Из аксиом $II_7$—$IV_7$, $VI_7$ следует, что тип изоморфизма модели $\mathfrak{M} \models T_6$ однозначно определяется типом изоморфизма фактор-модели $(\mathfrak{M} \upharpoonright L_3^0)/_E$ и типами изоморфизма $E$-классов. Таким образом, $h_{T_6}(\omega_1) = 1$.

Лемма 5.2 доказана.

**Лемма 5.3.** $h_{T_6}(\omega) = \omega_1$.

Доказательство. Для любого $B \subseteq \omega$ определим модель $\mathfrak{N}_B \models T_6$ следующим образом. Пусть $\mathfrak{M}_0$— счетная однородная модель теории $T_3^0$, а $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ — не изоморфные счетные однородные модели теории $T_3^1$ (такие модели существуют, так как $h_{T_3^1}(\omega) = 3$). Превратим $\mathfrak{M}_0$ в модель теории $T_6$: каждый элемент из $M_0$ заменим на $E$-класс, затем определим на $M_0$ предикаты из $L_3^1$ так, чтобы каждый $E$-класс уровня $n$ для любого $n \in B$ стал изоморфным модели $\mathfrak{M}_1$, а все остальные $E$-классы — изоморфными модели $\mathfrak{M}_2$. Полученную таким образом модель обозначим через $\mathfrak{N}_B$. Если $B \neq C$, то $\mathfrak{N}_B$ и $\mathfrak{N}_C$, очевидно, не изоморфны. Из однородности моделей $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ и того факта, что все $E$-классы одного и того же уровня изоморфны, с помощью леммы 5.1 нетрудно вывести, что $\mathfrak{N}_B$ — однородная модель. Отсюда $h_{T_6}(\omega) = 2^\omega = \omega_1$(при ОКГ). Лемма 5.3 доказана.

Итак, утверждение (1) теоремы 5.1 доказано. В качестве $T_7(n)$ возьмем прямую сумму теории $T_6$ и теории $T_n^*$, построенной в § 3. Утверждение (2) теоремы 5.1 следует из леммы 4.1 (4) и того факта, что счетные модели теорий $T_6$ и $T_n^*$ не являются $\omega_1$-однородными. Теорема 5.1 доказана.

### ЛИТЕРАТУРА


1. **Keisler H. J., Morley M. D.** On the number of homogeneous models of a given power // Isr. J. math.— 1967.— V. 5, № 2.— P. 73—78.
2. **Палютин Е. А.** Спектр и структура моделей полных теорий // Справочная книга по математической логике. Теория моделей.— М.: Наука, 1982.— Т. 1.— С. 320—387.
3. **Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.** Теория моделей.— М.: Мир, 1977.
4. **Кудайбергенов К. Ж.** О числе однородных моделей // 7-я Всесоюз. конф. по мат. логике, посвящ. 75-летию акад. А. И. Мальцева, Новосибирск, сент. 1984 г.: Тез. докл.— Новосибирск, 1984.— С. 83.
5. **Morley M. D., Vaught R.** Homogeneous universal models // Math. scand.— 1962.— V. 11, № 1.— P. 37—57.
6. **Libo Lo.** On the number of countable homogeneous models // J. symb. log.— 1983.— V. 48, № 3.— P. 539—541.
7. **Сакс Дж.** Теория насыщенных моделей.— М.: Мир, 1976.


# О СТАБИЛЬНОСТНОЙ ТЕОРИИ ПОЛИГОНОВ


*Т. Г. МУСТАФИН*


Изучение теоретико-модельных свойств классических алгебраических систем (таких, как группы, кольца, поля, модули, линейные алгебры и др.) на основе идей М. Морли [1], С. Шелаха [2] образует важный раздел современной теории моделей — стабильностную теорию алгебр.

Понятие полигона [3] (операнда в смысле [4]) относится к фундаментальным в таких областях, как теория представлений, алгебраическая теория динамических систем и др. К тому же полигонная структура присутствует как фрагмент (точнее, как обеднение в теоретико-модельном смысле) в модулях, линейных алгебрах. В последнее время возрос интерес к теоретико-модельным свойствам унаров, являющихся частными видами полигонов [5—9]).

Настоящая работа по своему содержанию является введением в общую стабильностную теорию полигонов. Основными результатами являются:

— алгебраическая характеризация моноидов, над которыми все полигоны стабильны;

— алгебраическая характеризация моноидов, над которыми все полигоны суперстабильны;

— необходимое условие для коммутативных моноидов, над которыми все полигоны $\omega$-стабильны;

— описание теоретико-модельных свойств полигонов над группами;

— общая структурная теорема для стабильных теорий полигонов;

— теоремы о регулярности, ортогональности типов, установление связи между $L$-рангом и глубиной типа в стационарных теориях полигонов.

В работе используются терминология и обозначения из [2, 4].

## § 1. ОБЩАЯ СТРУКТУРНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СТАБИЛЬНОСТНЫХ ТЕОРИЙ ПОЛИГОНОВ

Замечание 1.1. Всюду $S$ будет обозначать моноид, $e$ — единицу $S$. Напомним, что алгебраическая система $\langle A; \langle f_\alpha: \alpha \in S \rangle\rangle$ с одноместными операциями $f_\alpha$, $\alpha \in S$, называется (*левым*) *полигоном над* $S$ (или *$S$-полигоном*), если $f_e(a) = a$ для всех $a \in A$ и $f_{\alpha\beta}(a) = f_\alpha(f_\beta(a))$ для всех $\alpha, \beta \in S$, $a \in A$.

Пусть $A$ — полигон над $S$, $B$ — подмножество $A$, $a, b \in A$. Тогда $SB \rightleftharpoons \{f_\alpha(b): b \in B, \alpha \in S\}$, $Sa \rightleftharpoons S\{a\}$, $a \leqslant b \rightleftharpoons b \in Sa$. Элементы $a, b \in A \setminus B$ (где $B \subseteq A$) называются *связанными вне* $B$, если существуют $n < \omega$ и $a_0, \ldots, a_n \in A \setminus B$ такие, что $a_0 = a$, $a_n = b$, $a_i \leqslant a_{i+1}$ или $a_{i+1} \leqslant a_i$ для всех $i < n$. В этом случае $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ называется *путем между $a$ и $b$ вне $B$ длины $n$*. Определим

$$C_B(a) \rightleftharpoons \{b \in A:\ a \text{ и } b \text{ связаны вне } B\}.$$

Если $D \subseteq A \setminus B$, то $C_B(D) \rightleftharpoons \bigcup\limits_{d \in D} C_B(d)$.

Если $D \subseteq A$, то $C_B(D) \rightleftharpoons C_B(D \cap (A \setminus B))$.

Если $A$, $B$ — полигоны над $S$, $C$ — подполигон полигона $A$, $\varphi: C \to B$ — изоморфное вложение, то существует такой полигонный изоморфизм $h$, что $\mathrm{dom}(h) = A$, $\varphi = h \restriction C$ и $B \cap h(A) = \varphi(C)$. В этом случае $B \cup h(A)$ назовем *полигоном, полученным из $A$ и $B$ склеиванием над $B$ по правилу* $\varphi$, и будем обозначать $B \oplus h(A)(\varphi)$. Когда $C_1$ — множество порождающих $C$, для указания правила склеивания достаточно перечислить образы порождающих из $C_1$.

Замечание 1.2. Всюду, если особо не оговорено, $T$ обозначает произвольную фиксированную полную теорию полигонов над $S$ языка первого порядка. Все модели $T$ считаются элементарными подмоделями некоторой фиксированной насыщенной модели $\mathfrak{C}$ теории $T$.

Если $B \subseteq A \subseteq \mathfrak{C}$, $p$ — тип над $A$, то $p \curlywedge B$ означает, что «$p$ forks over $B$» в смысле [2]. Обозначение $p \downarrow B$ используем для отрицания $p \curlywedge B$.

**Лемма 1.1.** *Пусть $M$ — подполигон полигона $\mathfrak{C}$, $A \subseteq \mathfrak{C}$, $A \cap C_M(a) = \varnothing = A \cap C_M(b)$. Тогда* $\mathrm{tp}(a, M) = \mathrm{tp}(b, M)$ *влечет* $\mathrm{tp}(a, M \cup A) = \mathrm{tp}(b, M \cup A)$.

Доказательство. Пусть $\varphi$ — произвольный такой тождественный на $M$ автоморфизм $\mathfrak{C}$, что $\varphi(a) = b$. Легко понять, что при этом $\varphi(C_M(a)) = C_M(b)$. Пусть $\psi$ — такое отображение, что $\mathrm{dom}(\psi) = \mathfrak{C}$,

$\psi \upharpoonright C_M(a)=\varphi \upharpoonright C_M(a), \psi(c)=c$ для всех $c\in\mathfrak{C}\setminus(C_M(a)\cup C_M(b))$ и если $C_M(a)\cap C_M(b)=\varnothing$, то $\varphi\upharpoonright C_M(b)=\varphi^{-1}\upharpoonright C_M(b)$. Очевидно, $\psi$ является таким автоморфизмом $\mathfrak{C}$, тождественным на $M\cup A$, что $\psi(a)=b$. Следовательно, $\mathrm{tp}(a, M\cup A)=\mathrm{tp}(b, M\cup A)$. Лемма доказана.

Если $\bar a$ — кортеж элементов, $k<\omega$, то $r(\bar a)=k$ означает, что существуют такие $a_1, \ldots, a_k\in\bar a$, что $C_M(\bar a)=\bigcup\limits_{1\leqslant i\leqslant k} C_M(a_i)$ и $C_M(a_i)\cap C_M(a_j)=\varnothing$ для всех $1\leqslant i<j\leqslant k$.

**Лемма 1.2.** *Пусть $T$ — стабильная теория, $M$ — подполигон полигона $\mathfrak{C}$, $\bar a$, $\bar b\notin M$. Тогда $C_M(\bar a)\cap C_M(\bar b)=\varnothing$ влечет* $\mathrm{tp}(\bar a, M\cup\bar b)\downarrow M$.

Доказательство. Случай 1: $r(\bar a)=1$. Предположим, что $\mathrm{tp}(\bar a, M\cup\bar b)\curlywedge M$. Пусть $p=\mathrm{tp}(\bar b, M)$.

Случай 1а: существует такое $\bar c\in\mathfrak{C}$, что $\mathrm{tp}(\bar c, M)=p$, $C_M(\bar c)\cap C_M(\bar a)=\varnothing$ и $\mathrm{tp}(\bar a, M\cup\bar c)\downarrow M$. Применяя лемму 1.1, получим $\mathrm{tp}(\bar c, M\cup C_M(\bar a))=\mathrm{tp}(\bar b, M\cup C_M(\bar a))$. Отсюда $\mathrm{tp}(\bar c, M\cup\bar a)=\mathrm{tp}(\bar b, M\cup\bar a)$. Следовательно, $\mathrm{tp}(\bar a, M\cup\bar b)\downarrow M$; противоречие.

Случай 1б: для любого $\bar c\in\mathfrak{C}$, реализующего $p$, если $\mathrm{tp}(\bar a, M\cup\bar c)\downarrow M$, то $C_M(\bar a)\cap C_M(\bar c)\neq\varnothing$. Так как $r(\bar a)=1$, то условие $C_M(\bar a)\cap C_M(\bar c)\neq\varnothing$ влечет $C_M(\bar a)\subseteq C_M(\bar c)$. Выберем $\bar c\in\mathfrak{C}$ так, чтобы $p=\mathrm{tp}(\bar c, M)$ и $\mathrm{tp}(\bar a, M\cup\bar c)\downarrow M$. Пусть $\lambda>k(T)$ и $\{\bar a_i\colon i<\lambda\}$ — такая последовательность Морли над $M\cup\bar c$, что $\bar a_0=\bar a$. Поскольку $C_M(\bar a)\subseteq C_M(\bar c)$, то $C_M(\bar a_i)\subseteq C_M(\bar c)$ для всех $i<\lambda$. Отсюда $C_M(\bar a)=C_M(\bar a_i)$ и $C_M(\bar a_i)\cap C_M(\bar b)=\varnothing$ для всех $i<\lambda$. Учитывая, что $p=\mathrm{tp}(\bar b, M)$, $\mathrm{tp}(\bar a_i, M)=\mathrm{tp}(\bar a, M)$, имеем $\mathrm{tp}(\bar b, M\cup\bar a_i)\curlywedge M$ для всех $i<\lambda$. Тогда $\mathrm{tp}\left(\bar b, M\cup\bigcup\limits_{j\leqslant i}\bar a_j\right)\curlywedge M\cup\bigcup\limits_{j<i}\bar a_j$ для всех $i<\lambda$. Но это невозможно, так как $\lambda>k(T)$.

