.5, а вместе с ней и теорема 2.1 доказаны.

Теорема 2.2. *В предположении* ОКГ *существует полная теория* T_0 *такая, что* $h_{T_0}(\omega)=\omega$, $h_{T_0}(\lambda)=3$ *для любого* $\lambda\geqslant\omega_1$.

Доказательство. Теория T_0 будет иметь язык $L_0=\{\leqslant^2, R_i^1, A^1, F^4, c_j\colon i, j<\omega\}$ и следующие аксиомы:

I_2 $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$, *где* $\mathfrak{M}=({}^{\omega\geqslant}2; \leqslant^{\mathfrak{M}}, A^{\mathfrak{M}})$, $A^{\mathfrak{M}}={}^{\omega}2$, $\leqslant^{\mathfrak{M}}=\{\langle a, b\rangle\colon a, b\in {}^{\omega\geqslant}2,\ a\subseteq b\}$;

II_2 $(\forall x)(c_0\leqslant x)\,\&\,c_i\ll c_{i+1}$, $i<\omega$;

III_2 $\neg(\exists x)[R_i(x)\,\&\,R_j(x)]$, $i<j<\omega$;

IV_2 $(\forall x)[R_i(x)\to A(x)\,\&\,c_i<x]$, $i<\omega$;

V_2 $(\forall x)[\neg A(x)\,\&\,c_i<x\to(\exists y)(R_j(y)\,\&\,x<y)]$, $j\leqslant i<\omega$;

VI_2 $(\forall xy)[(\exists zt)F(x, y, z, t)\leftrightarrow A(x)\,\&\,A(y)]$;

VII_2 *для любых* $x, y\in A$ *множество* $f_{xy}=\{\langle z, t\rangle\colon F(x, y, z, t)\}$ *есть изоморфизм* $\pi(x)$ *на* $\pi(y)$, *причем* f_{xy} *тождественна* $\pi(x)\cap\pi(y)$ *и* $f_{yu}f_{xy}=f_{xu}$ *для любых* $x, y, u\in A$.

Описание теории T_0 закончено. Эта теория исследуется точно так же, как теория $T(m)$ из теоремы 2.1, поэтому только перечислим типы изоморфизма однородных моделей теории T_0.

Тип изоморфизма счетной однородной модели $\mathfrak{M}$ однозначно определяется одним из следующих условий:

○ $\mathfrak{M}/_\sim$ — плотное дерево и $\Delta(\mathfrak{M})=\varnothing$, где $\Delta(\mathfrak{M})=\{x\in M\colon (\forall i<\omega)\,\mathfrak{M}\models c_i<x\}$;

○ $\mathfrak{M}/_\sim$ — плотное дерево, $\Delta(\mathfrak{M})\neq\varnothing$ и $A(\mathfrak{M})=\bigcup\limits_{i<\omega}R_i(\mathfrak{M})$;

○ $\mathfrak{M}/_\sim$ — плотное дерево, $\Delta(\mathfrak{M})\neq\varnothing$ и $A(\mathfrak{M})\neq\bigcup\limits_{i<\omega}R_i(\mathfrak{M})$;

○ $\mathfrak{M}/_\sim$ — дерево высоты 3 и $\Delta(\mathfrak{M})=\varnothing$;

○ $\mathfrak{M}/_\sim$ — дерево высоты 3, $\Delta(\mathfrak{M})\neq\varnothing$ и $A(\mathfrak{M})=\bigcup\limits_{i<\omega}R_i(\mathfrak{M})$;

○ $\mathfrak{M}/_\sim$ — дерево высоты 3, $\Delta(\mathfrak{M})\neq\varnothing$ и $A(\mathfrak{M})\neq\bigcup\limits_{j<\omega}R_i(\mathfrak{M})$;

○ $\mathfrak{M}/_\sim$ — дерево высоты 2 и $\Delta(\mathfrak{M})=\varnothing$;

○ $\mathfrak{M}/_\sim$ — дерево высоты 2, $\Delta(\mathfrak{M})=\{a\}$, $a\in A(\mathfrak{M})-\bigcup\limits_{i<\omega}R_i(\mathfrak{M})$;

$○_i$ $\mathfrak{M}/_\sim$ — дерево высоты 2, $\Delta(\mathfrak{M})=\{a\}$, $a\in R_i(\mathfrak{M})$, $i<\omega$.

Заметим, что $A(\mathfrak{M})-\Delta(\mathfrak{M})\subseteq\bigcup\limits_{i<\omega}R_i(\mathfrak{M})$, а из условия $A(\mathfrak{M})\neq\bigcup\limits_{i<\omega}R_i(\mathfrak{M})$ и из однородности модели $\mathfrak{M}$ следует, что для любого $b\in\Delta(\mathfrak{M})-A(\mathfrak{M})$ существует $c\in A(\mathfrak{M})-\bigcup\limits_{i<\omega}R_i(\mathfrak{M})$ такой, что $\mathfrak{M}\models b<c$.

Тип изоморфизма несчетной однородной модели $\mathfrak{M}$ однозначно определяется одним из первых трех перечисленных условий. Итак, $h_{T_0}(\omega)=\omega$, $h_{T_0}(\lambda)=3$ для всех $\lambda>\omega$. Теорема 2.2 доказана.

Теорема 2.3. *В предположении* ОКГ *существует полная теория* T_1 *такая, что* $h_{T_1}(\omega)=\omega_1$, $h_{T_1}(\lambda)=4$ *для любого* $\lambda\geqslant\omega_1$.

Доказательство. Теория T_1 имеет язык $L_1=\{\leqslant^2, A^1, P_0^1, P_1^1, F^4, H_i^2, c_{ij}\colon i, j<\omega\}$ и следующие аксиомы:

I_3 $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$, *где* $\mathfrak{M}=({}^{\omega\geqslant}2; \leqslant^{\mathfrak{M}}, A^{\mathfrak{M}})$, $A^{\mathfrak{M}}={}^{\omega}2$, $\leqslant^{\mathfrak{M}}=\{\langle a, b\rangle\colon a, b\in {}^{\omega\geqslant}2,\ a\subseteq b\}$;

II_3 $(\forall x)[A(x)\leftrightarrow P_0(x)\vee P_1(x)]$;

III_3 $\neg(\exists x)[P_0(x)\,\&\,P_1(x)]$;

IV_3 $(\forall x)[\neg A(x)\to(\exists y)(x<y\,\&\,P_i(y))]$, $i<2$;

V_3 $(\forall x)(c_{00}\leqslant x)\,\&\,c_{i0}\ll c_{i+1,0}\,\&\,c_{ij}\ll c_{i,j+1}\,\&\,c_{i1}\neq c_{i+1,0}$, $i, j<w$;

VI_3 $(\forall xy)[(\exists zt)F(x, y, z, t)\leftrightarrow A(x)\,\&\,A(y)]$;

VII_3 *для любых* $x,\ y\in A$ *множество* $f_{xy}=\{\langle z,\ t\rangle\colon F(x,\ y,\ z,\ t)\}$ *есть изоморфизм* $\pi(x)$ *на* $\pi(y)$, *причем* f_{xy} *тождественна* $\pi(x)\cap\pi(y)$ *и* $f_{yu}f_{xy}=f_{xu}$ *для любых* $x,\ y,\ u\in A$;

VIII_3 $(\forall xy)\,[H_i(x,y)\to(A(x)\ \&\ A(y)\ \&\ x>c_{i2}\ \&y>c_{i+1,1}\&(x>c_{i,k+2}\leftrightarrow$ $\leftrightarrow y>c_{i+1,k+1}))]$, $i,\ k<\omega$;

IX_3 $(\forall x)\,[A(x)\ \&\ x>c_{i2}\to(\exists!y)\,H_i(x,y)]$, $i<\omega$;

X_3 $(\forall y)\,[A(y)\ \&\ y>c_{i+1,1}\to(\exists!x)\,H_i(x,y)]$, $i<\omega$;

XI_3 $(\forall x_0x_1x_2y_0y_1y_2)\Big[\underset{j\leqslant 2}{\&}H_i(x_j,y_j)\to((x_0\wedge x_2)<(x_0\wedge x_1)\leftrightarrow(y_0\wedge y_2)<$ $<(y_0\wedge y_1))\Big]$, $i<\omega$.

