ЛИТЕРАТУРА

1. **Morley M.** Categoricity in power // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— V. 114, N 2.— P. 514—538.
2. **Shelah S.** Classification theory and the number of non-isomorphic models.— Amsterdam a. o.: North-Holland, 1978.
3. **Скорняков Л. А.** Характеризация категории полигонов // Мат. сб.— 1969.— Т. 80, № 4.— С. 492—502.
4. **Клиффорд А., Престон Г.** Алгебраическая теория полугрупп: Пер. с англ.— М.: Мир, 1972.
5. **Шишмарев Ю. Е.** О категоричных теориях одной функции // Мат. заметки.— 1972.— Т. 11, № 1.— С. 89—98.
6. **Marcus L.** The number of countable models of a theory of one unary functions // Fund. math.— 1980.— V. 108, N 3.— P. 171—181.
7. **Иванов А. А.** Полные теории унаров // Алгебра и логика.— 1984.— Т. 23, № 1.— С. 48—73.
8. **Его же.** Полные теории унарных алгебр // 7 Всесоюз. конф. по мат. логике, посвящ. 75-летию акад. А. И. Мальцева, Новосибирск, сент. 1984 г.: Тез. докл.— Новосибирск, 1984.— С. 71.
9. **Ряскин А. Н.** О числе неизоморфных моделей полных теорий унаров // Там же.— С. 155.
10. **Нурмагамбетов Т. А.** О почти ω-стабильных теориях // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1981.— Т. 102, № 5.— С. 47—51.
11. **Мустафин Т. Г.** О сильной базе элементарных типов теорий // Сиб. мат. журн.— 1977.— Т. 18, № 6.— С. 1356—1366.
12. **Saffe J.** The number of uncountable models of ω-stable theories // Ann. pure and appl. log.— 1983.— V. 24, N 3.— P. 231—261.
13. **Baldwin J. T., Lachlan A. H.** On strongly minimal sets // J. symbol. log.— 1971.— V. 36, N 1.— P. 79—96.
14. **Байжанов Б. С.** Некоторые свойства тотально-трансцендентных теорий // Теория моделей и ее применения.— Алма-Ата, 1980.— С. 14—24.
15. **Lascar D.** Ranks and definability in superstable theories // Israel J. Math.— 1976.— V. 23, N 1.— С. 53—87.

ХОРНОВЫ ТЕОРИИ С НЕМАКСИМАЛЬНЫМ СПЕКТРОМ

Е. А. ПАЛЮТИН, С. С. СТАРЧЕНКО

Работа посвящена теории моделей полных расширений хорновых теорий с немаксимальным несчетным спектром (т. е. имеющих в некоторой несчетной мощности $\varkappa$ с точностью до изоморфизма менее $2^\varkappa$ моделей). Основные результаты статьи относятся к несколько более широкому классу теорий, названному нами A-теориями (см. § 5). Наиболее значительными следствиями полученных результатов являются полные описания несчетных спектров хорновых теорий, не обязательно полных (теорема 12.1), и квазимногообразий (теорема 13.1).

Отметим, что несчетные спектры полных хорновых теорий описаны в [1] и [2]. Возможность обобщения методов и результатов работ [1, 2] на A-теории появилась после доказательства [3] нормальности и некоторых других полезных свойств A-теорий. Мы старались сделать работу достаточно замкнутой: в ней даются основные определения и передоказываются (в несколько более общей ситуации) некоторые утверждения из [1].

Содержание статьи можно поделить на три части. В первой (§ 1—7) развивается теория стабильности h-нормальных и h^*-базируемых теорий. Из этой части видно, что теория стабильности хорновых теорий имеет ярко выраженную специфику. Во второй части (§ 8, 9) применяются результаты первой части для доказательства структурных лемм. Эти леммы позволяют разлагать модели любой мощности на модели малых мощностей. И они перекликаются с известными результатами С. Шелаха и Ю. Заффе для ω-стабильных теорий. В третьей части (§ 10—13) с помощью структурных лемм описываются несчетные спектры A-теорий, хорновых теорий и квазимногообразий.

Параграфы 1—3, 5—7, 12 и 13 написаны Е. А. Палютиным, остальные (§ 4 и 8—11) — С. С. Старченко. Основные результаты статьи анонсированы в [4—7] с указанием авторства. В частности, нераздельному соавторству принадлежат описания спектров A-теорий (теорема 11.3) и произвольных хорновых теорий (теорема 12.1).

Теория T называется *хорновой*, если она аксиоматизируема с помощью хорновых предложений. Это эквивалентно тому, что класс T-моделей замкнут относительно фильтрованных произведений. Формула Φ называется *h-формулой*, если она получается из атомарных с помощью конъюнкции, навешивания кванторов и операции, дающей по формулам Φ_1 и Φ_2 формулу $\exists x\,\Phi_1 \bigwedge \forall x\,(\Phi_1 \to \Phi_2)$.

Под T в дальнейшем, если не оговорено противное, понимается полная теория сигнатуры Σ. Все понятия, такие как формула, тип, модель и т. п., о которых не сказано противное, относятся к теории T. Все рассматриваемые множества в теории T и T-модели будем считать содержащимися в некоторой достаточно насыщенной модели $\overline{M}$. Носитель модели M обозначаем той же буквой M. Вместо $\bar{a} \in A^n$ пишем $\bar{a} \in A$. Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — формула, A — множество в теории T, $\bar{a} \in A$ и длина $l(\bar{a})$ кортежа $\bar{a}$ совпадает с $l(\bar{y})$, то выражение $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$ будем называть *формулой в* A. Если $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$ — формула в модели M, то через $\Phi(M, \bar{a})$ обозначаем множество $\{\bar{b} \mid \bar{b} \in M,\ M \models \Phi(\bar{b}, \bar{a})\}$. Знак $\vdash$ обозначает выводимость в теории

$$T_{\overline{M}} = \{\varphi(\bar{a}) \mid \overline{M} \models \varphi(\bar{a}),\ \bar{a} \in \overline{M},\ \varphi(\bar{x}) \text{ формула сигнатуры } \Sigma\}.$$

Выражение $\vdash X$, где X — множество формул, означает, что выполнено $\vdash \varphi$ для любой формулы $\varphi \in X$. Для $\bar{b} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$, через $\cup \bar{b}$ обозначаем множество $\{b_1, \ldots, b_n\}$, а через $A \cup \bar{b}$ — множество $A \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$. Если для множеств формул X и Y выполнено $X \vdash Y$ и $Y \vdash X$, то пишем $X \sim Y$. Через ${}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A)$ обозначаем множество типов в (над) A, т. е. совокупность всех совместных множеств формул в A, все свободные переменные которых принадлежат кортежу $\bar{x}$. Пусть

$${}^{\subseteq}S(A) = \bigcup \{{}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A) \mid \bar{x} \text{ — набор переменных}\}.$$