Случай 2: $r(\bar a)=n>1$. Пусть $\bar a=\bar a_1{}^\wedge\bar a_2, r(\bar a_1)=1$, $C_M(\bar a_1)\cap C_M(\bar a_2)=\varnothing$, $N\models T$, $\bar a\in N$, $M\subset N$, $M_2=M\cup(N\cap C_M(\bar a_2))$. Очевидно, $r(\bar a_2)=n-1$ и $M_2$ — подполигон полигона $\mathfrak{C}$. Так как $C_M(\bar a_1)\cap(C_M(\bar b)\cup C_M(\bar a_2))=\varnothing$, то тем более $C_{M_2}(\bar a_1)\cap(C_{M_2}(\bar b)\cup C_{M_2}(\bar a_2))=\varnothing$. Применяя случай 1, имеем $\mathrm{tp}(\bar a_1, M_2\cup\bar b\cup\bar a_2)\downarrow M_2$. С другой стороны, ввиду равенств $r(\bar a_2)=n-1$ и $C_M(\bar a_2)\cap C_M(\bar b)=\varnothing$ по индукции $\mathrm{tp}(\bar a_2, M\cup\bar b)\downarrow M$, отсюда $\mathrm{tp}(\bar a_1{}^\wedge\bar a_2, M\cup\bar b)\downarrow M$. Лемма доказана.

Докажем общую структурную теорему для стабильных теорий полигонов.

**Теорема 1.1.** Пусть *$T$ — стабильная теория, $M\models T$, $M\prec N$, $a\in N\setminus M$. Тогда* (1) $M\prec M\cup(N\cap C_M(a))\preccurlyeq N$; (2) $M\preccurlyeq N\setminus(N\cap C_M(a))\prec N$.

Доказательство. (1) Временно через $M(a)$ обозначим $M\cup(N\cap C_M(a))$. Предположим, что существуют формула $\theta(x, \bar m, \bar a)$ и элемент $b\in N$ такие, что $N\models\theta(b, \bar m, \bar a)$, но для всех $c\in M(a)$ имеет место $N\models\neg\theta(c, \bar m, \bar a)$, где $\bar m\in M$, $\bar a\in N\cap C_M(a)$. Очевидно, $\mathrm{tp}(b, M\cup\bar a)\curlywedge M$, $b\notin C_M(a)$. Так как $\bar a\in C_M(a)$, то $C_M(\bar a)=C_M(a)$. Поэтому $b\notin C_M(\bar a)$. Таким образом, $C_M(b)\cap C_M(\bar a)=\varnothing$. По лемме 1.2 $\mathrm{tp}(b, M\cup\bar a)\downarrow M$; противоречие. В силу произвольности формулы $\theta$ $M(a)\preccurlyeq N$. Ясно, что при этом $M\prec M(a)$.

(2) Пусть $b_i\in N\setminus M$, $i<\lambda$, — такие элементы, что $N\setminus(N\cap C_M(a))=M\cup\bigcup\limits_{i<\lambda}(N\cap C_M(b_i))$. По индукции, применяя (1), получим $M\preccurlyeq N\setminus(N\cap C_M(a))\prec N$. Теорема доказана.

## § 2. СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛИГОНОВ

Полную теорию $T$ полигонов над $S$ назовем *стационарной*, если для любых модели $M\models T$ и $a$, $b\in\mathfrak{C}\setminus M$ из $a\in Sb$ следует $M\cap Sa=M\cap Sb$.

Нетрудно доказывается

**Лемма 2.1.** *Пусть $T$ — стационарная теория, $M\models T$, $a\in\mathfrak{C}\setminus M$. Тогда*

(1) *если* $b \in C_M(a)$, *то* $M \cap Sa = M \cap Sb$; (2) $SC_M(a) = C_M(a) \cup (M \cap Sa)$; (3) $S(\mathfrak{C} \setminus C_M(a)) = \mathfrak{C} \setminus C_M(a)$; (4) $SC_M(a) \cap S(\mathfrak{C} \setminus C_M(a)) = M \cap Sa$.

**Лемма 2.2.** *Пусть $T$ — стационарная теория, $M \models T$, $a$, $b \in \mathfrak{C} \setminus M$. Следующие условия эквивалентны*:

(1) $\mathrm{tp}(a, M) = \mathrm{tp}(b, M)$;

(2) $M \cap Sa = M \cap Sb$ *и* $\mathrm{tp}(a, M \cap Sa) = \mathrm{tp}(b, M \cap Sa)$.

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2) Достаточно показать, что $M \cap Sa = M \cap Sb$. Пусть $m \in M$, $\alpha \in S$, $m = f_\alpha(a)$. Тогда $(m = f_\alpha(x)) \in \mathrm{tp}(a, M)$, следовательно, $(m = f_\alpha(x)) \in \mathrm{tp}(b, M)$, т. е. $m = f_\alpha(b)$. Отсюда $M \cap Sa \subseteq M \cap Sb$. Аналогично $M \cap Sb \subseteq M \cap Sa$.

(2)$\Rightarrow$(1) Из условия (2) вытекает, что существует такой тождественный на $D$ автоморфизм $\varphi$ полигона $\mathfrak{C}$, что $\varphi(a) = b$, где $D \leftrightharpoons M \cap Sa (= M \cap Sb)$.

Теперь докажем следующее

**Предложение 2.1.** $c \in C_M(a) \Leftrightarrow \varphi(c) \in C_M(b)$.

Доказательство. Пусть $c \in C_M(a)$, $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ — такой путь между $a$ и $c$ без элементов из $M$, что $a_0 = a$, $a_n = c$. По индукции по $j \leqslant n$ покажем, что $\varphi(a_j) \notin M$. Так как $\varphi(a_0) = b$, то $\varphi(a_0) \in C_M(b)$. Пусть $\varphi(a_i) \in C_M(b)$.

Случай 1: $a_i \in Sa_{i+1}$. Пусть $a_i = f_\alpha(a_{i+1})$ для некоторого $\alpha \in S$. Тогда $\varphi(a_i) = f_\alpha(\varphi(a_{i+1}))$. Если $\varphi(a_{i+1}) \in M$, то $f_\alpha(\varphi(a_{i+1})) \in M$, откуда $\varphi(a_i) \in M$; противоречие, стало быть, $\varphi(a_{i+1}) \notin M$.

Случай 2: $a_{i+1} \in Sa_i$. Пусть $a_{i+1} = f_\alpha(a_{i+1})$ для подходящего $\alpha \in S$. Очевидно, $\varphi(a_{i+1}) = f_\alpha(\varphi(a_i))$. Предположим, что $\varphi(a_{i+1}) \in M$. Тогда $\varphi(a_{i+1}) \in M \cap S\varphi(a_i)$. По лемме 2.1 $M \cap S\varphi(a_i) = M \cap Sb$, отсюда $\varphi(a_{i+1}) \in M \cap Sb$. Пусть $\varphi(a_{i+1}) = m = f_\beta(b)$. Так как $M \cap Sa = M \cap Sb$, то $m \in M \cap Sa$. Из $\mathrm{tp}(a, M \cap Sa) = \mathrm{tp}(b, M \cap Sa)$, $(m = f_\beta(x)) \in \mathrm{tp}(b, M)$ получаем $(m = f_\beta(x)) \in \mathrm{tp}(a, M)$. Значит, $m = f_\beta(a)$. В силу тождественности $\varphi$ на $M \cap Sa$ имеет место $\varphi^{-1}(m) = m = a_{i+1}$. Тогда $a_{i+1} \in M$, что противоречит предположению. Следовательно, $\varphi(a_{i+1}) \notin M$. Итак, $c \in C_M(a) \Rightarrow \varphi(c) \in C_M(b)$. Аналогично показывается импликация в обратную сторону. Предложение 2.1 доказано.

Теперь продолжим доказательство леммы 2.2.

Случай 1: $C_M(a) \cap C_M(b) \neq \varnothing$. Имеем $C_M(a) = C_M(b)$. Пусть $\widehat{\varphi} = \varphi \restriction (C_M(a) \cup (M \cap Sa))$, $\psi$ — тождественный автоморфизм $\mathfrak{C} \setminus C_M(a)$. Тогда $\widehat{\varphi} \restriction (M \cap Sa) = \psi \restriction (M \cap Sa)$ и отображение $\widehat{\varphi} \cup \psi$ является автоморфизмом $\mathfrak{C}$. Ясно, что $(\widehat{\varphi} \cup \psi)(a) = b$ и $(\widehat{\varphi} \cup \psi)(m) = m$ для всех $m \in M$. Поэтому $\mathrm{tp}(a, M) = \mathrm{tp}(b, M)$.

Случай 2: $C_M(a) \cap C_M(b) = \varnothing$. Пусть $C \leftrightharpoons \mathfrak{C} \setminus (C_M(a) \cup C_M(b))$, $B \leftrightharpoons C_M(a) \cup C_M(b) \cup (M \cap Sa)$. Тогда $SB = SC_M(a) \cup SC_M(b) \cup S(M \cap Sa) = C_M(a) \cup (M \cap Sa) \cup C_M(b) \cup (M \cap Sb) = B$. Таким образом, $B$ — подполигон. Очевидно, что и $C$ является подполигоном, причем $B \cap C = M \cap Sa = D$. Пусть $\widehat{\varphi}$ — такое отображение, что $\mathrm{dom}(\widehat{\varphi}) = B$, $\widehat{\varphi}$ на $C_M(a) \cup (M \cap Sa)$ совпадает с $\varphi$, а на $C_M(b)$ — с $\varphi^{-1}$. Тогда $\widehat{\varphi}$ — тождественный на $D$ автоморфизм $B$. Пусть $\psi$ — тождественный автоморфизм $C$. Ясно, что $\widehat{\varphi} \cup \psi$ является таким тождественным на $M$ автоморфизмом $\mathfrak{C}$, что $(\widehat{\varphi} \cup \psi)(a) = b$. Имеем $\mathrm{tp}(a, M) = \mathrm{tp}(b, M)$. Лемма 2.2. доказана.

**Теорема 2.1.** *Каждая стационарная теория стабильна.*

Доказательство. Пусть $M \models T$, $|M| = \varkappa$, $\varkappa = \varkappa^{|T|}$. Так как $|Sa| = |\{f_\alpha(a)\colon \alpha \in S\}| \leqslant |S| \leqslant |T|$ для любого элемента $a \in \mathfrak{C}$, то $|M \cap Sa| \leqslant |T|$. По лемме 2.2 $|S(M)| \leqslant |M|^{|T|} \cdot 2^{|T|}$, где $S(M)$ — множество всех полных 1-типов над $M$. Но $M^{|T|} \cdot 2^{|T|} = |M^{|T|}| = \varkappa^{|T|} = \varkappa$. Следовательно, $T$ $\varkappa$-стабильна. Теорема доказана.

**Теорема 2.2.** *Пусть $T$-стационарная теория, $M \models T$, $\bar{a}$, $\bar{b} \in \mathfrak{C} \setminus M$. Следующие условия эквивалентны*:

(1) $\mathrm{tp}(\bar{b}, M \cup \bar{a}) \downarrow M$;

(2) $C_M(\bar{a}) \cap C_M(\bar{b}) = \varnothing$.

Доказательство. (1)⇒(2) Докажем методом от противного. Пусть $C_M(\bar{a}) \cap C_M(\bar{b}) \neq \varnothing$. Тогда найдутся такие $a \in \bar{a}$; $b \in \bar{b}$, что $C_M(a) = C_M(b)$, и существует такой путь $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ без элементов из $M$, что $a_0 = a$, $a_n = b$. По теореме 2.1 $T$ стабильна. Если $N \models T$ — такое элементарное расширение $M$, что $M \cup a \subseteq N$ и $\operatorname{tp}(b, N) \downarrow M$, то $b \notin N$. Пусть $i < n$ такое, что $a_i \in N \cap C_M(a)$, но $a_k \notin N$ для всех $i < k \leqslant n$. Так как $a_i \in N$, $a_{i+1} \notin N$, то $a_{i+1} \notin Sa_i$. Поэтому $a_i \in Sa_{i+1}$, следовательно $a_i \in N \cap Sa_{i+1}$. Ввиду стационарности $T$ тогда $a_i \in N \cap Sa_k$ для всех $k$, $i < k \leqslant n$ (в частности, $a_i \in N \cap Sb$). Через $\varphi(x, y)$ обозначим формулу $y = f_\alpha(x)$, где $\alpha \in S$ такое, что $a_i = f_\alpha(b)$. Если $d$ — схема над $M$ в смысле [15], определяющая $\operatorname{tp}(b, M)$, $\psi(y, \bar{m}_1) = d(\varphi(x, y))$, где $\bar{m}_1 \in M$, то $\mathfrak{C} \models \psi(a_i, \bar{m}_1)$, откуда $M \models \exists x \psi(x, \bar{m}_1)$. Пусть $m \in M$ такое, что $M \models \psi(m, \bar{m}_1)$. Ясно, что $(m = f_\alpha(x)) \in \operatorname{tp}(b, N)$. Отсюда $\mathfrak{C} \models (m = f_\alpha(b))$, но $f_\alpha(b) = a_i$ и $a_i \in N \setminus M$; противоречие.