Описание теории T_1 закончено. Эта теория исследуется по образцу теории $T(m)$ из теоремы 2.1. Покажем, что $h_{T_1}(\omega)=\omega_1$. Если $\mathfrak{M}\models T_1$, то положим

$$\Delta(\mathfrak{M})=\{x\in M\colon\ (\forall i<\omega)\mathfrak{M}\models c_{i0}<x\},$$

$$\Delta_i(\mathfrak{M})=\{x\in M\colon\ (\forall j<\omega)\mathfrak{M}\models c_{ij}<x\},\quad i<\omega.$$

Для любого $B\subseteq\omega$ пусть $\mathfrak{M}_B$ — такая счетная модель теории T_1, что $\mathfrak{M}/_\sim$ — дерево высоты 2, $\Delta(\mathfrak{M}_B)=\varnothing$ и $\Delta_i(\mathfrak{M}_B)=\{a_i\}$ для всех $i<\omega$, где $a_i\in P_0(\mathfrak{M}_B)$, если $i\in B$, и $a_i\in P_1(\mathfrak{M}_B)$, если $i\notin B$. Нетрудно проверить, что $\mathfrak{M}_B$ однородна. Очевидно, что если $B\neq C$, то модели $\mathfrak{M}_B$ и $\mathfrak{M}_C$ не изоморфны. Поэтому $h_{T_1}(\omega)=2^\omega=\omega_1$ (при ОКГ).

Подсчитаем $h_{T_1}(\lambda)$ при $\lambda>\omega$. Точно так же, как в теореме 2.1, доказывается, что если $\mathfrak{M}$ — несчетная однородная модель для T_1, то все максимальные цепи в $\mathfrak{M}/_\sim$ плотны. Такими же рассуждениями, как в лемме 2.4, нетрудно доказать, что тип изоморфизма однородной модели теории T_1 однозначно определяется тем, какие из множеств $\Delta(\mathfrak{M})$, $\Delta_0(\mathfrak{M})$, $\Delta_1(\mathfrak{M})$, ... пусты. Покажем, что множества $\Delta_i(\mathfrak{M})$, $i<\omega$, либо все пусты, либо все непусты. Пусть $\Delta_i(\mathfrak{M})\neq\varnothing$. Выберем элемент $a\in\Delta_i(\mathfrak{M})\cap A(\mathfrak{M})$. По аксиоме IX_3 существует $b\in M$ такой, что $\mathfrak{M}\models H_i(a,\ b)$. Так как $a\in$ $\in\Delta_i(\mathfrak{M})$, то $\mathfrak{M}\models a>c_{i,k+2}$ для всех $k<\omega$. По аксиоме VIII_3 $\mathfrak{M}\models b>$ $>c_{i+1,k+1}$ для всех $k<\omega$, т. е. $b\in\Delta_{i+1}(\mathfrak{M})$ и $\Delta_{i+1}(\mathfrak{M})\neq\varnothing$. Аналогично, с помощью аксиом X_3 и VIII_3 доказывается, что если $\Delta_{i+1}(\mathfrak{M})\neq\varnothing$, то $\Delta_i(\mathfrak{M})\neq\varnothing$.

Итак, тип изоморфизма однородной модели $\mathfrak{M}$ мощности $\lambda>\omega$ однозначно определяется одним из следующих условий:

$$\Delta(\mathfrak{M})=\varnothing,\quad \Delta_0(\mathfrak{M})=\varnothing;$$
$$\Delta(\mathfrak{M})=\varnothing,\quad \Delta_0(\mathfrak{M})\neq\varnothing;$$
$$\Delta(\mathfrak{M})\neq\varnothing,\quad \Delta_0(\mathfrak{M})=\varnothing;$$
$$\Delta(\mathfrak{M})\neq\varnothing,\quad \Delta_0(\mathfrak{M})\neq\varnothing.$$

Нетрудно доказать, что любая из этих возможностей реализуется. Поэтому $h_{T_1}(\lambda)=4$ для всех $\lambda>\omega$. Теорема 2.3 доказана.

Теорема 2.4. *В предположении* ОКГ *существует полная теория* T_2 *такая, что* $h_{T_2}(\omega)=\omega_1$, $h_{T_2}(\omega_1)=\omega_1$, $h_{T_2}(\lambda)=4$ *для любого* $\lambda\geqslant\omega_2$.

Доказательство. Теория T_2 имеет язык $L_2=\{\leqslant^2,\ A^1,\ F^4,\ H_i^2,$ $c_{ij}\colon\ i,\ j<\omega\}$ и следующие аксиомы:

I_4 $\mathrm{Th}(\mathfrak{M})$, *где* $\mathfrak{M}=({}^{\omega\geqslant}2;\ \leqslant^{\mathfrak{M}},\ A^{\mathfrak{M}})$, $A^{\mathfrak{M}}={}^{\omega}2$, $\leqslant^{\mathfrak{M}}=\{\langle a,\ b\rangle\colon\ a,\ b\in$ $\in{}^{\omega\geqslant}2,\ a\subseteq b\}$;

II_4 $(\forall x)\,(c_{00}\leqslant x)\ \&\ c_{i0}\ll c_{i+1,0}\ \&\ c_{ij}\ll c_{i,j+1}\ \&\ c_{i1}\neq c_{i+1,0}$, $i,\ j<\omega$;

III_4 $(\forall xy)\,[(\exists zt)\,F(x,\ y,\ z,\ t)\leftrightarrow A(x)\ \&\ A(y)]$;

IV_4 *для любых* $x,y\in A$ *множество* $f_{xy}=\{\langle z,t\rangle\colon\ F(x,\ y,\ z,\ t)\}$ *есть изоморфизм* $\pi(x)$ *на* $\pi(y)$, *причем* f_{xy} *тождественна* $\pi(x)\cap\pi(y)$ *и* $f_{yu}f_{xy}=f_{xu}$ *для любых* $x,\ y,\ u\in A$;

V_4 $(\forall zt)\,[H_i(z,\ t)\to((\exists xy)\,F(x,\ y,z,\ t)\ \&\ \neg A(z)\ \&\ \neg A(t)\ \&\ z\geqslant c_{i2}\ \&t\geqslant$ $\geqslant c_{i+1,1}\ \&\ (z>c_{i,k+2}\leftrightarrow t>c_{i+1,k+1}))]$, $i,\ k<\omega$;

VI_4 $(\forall x)[\neg A(x) \& x > c_{i2} \to (\exists! y) H_i(x, y)]$, $i < \omega$;

VII_4 $(\forall y)[\neg A(y) \& y > c_{i+1,1} \to (\exists! x) H_i(x, y)]$, $i < \omega$;

VIII_4 $H_i(c_{i,j+2}, c_{i+1,j+1}) \& (\forall xyzt)[(H_i(x, y) \& H_i(z, t)) \to (x \ll z \leftrightarrow y \ll \ll t)]$, $i, j < \omega$.