Через $S_{\bar{x}}(A)$ мы обозначаем множество полных типов над A от переменных $\bar{x}$, а через $S(A)$ — множество всех полных типов из множества ${}^{\subseteq}S(A)$. Если p — тип в теории T, то минимальный кортеж $\bar{x}$ и минимальное множество A, для которых $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A)$ обозначаются через $w(p)$ и $\mathrm{dom}(p)$ соответственно. Тип p, состоящий из h-формул, будем называть *h-типом*. Если p — тип в теории T, $\bar{x} = w(p)$ и $A = \mathrm{dom}(p)$, то через p^+ и p^- обозначаем соответственно множество всех h-формул и множество всех отрицаний h-формул в A со свободными переменными из $\bar{x}$, выводимые в $T_{\overline{M}}$ из p. Множество $p^+ \cup p^-$ обозначаем через $p^{\pm}$. Через ${}^{\subseteq}S^h_{\bar{x}}(A)$ и ${}^{\subseteq}S^h(A)$ будем обозначать соответственно подмножества ${}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A)$ и ${}^{\subseteq}S(A)$, состоящие из h-типов. Множество $S^h_{\bar{x}}(A)$ будет состоять из h-типов над A, замкнутых относительно выводимости $\vdash$. Если $p \in {}^{\subseteq}S(A)$ и $B \subseteq A$, то через $p \restriction B$ обозначаем максимальное подмножество p, принадлежащее множеству ${}^{\subseteq}S(B)$. Если A — множество, $\bar{b}$ — кортеж в теории T и выполнено $l(\bar{x}) = l(\bar{b})$, то через $\mathrm{tp}_{\bar{x}}(\bar{b}, A)$ будем обозначать тип

$$\{\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \mid \overline{M} \models \varphi(\bar{b}, \bar{a}),\ \varphi(\bar{x}, \bar{a}) \text{ — формула в } A\}.$$

Как правило, вместо $\mathrm{tp}_{\bar{x}}(\bar{b}, A)$ будем писать просто $\mathrm{tp}(\bar{b}, A)$. Формулу $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$, эквивалентную в $T_{\overline{M}}$ некоторой h-формуле, будем также называть *h-формулой*. Понятия, относящиеся к типам, применяем также к формулам, отождествляя формулу $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ с типом $\{\varphi(\bar{x}, \bar{a})\}$. Считаем, что кортежи переменных $\bar{x}$, $\bar{x}^1$ и $\bar{x}^2$ имеют одинаковую длину. Выражение $\bar{x}^1 \approx \bar{x}^2$ для кортежей переменных $\bar{x}^1 = \langle x_1^1, \ldots, x_n^1 \rangle$ и $\bar{x}^2 = \langle x_1^2, \ldots, x_n^2 \rangle$ означает $\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i^1 \approx x_i^2$. Запись $\exists ! \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{y})$ мы применяем для обозначения формулы $\exists \bar{x} \varphi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \forall \bar{x}^1 \forall \bar{x}^2 ((\varphi(\bar{x}^1, \bar{y}) \wedge \varphi(\bar{x}^2, \bar{y})) \to \bar{x}^1 \approx \approx \bar{x}^2)$. Знак $\square$ отмечает конец доказательства или его отсутствие.

§ 1. h-НОРМАЛЬНОСТЬ

Определение. *Теорию T назовем h-базируемой, если для любой формулы φ имеет место $T \vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ для некоторой булевой комбинации φ' h-формул* (т. е. φ' получается из h-формул с помощью связок $\wedge, \vee, \neg$), *причем φ' имеет то же множество свободных переменных, что и φ.*

Если $\Phi(x, \bar{y})$, $\Psi_0(x, \bar{y})$, $\ldots$, $\Psi_n(x, \bar{y})$ — некоторые формулы, то через $\alpha(\Phi, \Psi_0, \ldots, \Psi_n; \bar{y})$ будем обозначать предложение

$$\forall \bar{y} \left(\left(\bigwedge_{i \leqslant n} \exists x (\Phi(x, \bar{y}) \wedge \neg \Psi_i(x, \bar{y})) \right) \to \exists x \left(\Phi(x, \bar{y}) \wedge \bigwedge_{i \leqslant n} \neg \Psi_i(x, \bar{y}) \right) \right).$$

Определение. *Теория T называется h-неприводимой, если $T \vdash \vdash \alpha(\Phi, \Psi_0, \ldots, \Psi_n; \bar{y})$ для любых h-формул $\Phi(x, \bar{y})$, $\Psi_0(x, \bar{y})$, $\ldots$ $\ldots$, $\Psi_n(x, \bar{y})$.*

Лемма 1.1 [8] (а) *h-формулы являются фильтрующимися формулами.*

(б) *Если F — фильтр Фреше на бесконечном множестве I, то для любой алгебраической системы A теория $\mathrm{Th}(A^F)$ F-степени A^F системы A h-неприводима.* $\square$

Лемма 1.2 [8]. *Если теория T h-неприводима, то T h-базируема.* $\square$

Из 1.1 и 1.2 получаем

Предложение 1.3 [8] (а) *Любая полная хорнова теория T h-базируема и h-неприводима.*

(б) *Класс всех алгебраических систем данной сигнатуры Σ, теория которых хорнова, является аксиоматизируемым. В качестве системы аксиом данного класса можно взять множество $\Omega = \{\alpha(\Phi, \Psi_0, \ldots, \Psi_n; \bar{y}) \mid \Phi(x, \bar{y}), \Psi_0(x, \bar{y}), \ldots, \Psi_n(x, \bar{y})$ — h-формулы сигнатуры $\Sigma\}$.* $\square$

Определение. *Теорию T назовем h-нормальной, если для любой h-формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ имеет место $T \vdash \gamma(\Phi, \bar{y})$, где $\gamma(\Phi, \bar{y})$ есть формула*

$$\forall \bar{y} \forall \bar{y}' (\exists \bar{x} (\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \Phi(\bar{x}, \bar{y}')) \to \forall \bar{x} (\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \to \Phi(\bar{x}, \bar{y}'))).$$

Другими словами, h-нормальность теории T означает, что для любых T-модели M, h-формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ и $\bar{m}, \bar{m}' \in M$, $l(\bar{m}) = l(\bar{m}') = l(\bar{y})$, множества $\Phi(M, \bar{m})$ и $\Phi(M, \bar{m}')$ либо совпадают, либо не пересекаются.

Предложение 1.4 [8]. *Пусть T — хорнова теория (не обязательно полная), являющаяся h-базируемой. Тогда h-нормальность теории T равносильна тому, что любое полное расширение T' теории T той же сигнатуры стабильно.* $\square$

Из (1.3) (а) и 1.4 получаем

Следствие 1.5 [8]. *Если T — полная хорнова теория, то стабильность T равносильна ее h-нормальности.* $\square$

Определение. *h-Формулу $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$, $l(\bar{x}) = l(\bar{y})$, назовем h-эквивалентностью, если*

а) $T \vdash \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \to \Phi(\bar{y}, \bar{x})$;

б) $T \vdash (\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \wedge \Phi(\bar{y}, \bar{z})) \to \Phi(\bar{x}, \bar{z})$.