(2)⇒(1) Следует из теоремы 2.1 и леммы 1.2.

## § 3. ХАРАКТЕРИСТИКА МОНОИДОВ, НАД КОТОРЫМИ ВСЕ ПОЛИГОНЫ ИМЕЮТ СТАБИЛЬНУЮ ТЕОРИЮ

Моноид $S$ называется *стабилизатором* (*суперстабилизатором*, *почти ω-стабилизатором*, *ω-стабилизатором*), если $\operatorname{Th}(A)$ стабильна (суперстабильна, почти ω-стабильна в смысле [10], ω-стабильна соответственно) для любого полигона $A$ над $S$. Моноид $S$ называется *ЛУ-моноидом*, если $S$ удовлетворяет аксиоме $\forall x \forall y (\exists z (x = zy) \vee \exists w (y = wx))$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения: $a < b \Leftrightarrow a \leqslant b \,\&\, \neg(b \leqslant a)$; $a \infty b \Leftrightarrow a \leqslant b \,\&\, b \leqslant a$; $\tilde{a} = \{b \in \mathfrak{C}\colon a \infty b\}$, $\tilde{a} \leqslant \tilde{b} \Leftrightarrow a \leqslant b$; $\tilde{A} \Leftrightarrow \{\tilde{a}\colon a \in A\}$, где $A$ — полигон над $S$; $\tilde{S} \Leftrightarrow (\tilde{S}e)$; $I_S \Leftrightarrow |\tilde{S}|$; $a \ll b \Leftrightarrow a < b \,\&\, \forall c (a < c \Rightarrow b \leqslant c)$.

Замечания 3.1 (1) Отношение $\infty$ на полигоне $A$ является отношением эквивалентности.

(2) Отношение $\leqslant$ на $\tilde{A}$ корректно и является отношением частичного порядка.

(3) Неравенство $\alpha \leqslant \beta$ имеет место тогда и только тогда, когда $S\beta \subseteq S\alpha$ ($\alpha, \beta \in S$).

(4) Моноид $S$ — ЛУ-моноид тогда и только тогда, когда $\langle \tilde{S}; \leqslant \rangle$ — линейно упорядоченное множество.

(5) Моноид $S$ — группа тогда и только тогда, когда $I_S = 1$.

**Лемма 3.1.** *Если $S$ — ЛУ-моноид, то $\operatorname{Th}(A)$ стационарна для любого полигона $A$ над $S$.*

Доказательство. Пусть $M \models \operatorname{Th}(A)$, $a$, $b \in \mathfrak{C} \setminus M$, $a = f_\alpha(b)$, $c \in M$ и $c = f_\beta(b)$ для некоторых $\alpha, \beta \in S$. Покажем, что $c \in M \cap Sa$. Так как $S$ — ЛУ-моноид, то либо $\alpha \leqslant \beta$, либо $\beta \leqslant \alpha$. Пусть $\alpha \leqslant \beta$, т. е. $\beta = \gamma\alpha$ для некоторого $\gamma \in S$. Тогда $c = f_\beta(b) = f_{\gamma\alpha}(b) = f_\gamma(f_\alpha(b)) = f_\gamma(a)$. Значит, $c \in M \cap Sa$. Остается доказать невозможность случая, когда $\beta \leqslant \alpha$. Предположим, что $\beta \leqslant \alpha$. Тогда $\alpha = \delta\beta$ для подходящего $\delta \in S$, отсюда $a = f_\alpha(b) = f_\delta(f_\beta(b)) = f_\delta(c)$. Поскольку $c \in M$, то $a \in M$; противоречие. Таким образом, $M \cap Sb \subseteq M \cap Sa$. Обратное включение очевидно. Ввиду произвольности $a$ и $b$ $\operatorname{Th}(A)$ стационарна. Лемма доказана.

**Лемма 3.2.** *Каждый ЛУ-моноид является стабилизатором.*

Доказательство. Пусть $S$ — ЛУ-моноид, $A$ — полигон над $S$. По лемме 3.1 $\operatorname{Th}(A)$ стационарна, а по теореме 2.1 $\operatorname{Th}(A)$ стабильна. Следовательно, $S$ — стабилизатор. Лемма доказана.

Пусть $K \Leftrightarrow \{\langle n, m \rangle\colon m \leqslant n < \omega\}$, $\leqslant$ — лексикографический порядок на $K$; $\Pi$ — (единственный) изоморфизм из $\langle \omega; \leqslant \rangle$ на $\langle K; \leqslant \rangle$; $S$ — моноид, $A$ — полигон над $S$, $a_1$, $a_2$, $a_3$ — произвольные такие элементы $A$, что $a_3 \leqslant a_1$, $a_3 \leqslant a_2$. Нетрудно понять, что $\langle \omega; \leqslant \rangle \simeq \langle K; \leqslant \rangle$.

Определение 3.1. *Назовем* $(K, a_1, a_2, a_3)$*-конструкцией над* $A$ *следующее индуктивное определение полигонов* $A_i$ *и элементов* $b_i$, $c_i$, $d_{\langle n, m\rangle}$ *для всех* $i < \omega$, $\langle n, m\rangle \in K$:

(1) $A_0 = A$, $b_0 = a_1$, $c_0 = a_2$, $d_{\langle 0, 0\rangle} = a_3$;

(2) *если* $\Pi(i+1) = \langle n, m\rangle$, $n > m = 0$, *то* $A_{i+1} = A_i \oplus h_i(A)(\varphi)$, $b_n = h_i(a_1)$, $d_{\langle n, m\rangle} = h_i(a_3)$, *где* $h_i$ — *склеивание над* $A_i$ *по правилу* $\varphi(a_2) = a_2$;

(3) *если* $\Pi(i+1) = \langle n, m\rangle$, $n > m > 0$, *то* $A_{i+1} = A_i \oplus h_i(A)(\varphi)$, $d_{\langle n, m\rangle} = h_i(a_3)$, *где* $h_i$ — *склеивание над* $A_i$ *по правилу* $\varphi(a_1) = b_n$, $\varphi(a_2) = c_m$;

(4) *если* $\Pi(i+1) = \langle n, m\rangle$, $n = m > 0$, *то* $A_{i+1} = A_i \oplus h_i(A)(\varphi)$, $c_m = h_i(a_2)$, $d_{\langle n, m\rangle} = h_i(a_3)$, *где* $h_i$ — *склеивание над* $A_i$ *по правилу* $\varphi(a_1) = b_n$.

Через $(K, a_1, a_2, a_3)(A)$ обозначим $\bigcup\limits_{i<\omega} A_i$.

**Лемма 3.3.** *Определение* $(K, a_1, a_2, a_3)$*-конструкции над* $A$ *корректно и при этом*

(1) $Sb_n \cap Sb_m = Sb_n \cap Sc_m = Sc_n \cap Sc_m = Sa_1 \cap Sa_2$ *для всех* $m \neq n$ $(m, n < \omega)$;

(2) $Sb_n \cap Sc_n = Sa_1 \cap Sa_2$ *для всех* $n < \omega$.

Доказательство проводится индукцией по шагам конструкции.

**Лемма 3.4.** *Пусть* $A$ — *полигон над* $S$; $a_1$, $a_2$, $a_3$ — *такие элементы* $A$, *что* $a_3 < a_1$, $a_3 < a_2$; $a_1$ *и* $a_2$ *несравнимы относительно* $\leqslant$. *Тогда все элементы* $b_i$, $c_i$, $d_{\langle n, m\rangle}$ $(i < \omega, \langle n, m\rangle \in K)$, *полученные с помощью* $(K, a_1, a_2, a_3)$*-конструкции над* $A$, *попарно различны.*

Доказательство. Временно через $H$ обозначим $Sa_1 \cap Sa_2$. Нетрудно понять, что $H \subsetneqq Sa_1$, $H \subsetneqq Sa_2$, $a_3 \notin Sa_1 \cup Sa_2$ (тем более $a_3 \notin H$). Отсюда ввиду леммы 3.3 $\Pi(i+1) = \langle n, m\rangle$, то $d_{\langle n, m\rangle} \in A_{i+1} \setminus A_i$, поэтому

1) $b_k \in A_{j+1} \setminus A_j$ для всех $0 < k < \omega$, где $\Pi(j+1) = \langle k, 0\rangle$;

2) $c_r \in A_{t+1} \setminus A_t$ для всех $0 < r < \omega$, где $\Pi(t+1) = \langle r, r\rangle$. Таким образом, $b_k \neq c_r$ для любых $k$, $r < \omega$ и $d_\varepsilon \neq d_\tau$ для различных $\varepsilon$, $\tau$ из $K$. Теперь достаточно показать, что $b_k \neq d_{\langle k, 0\rangle}$ и $c_r \neq d_{\langle r, r\rangle}$ для любых $k$, $r < \omega$. Для $k = 0$, $r = 0$ это следует из условия леммы. Пусть $\Pi^{-1}(\langle k, 0\rangle) = j + 1$. Тогда $b_k = h_j(a_1)$, $d_{\langle k, 0\rangle} = h_j(a_3)$, где $h_j$ — склеивание над $A_j$ по правилу $\varphi(a_2) = a_2$. Но $a_1 \neq a_3$, откуда $b_k \neq d_{\langle k, 0\rangle}$ (как образы при изоморфизме $h_j$). Аналогично, если $t + 1 = \Pi^{-1}(\langle r, r\rangle)$, $r > 0$, $c_r = h_t(a_2)$, $d_{\langle r, r\rangle} = h_t(a_3)$, где $h_t$ — склеивание над $A_t$ по правилу $\varphi(a_1) = b_r$. Так как $a_2 \neq a_3$, то $c_r \neq d_{\langle r, r\rangle}$. Лемма доказана.

**Лемма 3.5.** *Пусть* $S$ — *моноид,* $\alpha_1$, $\alpha_2$ — *такие элементы* $S$, *что* $e < \alpha_1$, $e < \alpha_2$, $\alpha_1$ *и* $\alpha_2$ *несравнимы относительно* $\leqslant$, $M = (K, \alpha_1, \alpha_2, e)(Se)$. *Тогда* $\mathrm{Th}(M)$ *нестабильна.*

Доказательство. Пусть $A = Se$, главные операции на $M$ обозначены через $f_\alpha$, $\alpha \in S$; $b_i$, $c_i$, $d_{\langle n, m\rangle}$ $(i < \omega, \langle n, m\rangle \in K)$ — элементы $(K, \alpha_1, \alpha_2, e)$-конструкции над $A$. Предварительно докажем три предложения.

**Предложение 3.1.** *Если* $m \leqslant n$, *то* $M \models b_n = f_{\alpha_1}(d_{\langle n,m\rangle})\ \&\ f_{\alpha_2}(d_{\langle n,m\rangle}) = c_m$.

Доказательство следует из $Se \models \alpha_1 = \pi_{\alpha_1}(e)\ \&\ \alpha_2 = \pi_{\alpha_2}(e)$, $b_n = h_i(\alpha_1)$, $c_m = h_i(\alpha_2)$, $d_{\langle n, m\rangle} = h_i(e)$, где $h_i$ — изоморфизм с $\mathrm{dom}(h_i) = Se$ (являющийся склеиванием над $A_i$, зависящим от $\langle n, m\rangle$, где $i < \omega$ такое, что $\Pi(i+1) = \langle n, m\rangle$).

**Предложение 3.2.** *Имеем* $b_n \notin H$, $c_m \notin H$, $d_{\langle n, m\rangle} \notin H$ *для любых* $m \leqslant n < \omega$, *где* $H \leftrightharpoons S\alpha_1 \cap S\alpha_2$.

Доказательство. Из условия леммы 3.5 очевидно, что $\alpha_1 \notin H$, $\alpha_2 \notin H$, $e \notin H$. Все склеивания $h$, участвующие при $(K, \alpha_1, \alpha_2, e)$-конструкции над $A (=Se)$, тождественны на $H$. Следовательно, $b_n$, $c_m$, $d_{\langle n, m\rangle}$ (как образы при $h$ элементов $\alpha_1, \alpha_2$, $e$ соответственно) не принадлежат $H$.