Описание теории T_2 закончено.

Лемма 2.6. *Теория T_2 допускает элиминацию кванторов в языке $L_2^0 = L_2 \cup \{\bigwedge, \ll_i: i < \omega\}$.*

Доказательство точно такое же, как в теореме 2.1.

Пусть $D(T)$ — множество всех типов теории T (от конечного числа переменных).

Лемма 2.7. $|D(T_2)| = \omega$.

Доказательство. Достаточно показать, что T_2 имеет счетную универсальную модель. По теореме компактности T_2 имеет такую счетную модель $\mathfrak{N}_0$, что $\Delta(\mathfrak{N}_0) \neq \varnothing$, $\Delta_i(\mathfrak{N}_0) \neq \varnothing$ для всех $i < \omega$ и в $\mathfrak{N}_0/_\sim$ есть бесконечные цепи ($\Delta(\mathfrak{N}_0)$ и $\Delta_i(\mathfrak{N}_0)$ определяются как в доказательстве теоремы 2.3). Пусть $\mathfrak{N}$ — счетное однородное элементарное расширение модели $\mathfrak{N}_0$. Точно так же, как в теореме 2.1, доказывается, что $\mathfrak{N}/_\sim$ — плотное дерево. Пусть $\mathfrak{N}^0$ — обогащение модели $\mathfrak{N}$ до модели языка L_2^0. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольная счетная модель теории T_2, $\mathfrak{M}^0$ — ее обогащение до модели языка L_2^0. Нетрудно понять, что $\mathfrak{M}^0$ изоморфно вкладывается в $\mathfrak{N}^0$. В силу леммы 2.6 такое вложение элементарно. Тогда и $\mathfrak{M}$ элементарно вкладывается в $\mathfrak{N}$. Таким образм, $\mathfrak{N}$ — счетная универсальная модель теории T_2^0. Лемма 2.7 доказана.

Лемма 2.8. $h_{T_2}(\omega_1) \leqslant \omega_1$.

Доказательство. Как показано в [1], тип изоморфизма однородной модели $\mathfrak{M} \models T$ данной мощности однозначно определяется множеством реализующихся в $\mathfrak{M}$ типов, т. е. некоторым подмножеством $D(T)$. По лемме 2.7 $|D(T_2)| = \omega$. Поэтому $h_{T_2}(\omega_1) \leqslant 2^{|D(T_2)|} = 2^\omega = \omega_1$ (при ОКГ). Лемма 2.8 доказана.

Покажем, что $h_{T_2}(\omega_1) = \omega_1$. Тогда и $h_{T_2}(\omega) = \omega_1$, потому что, как доказано в [1], если $h_T(\omega) \leqslant \omega$, то $h_T(\omega_1) \leqslant h_T(\omega)$. В силу леммы 2.8 достаточно показать, что $h_{T_2}(\omega_1) \geqslant \omega_1$. Модель $\mathfrak{M}$ из аксиомы I_4 нетрудно обогатить до модели $\mathfrak{N}$ теории T_2 (с тем же самым основным множеством). Для любого $B \subseteq \omega$ пусть $\mathfrak{N}_B$ — подмодель в $\mathfrak{N}$ с основным множеством $N_B = N - \bigcup\limits_{i \in B} \Delta_i(\mathfrak{N})$. Для любого конечного языка $L \subseteq L_2$ методом игр Эренфойхта можно доказать, что $\mathfrak{N}_B \upharpoonright L \equiv \mathfrak{N} \upharpoonright L$, поэтому $\mathfrak{N}_B \models T_2$. Из определения модели $\mathfrak{N}$ имеем, что $|N| = \omega_1$ и $|\Delta_i(\mathfrak{N})| = 1$ для всех $i < \omega$. Поэтому $|N_B| = \omega_1$. Из определения $\mathfrak{N}_B$ следует, что $\Delta_i(\mathfrak{N}_B) = \varnothing$, если и только если $i \in B$. Поэтому модели $\mathfrak{N}_B$ и $\mathfrak{N}_C$ не изоморфны, если $B \neq C$. Следовательно, равенство $h_{T_2}(\omega_1) = \omega_1$ будет доказано, если мы покажем, что для любого $B \subseteq \omega$ модель $\mathfrak{N}_B$ однородна.

Лемма 2.9. *Если $X \subseteq N_B$, $a \in \neg A(\mathfrak{N}_B)$, $f: X \to N_B$ — элементарное отображение, то f можно продолжить до элементарного отображения $g: X \cup \{a\} \to N_B$.*

Доказательство. Существует модель $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}_B$ такая, что f продолжается до элементарного отображения $g: X \cup \{a\} \to M$. Так как $a \in \neg A(\mathfrak{N}_B)$, то $\mathfrak{N}_B \models c_0 \ll_i a$ для некоторого $i < \omega$, а так как $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}_B$, то $\mathfrak{M} \models c_0 \ll_i a$. Поскольку g элементарно, то $\mathfrak{M} \models c_0 \ll_i g(a)$. Формула $c_0 \ll_i x$ выполняется в модели $\mathfrak{N}_B$ лишь на конечном числе элементов, поэтому в модели $\mathfrak{M} \succ \mathfrak{N}_B$ она выполняется на тех же самых элементах. Следовательно, $g(a) \in N_B$. Лемма 2.9 доказана.

Лемма 2.10. *Модель $\mathfrak{N}_B$ однородна.*

Доказательство. В силу леммы 2.9 достаточно доказать, что если $X \subseteq N_B$, $a \in A(\mathfrak{N}_B)$, $f: X \to N_B$ — элементарное отображение, то f

можно продолжить до элементарного отображения g: $X \cup \{a\} \to N_B$. Пусть $a_i \in N_B$, $i < \omega$, и $\mathfrak{N}_B \models a_0 = c_0 \,\&\, a_i \ll a_{i+1} < a$ для всех $i < \omega$. По лемме 2.9 существуют элементарные отображения f_n: $X \cup \{a_i\colon i < n\} \to N_B$ такие, что $f_0 = f$ и $f_n \subseteq f_{n+1}$ для всех $n < \omega$. Тогда $h = \bigcup\limits_{n<\omega} f_n$ — элементарное отображение. Покажем, что существует элемент $b \in N_B$ такой, что $\mathfrak{N}_B \models$ $\models h(a_i) < b$ для всех $i < \omega$. Так как $\mathfrak{N}_B \models a_i \ll a_{i+1}$ и h — элементарно, то $\mathfrak{N}_B \models h(a_i) \ll h(a_{i+1})$ для всех $i < \omega$, т. е. $\{h(a_i)\colon i < \omega\}$ — цепь. Поэтому, если такого элемента b нет, то из определения $\mathfrak{N}_B$ следует, что $\{c_{in}\colon n <$ $< \omega\} \subseteq \{h(a_j)\colon j < \omega\}$ для некоторого $i < \omega$. Тогда найдется $j < \omega$ такое, что $\mathfrak{N}_B \models c_{in} = h(a_{j+n})$ для всех $n < \omega$. Так как h элементарно, то $\mathfrak{N}_B \models$ $\models c_{in} = a_{j+n}$ для всех $n < \omega$. Но тогда $\mathfrak{N}_B \models h(a_j) = a_j < a$ для всех $j < \omega$; противоречие.