Другими словами, h-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ будет h-эквивалентностью, если для любой T-модели M множество $\{\langle \bar{m}, \bar{m}' \rangle \mid M \models \Phi(\bar{m}, \bar{m}'), \bar{m}, \bar{m}' \in M\}$ является эквивалентностью на множестве $\{\bar{m} \mid M \models \Phi(\bar{m}, \bar{m}), \bar{m} \in M\}$, которое будем называть *областью* $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ и обозначать через $\mathrm{dom}_M \Phi(\bar{x}, \bar{y})$ или просто $\mathrm{dom}_M \Phi$. Если $a \in \mathrm{dom}_M \Phi(\bar{x}, \bar{y})$, то множество $\Phi(M, \bar{a})$ называем *Φ-классом кортежа $\bar{a}$ в M* и обозначаем его через $\bar{a}|^{M}_{\Phi(\bar{x},\bar{y})}$ или просто $\bar{a}|^{M}_{\Phi}$. Мы часто будем называть h-эквивалентностью само отношение η, которое задается в некоторой T-модели M h-эквивалентностью $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$, а через $\mathrm{dom}\,\eta$ обозначать множество $\{\bar{a} \mid \langle \bar{a}, \bar{a} \rangle \in \eta\}$. Если для h-эквивалентности $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ выполняется $T \vdash \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \to \bar{x} \approx \bar{y}$, то $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ будем называть *вырожденной*, а если выполнено $T \vdash \neg \Phi(\bar{x}, \bar{y})$, то — *пустой*.

Из определений h-формулы и h-нормальности легко получается

Лемма 1.6. *Пусть T h-нормальна, $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$, $\Psi(\bar{x}, \bar{y})$ — h-эквивалентности, $X(\bar{x})$ — h-формула и выполнено $T \vdash X(\bar{x}) \to (\Phi(\bar{x}, \bar{x}) \wedge \Psi(\bar{x}, \bar{x}))$. Тогда h-формула $X(\bar{x}) \wedge X(\bar{y}) \wedge \exists \bar{z}(\Phi(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \Psi(\bar{z}, \bar{y}) \wedge X(\bar{z}))$ будет h-эквивалентностью* (которую будем обозначать $[\Phi \overset{X}{\cup} \Psi](\bar{x}, \bar{y})$). □

Если в качестве $X(\bar{x})$ берется h-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{x}) \wedge \Psi(\bar{x}, \bar{x})$, то вместо $[\Phi \overset{X}{\cup} \Psi]$ пишем $[\Phi \cup \Psi]$. Ясно, что когда $T \vdash \Phi(\bar{x}, \bar{x}) \leftrightarrow \Psi(\bar{x}, \bar{x})$, h-эквивалентность $[\Phi \cup \Psi]$ определяет минимальную h-эквивалентность, содержащую Φ и Ψ, а лемма 1.6 утверждает, что в моделях T-нормальных теорий h-эквивалентности с одинаковой областью определения перестановочны.

Следующая лемма также легко выводится из определений.

Лемма 1.7. *Пусть T — h-нормальная теория.*

(а) *Если $\Phi(\bar{x}, \bar{z})$ — h-формула, то формула*

$$E(\bar{x}, \bar{y}) = \exists \bar{z}(\Phi(\bar{x}, \bar{z}) \wedge \Phi(\bar{y}, \bar{z}))$$

будет h-эквивалентностью, и совокупность всех E-классов в любой T-модели M совпадает с совокупностью непустых множеств вида $\Phi(M, \bar{a})$, $\bar{a} \in M$.

(б) *Пусть h-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a})$ в модели M определяет эквивалентность η с областью $A \subseteq M$. Тогда существует h-эквивалентность $E(\bar{x}, \bar{y})$, ограничение которой на A совпадает с η. При этом $E(\bar{x}, \bar{y})$ зависит только от $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ и не зависит от M и $\bar{a}$.* □

Определение. *Если $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a})$ — h-формула (с набором параметров $\bar{a}$), то h-формулу*

$$E(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \exists \bar{y} \exists \bar{z}(\Phi(\bar{x}^1, \bar{y}, \bar{z}) \wedge \Phi(\bar{x}^2, \bar{y}, \bar{z}))$$

будем называть $\bar{x}$-нормализацией h-формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a})$ (и обозначать через $\bar{x}\Phi$).

В силу 1.7 (а) $\bar{x}$-нормализация $\bar{x}\Phi$ h-формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a})$ в h-нормальных теориях T будет h-эквивалентностью, и для любых T-моделей M и $\bar{e}, \bar{c}, \bar{b} \in M$ условие $M \models \Phi(\bar{e}, \bar{c}, \bar{b})$ равносильно равенству $\bar{e}|^{M}_{\bar{x}\Phi} = \Phi(M, \bar{c}, \bar{b})$.

Определение. *Если $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$ — h-формула в системе A, то множество $\Phi(A, \bar{a})$ будем называть h-множеством в A*, а *множество вида $\Phi(A)$ (где $\Phi(\bar{x})$ — h-формула) — абсолютным h-множеством в A.*

Лемма 1.8. *Пусть T — хорнова теория (не обязательно полная).*

(а) *Пусть $X = X^+ \cup X^-$, где X^+ — некоторое множество h-формул, а X^- — некоторое множество отрицаний h-формул. Если для каждой формулы $\varphi \in X^-$ множество $X^+ \cup \{\varphi\}$ совместно в T, то множество X совместно в T.*

(б) *если T — полная теория и $p \in S_{\bar{x}}(A)$, то $p \sim p^{\pm}$.*

(в) *Пусть T — полная теория, $p \in S_{\bar{x}}(A)$, Φ — h-формула в B для некоторого B. Тогда $p \vdash \Phi$ влечет $p^+ \vdash \Phi$.*

Доказательство. (а) Пусть $X^+ \cup \{\varphi\}$ выполняется в некоторой T-модели M_φ. Тогда X выполняется в декартовом произведении $\prod\limits_{\varphi \in X^-} M_\varphi$.

(б) В силу h-базируемости T любая $\varphi \in p$ эквивалентна в T дизъюнкции $\bigvee\limits_{i<n} \mathrm{X}_i$ и каждая X_i является конъюнкцией h-формул и их отрицаний. Так как по h-базируемости T можно считать, что формулы X_i имеют те же параметры, что и φ, то из полноты типа p получаем $\mathrm{X}_i \in p$ для некоторого $i < n$. Поскольку все члены конъюнкции X_i принадлежат типу $p^{\pm}$ и $\vdash \mathrm{X}_i \to \varphi$, то $p^{\pm} \vdash \varphi$.