**Предложение 3.3.** $\neg M \models \psi(b_n, c_m)$ для всех $\langle n, m\rangle \notin K$, т. е. $n < m < \omega$, где $\psi(x, y) \Leftrightarrow \exists z (x = f_{\alpha_1}(z) \,\&\, y = f_{\alpha_2}(z))$.

Доказательство проведем методом от противного. Пусть $a \in M$ такое, что $b_n = f_{\alpha_1}(a)$, $c_m = f_{\alpha_2}(a)$ и $n < m < \omega$. Как было отмечено в доказательстве леммы 3.4, $b_n$ впервые появляется на шаге $\Pi^{-1}(\langle n, 0\rangle)$, $c_m$ — на шаге $\Pi^{-1}(\langle m, m\rangle)$. При $i = \Pi^{-1}(\langle n, 0\rangle)$, $j+1 = \Pi^{-1}(\langle m, m\rangle)$ имеем $i \leqslant j$. Заметим, что $a \notin A_j$ (иначе $c_m \in A_j$, что невозможно). Пусть $k < \omega$ такое, что $a \in A_{k+1} \backslash A_k$ (ясно, что $i \leqslant j < k$) и $\Pi(k+1) = \langle n', m'\rangle$. Так как $n < m$, $\langle m, m\rangle \leqslant \langle n', m'\rangle$, то $n < m \leqslant n'$. В силу $a \in A_{k+1} \backslash A_k$, $A_{k+1} = A_k \oplus h_k(A)$ получаем $a \in h_k(A)$. Следовательно, $b_n, c_m \in h_k(A)$. Нетрудно понять, что

$$A_k \cap h_k(A) = \begin{cases} Sc_0, & \text{если } n' > m' = 0, \\ Sb_{n'} \cup Sc_{m'}, & \text{если } n' > m' > 0, \\ Sb_{n'}, & \text{если } n' = m' > 0. \end{cases}$$

Очевидно, $b_n \in A_i \subseteq A_j \subseteq A_k$, поэтому $b_n \in A_k \cap h_k(A)$.

Случай 1: $n' > m' = 0$. Тогда $b_n \in Sc_0$, откуда $b_n \in Sb_n \cap Sc_0 = H$; противоречие с предложением 3.2.

Случай 2: $n' > m' > 0$. Имеем $b_n \in Sb_{n'} \cup Sc_{m'}$.

Случай 2а: $b_n \in Sb_{n'}$. Так как $n < n'$, то по лемме 3.3 $Sb_n \cap Sb_{n'} = H$ и $b_n \in H$; противоречие.

Случай 2б: $b_n \in Sc_{m'}$. Опять по лемме 3.3 получаем противоречие.

Случай 3: $n' = m' > 0$. Тогда $b_n \in Sb_{n'}$, что невозможно, как отмечено в подслучае 2а.

Итак, во всех случаях приходим к противоречию. Предложение 3.3 доказано.

Из предложений 3.1 и 3.3 получаем

$$M \models \psi(b_n, c_m) \Leftrightarrow n \geqslant m.$$

Следовательно, $\mathrm{Th}(M)$ не стабильна [2]. Лемма 3.5 доказана.

**Теорема 3.1.** *Моноид $S$ — стабилизатор тогда и только тогда, когда $S$ — ЛУ-моноид.*

Доказательство непосредственно следует из лемм 3.2 и 3.5.

## § 4. ХАРАКТЕРИСТИКА МОНОИДОВ, НАД КОТОРЫМИ ВСЕ ПОЛИГОНЫ ИМЕЮТ СУПЕРСТАБИЛЬНУЮ ТЕОРИЮ

Пусть $A$ — полигон над моноидом $S$, $B$ — его подполигон, $a \in A \backslash B$. Элемент $c \in B$ называется *входным элементом от $a$ в $B$*, если $c \in Sa$ и $c \leqslant b$ для всех $b \in B \cap Sa$.

**Лемма 4.1.** *Пусть $T$ — стационарная теория. $M \models T$, $a, b \in \mathfrak{C} \backslash M$, $m$ — входной элемент от $a$ в $M$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{tp}(a, M) = \mathrm{tp}(b, M)$;

(2) *$m$ является входным элементом от $b$ в $M$ и* $\mathrm{tp}(a, \{m\}) = \mathrm{tp}(b, \{m\})$.

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2) По лемме 2.2 $M \cap Sa = M \cap Sb$. Следовательно, $m$ является входным элементом от $b$ в $M$. Так как $\mathrm{tp}(a, M) = \mathrm{tp}(b, M)$ и $m \in M$, то $\mathrm{tp}(a, \{m\}) = \mathrm{tp}(b, \{m\})$.

(2)$\Rightarrow$(1) Сначала докажем, что $M \cap Sa = Sm = M \cap Sb$. Действительно, $m \in M \cap Sa$, поэтому $Sm \subseteq M \cap Sa$. Теперь пусть $m' \in M \cap Sa$. Поскольку $m$ — входной элемент от $a$ в $M$, то $m \leqslant m'$, т. е. найдется такое $\alpha \in S$, что $m' = f_\alpha(m)$. Значит, $m' \in Sm$ и $M \cap Sa = Sm$. Аналогично $M \cap Sb = Sm$. Ввиду равенства $\mathrm{tp}(a, \{m\})$ существует такой тождественный на $\{m\}$ автоморфизм $\varphi$ модели $\mathfrak{C}$, что $\varphi(a) = b$. Пусть $m' \in Sm$ и $m' = f_\alpha(m)$. Тогда $\varphi(m') = f_\alpha(\varphi(m)) = f_\alpha(m) = m'$. Стало быть, $\varphi$ тождествен на $Sm$. Отсюда $\mathrm{tp}(a, M \cap Sa) = \mathrm{tp}(b, M \cap Sa)$. По лемме 2.2 $\mathrm{tp}(a, M) = \mathrm{tp}(b, M)$. Лемма доказана.

Моноид $S$ называется ВУ-*моноидом*, если $\langle \tilde{S}; \leqslant \rangle$ является вполне упорядоченным множеством.

Замечание 4.1. ВУ-моноиды суть в точности ЛУ-моноиды, удовлетворяющие условию максимальности для левых главных идеалов (т. е. если для любой последовательности левых главных идеалов $S\alpha_1 \subseteq \subseteq S\alpha_2 \subseteq \ldots \subseteq S\alpha_n \subseteq \ldots$ найдется такое $n < \omega$, что $S\alpha_n = S\alpha_m$ для всех $m \geqslant n$).

**Лемма 4.2.** *Пусть $T$ — произвольная полная теория полигонов над* ВУ-*моноидом $S$, $M \models T$, $a \in \mathfrak{C} \setminus M$ и $M \cap Sa \neq \varnothing$. Тогда существует входной элемент от $a$ в $M$.*

Доказательство. Пусть $B \rightleftharpoons M \cap Sa$. Так как $S$ — ВУ-моноид, а следовательно и ЛУ-моноид, то $\langle \tilde{B}; \leqslant \rangle$ является линейно упорядоченным множеством, где $\tilde{B} = \{\tilde{b}\colon b \in B\}$. Предположим, что $\tilde{B}$ не имеет наименьшего элемента. Тогда существуют такие $b_n \in B$, $\alpha_n \in S$, $(n < \omega)$, что

$$b_0 = f_{\alpha_0}(a), \ldots, b_n = f_{\alpha_n}(a), \ldots, \tag{4.1}$$

$$\tilde{b}_0 > \tilde{b}_1 > \ldots > \tilde{b}_n > \ldots. \tag{4.2}$$

Из (1) и (2) вытекает, что в $\tilde{S}(=(\tilde{S}e))$

$$\tilde{\alpha}_0 > \tilde{\alpha}_1 > \ldots > \tilde{\alpha}_n > \ldots. \tag{4.3}$$

Но (4.3) противоречит тому, что $S$ является ВУ-моноидом. Таким образом, $\langle \tilde{B}; \leqslant \rangle$ имеет наименьший элемент, скажем $\tilde{m}$. Очевидно, что $m$ будет входным элементом от $a$ в $M$. Лемма доказана.

**Лемма 4.3.** *Каждый* ВУ-*моноид является суперстабилизатором.*

Доказательство. Пусть $T$ — произвольная полная теория полигонов над ВУ-моноидом $S$ (по лемме 3.1 $T$ стационарна) и $M \models T$, $|M| = \tau \geqslant 2^{|T|}$, $Q_0 \rightleftharpoons \{\mathrm{tp}(a, M)\colon a \in M\}$, $Q_1 \rightleftharpoons \{\mathrm{tp}(a, M)\colon a \in \mathfrak{C} \setminus M,\ M \cap Sa = \varnothing\}$, $Q_2 \rightleftharpoons \{\mathrm{tp}(a, M)\colon a \in \mathfrak{C} \setminus M,\ M \cap Sa \neq \varnothing\}$. Очевидно, $|Q_0| = |M| = \varkappa$. По лемме 2.2 $|Q_1| \leqslant |S(\varnothing)| \leqslant 2^{|T|} \leqslant \varkappa$. По леммам 4.2 и 4.1 $|Q_2| \leqslant \leqslant |M| 2^{|T|} = 2^{|T|}\varkappa = \varkappa$. Таким образом, $|S(M)| = |Q_0 \cup Q_1 \cup Q_2| \leqslant \varkappa$. Значит, $T$ суперстабильна. Лемма доказана.

**Лемма 4.4.** *Каждый суперстабилизатор является* ВУ-*моноидом.*

Доказательство. Пусть $S$ — суперстабилизатор. Очевидно, что $S$ — стабилизатор, а следовательно, по теореме 3.1 $S$ — ЛУ-моноид. Значит, $\tilde{S}$ линейно упорядоченно относительно $\leqslant$. Предположим теперь, что $\tilde{S}$ не является вполне упорядоченным множеством. Тогда в $\tilde{S}$ найдутся такие элементы $\alpha_n$, $n < \omega$, что

$$\tilde{\alpha}_0 > \tilde{\alpha}_1 > \ldots > \tilde{\alpha}_n > \ldots. \tag{4.4}$$

Пусть $\varkappa$ — произвольный фиксированный кардинал больше $2^{|T|}$, $Q \rightleftharpoons \{\eta \in \in {}^{\omega}\varkappa\colon \exists n < \omega \forall m > n (\eta(m) = 0)\}$. Через $\widehat{0}$ обозначим такую последовательность $\eta \in {}^{\omega}\varkappa$, что $\eta(m) = 0$ для всех $m < \omega$. Если $\eta \in {}^{\omega}\varkappa$ и $\eta \neq \widehat{0}$, то пусть $r(\eta)$ обозначает $\min\{n < \omega\colon \forall m \geqslant n(\eta(m) = 0)\}$. Зададим на $Q$ отношение $<$ следующим образом: $\eta < \varepsilon \Leftrightarrow r(\eta) < r(\varepsilon)$ или $r(\eta) = r(\varepsilon)$ и существует такое $k < \omega$, что $\eta \restriction k = \varepsilon \restriction k$, но $\eta(k) < \varepsilon(k)$.

Система $\langle Q; \leqslant \rangle$ является вполне упорядоченным множеством. Теперь на $Q$ введем операцию $g$ (операцию «стирания последнего ненулевого члена») индукцией по $r(\eta)$:

1) $g(\widehat{0}) = \widehat{0}$,

2) если $\eta \neq \widehat{0}$, $r(\eta) = n + 1$, то $g(\eta)$ — такой элемент из $Q$, что $g(\eta) \restriction n = \eta \restriction n$, $g(\eta)(m) = 0$ для всех $m \geqslant n$.