Итак, нужный нам элемент b существует. Продолжим h до отображения g: $X \cup \{a_i\colon i < \omega\} \cup \{a\} \to N_B$, полагая $g(a) = b$. Докажем, что g элементарно. В силу леммы 2.6 достаточно показать, что g сохраняет истинность бескванторных формул языка L_2^0. Покажем, например, что если $c, d \in X \cup \{a_i\colon i < \omega\}$ и $\mathfrak{N}_B \models a \wedge c = d$, то $\mathfrak{N}_B \models g(a) \wedge g(c) = g(d)$. Если $c = d$, то $\mathfrak{N}_B \models a \geqslant c$. Тогда $c = a$ или $c = a_i$ для некоторого $i < \omega$. Если $c = a$, то все очевидно. Если $c = a_i$, то $\mathfrak{N}_B \models b > h(a_i)$, и потому $\mathfrak{N}_B \models g(a) > g(c)$, т. е. $\mathfrak{N}_B \models g(a) \wedge g(c) = g(d)$. Пусть $c \neq d$. Тогда $\mathfrak{N}_B \models$ $\models a \not\approx c$, где $a \approx c$ есть сокращение $a \leqslant c \vee c \leqslant a$. По аксиоме I_4

$$\mathfrak{N}_B \models (\forall xyzt)(x \wedge y = z \,\&\, x \not\approx y \,\&\, t \not\approx y \,\&\, t \approx x \to t \wedge y = z). \qquad (**)$$

Покажем, что $\mathfrak{N}_B \models a_i \not\approx c$ для некоторого $i < \omega$. Допустим, что $\mathfrak{N}_B \models a_i \approx c$ для всех $i < \omega$. Если $\mathfrak{N}_B \models c \leqslant a_i$ для некоторого $i < \omega$, то $\mathfrak{N}_B \models c \leqslant a$ и $\mathfrak{N}_B \models c \approx a$; противоречие. Тогда $\mathfrak{N}_B \models c \geqslant a_i$ для всех $i < \omega$. Но в этом случае $c = a$; противоречие. Итак, $\mathfrak{N}_B \models a_i \not\approx c$ для некоторого $i < \omega$. В силу $(**)$ $\mathfrak{N}_B \models a_i \wedge c = d$. Так как h элементарно, то $\mathfrak{N}_B \models h(a_i) \wedge h(c) =$ $= h(d) \,\&\, h(a_i) \not\approx h(c)$, а так как $\mathfrak{N}_B \models h(a_i) < b$, то $\mathfrak{N}_B \models b \not\approx h(c)$. Ввиду $(**)$ $\mathfrak{N}_B \models b \wedge h(c) = h(d)$, и потому $\mathfrak{N}_B \models g(a) \wedge g(c) = g(d)$.

Покажем, что g инъективно. Достаточно доказать, что если $g(a) =$ $= g(c)$, то $c = a$. Допустим, что $g(a) = g(c)$ и $c \neq a$. Тогда $c \in \mathrm{dom}(h)$. Так как $\mathfrak{N}_B \models h(a_i) < b = h(c)$ и h элементарно, то $\mathfrak{N}_B \models a_i < c$ для всех $i < \omega$. Но тогда $c = a$; противоречие.

То, что g сохраняет истинность других бескванторных формул, проверить нетрудно. Лемма 2.10 доказана.

Итак, $h_{T_2}(\omega_1) = \omega_1$. Осталось доказать, что $h_{T_2}(\lambda) = 4$ для любого $\lambda \geqslant \omega_2$.

Лемма 2.11. *Пусть $\mathfrak{M} \models T_2$ и максимальные цепи в $^{\neg A(\mathfrak{M})}/_{\sim}$ не более, чем двухэлементны. Тогда $|M| \leqslant \omega_1$.*

Доказательство. Пусть π — цепь в $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что $[a]$ — *блок над* π, *если* $\mathfrak{M} \models a > c$ для любого $c \in \pi$.

Пусть π — максимальная цепь в стандартном блоке; $[a]$, $[b] \in$ $\in {}^{A(\mathfrak{M})}/_{\sim}$ — блоки над π. Тогда $\mathfrak{M} \models a \wedge b > c$ для любого $c \in \pi$, поэтому $a \wedge b \notin [c_0]$. Так как цепи в $^{\neg A(\mathfrak{M})}/_{\sim}$ не более, чем двухэлементны, то $a \wedge b \in [a]$ или $a \wedge b \in [b]$. Пусть $a \wedge b \in [a]$. Из $\mathfrak{M} \models a \wedge b \leqslant b$ имеем $\mathfrak{M}/_{\sim} \models [a] \leqslant [b]$, и потому $[a] = [b]$ (иначе, в $^{\neg A(\mathfrak{M})}/_{\sim}$ мы получили бы трехэлементную цепь).

Таким образом, над любой максимальной цепью из $[c_0]$ существует не более одного блока из $^{\neg A(\mathfrak{M})}/_{\sim}$. Так как в каждом блоке не более $2^{\omega} = \omega_1$ максимальных цепей и над любой максимальной цепью из нестандартного блока не более одного элемента из $A(\mathfrak{M})$, то $|M| \leqslant \omega_1$. Лемма 2.11 доказана.

Пусть $\mathfrak{M}$ — однородная модель теории T_2 мощности $\lambda \geqslant \omega_2$. В силу леммы 2.11 в $^{\neg A(\mathfrak{M})}/_{\sim}$ есть трехэлементные цепи. Точно так же, как в лемме 2.2, доказывается, что в этом случае все максимальные цепи в $\mathfrak{M}/_{\sim}$ плотны. Тот факт, что $h_{T_2}(\lambda)=4$ для всех $\lambda\geqslant\omega_2$, доказывается теперь точно так же, как в теореме 2.3: замечаем, что тип изоморфизма однородной модели мощности $\lambda\geqslant\omega_2$ однозначно определяется тем, какие из множеств $\Delta(\mathfrak{M})$, $\Delta_0(\mathfrak{M})$, $\Delta_1(\mathfrak{M})$, ... пусты; затем с помощью аксиом V_4—VII_4 доказываем, что множества $\Delta_i(\mathfrak{M})$, $i<\omega$, либо все пусты, либо все непусты. Теорема 2.4 доказана.

Замечание 2.2. Если к языку теории T_2 добавить бинарный предикатный символ H, а к аксиомам теории T_2 добавить аксиомы, утверждающие, что H «связывает» цепи $\{c_{0j}\colon j<\omega\}$ и $\{c_{i0}\colon i<\omega\}$ аналогично тому, как H_i «связывает» цепи $\{c_{ij}\colon j<\omega\}$ и $\{c_{i+1,j}\colon j<\omega\}$, то мы получим теорию T такую, что $h_T(\omega)=\omega_1$, $h_T(\omega_1)=\omega_1$, $h_T(\lambda)=2$ для всех $\lambda\geqslant\omega_2$.

§ 3. ТЕОРИИ С $h_T=$ const

В этом параграфе будет доказана

Теорема 3.1. *В предположении* ОКГ *для любого* $0<n<\omega$ *существует полная теория* T_n^* *такая, что* $h_{T_n^*}(\lambda)=n$ *для любого* $\lambda\geqslant\omega$.