(в) В силу (б) имеем $p^{\pm} \vdash \Phi$. Из (а) получаем тогда $p^+ \vdash \Phi$. □

Предложение 1.9. *Пусть T — полная хорнова теория и $p \in^{\subseteq} S^h_{\bar{x}}(A)$. Тогда существует полный тип $q \in S_{\bar{x}}(A)$, для которого выполнено $q^+ \sim p$, причем в $S_{\bar{x}}(A)$ такой q единственный.*

Доказательство. Существование q следует из 1.8(а), единственность — из 1.8(б). □

Определения. (1) *Тип q из предложения 1.9 назовем свободным x-A-пополнением h-типа p* (обозначим $\mathrm{fr}(p, \bar{x}, A)$). Когда ясно, о каком $\bar{x}$ идет речь, то мы будем q называть свободным A-пополнением или свободным пополнением на A и обозначать через $\mathrm{fr}(p, A)$.

(2) *Пусть $p \in S(B)$ и $A \subseteq B$. Если p является свободным B-пополнением h-типа $p^+ \restriction A$, то тип p называется свободным над A* (обозначается $p \downarrow A$), *в противном случае p называется несвободным над A* (обозначается $p \curlywedge A$).

(3) *Реализация $\bar{b}$ h-типа $p \in^{\subseteq} S^h_{\bar{x}}(A)$ называется свободной над $B \subseteq A$, если $p \vdash \mathrm{tp}^{\pm}_{\bar{x}}(\bar{b}, B)$.*

Предложение 1.10. *Пусть T — полная хорнова теория, $p \in S_{\bar{x}}(A)$. Для любого $B \supseteq A$ существует единственный $q \in S_{\bar{x}}(B)$, для которого выполнено $p \subseteq q$ и $q \downarrow A$.*

Доказательство. Заметим, что свойство $p \subseteq q$ и $q \downarrow A$ равносильно в силу полноты типов p, q и 1.8(б) тому, что q является x-B-свободным пополнением h-типа p^+. Таким образом, существование и единственность типа q следуют из 1.9. □

Предложение 1.11. *Пусть T — полная стабильная хорнова теория. Следующие условия равносильны:*

(а) *T суперстабильна;*

(б) *для любой последовательности h-эквивалентностей $\langle \Phi_n(\bar{x}, \bar{y}) \mid n \in \omega \rangle$, для которой* выполняются условия $\vdash \Phi_{n+1}(\bar{x}, \bar{y}) \to \Phi_n(\bar{x}, \bar{y})$, $n \in \omega$, *и любого $p \in S_{\bar{x}}(\varnothing)$ найдется $n_0 \in \omega$ такое, что $p(\bar{x}) \cup p(\bar{y}) \vdash \Phi_n(\bar{x}, \bar{y}) \leftrightarrow \Phi_{n_0}(\bar{x}, \bar{y})$ для всех $n \geqslant n_0$;*

(в) *для любых множества A в T и $p \in S^h_{\bar{x}}(A)$ найдется h-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$, для которой $p \sim p \restriction \varnothing \cup \{\Phi(\bar{x}, \bar{a})\}$.*

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б) Ввиду полноты типа p, если для h-эквивалентностей $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ и $\Psi(\bar{x}, \bar{y})$ имеет место $p(\bar{x}) \vdash \Phi(\bar{x}, \bar{x}) \wedge \Psi(\bar{x}, \bar{x})$ и неверно $p(\bar{x}) \cup p(\bar{y}) \vdash \Phi(\bar{x}, \bar{y}) \to \Psi(\bar{x}, \bar{y})$, то для любой реализации $\bar{a}$ типа p существует такая реализация $\bar{b}$ типа $p(\bar{x}) \cup \{\Phi(\bar{x}, \bar{a})\}$, что $\vdash \neg \Psi(\bar{a}, \bar{b})$. Из h-неприводимости теории T и 1.8(б) следует, что если для h-эквивалентности $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ и полного типа $r \in S_{\bar{x}}(A)$ мы имеем условия $r(\bar{x}) \vdash \Phi(\bar{x}, \bar{x})$ и $\neg(r(\bar{x}) \cup r(\bar{y}) \vdash \Phi(\bar{x}, \bar{y}))$, то существует бесконечное множество $\{\bar{a}_i \mid i \in I\}$ попарно не Φ-эквивалентных реализаций типа r. По теореме компактности множество I можно взять любой мощности. Предположим, что условие (б) не выполняется. Тогда найдутся такие $p \in S_{\bar{x}}(\varnothing)$ и h-эквивалентности $\Phi_n(\bar{x}, \bar{y})$, $n \in \omega$, что для любого $n \in \omega$

1) $\Phi_n(\bar{x}, \bar{x}) \in p$,

2) $p(\bar{x}) \cup p(\bar{y}) \vdash \Phi_{n+1}(\bar{x}, \bar{y}) \to \Phi_n(\bar{x}, \bar{y})$,

3) $\neg(p(\bar{x}) \cup p(\bar{y}) \vdash \Phi_n(\bar{x}, \bar{y}) \to \Phi_{n+1}(\bar{x}, \bar{y}))$.

По отмеченному в начале доказательства, для каждого бесконечного множества I существуют такие реализации $\bar{a}_\delta$, $\delta \in I^{<\omega}$, типа p, что для любых $n \in \omega$ и $\delta, \delta' \in I^{<\omega}$ выполнены условия

4) если $l(\delta) \geqslant n$, $l(\delta') \geqslant n$ и $\delta \restriction n = \delta' \restriction n$, то $\vdash \Phi_n(\bar{a}_\delta, \bar{a}_{\delta'})$,

5) если $l(\delta) = n$, $i, i' \in I$ и $i \neq i'$, то $\vdash \neg\Phi_{n+1}(\bar{a}_{\delta\wedge i}, \bar{a}_{\delta\wedge i'})$.

Пусть $A = \cup\{\cup\,\bar{a}_\delta \mid \delta \in I^{<\omega}\}$. Для любой бесконечной последовательности $s \in I^\omega$ определим тип $p_s = \Phi\{\bar{x}, \bar{a}_{s\restriction n}) \mid n \in \omega\}$. По условию 4 все эти типы совместны. Из условия 5 вытекает, что для любых $s \neq s'$ множество $p_s \cup p_{s'}$ несовместно. Следовательно, $|S_{\bar{x}}(A)| \geqslant |I^\omega|$. Так как $|A| = |I|$, то теория T нестабильна во всех мощностях λ, для которых выполнено $\lambda^\omega > \lambda$.