После этого индукцией по $\eta$ из $\langle Q; \leqslant \rangle$ определим полигоны $M_\eta$, $N_\eta$ и элементы $\alpha_m^\eta \in M_\eta$, $m < \omega$, следующим образом: $M_{\widehat{0}} \rightleftharpoons Se = N_{\widehat{0}}$,

$\widehat{\alpha_m^0} = \alpha_m \, (m < \omega)$. Пусть $N'_\eta \leftrightharpoons \bigcup_{\delta<\eta} N_\delta, k \leftrightharpoons r(\eta) - 1, \ \tau \leftrightharpoons g(\eta)$. Тогда $M_\eta \leftrightharpoons \leftrightharpoons h_\eta(Se)$, $N_\eta \leftrightharpoons N'_\eta \oplus M_\eta$, $\alpha_m^\eta \leftrightharpoons h_\eta(\alpha_m)(m < \omega)$, где $h_\eta$ — склеивание над $N'_\eta$ по правилу $\varphi(\alpha_k) = \alpha_k^\tau$. Нетрудно понять, что такая индукция осуществима. Пусть $N \leftrightharpoons \bigcup_{\eta\in Q} N_\eta$, $T \leftrightharpoons \mathrm{Th}(N)$, $\psi_m(x, y) \leftrightharpoons (y = f_{\alpha_m}(x))\,(m < \omega)$, $e_\eta \leftrightharpoons h_\eta(e)$, $\eta \in Q$. Очевидно, что $(y_1 \neq y_2) \,\&\, \psi_m(x, y_1) \,\&\, \psi_m(x, y_2)$ — несовместная формула. Определим

$$\Phi \leftrightharpoons T \cup \bigcup_{m<\omega} \{\psi_m(x_\eta, y_{\eta\restriction m}) \colon \eta \in {}^\omega\varkappa\} \cup \bigcup_{m<\omega} \{y_\tau \neq y_\varepsilon \colon \tau \neq \varepsilon, \tau, \varepsilon \in {}^{\omega>}\varkappa\}.$$

По построению $N \models \psi_m(e_\eta, \alpha_m^\eta)$ для любого $\eta \in Q$. Следовательно, каждая конечная часть $\Phi$ совместна, по теореме компактности $\Phi$ совместно. Пусть $\varkappa \geqslant 2^{|T|}$, $\varkappa^\omega > \varkappa$, элементы $a_\tau$, $b_\eta (\tau \in {}^{\omega>}\varkappa, \ \eta \in {}^\omega\varkappa)$ такие, что $\mathfrak{C} \models \psi_m(b_\eta, a_\tau)$ при $\tau = \eta \restriction m$ и $A = \{a_\tau \colon \ \tau \in {}^{\omega>}\varkappa\}$. Тогда $|A| \leqslant \sum_{n<\omega} \varkappa^n = \varkappa$, но $|S(A)| \geqslant |\{b_\eta \colon \ \eta \in {}^\omega\varkappa\}| = \varkappa^\omega > \varkappa$. Значит, $T$ не суперстабильна и $S$ не является суперстабилизатором. Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

**Теорема 4.1.** *Моноид $S$ — суперстабилизатор тогда и только тогда, когда $S$ — ВУ-моноид.*

Доказательство непосредственно следует из лемм 4.3 и 4.4.

**Лемма 4.5.** *Пусть $T$ — стационарная теория, $M \models T$, $a$, $b \in \mathfrak{C}\backslash M$, $m$ — входной элемент от $a$ в $M$, $m = f_\alpha(a)$ для некоторого $\alpha \in S$. Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{tp}(a, M) = \mathrm{tp}(b, M)$;

(2) $\mathrm{tp}(a, \varnothing) = \mathrm{tp}(b, \varnothing)$, $m = f_\alpha(b)$ *и $m$ является входным элементом от $b$ в $M$.*

Доказательство. (1)$\Rightarrow$(2). Легко следует из (1)$\Rightarrow$(2) леммы 4.1.

(2)$\Rightarrow$(1) Пусть $\varphi$ — произвольный автоморфизм $\mathfrak{C}$ такой, что $\varphi(a) = b$. Тогда $\varphi(m) = \varphi(f_\alpha(a)) = f_\alpha(\varphi(a)) = f_\alpha(b) = m$. Следовательно, $\varphi$ является тождественным на $\{m\}$ автоморфизмом и $\mathrm{tp}(a, \{m\}) = \mathrm{tp}(b, \{m\})$. По лемме 4.1 $\mathrm{tp}(a, M) = \mathrm{tp}(b, M)$.

**Теорема 4.2.** *Пусть $S$ — счетный моноид. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$S$ — ВУ-моноид;*

(2) *$S$ — суперстабилизатор;*

(3) *$S$ — почти $\omega$-стабилизатор.*

Доказательство. (1)$\Leftrightarrow$(2) По теореме 4.1. (3)$\Rightarrow$(2) Тривиально. Покажем (2)$\Rightarrow$(3). Пусть $M$ — произвольный счетный полигон над $S$, $a \notin M$ и $a$ реализует тип $p$ над $\varnothing$. По теореме 4.1 и лемме 4.2 существует входной элемент $m$ от $a$ в $M$. Пусть $m = f_\alpha(a)$, где $\alpha \in S$. По лемме 4.5 тройка $\langle p, m, \alpha\rangle$ определяет тип $a$ над $M$. Тогда $|S_p(M)| \leftrightharpoons |\{q \in S(M) \colon \ p \leqslant q\}| \leqslant |\{\langle m, \alpha\rangle \colon \ m \in M, \ \alpha \in S\}| = \omega$. Теорема доказана.

## § 5. О МОНОИДАХ, ЯВЛЯЮЩИХСЯ $\omega$-СТАБИЛИЗАТОРАМИ

Отношение $E$ эквивалентности на моноиде $S$ называется *левой конгруэнцией*, если $\alpha E \beta \Rightarrow \gamma\alpha E \gamma\beta$ для всех $\alpha, \beta, \gamma \in S$. Если $A$ — полигон над $S$, $a \in A$, то пусть $E_a$ обозначает такое отношение на $S$, что $\alpha E_a \beta \Leftrightarrow \Leftrightarrow f_\alpha(a) = f_\beta(a)$, $(\alpha, \beta \in S)$.

**Лемма 5.1.** (1) *Для любых $S$-полигона $A$ и элемента $a \in A$ отношение $E_a$ является левой конгруэнцией на $S$.*

(2) *Для любой левой конгруэнции $E$ существуют $S$-полигон $A$ и элемент $a \in A$ такие, что $E = E_a$.*

Доказательство. (1) непосредственно проверяется.

(2) Пусть $S/E \rightleftharpoons \{[\alpha]_E\colon \alpha \in S\}$, где $[\alpha]_E \rightleftharpoons \{\beta \in S\colon \beta E \alpha\}$. Определим операции $f_\gamma$, $\gamma \in S$, следующим образом: $f_\gamma([\alpha]_E) = [\gamma\alpha]_E$. Легко проверить, что $f_\gamma$, $\gamma \in S$, определены корректно, $\langle S/E; \langle f_\gamma\colon \gamma \in S\rangle\rangle$ является $S$-полигоном и $E = E_a$, где $a = [e]_E$.

**Лемма 5.2.** *Если $S$ — $\omega$-стабилизатор, то число левых конгруэнций $S$ не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть $Q$ — множество всех левых конгруэнций моноида $S$. Не нарушая общности, можно считать, что если $E, E' \in Q$ и $E \neq E'$, то $S/E \cap S/E' = \varnothing$. Пусть $A \rightleftharpoons \cup\{S/E\colon E \in Q\}$, $T = \mathrm{Th}(A)$, $a = [e]_E$, $a' = [e]_{E'}$, $E \neq E'$. Тогда $E_a = E$, $E_{a'} = E'$ по доказательству леммы 5.1 (2). Следовательно, $E_a \neq E_{a'}$, откуда $\mathrm{tp}(a, \varnothing) \neq \mathrm{tp}(a', \varnothing)$ и $|S(\varnothing)| \geqslant Q$. Так как $S$ — $\omega$-стабилизатор, то $\omega \geqslant |S(\varnothing)|$. Поэтому $|Q| \leqslant \omega$. Лемма доказана.

**Предложение 5.1.** *Пусть $S$ — такой моноид, что существуют $S$-полигон $A$ и элементы $\alpha$, $\beta \in S$, $a$, $b$, $c \in A$, удовлетворяющие условиям $b = f_\alpha(a)$, $c = f_\beta(b)$, $A = Sa \underset{\neq}{\supseteq} Sb \underset{\neq}{\supseteq} Sc$, $(Sx = Sa) \vee (Sx = Sb) \vee (Sx \subseteq Sc)$ для всех $x \in A$, $|\{x \in A\colon c = f_\beta(x)\}| < \omega$ и для всех $x \in A$ $f_\beta(x) = c \Rightarrow |\{y \in A\colon f_\alpha(y) = x\}| < \omega$. Тогда $S$ не является $\omega$-стабилизатором.*

Доказательство. Пусть $N \rightleftharpoons \{x \in A\colon c = f_\beta(x)\}$, $N^c \rightleftharpoons \{x \in N\colon Sx = Sc\}$, $N^a \rightleftharpoons \{x \in N\colon Sx = Sa\}$, $N^b \rightleftharpoons \{x \in N\colon Sx = Sb\}$. Из условий предложения следует, что $N = N^a \cup N^b \cup N^c$ и причем $N^a$, $N^b$, $N^c$ попарно не пересекаются. Пусть $N^c = \{f_{\gamma_1}(c), \ldots, f_{\gamma_k}(c)\}$. Для каждого $y \in N^b$ обозначим $P_y \rightleftharpoons \{x \in A\colon y = f_\alpha(x)\}$; $P_y^a \rightleftharpoons \{x \in P_y\colon Sx = Sa\}$, $P_y^b \rightleftharpoons \{x \in P_y\colon Sx = Sb\}$. Очевидно, $P_y = P_y^a \cup P_y^b$ и $P_y^a \cap P_y^b = \varnothing$. Пусть $|P_b^a| = m_a$, $|P_b^b| = m_b$, $l = \max\{|P_y|\colon y \in N\}$, $r = |\{y \in N^b\colon |P_y^a| = m_a, |P_y^b| = m_b\}|$. Для $m < \omega$, $\eta \in {}^\omega 2$ определим по индукции $S$ полигоны $B_m$, $C_\eta$ соответственно: $B_0 \rightleftharpoons A$; $B_{m+1} \rightleftharpoons B_m \oplus h_m(A)(\varphi)$, где $h_m$ — склеивание над $B_m$ по правилу $\varphi(b) = b$, $\mathrm{dom}(h_m) = A$ $(m < \omega)$; $C_{\eta\restriction 0} \rightleftharpoons A$, если $\eta(m) = 0$, то $C_{\eta\restriction m+1} \rightleftharpoons C_{\eta\restriction m}$; если $\eta(m) = 1$, то $C_{\eta\restriction m+1} \rightleftharpoons C_{\eta\restriction m} \oplus \chi_m^\eta(B_{l+m})(\varphi)$, где $\chi_m^\eta$ — такое склеивание над $C_{\eta\restriction m}$ по правилу $\varphi(c) = c$, что $\mathrm{dom}(\chi_m^\eta) = B_{l+m}$; $C_\eta \rightleftharpoons \bigcup\limits_{m<\omega} C_{\eta\restriction m}$.

Для $\eta(m) = 1$ через $b_{\eta\restriction m+1}$ обозначим $\chi_m^\eta(b)$. Пусть $\varphi_m(y, z) \rightleftharpoons (z = f_\beta(y)) \mathbin{\&} \mathop{\&}\limits_{i=1}^{k} (y \neq f_{\gamma_i}(z)) \mathbin{\&} \exists_x^m (f_\alpha(x) = y)$. Если $k(n) \rightleftharpoons m_b + (n + l)m_a$, то при $\eta(n) = 1$

$$C_\eta \models \varphi_{k(n)}(b_{\eta\restriction n+1}, c), \tag{5.1}$$

$$C_\eta \models \exists y \varphi_{k(n)}(y, c) \Leftrightarrow \eta(n) = 1, \tag{5.2}$$

$$C_\eta \models \exists^{r\cdot\eta(n)} y \varphi_{k(n)}(y, c). \tag{5.3}$$

Пусть $g_\eta\colon C_\eta \xrightarrow{\text{на}} D_\eta$ такие изоморфизмы, что $D_\eta \cap D_\xi = \varnothing$ при $\eta$, $\xi \in {}^\omega 2$ и $\eta \neq \xi$, $c_\eta = g_\eta(c)$ $(\eta \in {}^\omega 2)$, $D \rightleftharpoons \cup\{D_\eta\colon \eta \in {}^\omega 2\}$, $T \rightleftharpoons \mathrm{Th}(D)$. Из определения $D$ и соотношений (5.1)—(5.3) получаем, что $D \models \exists y \varphi_{k(n)}(y, c_\eta) \Leftrightarrow \eta(n) = 1$ для любого $\eta \in {}^\omega 2$. Отсюда $\mathrm{tp}(c_\eta, \varnothing) \neq \mathrm{tp}(c_\xi, \varnothing)$ при $\eta$, $\xi \in {}^\omega 2$ и $\eta \neq \xi$. Следовательно, $|S(\varnothing)| = {}^\omega 2$. Поэтому $T$ не является $\omega$-стабильной, а $S$ — $\omega$-стабилизатором. Предложение доказано.

Говорят, что *моноид $S$ удовлетворяет условию конечности правых решений* (УКПР), если $|\{x \in S\colon \alpha = \beta x\}| < \omega$ для любых $\alpha$, $\beta \in S$.