Эта теорема дает ответ на вопрос, поставленный в книге Кейслера и Чэна [3, с. 263, 5.1.16]. Заметим, что Либо Ло [6, с. 541] анонсировал следующий разультат: для любого $n=2^s3^t$ существует полная теория T_n такая, что $h_{T_n}(\omega)=n$.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $n\geqslant 3$. Теория T_n^*, которая сейчас будет описана, хорошо известна: это по сути дела пример Эренфойхта. Теория T_n^* имеет язык $L_n^*=\{\leqslant^2, P_i^1, c_j, d_j\colon i<n-2,\ j<\omega\}$ и следующие аксиомы:

I_5 $\leqslant$ — *плотный линейный порядок без концевых элементов*;

II_5 $c_i<c_{i+1}<d_{i+1}<d_i$, $i<\omega$;

III_5 $(\forall x)\bigvee\limits_{i<n-2}P_i(x)$;

IV_5 $\neg(\exists x)[P_i(x)\,\&\,P_j(x)]$, $i<j<n-2$;

V_5 $(\forall xy)[x<y\to(\exists z)(x<z<y\,\&\,P_i(z))]$, $i<n-2$.

Описание теории T_n^* закончено. Если $\mathfrak{M}\models T_n^*$, то пусть $\Delta(\mathfrak{M})=\{a\in M\colon (\forall i<\omega)\mathfrak{M}\models c_i<a<d_i\}$. Легко доказать (используя плотность), что тип изоморфизма модели $(\Delta(\mathfrak{M}), \leqslant^{\mathfrak{M}}\restriction\Delta(\mathfrak{M}))$ однозначно определяет тип изоморфизма счетной модели $\mathfrak{M}$. Нетрудно понять, что если $b,c\in\Delta(\mathfrak{M})$, $b\neq c$ и b — минимальный или максимальный элемент в $\Delta(\mathfrak{M})$, то отображение $b\to c$ элементарно, но не продолжается до автоморфизма модели $\mathfrak{M}$, поэтому $\mathfrak{M}$ не однородна.

Из приведенных замечаний следует, что тип изоморфизма счетной однородной модели $\mathfrak{M}$ теории T_n^* однозначно определяется одним из следующих условий:

O $\Delta(\mathfrak{M})=\varnothing$;

O $\Delta(\mathfrak{M})\neq\varnothing$ и в $\Delta(\mathfrak{M})$ нет минимальных или максимальных элементов;

O_i $\Delta\mathfrak{M}=\{a\}$, $a\in P_i(\mathfrak{M})$, $i<n-2$.

Итак, $h_{T_n^*}(\omega)=n$. Зафиксируем $\lambda>\omega$. Как уже отмечалось, если $h_T(\omega)\leqslant\omega$, то $h_T(\lambda)\leqslant h_T(\omega)$. Поэтому чтобы доказать равенство $h_{T_n^*}(\lambda)=n$, достаточно вывести, что $h_{T_n^*}(\lambda)\geqslant n$.

В предположении ОКГ теория T_n^* имеет специальную модель $\mathfrak{M}_0$ мощности λ (см. [3, с. 254]). Пусть $\mathfrak{M}_1$ — подмодель в $\mathfrak{M}_0$ с основным множеством $M_1=M_0-\Delta(\mathfrak{M}_0)$; $\mathfrak{M}_{2+i}$ — подмодель в $\mathfrak{M}_0$ с основным множеством $M_{2+i}=M_1\cup\{a\}$, где $a\in P_i(\mathfrak{M}_0)$, $i<n-2$. Легко доказать, что $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_{2+i}$ — однородные модели теории T_n^* мощности λ.

Итак, для $n\geqslant 3$ теорема доказана. Точно так же доказывается, что в качестве T_2^* можно взять обычный пример Эренфойхта теории с тремя счетными моделями. Примером T_1^* служит любая ω-категоричная теория; это следует из того, что если $h_T(\omega)\leqslant\omega$, то $h_T(\lambda)\leqslant h_T(\omega)$ для любого $\lambda\geqslant\omega$.

Теорема 3.1 доказана.

Замечание 3.1. Для любого $\lambda\geqslant\omega$ однородные модели теории T_n^* мощности λ не являются λ^+-однородными. Это будет использовано позднее.

§ 4. «ПРЯМЫЕ СУММЫ» ТЕОРИЙ

Прямой суммой $\sum\limits_{i<\alpha} T^i$ теорий T^i, $i<\alpha$, будем называть теорию построенной ниже (при помощи хорошо известной конструкции) модели.

Пусть T^i — полная теория языка L^i, $i<\alpha$ (причем $L^i\cap L^j=\varnothing$ для всех $i<j<\alpha$); унарные предикатные символы S_j, $j<\alpha$, не входят в $\bigcup\limits_{i<\alpha} L^i$; $\mathfrak{M}^i\models T^i$, $i<\alpha$ (причем $M^i\cap M^j=\varnothing$ для всех $i<j<\alpha$). Определим модель $\mathfrak{M}$ языка $L=\bigcup\limits_{i<\alpha} L^i\cup\{S_j\colon j<\alpha\}$ следующим образом. Полагаем $M=\bigcup\limits_{i<\alpha} M^i$, $S_i^{\mathfrak{M}}=M^i$ для всех $i<\alpha$, $R^{\mathfrak{M}}=R^{\mathfrak{M}^i}$ для любого предикатного символа $R\in L^i$, $i<\alpha$. (Можно считать, что L не содержит функциональных символов.) Модель $\mathfrak{M}$ обозначим через $\sum\limits_{i<\alpha}\mathfrak{M}^i$.

Полагаем $\sum\limits_{i<\alpha} T^i=\mathrm{Th}\Big(\sum\limits_{i<\alpha}\mathfrak{M}^i\Big)$.

Пусть $T=\sum\limits_{i<\alpha} T^i$. Для любых моделей $\mathfrak{M}^i\models T^i$, $i<\alpha$, имеем $\sum\limits_{i<\alpha}\mathfrak{M}^i\models T$; это следует из полноты теорий T^i. Понятно, что если $\mathfrak{M}\models T$, то $\mathfrak{M}^i\models T^i$, где $\mathfrak{M}^i=\mathfrak{M}_i\restriction L^i$, а $\mathfrak{M}_i$ — подмодель в $\mathfrak{M}$ с основным множеством $S_i(\mathfrak{M})$. Таким образом, любая модель $\mathfrak{N}$ теории T состоит из двух частей: $\Gamma_0(\mathfrak{N})=\sum\limits_{i<\alpha}\mathfrak{N}^i$, где $\mathfrak{N}^i\models T^i, i<\alpha$, и $\Gamma_1(\mathfrak{N})=\bigcap\limits_{i<\alpha}\neg S_i(\mathfrak{N})$. (Если $\alpha<\omega$, то $\Gamma_1(\mathfrak{N})=\varnothing$.) Обозначения $\Gamma_0(\mathfrak{N})$, $\Gamma_1(\mathfrak{N})$ будут использованы в следующей лемме. В дальнейшем ограничимся случаем $\alpha\leqslant\omega$.