(б) $\Rightarrow$ (в) Предположим, что (б) истинно, а (в) ложно. Тогда найдутся h-формулы $\Psi_n \in p$, $n \in \omega$, для которых

$$\neg(p \restriction \varnothing \cup \{\Psi_0, \ldots, \Psi_n\} \vdash \Psi_{n+1}), \quad n \in \omega. \tag{1.1}$$

Пусть $q = \mathrm{fr}(p \restriction \varnothing, \varnothing)$ и $\Phi_n(\bar{x}^1, \bar{x}^2) = \bar{x}(\Psi_0 \wedge \ldots \wedge \Psi_n)$. Так как T стабильна, то T h-нормальна, следовательно, $\bar{x}$-нормализация Φ_n h-формулы $\Psi_0 \wedge \ldots \wedge \Psi_n$ будет h-эквивалентностью. Ясно, что имеет место $\vdash \Phi_{n+1} \to \Phi_n$ и $q(\bar{x}) \vdash \Phi(\bar{x}, \bar{x})$ для всех $n \in \omega$. По условию (б) найдется такое $n_0 \in \omega$, что

$$q(\bar{x}) \cup q(\bar{y}) \vdash \Phi_{n_0}(\bar{x}, \bar{y}) \to \Phi_{n_0+1}(\bar{x}, \bar{y}). \tag{1.2}$$

Так как $q \sim q^\pm$, то из (1.2) вытекает $q^\pm(\bar{x}) \cup q^\pm(\bar{y}) \cup \{\Phi_{n_0}(\bar{x}, \bar{y})\} \vdash$ $\vdash \Phi_{n_0+1}(\bar{x}, \bar{y})$. Отсюда по лемме 1.8 (а)

$$q^+(\bar{x}) \cup q^+(\bar{y}) \cup \{\Phi_{n_0}(\bar{x}, \bar{y})\} \vdash \Phi_{n_0+1}(\bar{x}, \bar{y}). \tag{1.3}$$

Поскольку q — свободное пополнение h-типа p, то $q^+ \sim p$, поэтому из (1.3) получаем

$$(p \restriction \varnothing)(\bar{x}) \cup (p \restriction \varnothing)(\bar{y}) \cup \{\Phi_{n_0}(\bar{x}, \bar{y})\} \vdash \Phi_{n_0+1}(\bar{x}, \bar{y}). \tag{1.4}$$

Так как Φ_n, $n \in \omega$,— $\bar{x}$-нормализации h-формул $\Psi_0 \wedge \ldots \wedge \Psi_n$, то $(\Psi_0 \wedge \ldots \wedge \Psi_n)(\bar{x})$ определяет некоторый Φ_n-класс. Следовательно, (1.4) противоречит свойству (1.1).

(в) $\Rightarrow$ (а) Из (в) сразу вытекает

$$|S_x^h(A)| \leqslant 2^{|T|} + |A|. \tag{1.5}$$

Так как T h-базируема, то

$$|S_x(A)| = |S_x^h(A)|. \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) получаем стабильность T во всех мощностях, больших, либо равных $2^{|T|}$. □

§ 2. ТЕРМАЛЬНАЯ ЛЕММА

Все понятия в этом параграфе, если из контекста не вытекает противное, относятся к теории T, которая предполагается полной и h-нормальной.

Определение. *Пусть M — T-модель, $A \subseteq M^n$, $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ — h-эквивалентность, $l(\bar{x}^i) = n$* (через $[A, \Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2), M]$ обозначим алгебраическую систему с носителем $\{\bar{a}|_{\Psi}^{M} \mid \bar{a} \in \mathrm{dom}_M\Psi \cap A\}$, предикатами которой будут

$$P_{\mathrm{X}}^m = \{\langle \bar{a}^1|_{\Psi}^{M}, \ldots, \bar{a}^m|_{\Psi}^{M}\rangle \mid \bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^m \in \mathrm{dom}_M\Psi \cap A, \quad M \models \mathrm{X}(\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^m)\},$$

где $\mathrm{X}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^m)$ — h-формула и $\{\mathrm{X}(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^m) \bigwedge\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \Psi(\bar{x}^i, \bar{y}^i)\} \vdash$ $\vdash \mathrm{X}(\bar{y}^1, \ldots, \bar{y}^m)$). *Будем называть алгебраическую систему $\mathfrak{A}$ h-нормальной, если ее теория $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ h-нормальна.*

Предложение 2.1. *Пусть M — T-модель, $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$ — h-формула и $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ — h-эквивалентность. Тогда система $A = [\Phi(M, \bar{a}), \Psi, M]$ является h-нормальной.*

Доказательство. Нормальность атомных формул P_{X}^m в A следует из h-нормальности T. Индукцией по длине h-формулы $\Psi_1(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры A нетрудно построить такую h-формулу $\Psi^*(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n, \bar{y})$ сигнатуры T, что для любых $\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^n \in \Phi(M, \bar{a})$

$$A \models \Psi_1(\bar{a}^1|_{\Psi}^{M}, \ldots, \bar{a}^n|_{\Psi}^{M}) \Leftrightarrow M \models \Psi^*(\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^n, \bar{a}).$$

Отсюда в силу h-нормальности T вытекает h-нормальность A. □

Определения. (1) *Если A — алгебраическая система, $\bar{a} \in A$, то h-формулу $\Phi(\bar{x}, y, \bar{a})$ назовем h-термом в A, если она определяет в A операцию, т. е. $A \models \forall\bar{x}\exists!y\Phi(\bar{x}, y, \bar{a})$. Если $\Phi(\bar{x}, y, \bar{a})$ — h-терм, то операцию, которую определяет формула $\Phi(\bar{x}, y, \bar{a})$, будем обозначать через $t^{\Phi}(\bar{x}, \bar{a})$ или просто $t(\bar{x})$ и будем также называть h-термом.*

(2) *Алгебра A называется абелевой, если для любого терма $t(x, \bar{y})$ сигнатуры A*

$$A \models \forall\bar{y}^1\forall\bar{y}^2(\exists xt(x, \bar{y}^1) \approx t(x, \bar{y}^2) \to \forall xt(x, \bar{y}^1) \approx t(x, \bar{y}^2)). \qquad (2.1)$$

(3) *Алгебраическую систему A назовем h-абелевой, если абелевой будет алгебра с носителем A и операциями, определенными в A любыми h-термами в A.*

Предложение 2.2. *Любая h-нормальная алгебраическая система A является h-абелевой.*

Доказательство. Нетрудно заметить, что суперпозиция h-термов в A определяется h-формулой, т. е. снова является h-термом. Поэтому достаточно доказать (2.1) для h-терма $t(x, \bar{z})$. Пусть $t(x, \bar{z})$ определяется в A h-формулой $\Phi(x, \bar{z}, y, \bar{a})$ и для некоторых $e, \bar{c}^1, \bar{c}^2 \in A$ выполнено $t(e, \bar{c}^1) = t(e, \bar{c}^2)$, т. е.

$$A \models \exists y(\Phi(e, \bar{c}^1, y, \bar{a}) \wedge \Phi(e, \bar{c}^2, y, \bar{a})). \qquad (2.2)$$

Ясно, что для любого $b \in A$

$$A \models \exists y(\Phi(b, \bar{c}^1, y, \bar{a}) \wedge \Phi(b, \bar{c}^1, y, \bar{a})).$$

Следовательно, из h-нормальности A и свойства (2) получаем, что для любого $b \in A$

$$A \models \exists y(\Phi(b, \bar{c}^1, y, \bar{a}) \wedge \Phi(b, \bar{c}^2, y, \bar{a})),$$