Замечание 5.1. Каждый моноид с левым сокращением (т. е. $\alpha\gamma = \alpha\beta \Rightarrow \gamma = \beta$ для любых $\alpha$, $\beta$, $\gamma \in S$) удовлетворяет УКПР.

**Предложение 5.2.** *Пусть моноид $S$ коммутативен или удовлетворяет УКПР. Если $S$ является $\omega$-стабилизатором, то $I_S \leqslant 2$ (т. е. $S$ имеет не более двух главных идеалов).*

Доказательство. Так как $S$ — $\omega$-стабилизатор, то по теореме 4.1 $\langle S; \leqslant\rangle$ — вполне упорядоченное множество. Предположим, что $I_S > 2$. Тогда найдутся такие $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1 \in S$, что $\alpha_2 = \beta_1\alpha_1$, $e \ll \alpha_1 \ll \alpha_2$.

Случай 1: $S$ — коммутативный моноид. Тогда отношение $\sim$ (т. е. $\ldots \leqslant \& \geqslant \ldots$) является конгруэнцией. В качестве $A$ возьмем $S$-полигон $\tilde{S}$. Если $a = e$, $b = \tilde{\alpha}_1$, $c = \tilde{\alpha}_2$, $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$, то полигон $A$, элементы $a, b, c \in A$, $\alpha, \beta \in S$ удовлетворяют всем условиям предложения 5.1, и $S$ не является $\omega$-стабилизатором; противоречие.

Случай 2: $S$ удовлетворяет УКПР. Если в качестве $A$ взять $Se$, то элементы $e, \alpha_1, \alpha_2 \in A$, $\alpha_1, \beta_1 \in S$ удовлетворяют условиям предложения 5.1; противоречие. Предложение доказано.

## § 6. ПОЛИГОНЫ НАД ГРУППОЙ

Если $A$ — полигон над $S$, $a \in A$, то пусть $\mathrm{Id}(a) \rightleftharpoons \{\alpha \in S\colon f_\alpha(a) = a\}$. Очевидно, что $\mathrm{Id}(a)$ является подмоноидом $S$. Причем, если $S$ — группа, то $\mathrm{Id}(a)$ — подгруппа $S$. Нетрудно доказывается

**Лемма 6.1.** *Если $A$ — полигон над группой $S$, $a, b \in A$, то следующие условия эквивалентны:*

(1) $\mathrm{Id}(a) = \mathrm{Id}(b)$;

(2) *существует полигонный изоморфизм* $\varphi\colon Sa \twoheadrightarrow Sb$ *такой, что* $\varphi(a) = b$;

(3) *существует такой автоморфизм $\varphi'$ полигона $A$, тождественный на $A \setminus (Sa \cup Sb)$, что $\varphi'(a) = b$.*

Пусть $H$ — произвольная подгруппа группы $S$, $S/H \rightleftharpoons \{\alpha H\colon \alpha \in S\}$. Определив на $S/H$ операции $f_\beta^H(\alpha H) = (\beta\alpha) H$, $\beta \in S$, можно превратить $S/H$ в $S$-полигон. Нетрудно проверить, что в полигоне $\langle S/H; \langle f_\beta^H\colon \beta \in S\rangle\rangle$ имеет место равенство $\mathrm{Id}(eH) = H$. Не нарушая общности, можно считать, что $S/H \cap S/K = \varnothing$ для любых различных подгрупп $H, K$ группы $S$.

Пусть $P(S)$ — множество всех подгрупп группы $S$, $A_{P(S)} \rightleftharpoons \bigcup\{S/H\colon H \in P(S)\}$, $T_{P(S)} \rightleftharpoons \mathrm{Th}(\bar{A}_{P(S)})$, где $\bar{A}_{P(S)}$ — объединение счетного числа попарно непересекающихся копий $A_{P(S)}$.

**Лемма 6.2.** *Для теории $T_{P(S)}$*

$$|S(\varnothing)| = |P(S)|.$$

Доказательство. Пусть $a \in \mathfrak{C}$, $p \in S(\varnothing)$, $p = \mathrm{tp}(a, \varnothing)$. Очевидно, $\mathrm{Id}(a) \in P(S)$. По лемме 6.1 $\mathrm{Id}(a)$ не зависит от выбора элемента $a$, реализующего $p$. Через $H_p$ обозначим $\mathrm{Id}(a)$. Из леммы 6.1 также следует, что

$$p \neq q \Leftrightarrow H_p \neq H_q \tag{6.1}$$

для любых $p, q \in S(\varnothing)$.

Заметим, что, если $S$ — моноид, $A$ — подполигон $S$-полигона $B$, $a \in A$, то $\mathrm{Id}(a)$ относительно $A$ равен $\mathrm{Id}(a)$ относительно $B$.

Пусть $H \in P(S)$. По определению полигона $\bar{A}_{P(S)}$ полигон $S/H$ является его подполигоном. Тогда $\mathrm{Id}(eH) = H$ в $S/H$, а следовательно, и в $\bar{A}_{P(S)}$. Значит, $H = H_p$, где $p = \mathrm{tp}(eH, \varnothing)$. Таким образом в силу (6.1), соответствие $\langle p, H_p\rangle$ есть биекция между $S(\varnothing)$ и $P(S)$. Лемма доказана.

**Следствие 6.1.** *Если $S$ — счетная группа, то либо $|P(S)| = 2^\omega$, либо $|P(S)| \leqslant \omega$.*

Доказательство следует из леммы 6.2 и теоремы Кантора — Бендиксона о пространствах со счетной базой.

**Теорема 6.1.** *Пусть $S$ — счетная группа. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *$S$ — $\omega$-стабилизатор;*

(2) *$S$ имеет не более чем счетное число подгрупп.*

Доказательство. Из теоремы 4.2 следует, что $S$ является почти $\omega$-стабилизатором.

(1)$\Rightarrow$(2) Если $S$ — стабилизатор, то $T_{P(S)}$ $\omega$-стабильна. Поэтому $|S(\varnothing)| \leqslant \omega$. По лемме 6.2 $|P(S)| \leqslant \omega$.

(2)$\Rightarrow$(1) По лемме 6.1 для любой полной теории $T$ $S$-полигонов $|S(\varnothing)| \leqslant |P(S)| \leqslant \omega$. Как сказано выше, $T$ почти $\omega$-стабильна. Отсюда ясно, что $T$ $\omega$-стабильна.

Следующая теорема дает, в некотором смысле, полное описание свойств теорий полигонов над группой.

**Теорема 6.2.** *Пусть $S$-группа, $T$ — полная теория $S$-полигонов.* Тогда

(1) *если $a$, $b \in \mathfrak{C}$, то* $\mathrm{tp}(a, \varnothing) = \mathrm{tp}(b, \varnothing) \Leftrightarrow \mathrm{Id}(a) = \mathrm{Id}(b)$;

(2) *если $a$, $b \in \mathfrak{C} \setminus M$, $M \models T$, то* $\mathrm{tp}(a, M) = \mathrm{tp}(b, M) \Leftrightarrow \mathrm{Id}(a) = \mathrm{Id}(b)$;

(3) *если $M \prec N \prec \mathfrak{C}$, $a \in N \setminus M$, то $M \prec M \cup Sa$ и $M \preccurlyeq N \setminus Sa$;*

(4) *все неалгебраические типы в $T$ минимальны;*

(5) *$T$ — суперстабильная теория ограниченной размерности;*

(6) *$T$ — теория с сильной базой в смысле* [11].

Доказательство. Утверждения (1), (2) следуют из леммы 6.1; (3) — из теоремы 1.1, ибо $C_M(a) = Sa$; (4) — из (2).

(5) Суперстабильность $T$ вытекает из теоремы 4.1. По лемме 3.1 $T$ стационарна. Ввиду теоремы 2.2 и пункта (4) $T$ имеет ограниченную размерность.

(6) Легко понять, что $S^{(1)}(\varnothing)/\sim$ является сильной базой (в смысле [11]), где $S^{(1)}(\varnothing)$ — множество всех неалгебраических типов из $S(\varnothing)$, $p \sim q$ означает, что существуют $a$, $b \in \mathfrak{C}$ такие, что $a \in Sb$, $a$ реализует $p$, $b$ реализует $q$. Теорема доказана.

## § 7. О РЕГУЛЯРНОСТИ, ОРТОГОНАЛЬНОСТИ И ГЛУБИНЕ ТИПОВ В СТАЦИОНАРНЫХ ТЕОРИЯХ

Обозначим через $S^{(1)}(A)$ множество всех неалгебраических полных 1-типов над $A$ и через $L(p)$ — ранг типа $p$ по Ласкару [15].

Нетрудно доказывается

**Предложение 7.1.** *Для любой теории $T$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *$L(p) \leqslant 1$ для любого полного 1-типа $p$;*

(2) *$L(p) \leqslant 1$ для любого полного 1-типа над пустым множеством;*

(3) *существует такой кардинал $\varkappa \leqslant 2^{|T|}$, что $|S^{(1)}(M)| \leqslant \varkappa$ для любой модели $M$ теории $T$;*

(4) *существует такой кардинал $\varkappa$, что $|S^{(1)}(M)| \leqslant \varkappa$ для любой модели $M$ теории $T$.*

Замечание 7.1. Согласно предложению 7.1, если $L(p) \leqslant 1$ для любого типа $p$, то $T$ имеет ограниченную размерность.

**Лемма 7.1.** *Пусть $T$ — стационарная теория $M \models T$. Тогда*

(1) *если $p$, $q \in S(M)$, то ортогональность $p$ и $q$ равносильна почти ортогональности $p$ и $q$;*

(2) *каждый тип над $M$ является регулярным;*

(3) *отношение неортогональности является отношением эквивалентности на $S(M)$.*

Доказательство. (1) Если $p$ и $q$ ортогональны, то они почти ортогональны. Предположим, что $p$ и $q$ почти ортогональны, но не ортогональны. Пусть $N \models T$ такое расширение $M$, что $p_N$, $q_N$ — наследники над $N$ типов $p$, $q$ соответственно не почти ортогональны и $a, b \in \mathfrak{C}$ такие, что $\mathrm{tp}(a, N) = p_N$, $\mathrm{tp}(b, N) = q_N$, $\mathrm{tp}(a, N \cup b) \curlywedge N$. По теореме 2.2 $a \in C_N(b)$. Очевидно, что $a \in C_M(b)$. Так как $\mathrm{tp}(a, M) = p$, $\mathrm{tp}(b, M) = q$, то по теореме 2.2 $\mathrm{tp}(a, M \cup b) \curlywedge M$; противоречие.

(2) Докажем методом от противного. Пусть $p \in S(M)$ не регулярен. Тогда существуют такие $N \succ M$ и $q \in S(N)$, что $p \subseteq q$, $q \curlywedge M$ и $q$ и $p_N$ не ортогональны, где $p_N$ — наследник $p$ над $N$. Согласно (1) найдутся такие $a$, $b \in \mathfrak{C} \setminus N$, что $\mathrm{tp}(a, N) = p_N$, $\mathrm{tp}(b, N) = q$ и $\mathrm{tp}(a, N \cup b) \curlywedge N$. По теореме 2.2 $a \in C_N(b)$. Так как $\mathrm{tp}(b, N) = q$ и $q \curlywedge M$, то существует $\bar{c} \in N$ такое, что $\mathrm{tp}(b, M \cup \bar{c}) \curlywedge M$. Отсюда $\bar{c} \notin M$ и $b \in C_M(\bar{c})$. Тогда

$b \in C_M(c)$ для некоторого $c \in \bar{c}$. Таким образом, $a \in C_N(b)$, $b \in C_M(c)$. Следовательно, $a \in C_M(c)$, $\operatorname{tp}(a, M \cup c) \curlywedge M$, откуда $\operatorname{tp}(a, N) \curlywedge M$. Но $\operatorname{tp}(a, N) = p_N$ и $p_N \downarrow M$; противоречие.

(3) Следует из (2) (см. [2]). Лемма доказана.

**Лемма 7.2.** *Стационарные теории не имеют свойства размерностного порядка* (СРП)*.

Доказательство. Предположим, что $T$ имеет d. o. p. Тогда существуют такие модели $M_0$, $M_1$, $M_2$, $N$ теории $T$ и тип $p \in S(N)$ такие, что $M_0 \prec M_1$, $M_0 \prec M_2$, $M_1 \cup M_2 \leqslant N$, $\operatorname{tp}^*(M_1, M_2) \downarrow M_0$, $p \curlywedge M_1$, $p \curlywedge M_2$. Пусть $a \in \mathfrak{C}$, $\operatorname{tp}(a, N) = p$. Тогда $a \in C_{M_0}(M_1)$, $a \in C_{M_0}(M_2)$ и $C_{M_0}(M_1) \cap C_{M_0}(M_2) \neq \varnothing$. По теореме 2.2 $\operatorname{tp}^*(M_1, M_2) \curlywedge M_0$; противоречие. Лемма доказана.