Лемма 4.1. (1) *Для любого $\lambda\geqslant\omega$ модель $\mathfrak{N}$ λ-однородна тогда и только тогда, когда все модели $\mathfrak{N}^i$ λ-однородны и либо $|\Gamma_1(\mathfrak{N})|<\omega$, либо $|\Gamma_1(\mathfrak{N})|\geqslant\lambda$.*

(2) *Если $\mathfrak{N}\models T$, а $\mathfrak{M}$ — произвольная подмодель в $\mathfrak{N}$ такая, что $\Gamma_0(\mathfrak{N})\subseteq\mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M}\models T$.*

(3) *В предположении* ОКГ *если $\alpha=\omega$, то $h_T(\lambda)\geqslant\omega$ для любого $\lambda\geqslant\omega$.*

(4) *В предположении* ОКГ *пусть λ — регулярный кардинал, $h_{T^i}(\lambda)$ — число λ-однородных моделей теории T^i мощности $\leqslant\lambda$, $h^1_{T^i}(\lambda)$— число λ-однородных моделей теории T^i мощности $<\lambda$. Тогда*

$$h_T(\lambda)=\begin{cases}\prod\limits_{i<\alpha} h^0_{T^i}(\lambda)-\prod\limits_{i<\alpha} h^1_{T^i}(\lambda), \text{ если } \prod\limits_{i<\alpha} h^0_{T^i}(\lambda) \text{ и } \alpha \text{ конечны;}\\ \omega+\prod\limits_{i<\alpha} h^0_{T^i}(\lambda) \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

(Для сингулярных λ имеет место такое же равенство, только надо немного изменить определение $h^0_{T^i}(\lambda)$.)

(5) *В предположении* ОКГ *если* $|\{i<\alpha\colon h^0_{T^i}(\lambda)>1\}|\geqslant\omega$, *то* $h_T(\lambda)\geqslant\geqslant 2^{\omega}$ *для любого* $\lambda\geqslant\omega$.

Доказательство. (1) Следует из определений и из того факта, что $\Gamma_1(\mathfrak{N})$ — неразличимое множество в $\mathfrak{N}$.

(2) Если $\alpha<\omega$, то $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$. Если $\alpha=\omega$, то для любого конечного $L'\subseteq L$ легко доказать, что $\mathfrak{M}\restriction L'\equiv\mathfrak{N}\restriction L'$, поэтому $\mathfrak{M}\models T$.

(3) При ОКГ теория T имеет специальную модель $\mathfrak{M}$ мощности λ (см. [3, с. 254]). Очевидно, $|\Gamma_1(\mathfrak{M})|=\lambda$. Для любого $n<\omega$ пусть $\mathfrak{M}_n$ — подмодель в $\mathfrak{M}$ такая, что $\Gamma_0(\mathfrak{M})\subseteq\mathfrak{M}_n$ и $|\Gamma_1(\mathfrak{M}_n)|=n$. В силу (1) и (2) $\mathfrak{M}_n$ — однородная модель теории T мощности λ. Очевидно, $\neg(\mathfrak{M}_n\cong\mathfrak{M}_m)$ для всех $n<m<\omega$. Утверждение (4) следует из (1) и (3), а (5) — из (4). Лемма 4.1 доказана.

Лемма 4.2. *В предположении* ОКГ *существует полная теория* T_3^i *такая, что* $h^0_{T_3^i}(\omega)=3$, $h^0_{T_3^i}(\omega_1)=1$.

Доказательство. Теория T_3^i будет иметь язык $L_3^i=\{\leqslant_i^2, P^1_{0i}, P^1_{1i}, A_i^1\}$ и следующие аксиомы:

I_6 $\mathrm{Th}(\mathfrak{M}_i)$, *где* $\mathfrak{M}_i=\left({}^{\omega\geqslant}2;\ \leqslant_i^{\mathfrak{M}_i}, A_i^{\mathfrak{M}_i}\right)$, $A_i^{\mathfrak{M}_i}={}^{\omega}2$, $\leqslant_i^{\mathfrak{M}_i}=\{\langle a,b\rangle\colon a,b\in\in{}^{\omega\geqslant}2,\ a\subseteq b\}$;

II_6 $(\forall x)[A_i(x)\leftrightarrow P_{0i}(x)\vee P_{1i}(x)]$;

III_6 $\neg(\exists x)[P_{0i}(x)\,\&\,P_{1i}(x)]$;

IV_6 $(\forall x)[\neg A_i(x)\to(\exists y)(x<_i y\,\&\,P_{ji}(y))]$, $j<2$.

Описание теории T_3^i закончено. Эта теория исследуется по образцу теорий из § 2. Точно так же, как в теореме 2.1, можно доказать, что тип изоморфизма счетной однородной модели $\mathfrak{M}$ теории T_3^i однозначно определяется одним из следующих условий:

${}^{\mathfrak{M}}/_{\sim}$ — плотное дерево;

${}^{\mathfrak{M}}/_{\sim}$ — дерево высоты 3;

${}^{\mathfrak{M}}/_{\sim}$ — дерево высоты 2.

Тип изоморфизма однородной модели мощности ω_1 однозначно определяется первым условием.

Итак, $h^0_{T_3^i}(\omega)=h_{T_3^i}(\omega)=3$, $h_{T_3^i}(\omega_1)=1$. Для доказательства, $h^0_{T_3^i}(\omega_1)==1$ надо показать, что счетные модели теории T_3^i не являются ω_1-однородными. Пусть $\mathfrak{M}$ — счетная модель теории T_3^i. Допустим, что $\mathfrak{M}$ ω_1-однородна. Пусть $a_j\in P_{ji}(\mathfrak{M})$, $\pi_j=\{b\in M\colon\mathfrak{M}\models b<_i a_j\}$, $j<2$. Из однородности модели $\mathfrak{M}$ следует, что либо цепи ${}^{\pi_0}/_{\sim}$ и ${}^{\pi_1}/_{\sim}$ плотны, либо $|{}^{\pi_0}/_{\sim}|=|{}^{\pi_1}/_{\sim}|=1$, либо $|{}^{\pi_0}/_{\sim}|=|{}^{\pi_1}/_{\sim}|=2$. В любом случае существует изоморфизм f цепи π_0 на π_1. Точно так же, как в теореме 2.1, можно доказать, что теория T_3^i допускает элиминацию кванторов в языке $L_3^i\cup\{\bigwedge,\ll_j\colon j<\omega\}$. Отсюда f — элементарное отображение. Так как $\mathfrak{M}$ ω_1-однородна, то f продолжается до элементарного отображения $g\colon\pi_0\cup\cup\{a_0\}\to M$. Из элементарности g следует, что $g(a_0)\in P_{0i}(\mathfrak{M})$ и $\mathfrak{M}\models\models g(a)<_i g(a_0)$ для любого $a\in\pi_0$, т. е. $\mathfrak{M}\models b<_i g(a_0)$ для любого $b\in\pi_1$. Но тогда $g(a_0)=a_1\in P_{1i}(\mathfrak{M})$, и потому $P_{0i}(\mathfrak{M})\cap P_{1i}(\mathfrak{M})\neq\varnothing$, что противоречит аксиоме III_6. Лемма 4.2 доказана.

Теорема 4.1. *В предположении* ОКГ (1) *для любого* $n<\omega$ *существует полная теория* $T_3(n)$ *такая, что* $h_{T_3(n)}(\omega)=3^n$, $h_{T_3(n)}(\omega_1)=1$;

(2) *существует полная теория* T_4 *такая, что* $h_{T_4}(\omega)=\omega_1$, $h_{T_4}(\omega_1)=\omega$.

Доказательство. Полагаем $T_3(n)=\sum\limits_{i<n}T_3^i$, $T_4=\sum\limits_{i<\omega}T_3^i$, где T_3^i — теория из леммы 4.2. Утверждения теоремы следуют из леммы 4.2 и пунктов (4), (5) леммы 4.1. Теорема 4.1 доказана.