т. е. $t(b, \bar{c}^1) = t(b, \bar{c}^2)$, $b \in A$. □

Определения. (1) *Операция $F(x_1, x_2, x_3)$ на непустом множестве X называется термом Мальцева на X, если для любых $a, b \in X$ мы имеем $F(a, b, a) = F(b, a, a) = b$.*

(2) *Пусть A — алгебраическая система, $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$ — h-формула, $\mathrm{X}(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ — h-эквивалентность, $\bar{a} \in A$ и $A \models \forall\bar{x}(\Phi(\bar{x}, \bar{a}) \to \mathrm{X}(\bar{x}, \bar{x}))$. Назовем h-формулу $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, \bar{b})$ в A h-термом Мальцева на $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/\mathrm{X}$ в A, если она определяет в A терм Мальцева на множестве*

$X = \{\bar{c}|^A_X \mid \bar{c} \in \Phi(A, \bar{a})\}$, *т. е. для любых* $\bar{c}^1, \bar{c}^2, \bar{c}_3 \in \Phi(A, \bar{a})$ *найдется* $\bar{e} \in \Phi(A, \bar{a})$, *для которого* $\Psi(\bar{c}^1, \bar{c}^2, \bar{c}^3, A, \bar{b}) \cap \Phi(A, \bar{a}) = e|^A_X \cap \Phi(A, \bar{a})$ *и множество* $\left\{\langle \bar{c}^1|^A_X, \bar{c}^2|^A_X, \bar{c}^3|^A_X, e|^A_X\rangle \mid A \models \Psi(\bar{c}^1, \bar{c}^2, \bar{c}^3, e, b) \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 3} \Phi(\bar{c}^i, \bar{a}) \wedge \wedge \Phi(\bar{e}, \bar{a})\right\}$ *будет термом Мальцева на X.*

(3) *h-формулу* $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, \bar{b})$ *в полной теории* T_1 *будем называть h-термом Мальцева на* $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/X$ *в* T, *если она является h-термом Мальцева на* $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/X$ *в некоторой (а значит, и в любой)* T_1-*модели* M, *содержащей* $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$.

Если $X = \bar{x}^1 \approx \bar{x}^2$, то в предыдущем определении мы опускаем X.

Предложение 2.3. *Пусть алгебраическая система A h-нормальна,* $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$ — *h-формула и* $A \models \forall \bar{x}(\Phi(\bar{x}, \bar{a}) \to X(\bar{x}, \bar{x}))$.

(а) *Любые h-термы Мальцева* $\Psi_1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, \bar{b}^1)$ и $\Psi_2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, \bar{b}^2)$ *на* $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/X$ в A эквивалентны, т. е. $A \models \forall \bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3\bar{x}^4\left(\left(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 4} \Phi(\bar{x}^i, \bar{a})\right) \to \to (\Psi_1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4, \bar{b}^1) \leftrightarrow \Psi_2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4, \bar{b}^2))\right)$.

(б) *Если на* $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/X$ *в* A *существует h-терм Мальцева* $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, \bar{b})$, *то найдется на* $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/X$ *в* A *h-терм Мальцева* $\Psi^*(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x})$ *(без параметров).*

(в) *Если* $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, \bar{b})$ — *h-терм Мальцева на* $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/X$ *в* A, $\Phi_1(\bar{x}, \bar{a}^1)$ — *h-формула в* A *и* $A \models \forall x(\Phi_1(\bar{x}, \bar{a}^1) \to \Phi(\bar{x}, \bar{a}))$, *то* $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, \bar{b})$ *является h-термом Мальцева на* $\Phi_1(\bar{x}, \bar{a}^1)/X$.

Доказательство. (а) Рассмотрим h-формулу

$$\varkappa(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{b}^1, \bar{b}^2) = \exists \bar{x}(\Phi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \Psi_1(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, \bar{b}^1) \wedge \wedge \Psi_2(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, \bar{b}^2)).$$

Из определения h-терма Мальцева получаем $A \models \varkappa(\bar{c}, \bar{e}, \bar{c}, \bar{b}^1, \bar{b}^2)$ для любых $\bar{c}, \bar{e} \in \Phi(M, \bar{a})$. Из h-нормальности A тогда следует

$$A \models \forall \bar{x}^1\bar{x}^3(\exists \bar{x}^2(\Phi(\bar{x}^2, \bar{a}) \wedge \varkappa(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{b}^1, \bar{b}^2)) \to \to \forall \bar{x}^2(\Phi(\bar{x}^2, \bar{a}) \to \varkappa(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{b}^1, \bar{b}^2))).$$

Отсюда в силу $A \models \varkappa(\bar{c}, \bar{e}, \bar{e}, \bar{b}^1, \bar{b}^2)$ для любых $\bar{c}, \bar{e} \in \Phi(A, \bar{a})$

$$A \models \forall \bar{x}^1\bar{x}^2\bar{x}^3\left(\left(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 3} \Phi(\bar{x}^i, \bar{a})\right) \to \varkappa(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{b}^1, \bar{b}^2)\right),$$

и требуемая эквивалентность показана.

(б) Рассмотрим h-формулу $\Psi^*(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x})$, равную

$$\exists \bar{u}\bar{z}\left(\left(\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 3} \Phi(\bar{x}^i, \bar{u})\right) \wedge \Phi(\bar{x}, \bar{u}) \wedge \Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, \bar{z}) \wedge \wedge \forall \bar{x}^0(\Phi(\bar{x}^0, \bar{u}) \to \Psi(\bar{x}^0, \bar{x}^0, \bar{x}^0, \bar{x}^0, \bar{z}))\right).$$

Пусть даны $\bar{c}^1, \bar{c}^2, \bar{c}^3, \bar{e} \in \Phi(A, \bar{a})$. Если $A \models \Psi(\bar{c}^1, \bar{c}^2, \bar{c}^3, \bar{e}, \bar{b})$, то ясно, что $A \models \Psi^*(\bar{c}^1, \bar{c}^2, \bar{c}^3, \bar{e})$. Предположим, что выполнено $A \models \Psi^*(\bar{c}^1, \bar{c}^2, \bar{c}^3, \bar{e})$. Тогда для некоторого $\bar{d} \in A$ имеем $A \models \Psi(\bar{c}^1, \bar{c}^2, \bar{c}^3, \bar{e}, \bar{d})$ и $A \models \Psi(\bar{c}^1, \bar{c}^1, \bar{c}^1, \bar{c}^1, \bar{d})$. В силу h-нормальности A и условия $A \models \Psi(\bar{c}^1, \bar{c}^1, \bar{c}^1, \bar{c}^1, \bar{b})$, получаем $A \models \Psi(\bar{c}^1, \bar{c}^2, \bar{c}^3, \bar{e}, \bar{b})$. Таким образом, $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, \bar{b})$ и $\Psi^*(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x})$ эквивалентны на $\Phi(A, \bar{a})$.