**Лемма 7.3.** *Пусть $T$ — стационарная теория ограниченной размерности, $M \models T$, $a \in \mathfrak{C} \setminus M$. Тогда условие $b \in C_M(a)$ влечет $b \in cl(a)$.*

Доказательство. Случай 1: $M$ — насыщенная модель мощности больше $2^{|T|}$. Пусть $b \in C_M(a)$, $\langle a_0, \ldots, a_n \rangle$ — путь между $a$ и $b$ без элементов из $M$, $a_0 = a$, $a_n = b$. Индукцией по $n$ докажем, что $b \in \operatorname{cl}(a)$. Пусть $n = 1$.

Случай 1а: $b \in Sa$. Очевидно, что $b \in \operatorname{cl}(a)$.

Случай 1б: $a \in Sb$. Пусть $a = f_\alpha(b)$, где $\alpha \in S$. Предположим, что $b \notin \operatorname{cl}(a)$, $\operatorname{tp}(b, \{a\}) = p$. Если $c \in \mathfrak{C}$ и $\operatorname{tp}(c, \{a\}) = p$, то $a = f_\alpha(c)$, отсюда $c \notin M$. Пусть $N \models T$, $M \cup \{a\} \subseteq N$, $c \notin N$, $\operatorname{tp}(c, \{a\}) = p$, $\operatorname{tp}(c, N) = \widehat{p}$, $q = \operatorname{tp}(a, M)$, $\operatorname{tp}(a', N) = q_N$ и $q_N$ — наследник $q$ над $N$. По теореме 2.2 $Sa' \cap N = Sa' \cap M = Sa \cap M$. Так как $f_\alpha(c) = a$, то $c \in C_M(a)$. В силу стационарности $T$ тогда $Sa \cap M = Sc \cap M$.

Но $a \in Sc \cap N$, поэтому $Sc \cap N \neq Sc \cap M$ и $Sa' \cap N \neq Sc \cap N$. По лемме 2.1 $c \notin C_N(a')$, откуда $\operatorname{tp}(c, N \cup a') \downarrow N$. Таким образом, $\widehat{p}$ и $q_N$ ортогональны. Ввиду насыщенности $M$ и ограниченности размерности $T$ найдется такое $t \in S(M)$, что $\widehat{p}$, $t_N$ не ортогональны, где $t_N$ — наследник $t$ над $N$. По лемме 7.1 $\widehat{p}$, $t_N$ не почти ортогональны. Выберем такое $d \in \mathfrak{C}$, что $\operatorname{tp}(d, N) = t_N$, $\operatorname{tp}(d, N \cup c) \curlywedge N$. Тогда $d \in C_M(c)$, откуда $d \in C_M(a)$. Следовательно, $\operatorname{tp}(d, M \cup a) \curlywedge M$. Поэтому $t_N$ и $q_N$, а также $\widehat{p}$ и $q_N$ не ортогональны; противоречие. Таким образом $b \in \operatorname{cl}(a)$ в случае 1б.

Если $n > 1$, то по индуктивному предположению $a_{n-1} \in \operatorname{cl}(a)$, $b \in \operatorname{cl}(a_{n-1})$. Очевидно, что $b \in \operatorname{cl}(a)$.

Случай 2: $M$ — произвольная модель. Пусть $b \in C_M(a)$, $M \prec N$, $N$ — насыщенная модель мощности больше $2^{|T|}$ и $a'$, $b' \in \mathfrak{C}$ такие, что $\operatorname{tp}(a^\wedge b, M) = \operatorname{tp}(a'^\wedge b', M)$, $\operatorname{tp}(a'^\wedge b', N) \downarrow M$. Тогда $\operatorname{tp}(b', N \cup a') \curlywedge N$, и по теореме 2.2 $b' \in C_N(a)$. Как показано в случае 1, $b' \in \operatorname{cl}(a')$. Так как $\operatorname{tp}(a^\wedge b, \varnothing) = \operatorname{tp}(a'^\wedge b', \varnothing)$, то $b \in \operatorname{cl}(a)$. Лемма доказана.

**Теорема 7.1.** Пусть *$T$ — стационарная теория размерности $\mu$.*

*Справедливы следующие утверждения:*

(1) *если $M \models T$, $a$, $b \in \mathfrak{C} \setminus M$, то $\operatorname{tp}(b, M \cup a) \curlywedge M$ тогда и только тогда, когда $b \in \operatorname{cl}(a)$;*

(2) *$|S^{(1)}(M)| \leqslant \mu |T|$ для любой модели $M$ теории $T$;*

(3) *$L(p) \leqslant 1$ для любого полного 1-типа $p$;*

(4) *$T$ суперстабильна;*

(5) *если $|T| \leqslant \omega$, $\mu \leqslant \omega$, то $T$ $\omega$-стабильна;*

(6) *если $|T| \leqslant \omega$, $\mu = 1$, то $T$ $\omega_1$-категорична;*

(7) *если $M \models T$, $A \subseteq \mathfrak{C} \setminus M$, то $M \cup \bigcup \{\operatorname{cl}(a) : a \in A\}$ является простой и минимальной над $M \cup A$ моделью $T$;*

(8) *если $M \models T$, то $\operatorname{Th}((M, m)_{m \in M})$ является квазитрансцендентной теорией с сильной базой.*

Доказательство. (1) Следует из теоремы 2.2 и леммы 7.3 (2) Пусть $N$ — насыщенная модель $T$ мощности больше $2^{|T|}$, $\{p_\alpha \in S(N):$

---

* Понятие «свойство размерностного порядка» (dimension order property) см., например, в [12].

$\alpha < \mu\}$ — такое множество, что для любых модели $N' \geqslant N$ и типа $q \in S(N')$ существует такое $\alpha < \mu$, что $p_\alpha$ и $q$ не ортогональны. Пусть $\mathrm{tp}(a_\alpha, N) = p_\alpha$, $(\alpha < \mu)$, $q \in S(N)$, $p_\alpha$ и $q$ не ортогональны. Тогда найдется такое $b \in \mathfrak{C}$, что $b \in \mathrm{cl}(a_\alpha)$ и $\mathrm{tp}(b, N) = q$. Следовательно, в $N \cup \cup\{\mathrm{cl}(a_\alpha)\colon \alpha < \mu\}$ реализуются все типы из $S(N)$. Отсюда $|S^{(1)}(M)| \leqslant |\cup\{\mathrm{cl}(a_\alpha)\colon \alpha < \mu\}| \leqslant \mu \cdot |T| \cdot \omega = \mu \cdot |T|$. Теперь очевидно, что $|S^{(1)}(M)| \leqslant \mu \cdot |T|$ для любой модели $M$ теории $T$.

Утверждение (3) следует из (2) по предложению 7.1, (4) и (5) — из (3), (6) — из (5) [13], (7) — из леммы 7.3 и теоремы 1.1, (8) — из (3) и (7). Теорема доказана.

**Следствие 7.1.** (1) *Если $T$ — стационарная теория, то следующие условия эквивалентны*:

(1а) *$T$ имеет ограниченную размерность*;

(1б) *$L(p) \leqslant 1$ для любого типа $p \in S(\varnothing)$*.

(2) *Если $T$ — счетная стационарная теория, то следующие условия эквивалентны*:

(2а) *$T$ $\omega_1$-категорична*;

(2б) *$T$ имеет размерность* 1;

(2в) *$T$ имеет размерность $\mu \leqslant \omega$, но $T$ не имеет 2-кардинальных формул.*

Доказательство. (1а) $\Rightarrow$ (1б) Непосредственно следует из теоремы 7.1, а (1б) $\Rightarrow$ (1а) — из предложения 7.1 (2а) $\Rightarrow$ (2б) имеет место для любой теории, а (2б) $\Rightarrow$ (2а) доказано в теореме 7.1. Отсюда и из теоремы Болдуина — Лахлана [13] (2б) $\Rightarrow$ (2в), (2в) $\Rightarrow$ (2а).

Для суперстабильных теорий Шелах ввел понятие «глубины» типа и теории [12]. Заменяя в его определении $F^a_\omega$ на $F^a_{k_rT}$, можно ввести понятие глубины и для стабильных теорий.

**Лемма 7.4.** *Если $T$ — стабильная теория, $M \models T$, $p$, $q$ не ортогональные регулярные типы из $S(M)$, то $\mathrm{Dp}(p) = \mathrm{Dp}(q)$.*

Доказательство можно провести повторением рассуждений для аналогичного утверждения для суперстабильных теорий (лемма 3.3. [12]).

**Лемма 7.5.** *Пусть $T$ — стационарная теория $M$ — $F^a_k$-насыщенная модель $T$, $k = k_r(T)$, $a \in \mathfrak{C}\backslash M$, $N$ — $F^a_k$-простая над $M \cup \{a\}$ модель $T$. Тогда $N\backslash M \subseteq C_M(a)$.*

Доказательство. Пусть $b \in N\backslash M$. Известно, что $\mathrm{tp}(b, M \cup a) \curlywedge M$ [2]. По теореме 2.2 $b \in C_M(a)$.

**Лемма 7.6.** *Пусть $T$ — стационарная теория $M$—$F^a_{k_r(T)}$-насыщенная модель $T$, $p \in S(M)$. Тогда*

(1) *если $\alpha < \omega$ и $L(p) \geqslant \alpha + 1$, то $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \alpha$*;

(2) *если $\alpha < \omega$, $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \alpha$ и $p$ — неалгебраический тип, то существует такое $q \in S(M)$, что $p$ и $q$ не ортогональны и $L(q) \geqslant \alpha + 1$*;

(3) *если $\alpha \geqslant \omega$ и $L(p) \geqslant \alpha$, то $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \alpha + 1$.*

Доказательство. (1) Если $\alpha = 0$, то (1) следует из определений. Пусть $\alpha = \beta + 1$ и $L(p) \geqslant \beta + 2$, $\mathrm{tp}(a, M) = p$, $N$ — $F^a_{k_r(T)}$-простая над $M \cup \{a\}$ модель, $b \in \mathfrak{C}\backslash M$, $q \in S(N)$, $p \subseteq q$, $q \curlywedge M$, $\mathrm{tp}(b, M) = q$. По лемме 7.5 $N\backslash M \subseteq C_M(a)$. Так как $\mathrm{tp}(b, N) \curlywedge M$, то $b \in C_M(c)$ для некоторого $c \in N\backslash M$. Тогда $b \in C_M(a)$. Отсюда легко понять, что $q$ ортогонален $M$. По индуктивному предположению $\mathrm{Dp}(q) \geqslant \beta$. Следовательно, $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \beta + 1 = \alpha$.

(2) Очевидно при $\alpha = 0$. Пусть $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \beta + 1 = \alpha$. Тогда найдутся такие $a$, $b$, $N$, $q \in S(N)$, что $\mathrm{tp}(a, M) = p$, $N$ $F^a_{k_r(T)}$-проста над $M \cup \{a\}$, $\mathrm{tp}(b, N) = q$, $\mathrm{Dp}(q) \geqslant \beta$, $q$ ортогонален $M$. По индукции найдется такое $t \in S(N)$, что $t$ не ортогонален $q$ и $L(t) \geqslant \beta + 1$.

Пусть $\mathrm{tp}(c, N) = t$. По лемме 7.1 и теореме 2.2 $c \in C_N(b)$. Отсюда $c \in C_M(b)$. Так как $\mathrm{tp}(b, N) \curlywedge M$, $N\backslash M \subseteq C_M(a)$, то $b \in C_M(a)$, следовательно, $c \in C_M(a)$. Пусть $\widehat{t} = \mathrm{tp}(c, M)$. Тогда $\widehat{t}$ не ортогонален $p$ и $L(\widehat{t}) \geqslant \beta + 2$, ибо $\widehat{t} = t \upharpoonright M$, $t \curlywedge M$ и $L(t) \geqslant \beta + 1$.

(3) Пусть $\alpha = \omega$, $L(p) \geqslant \omega$. Ввиду (1) $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \omega$, а тогда по определению глубины $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \omega + 1$. Теперь пусть для всех $\omega \leqslant \beta < \alpha$ из $L(p) \geqslant \beta$ следует $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \beta + 1$. Если $\alpha$ — предельный ординал, то так как $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \beta + 1$ для всех $\beta < \alpha$, имеем $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \alpha$. Отсюда $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \alpha + 1$ (в силу предельности $\alpha$). Если $\alpha$ — непредельный ординал, то повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве (1), получаем $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \alpha + 1$. Лемма доказана.