Лемма 4.3. *В предположении* ОКГ *существует полная теория* T_5^i *такая, что* $h^0_{T_5^i}(\omega) = 2$, $h^0_{T_5^i}(\omega_1) = 1$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}^i$ — модель теории T_3^i из леммы 4.2, содержащая бесконечные нестандартные блоки; B_i — бесконечный нестандартный блок. Обозначим через $\mathfrak{N}^i$ подмодель в $\mathfrak{M}^i$ с основным множеством $N^i = B_i \cup \{a \in M^i\colon\ (\exists b \in B_i)\mathfrak{M}^i \models b <_i a\}$. Полагаем $T_5^i = \mathrm{Th}(\mathfrak{N}^i)$. Эта теория тоже исследуется по образцу теорий из § 2, но имеется небольшое отличие: у моделей теории T_5^i нет стандартного блока, любые два бесконечных блока изоморфны. Точно так же, как в теореме 2.1, доказывается, что теория T_5^i допускает элиминацию кванторов в языке $L_3^i \cup \{\wedge, \ll_j\colon j < \omega\}$. Покажем, что если $\mathfrak{M}$ — однородная модель теории T_5^i и $\left|{}^{\neg A(\mathfrak{M})}/_{\sim}\right| \geqslant 2$, то для любого $[x] \in {}^{\neg A(\mathfrak{M})}/_{\sim}$ существуют $[y]$, $[z] \in {}^{\neg A(\mathfrak{M})}/_{\sim}$ такие, что $\mathfrak{M}/_{\sim} \models [y] < [x] <_i [z]$, и все максимальные цепи в ${}^{\neg A(\mathfrak{M})}/_{\sim}$ плотны. Пусть $[a]$, ${}_i[b] \in {}^{\neg A(\mathfrak{M})}/_{\sim}$, $[a] \neq [b]$, $a_0 = a \wedge b$. Тогда $\mathfrak{M}/_{\sim} \models [a_0] <_i [a]$ или $\mathfrak{M}/_{\sim} \models [a_0] <_i [b]$. Пусть $\mathfrak{M}/_{\sim} \models [a_0] <_i [a]$. В силу элиминации кванторов $(\mathfrak{M}, a) \equiv (\mathfrak{M}, b)$. Так как $\mathfrak{M}$ однородна, то существует $b_0 \in M$ такой, что $(\mathfrak{M}, a, a_0) \equiv (\mathfrak{M}, b, b_0)$. Тогда $\mathfrak{M}/_{\sim} \models [b_0] <_i [b]$. Аналогично, существуют a_1, $a_2 \in M$ такие, что $(\mathfrak{M}, a, a_1) \equiv (\mathfrak{M}, a_0, a)$ и $(\mathfrak{M}, a, a_2, a_1) \equiv (\mathfrak{M}, a_0, a, a_1)$. Тогда $\mathfrak{M}/_{\sim} \models [a_0] <_i [a] <_i [a_2] <_i [a_1]$. Отсюда, если $\mathfrak{M}$ — однородная модель теории T_5^i, то выполняется одно из следующих условий:

(*i*) $\left|{}^{\neg A(\mathfrak{M})}/_{\sim}\right| = 1$;

(ii) все максимальные цепи в ${}^{\neg A(\mathfrak{M})}/_{\sim}$ плотны и не имеют концевых элементов.

Как и в теореме 2.1, доказывается, что любые две однородные модели теории T_5^i, удовлетворяющие одному и тому же из условий вида (i), (ii), реализуют одни и те же типы. Поэтому $h^0_{T_5^i}(\omega) = h_{T_5^i}(\omega) = 2$. Так же как в теореме 2.1, можно доказать, что несчетные однородные модели теории T_5^i не удовлетворяют условию (*i*), поэтому $h_{T_5^i}(\omega_1) = 1$. Равенство $h^0_{T_5^i}(\omega_1) = 1$ устанавливается так же, как в лемме 4.2. Лемма 4.3 доказана.

Теорема 4.2. *В предположении* ОКГ *для любого* $n < \omega$ *существует полная теория* $T_5(n)$ *такая, что* $h_{T_5(n)}(\omega) = 2^n$, $h_{T_5(n)}(\omega_1) = 1$.

Доказательство. Полагаем $T_5(n) = \sum\limits_{i<n} T_5^i$, где T_5^i — теория из леммы 4.3. Утверждение теоремы следует из леммы 4.3 и пунктов (4), (5) леммы 4.1. Теорема 4.2. доказана.

Замечание 4.1. В работе Кейслера и Морли [1, с. 78] ставился вопрос о существовании полной теории T такой, что $h_T(\omega) = 4$, $h_T(\omega_1) = 1$. Теорема 4.2 дает ответ на этот вопрос.

Замечание 4.2. С помощью операции прямой суммы можно получать из теорий этого параграфа и § 2, 3 новые теории с разнообразными функциями h_T, например такую теорию, что $h_T(\omega) = 2^n 3^m$, $h_T(\omega_1) = 1$ и др.

§ 5. ТЕОРИЯ С $h_T(\omega) = \omega^1$

Теорема 5.1. *В предположении* ОКГ (1) *существует полная теория* T_6 *такая, что* $h_{T_6}(\omega) = \omega_1$, $h_{T_6}(\omega_1) = 1$; (2) *для любого* $0 < n < \omega$ *существует полная теория* $T_7(n)$ *такая, что* $h_{T_7(n)}(\omega) = \omega_1$, $h_{T_7(n)}(\omega_1) = n$.

Доказательство. Пусть T_3^i — теория языка $L_3^i = \{\leqslant_i^2, A_i^1, P_{0i}^1, P_{1i}^1\}$, построенная в лемме 4.2, $i < 2$. Выберем модели $\mathfrak{M}_0 \models T_3^0$ и $\mathfrak{M}_1 \models T_3^1$. Определим теперь модель $\mathfrak{N}$ языка $L = L_3^0 \cup L_3^1 \cup \{E^2\}$ следующим образом:

I_7 $E^{\mathfrak{N}}$ — *отношение эквивалентности с бесконечным числом классов, причем каждый E-класс бесконечен;*

II_7 $\leqslant_0^{\mathfrak{N}}$ — *частичный предпорядок такой, что* $\mathfrak{N} \models (\forall xyzt)[x \leqslant_0 y \,\&\, E(x, z) \,\&\, E(y, t) \to z \leqslant_0 t]$ *и* $\mathfrak{N} \models (\forall xy)[x \leqslant_0 y \,\&\, y \leqslant_0 x \leftrightarrow E(x, y)]$;

III_7 $\mathfrak{N} \models (\forall xy)[A_0(x) \,\&\, E(x, y) \to A_0(y)]$;

IV_7 $\mathfrak{N} \models (\forall xy)[P_{i0}(x) \,\&\, E(x, y) \to P_{i0}(y)]$, $i < 2$;

V_7 *фактор-модель* $\mathfrak{N}_0/_E$ *изоморфна модели* $\mathfrak{M}_0$, *где* $\mathfrak{N}_0$ — *обеднение модели* $\mathfrak{N}$ *до модели языка* L_3^0;

VI_7 $\mathfrak{N} \models (\forall xy)[x \leqslant_1 y \to E(x, y)]$;

VII_7 *если* $\mathfrak{N}_1$ — *подмодель в* $\mathfrak{N}$ *и основное множество модели* $\mathfrak{N}_1$ *есть E-класс, то обеднение* $\mathfrak{N}_1$ *до модели языка* L_3^1 *изоморфно модели* $\mathfrak{M}_1$.