(в) Достаточно показать, что для любых $\bar{c}^1, \bar{c}^2, \bar{c}^3 \in \Phi_1(A, \bar{a}^1)$ найдется $e \in \Phi_1(A, \bar{a}^1)$, для которого $A \models \Psi(\bar{c}^1, \bar{c}^2, \bar{c}^3, \bar{e}, b)$. Согласно определению h-терма $A \models \forall \bar{x}(\Phi_1(\bar{x}, \bar{a}^1) \to \Psi(\bar{c}^1, \bar{x}, \bar{c}^1, \bar{x}, \bar{b}))$, т. е.

$$\Phi_1(A, \bar{a}^1) \subseteq \exists \bar{x}(\Psi(\bar{c}^1, A, \bar{c}^1, \bar{x}, \bar{b}) \wedge \Phi_1(\bar{x}, \bar{a}^1)).$$

Отсюда ввиду $A \models \Psi(\bar{c}^1, \bar{c}^3, \bar{c}^3, \bar{c}^1, \bar{b})$ и h-нормальности A

$$\Phi_1(A, \bar{a}^1) \subseteq \exists \bar{x} (\Psi(\bar{c}^1, A, \bar{c}^3, \bar{x}, \bar{b}) \wedge \Phi_1(\bar{x}, \bar{a}^1)),$$

и, в частности,

$$A \models \exists \bar{x} (\Psi(\bar{c}^1, \bar{c}^2, \bar{c}^3, \bar{x}, \bar{b}) \wedge \Phi_1(\bar{x}, \bar{a}^1)). \qquad \square$$

В силу предложения 2.2 из известной теоремы Гумма — Хагемана — Хермана [9] мы получаем

Предложение 2.4. *Пусть алгебраическая система A h-нормальна и в A имеется h-терм $t(x_1, x_2, x_3)$, являющийся h-термом Мальцева на $x \approx x$ в A. Тогда на множестве A существует структура левого модуля над некоторым ассоциативным кольцом R такая, что $t(x_1, x_2, x_3)$ совпадает с операцией $x_1 + x_2 - x_3$, а операции, определенные в A h-термами, суть линейные комбинации $\Sigma r_i x_i$, где $r_i \in R$.*

Определения. (1) *Каждой совместной в T h-формуле $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$ поставим в соответствие ординал α или символ ∞, который назовем h-рангом $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$* (обозначаем $HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a})) = \alpha$ $(=\infty)$), *следующим образом:*

а) *если α — предельный ординал, то $HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a})) \geqslant \alpha \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a})) \geqslant \beta$ для всех $\beta < \alpha$;*

б) *$HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a})) \geqslant \alpha + 1 \Leftrightarrow$ существует h-формула $\Psi(\bar{x}, \bar{b})$, для которой $\vdash \exists \bar{x} (\Phi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \neg \Psi(\bar{x}, \bar{b}))$, и выполнено $HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge \Psi(\bar{x}, \bar{b})) \geqslant \alpha$;*

в) *если существует такой ординал α, что $HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a})) \geqslant \alpha$ и не имеет места $HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a})) \geqslant \alpha + 1$, то $HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a})) = \alpha$. В противном случае $HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$.*

(2) *Определим h-ранг $HR(p(\bar{x}))$ типа $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A)$ следующим образом:*

$$HR(p(\bar{x})) = \min \{HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a})) \mid \Phi(\bar{x}, \bar{a}) \text{ — } h\text{-формула}, \ p \vdash \Phi(\bar{x}, \bar{a})\}.$$

(3) *h-Ранг формулы $x \approx x$ будем называть h-рангом теории T и обозначать через $HR(T)$.*

Лемма 2.5. (а) *Если $\bar{a}^1 \equiv \bar{a}^2$, то $HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a}^1)) = HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a}^2))$.*

(б) *Если для типов $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A)$, $q \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(B)$ выполнено $p(\bar{x}) \vdash q(\bar{x})$, то $HR(p(\bar{x})) \leqslant HR(q(\bar{x}))$.*

(в) *Условие $HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$ эквивалентно существованию h-формул $\Phi_i(\bar{x}, \bar{a}^i)$, $i \in \omega$, для которых*

$$\Phi_0(\bar{x}, \bar{a}^0) = \Phi(\bar{x}, \bar{a}), \tag{2.3}$$

$$\vdash \Phi_{i+1}(\bar{x}, \bar{a}^{i+1}) \to \Phi_i(\bar{x}, \bar{a}^i), \ i \in \omega, \tag{2.4}$$

$$\vdash \exists \bar{x} (\Phi_i(\bar{x}, \bar{a}^i)) \wedge \neg \Phi_{i+1}(\bar{x}, \bar{a}^{i+1}), \ i \in \omega. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пункты (а) и (б) очевидны.

(в) Предположим, что $HR(\Phi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$. Достаточно найти такую h-формулу $\Psi(\bar{x}, \bar{b})$, что $\vdash \Psi(\bar{x}, \bar{b}) \to \Phi(\bar{x}, \bar{a})$, $\vdash \exists \bar{x} (\Phi(\bar{x}, \bar{a})) \wedge$ $\wedge \neg \Psi(\bar{x}, \bar{b})$ и $HR(\Psi(\bar{x}, \bar{b})) = \infty$. По условию для каждого ординала α найдется такая h-формула $\Psi_\alpha(\bar{x}, \bar{a}^\alpha)$, что $\vdash \Psi_\alpha(\bar{x}, \bar{a}^\alpha) \to \Phi(\bar{x}, \bar{a})$, $\vdash \exists \bar{x} (\Phi(\bar{x}, \bar{a})) \wedge \neg \Psi_\alpha(\bar{x}, \bar{a}^\alpha)$ и $HR(\Psi_\alpha(\bar{x}, \bar{a}^\alpha)) \geqslant \alpha$. Так как h-формулы сигнатуры T и типы кортежей над $\varnothing$ образуют множество, то можно считать, что для всех α формула $\Psi_\alpha(\bar{x}, \bar{a}^\alpha)$ есть $\Psi_0(\bar{x}, \bar{a}^\alpha)$ для некоторой $\Psi_0(\bar{x}, \bar{y})$ и $\bar{a}^\alpha \equiv \bar{a}^0$ для некоторого кортежа $\bar{a}^0$. Из (а) получаем, что в качестве требуемой $\Psi(\bar{x}, \bar{b})$ можно взять $\Psi_0(\bar{x}, \bar{a}^0)$.

Для доказательства обратного утверждения достаточно индукцией по ординалу α показать, что $HR(\Phi_i(\bar{x}, \bar{a}^i)) \geqslant \alpha$ для всех $i \in \omega$. Этот факт сразу следует из определения h-ранга.