**Теорема 7.2.** *Если $T$ стационарна, $\mathrm{Dp}(T) < \infty$, то $T$ суперстабильна.*

Доказательство. Предположим, что $T$ несуперстабильна. Тогда существуют $F^{\alpha}_{k_T(T)}$-насыщенная модель $M$ и тип $p \in S(M)$ такие, что $L(p) = \infty$. По лемме 7.6 $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \alpha + 1$ для любого ординала $\alpha$. Следовательно, $\mathrm{Dp}(p) = \infty$; противоречие. Теорема доказана.

Замечание 7.2. Теорема 7.2 представляет интерес, в частности, в связи с тем, что, вообще говоря, существует стабильная, но не суперстабильная теория с $\mathrm{Dp}(T) = 1$ [2].

## § 8. ПРИМЕРЫ И КОНТРПРИМЕРЫ

**Предложение 8.1.** *Если $S$ — такой моноид, что $I_S \leqslant 2$, то $S$ — суперстабилизатор.*

Доказательство. Если $I_S = 1$ ($S$ будет группой), то предложение очевидно. Если $I_S = 2$, то $\widetilde{S} = \{\widetilde{e}, \widetilde{\alpha}\}$ для некоторого $\alpha \in S$ и ясно, что $\widetilde{e} < \widetilde{\alpha}$, т. е. $\widetilde{S}$ вполне упорядочено. По теореме 4.1 $S$ — суперстабилизатор.

**Предложение 8.2.** *Существует трехэлементный моноид с $I_S = 3$, не являющийся стабилизатором.*

Пример 8.1. Пусть $S$ — трехэлементный моноид, заданный таблицей

| | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|
| $\alpha$ | $\alpha$ | $\beta$ |
| $\beta$ | $\alpha$ | $\beta$ |

Очевидно, $S$ — некоммутативный моноид. Пусть $A = (K, \alpha, \beta, e)(Se)$, т. е. полигон, полученный $(K, \alpha, \beta, e)$-конструкцией из $Se$. По лемме 3.5 $\mathrm{Th}(A)$ не стабильна. Значит, $S$ не является стабилизатором.

Пример 8.2. Пусть $S = \omega + 1$, т. е. $S = \{0, 1, \ldots\} \cup \{\omega\}$. Для любых $\alpha, \beta \in S$ пусть $\alpha \cdot \beta \leftrightharpoons \min\{\alpha, \beta\}$. Роль $e$ будет играть $\omega$. Нетрудно проверить, что $S$ является ЛУ-моноидом, но не является ВУ-моноидом, так как

$$0 > 1 > \ldots > n > \ldots > \omega.$$

Следовательно, справедливо

**Предложение 8.3.** *Существует моноид $S$* такой, что $S$ — стабилизатор, но не суперстабилизатор.

**Пример 8.3.** Пусть $N = \{1, 2, \ldots\}$, $m \cdot n \leftrightharpoons \max\{m, n\}$. Тогда $\langle N; \cdot, 1\rangle$ — коммутативный моноид, причем

$$|\{x \in N\colon m = n \cdot x\}| = \begin{cases} 0, & \text{если } m < n, \\ 1, & \text{если } m > n, \\ m, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Значит, верно

**Предложение 8.4.** *Существует моноид без левого сокращения, но удовлетворяющий* УКПР.

В связи с леммой 7.2 представляет интерес следующее

**Предложение 8.5.** *Существует $\omega$-стабильная $\omega$-категоричная теория полигонов, имеющая* СРП.

Доказательство. Пусть $S$ — моноид из примера 1, $A = (\{-1\}\times\omega)\cup(\omega\times\{-1\})\cup(\omega\times\omega\times(\omega+1))$, $f_e$ — тождественное отображение, $f_\alpha(\langle -1, n\rangle) = f_\beta(\langle -1, n\rangle) = \langle -1, n\rangle$, $f_\alpha(\langle n, -1\rangle) = f_\beta(\langle n, -1\rangle) = \langle n, -1\rangle$, $f_\alpha(\langle n, m, \gamma\rangle) = \langle n, -1\rangle$, $f_\beta(\langle n, m, \gamma\rangle) = \langle -1, m\rangle$ для любых $n, m < \omega$, $\gamma \leqslant \omega$. Очевидно, что $\langle A; f_e, f_\alpha, f_\beta\rangle$ — полигон над $S$. Можно убедиться, что над $\varnothing$ имеются всего три типа $p_0$, $p_1$, $p_2$, порожденных формулами

$$\varphi_0(x) \leftrightharpoons \exists y(x \neq y \,\&\, x = f_\alpha(y)),$$
$$\varphi_1(x) \leftrightharpoons \exists y(x \neq y \,\&\, x = f_\beta(y)),$$
$$\varphi_2(x) \leftrightharpoons \neg\exists y(x = f_\alpha(y) \vee x = f_\beta(y)) \text{ соответственно},$$
$$R_M(p_0) = R_M(p_1) = D_M(p_0) = D_M(p_1) = 1,\ R_M(p_2) = 3,\ D_M(p_2) = 1,$$

где $R_M$, $D_M$ — ранг, степень по Морли, соответственно. Теория $T$, равная $\mathrm{Th}(\langle A; f_\alpha, f_\beta, f_e\rangle)$, $\omega$-стабильна и $\omega$-категорична. Следовательно, каждая модель $T$ является $F^a_\omega$-насыщенной. Пусть

$$C_i \leftrightharpoons \{n < \omega\colon n = i (\mathrm{mod}\, 3)\}\ (i = 0, 1, 2),$$
$$A_0 \leftrightharpoons (\{-1\}\times C_0)\cup(C_0\times\{-1\})\cup(C_0\times C_0\times\omega),$$
$$A_1 \leftrightharpoons (\{-1\}\times(C_0\cup C_1))\cup((C_0\cup C_1)\times\{-1\})\cup((C_0\cup C_1)\times(C_0\cup C_1)\times\omega),$$
$$A_2 \leftrightharpoons (\{-1\}\times(C_0\cup C_2))\cup((C_0\cup C_2)\times\{-1\})\cup((C_0\cup C_2)\times(C_0\cup C_2)\times\omega),$$
$$A_3 \leftrightharpoons (\{-1\}\times\omega)\cup(\omega\times\{-1\})\cup(\omega\times\omega\times\omega).$$

Нетрудно понять, что $A_0 \prec A_1 \prec A_3$, $A_0 \prec A_2 \prec A_3$, $A_3 \prec A$, $A_3$ — простая над $A_1\cup A_2$ модель, $\mathrm{tp}^*(A_1, A_2)\downarrow A_0$. Легко выяснить, что $p = \mathrm{tp}(\langle 1, 2, \omega\rangle, A_3)$ не ортогонален $q$ для любого $q \in S(A_1)\cup S(A_2)$. Таким образом, $T$ имеет СРП. Очевидно, что $T$ нестационарна. Отметим еще одно интересное свойство теории $T$: для любых модели $M$ теории $T$ и $a, b \in \mathfrak{C}\setminus M$

$$\mathrm{tp}(a, M\cup b) \wedge M \Leftrightarrow (a \in Sb \vee b \in Sa)$$

(ср. с теоремой 2.2: если $a = \langle -1, 1\rangle$, $b = \langle 1, -1\rangle$, $c = \langle 1, 1, 0\rangle$, то $a$, $b$, $c \in A\setminus A_0$, $f_\alpha(c) = a$, $f_\beta(c) = b$, $b \in C_{A_0}(a)$, но $\mathrm{tp}(a, A\cup\{b\})\downarrow A_0$).

В связи со следствием 7.1 отметим

**Предложение 8.6.** *Существует счетная $2^\omega$-размерностная почти $\omega$-стабильная стационарная теория, не имеющая 2-кардинальных формул.*

Доказательство. В качестве примера такой теории можно взять пример Б. С. Байжанова из [14]. А именно: пусть $S$ — свободный моноид с порождающими $\alpha$, $\beta$. Пусть $T$ — теория полигонов над $S$, удовлетворяющих аксиомам

$$\forall x(f_\gamma(x) \neq f_\delta(x)) \text{ для всех различных } \gamma, \delta \in S;$$
$$\forall x\exists! y(x = f_\alpha(y) \vee x = f_\beta(y)).$$

**Предложение 8.7.** *Пусть $S$ — циклический моноид. Тогда*

(1) *$S$ — почти $\omega$-стабилизатор;*

(2) *$S$ — $\omega$-стабилизатор тогда и только тогда, когда $I_S \leqslant 2$.*

Доказательство. (1) следует из теоремы 4.2.

(2) В одну сторону вытекает из предложения 5.2, а в другую легко проверяется.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Morley M.** Categoricity in power // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— V. 114, N 2.— P. 514—538.
2. **Shelah S.** Classification theory and the number of non-isomorphic models.— Amsterdam a. o.: North-Holland, 1978.
3. **Скорняков Л. А.** Характеризация категории полигонов // Мат. сб.— 1969.— Т. 80, № 4.— С. 492—502.
4. **Клиффорд А., Престон Г.** Алгебраическая теория полугрупп: Пер. с англ.— М.: Мир, 1972.
5. **Шишмарев Ю. Е.** О категоричных теориях одной функции // Мат. заметки.— 1972.— Т. 11, № 1.— С. 89—98.
6. **Marcus L.** The number of countable models of a theory of one unary functions // Fund. math.— 1980.— V. 108, N 3.— P. 171—181.
7. **Иванов А. А.** Полные теории унаров // Алгебра и логика.— 1984.— Т. 23, № 1.— С. 48—73.
8. **Его же.** Полные теории унарных алгебр // 7 Всесоюз. конф. по мат. логике, посвящ. 75-летию акад. А. И. Мальцева, Новосибирск, сент. 1984 г.: Тез. докл.— Новосибирск, 1984.— С. 71.
9. **Рябкин А. Н.** О числе неизоморфных моделей полных теорий унаров // Там же.— С. 155.
10. **Нурмагамбетов Т. А.** О почти ω-стабильных теориях // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1981.— Т. 102, № 5.— С. 47—51.
11. **Мустафин Т. Г.** О сильной базе элементарных типов теорий // Сиб. мат. журн.— 1977.— Т. 18, № 6.— С. 1356—1366.
12. **Saffe J.** The number of uncountable models of ω-stable theories // Ann. pure and appl. log.— 1983.— V. 24, N 3.— P. 231—261.
13. **Baldwin J. T., Lachlan A. H.** On strongly minimal sets // J. symbol. log.— 1971.— V. 36, N 1.— P. 79—96.
14. **Байжанов Б. С.** Некоторые свойства тотально-трансцендентных теорий // Теория моделей и ее применения.— Алма-Ата, 1980.— С. 14—24.
15. **Lascar D.** Ranks and definability in superstable theories // Israel J. Math.— 1976.— V. 23, N 1.— С. 53—87.


# ХОРНОВЫ ТЕОРИИ С НЕМАКСИМАЛЬНЫМ СПЕКТРОМ


*Е. А. ПАЛЮТИН, С. С. СТАРЧЕНКО*


Работа посвящена теории моделей полных расширений хорновых теорий с немаксимальным несчетным спектром (т. е. имеющих в некоторой несчетной мощности $\varkappa$ с точностью до изоморфизма менее $2^{\varkappa}$ моделей). Основные результаты статьи относятся к несколько более широкому классу теорий, названному нами $A$-теориями (см. § 5). Наиболее значительными следствиями полученных результатов являются полные описания несчетных спектров хорновых теорий, не обязательно полных (теорема 12.1), и квазимногообразий (теорема 13.1).

Отметим, что несчетные спектры полных хорновых теорий описаны в [1] и [2]. Возможность обобщения методов и результатов работ [1, 2] на $A$-теории появилась после доказательства [3] нормальности и некоторых других полезных свойств $A$-теорий. Мы старались сделать работу достаточно замкнутой: в ней даются основные определения и передоказываются (в несколько более общей ситуации) некоторые утверждения из [1].

Содержание статьи можно поделить на три части. В первой (§ 1—7) развивается теория стабильности $h$-нормальных и $h^*$-базируемых теорий. Из этой части видно, что теория стабильности хорновых теорий имеет ярко выраженную специфику. Во второй части (§ 8, 9) применяются результаты первой части для доказательства структурных лемм. Эти леммы позволяют разлагать модели любой мощности на модели малых мощностей. И они перекликаются с известными результатами С. Шелаха и Ю. Заффе для ω-стабильных теорий. В третьей