Модель $\mathfrak{N}$ определена полностью. Будем говорить, что $\leqslant_0^{\mathfrak{N}}$ есть *частичный порядок на множестве E-классов*; согласно аксиоме II_7 это определение корректно. В силу V_7 существует E-класс, наименьший относительно этого порядка; назовем его E-классом нулевого уровня, а непосредственно следующие за ним E-классы — E-классами уровня 1 и т. д. Положим $T_6 = \mathrm{Th}(\mathfrak{N})$. Для удобства исследования теории T_6 расширим ее до теории T_6^0 языка $L^0 = L \cup \{\bigwedge_i^2, \ll_{ij}^2, C_i^1\colon i < 2, j < \omega\}$, добавив следующие аксиомы:

VIII_7 $\bigwedge_0$ — *операция точной нижней грани для E-классов в частичном порядке* $\leqslant_0$, *т. е.* $x \bigwedge_0 y = z \leftrightarrow [(E(x, y) \,\&\, E(y, z)) \vee (\neg E(x, y) \,\&\, z \leqslant_0 x \,\&\, z \leqslant_0 y \,\&\, \neg (\exists t)(\neg E(z, t) \,\&\, z \leqslant_0 t \,\&\, t \leqslant_0 x \,\&\, t \leqslant_0 y))]$;

IX_7 $\bigwedge_1$ — *операция точной нижней грани в частичном порядке* $\leqslant_1$;

X_7 $\ll_{10}$ — *отношение непосредственного следования в частичном порядке* $\leqslant_1$;

XI_7 $x \ll_{1,i+1} y \leftrightarrow (\exists z)(x \ll_{1i} z \ll_{10} y)$, $i < \omega$;

XII_7 $\ll_{0i}$, $i < \omega$, — *соответствующие отношения следования для E-классов;*

XIII_7 C_0 *выделяет E-класс нулевого уровня;*

XIV_7 $C_1(x) \leftrightarrow \neg(\exists y)(y <_1 x)$.

Лемма 5.1. *Теория* T_6^0 *допускает элиминацию кванторов.*

Доказательство такое же, как для теории $T^0(m)$ из теоремы 2.1.

Лемма 5.2. $h_{T_6}(\omega_1) = 1$.

Доказательство. Из аксиомы VII_7 следует, что если $\mathfrak{M} \models T_6$, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$ и M_1 есть E-класс, то $\mathfrak{M}_1 \upharpoonright L_3^1 \models T_3^1$. Если $\mathfrak{M}$ ω_1-однородна, то и $\mathfrak{M}_1 \upharpoonright L_3^1$, очевидно, ω_1-однородна. Но счетные модели теории T_3^1 не являются ω_1-однородными, и $h_{T_3^1}(\omega_1) = 1$. Поэтому, если $\mathfrak{M}$ — однородная модель теории T_6 мощности ω_1, то все E-классы в $\mathfrak{M}$, рассматриваемые как подмодели модели $\mathfrak{M}$, имеют мощность ω_1 и потому изоморфны единственной однородной модели теории T_3^1 мощности ω_1.

Из аксиомы V_7 следует, что если $\mathfrak{M} \models T_6$, то $(\mathfrak{M} \upharpoonright L_3^0)/_E \models T_3^0$. Если $\mathfrak{M}$ ω_1-однородна, то с помощью леммы 5.1 нетрудно понять, что и $(\mathfrak{M} \upharpoonright L_3^0)/_E$ ω_1-однородна. Но счетные модели теории T_3^0 не являются ω_1-однородными и $h_{T_3^0}(\omega_1) = 1$. Поэтому, если $\mathfrak{M}$ — однородная модель теории T_6 мощности ω_1, то $(\mathfrak{M} \upharpoonright L_3^0)/_E$ изоморфна единственной однородной модели теории T_3^0 мощности ω_1.

Из аксиом II_7—IV_7, VI_7 следует, что тип изоморфизма модели $\mathfrak{M} \models T_6$ однозначно определяется типом изоморфизма фактор-модели $(\mathfrak{M} \upharpoonright L_3^0)/_E$ и типами изоморфизма E-классов. Таким образом, $h_{T_6}(\omega_1) = 1$.

Лемма 5.2 доказана.

Лемма 5.3. $h_{T_6}(\omega) = \omega_1$.

Доказательство. Для любого $B \subseteq \omega$ определим модель $\mathfrak{N}_B \models T_6$ следующим образом. Пусть $\mathfrak{M}_0$— счетная однородная модель теории T_3^0, а $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ — не изоморфные счетные однородные модели теории T_3^1 (такие модели существуют, так как $h_{T_3^1}(\omega) = 3$). Превратим $\mathfrak{M}_0$ в модель теории T_6: каждый элемент из M_0 заменим на E-класс, затем определим на M_0 предикаты из L_3^1 так, чтобы каждый E-класс уровня n для любого $n \in B$ стал изоморфным модели $\mathfrak{M}_1$, а все остальные E-классы — изоморфными модели $\mathfrak{M}_2$. Полученную таким образом модель обозначим через $\mathfrak{N}_B$. Если $B \neq C$, то $\mathfrak{N}_B$ и $\mathfrak{N}_C$, очевидно, не изоморфны. Из однородности моделей $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и того факта, что все E-классы одного и того же уровня изоморфны, с помощью леммы 5.1 нетрудно вывести, что $\mathfrak{N}_B$ — однородная модель. Отсюда $h_{T_6}(\omega) = 2^\omega = \omega_1$(при ОКГ). Лемма 5.3 доказана.

Итак, утверждение (1) теоремы 5.1 доказано. В качестве $T_7(n)$ возьмем прямую сумму теории T_6 и теории T_n^*, построенной в § 3. Утверждение (2) теоремы 5.1 следует из леммы 4.1 (4) и того факта, что счетные модели теорий T_6 и T_n^* не являются ω_1-однородными. Теорема 5.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Keisler H. J., Morley M. D.** On the number of homogeneous models of a given power // Isr. J. math.— 1967.— V. 5, № 2.— P. 73—78.
2. **Палютин Е. А.** Спектр и структура моделей полных теорий // Справочная книга по математической логике. Теория моделей.— М.: Наука, 1982.— Т. 1.— С. 320—387.
3. **Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.** Теория моделей.— М.: Мир, 1977.
4. **Кудайбергенов К. Ж.** О числе однородных моделей // 7-я Всесоюз. конф. по мат. логике, посвящ. 75-летию акад. А. И. Мальцева, Новосибирск, сент. 1984 г.: Тез. докл.— Новосибирск, 1984.— С. 83.
5. **Morley M. D., Vaught R.** Homogeneous universal models // Math. scand.— 1962.— V. 11, № 1.— P. 37—57.
6. **Libo Lo.** On the number of countable homogeneous models // J. symb. log.— 1983.— V. 48, № 3.— P. 539—541.
7. **Сакс Дж.** Теория насыщенных моделей.— М.: Мир, 1976.

О СТАБИЛЬНОСТНОЙ ТЕОРИИ ПОЛИГОНОВ

Т. Г. МУСТАФИН

Изучение теоретико-модельных свойств классических алгебраических систем (таких, как группы, кольца, поля, модули, линейные алгебры и др.) на основе идей М. Морли [1], С. Шелаха [2] образует важный раздел современной теории моделей — стабильностную теорию алгебр.

Понятие полигона [3] (операнда в смысле [4]) относится к фундаментальным в таких областях, как теория представлений, алгебраическая теория динамических систем и др. К тому же полигонная структура присутствует как фрагмент (точнее, как обеднение в теоретико-модельном смысле) в модулях, линейных алгебрах. В последнее время возрос