Определения. (1) *Каждой совместной в T формуле* $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ *поставим в соответствие оценку* $\operatorname{Deg}(\varphi(\bar{x}, \bar{a}))$, *которая является либо ординалом* α, *либо символом* ∞ *следующим образом*:

а) *если* α — *предельный ординал, то*

$$\operatorname{Deg}(\varphi(\bar{x}, \bar{a})) \geqslant \alpha \Leftrightarrow (\operatorname{Deg}(\varphi(\bar{x}, \bar{a})) \geqslant \beta \text{ для всех } \beta < \alpha);$$

б) $\operatorname{Deg}(\varphi(\bar{x}, \bar{a})) \geqslant \alpha+1 \Leftrightarrow$ *существует h-эквивалентность* $\eta(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ *и кортежи* $\bar{b}^i$, $i \in \omega$, *для которых* $\operatorname{tp}(\bar{b}^i, \bar{a}) = \operatorname{tp}(\bar{b}^0, \bar{a})$, $\vdash \neg\eta(\bar{b}^i, \bar{b}^j)$, $i < j < \omega$, *и* $\operatorname{Deg}(\eta(\bar{x}, \bar{b}^0) \wedge \varphi(\bar{x}, \bar{a})) \geqslant \alpha$;

в) *если существует такой ординал* α, *что* $\operatorname{Deg}(\varphi(\bar{x}, \bar{a})) \geqslant \alpha$ *и не имеет места* $\operatorname{Deg}(\varphi(\bar{x}, \bar{a})) \geqslant \alpha+1$, *то* $\operatorname{Deg}(\varphi(\bar{x}, \bar{a})) = \alpha$; *в противном случае* $\operatorname{Deg}(\varphi(\bar{x}, \bar{a})) = \infty$.

(2) *Если* $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A)$, *то полагаем*

$$\operatorname{Deg}(p(\bar{x})) = \min\{\operatorname{Deg}((\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n)(\bar{x}, \bar{a})) \mid \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in p\}.$$

Вместо $\operatorname{Deg}(\operatorname{tp}(\bar{a}, A))$ будем писать $\operatorname{Deg}(a, A)$.

Лемма 2.6 (а) *Если* $\bar{a}^1 \equiv \bar{a}^2$, *то* $\operatorname{Deg}(\varphi(\bar{x}, \bar{a}^1)) = \operatorname{Deg}(\varphi(\bar{x}, \bar{a}^2))$.

(б) *Если* $p(\bar{x}) \vdash q(\bar{x})$, *то* $\operatorname{Deg}(p(\bar{x})) \leqslant \operatorname{Deg}(q(\bar{x}))$.

(в) *Пусть в теории T каждая формула эквивалентна булевой комбинации h-формул и формул с одной свободной переменной. Тогда условие* $\operatorname{Deg}(x \approx x) = \infty$ *равносильно несуперстабильности* T.

Доказательство. Пункты (а) и (б) очевидны.

(в) Предположим, что $\operatorname{Deg}(x \approx x) = \infty$. Так же как в доказательстве леммы 2.5 (в), можно построить h-эквивалентности $\eta_i(x_1, x_2)$, $i \in \omega$, и элементы b_δ, $\delta \in \omega^{<\omega}$, для которых выполнены условия

$$\vdash \eta_{i+1} \to \eta_i, \quad i \in \omega, \tag{2.6}$$

$$\vdash \eta_i(b_\delta, b_{\delta \wedge k}), \quad l(\delta) = i \in \omega, \quad k \in \omega, \tag{2.7}$$

$$\vdash \neg\eta_{i+1}, (b_{\delta \wedge k}, b_{\delta \wedge n}), \quad l(\delta) = i \in \omega, \quad k < n < \omega, \tag{2.8}$$

$$\operatorname{tp}(b_{\delta \wedge k}, b_\delta) = \operatorname{tp}(b_{\delta \wedge n}, b_\delta), \quad k, n \in \omega. \tag{2.9}$$

По теореме компактности для любого кардинала λ существуют тогда элементы b_δ, $\delta \in \lambda^{<\omega}$, для которых выполнены условия (2.6) — (2.9) с заменой k, $n \in \omega$ на k, $n \in \lambda$. Ясно, что для любой функции $f\colon \omega \to \lambda$ тип $t_f(x) = \{\eta_i(x, b_{\langle f(0), \ldots, f(i) \rangle}) \mid i \in \omega\}$ будет совместен и для $f \neq f'$ тип $t_f(x) \cup t_{f'}(x)$ несовместен. Таким образом, для множества $B = \{b_\delta \mid \delta \in \lambda^{<\omega}\}$ мы имеем $|B| = \lambda$ и $|S_x(B)| \geqslant \lambda^\omega$, т. е. T несуперстабильна.

Пусть теперь $\operatorname{Deg}(x \approx x) < \infty$. Возьмем произвольную ω-насыщенную T-модель M и произвольный тип $p \in S_x(M)$. Пусть $\varphi(x, \bar{m}) \in p$ и $\operatorname{Deg}(\varphi(x, \bar{m})) = \operatorname{Deg}(p(x))$. Покажем, что

$$|\{q \in S_x(M) \mid p \restriction \bar{m} \subseteq q, \ \operatorname{Deg}(g) = \operatorname{Deg}(p)\}| \leqslant 2^{|T|}. \tag{2.10}$$

По выбору $\varphi(x, \bar{m})$ и определению Deg получаем, что любая h-эквивалентность $x\Phi$, $\Phi \in p^+$ может разбить множество реализаций типа $p \restriction \bar{m}$ лишь на конечное число классов. Поэтому в силу ω-насыщенности M найдется такое множество $B \subseteq M$, что $|B| = |T|$ и для любой h-формулы $\Phi(x, \bar{n})$, $\bar{n} \in M$, для которой $p \restriction \bar{m} \cup \{\Phi(x, n)\}$ совместно, найдется такой $b \in B$, что $\vdash \Phi(x, \bar{n}) \leftrightarrow (x\Phi)(x, b)$. Отсюда, в силу условия базируемости T получаем (2.10). Из (2.10) и (а) вытекает $|S_x(M)| = |M| + 2^{|T|}$. Так как любое множество A в теории T мощности $\lambda \geqslant 2^{|T|}$ вкладывается в ω-насыщенную T-модель M мощности λ, то из предыдущего получаем суперстабильность теории T. □

Определения. (1) *Пусть* $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A)$, $q \in {}^{\subseteq}S_{\bar{y}}(B)$, $\Phi(\bar{u}, \bar{w}, \bar{a})$ — *h-формула*, $l(\bar{u}) = l(\bar{x})$ *и* $l(\bar{w}) = l(\bar{y})$. *Говорим, что* $\Phi(\bar{u}, \bar{w}, \bar{a})$ *свя-*

зывает типы $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ или, что $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ связаны с помощью $\Phi(\bar{u}, \bar{w}, \bar{a})$, если выполняются следующие условия:

а) *для любых реализаций $\bar{b}$ и $\bar{c}$ типов $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ соответственно существуют $\bar{b}'$ и $\bar{c}'$, реализующие соответственно $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$, для которых выполнено $\vdash\Phi(\bar{b}, \bar{c}', \bar{a})$ и $\Phi(\bar{b}', \bar{c}, \bar{a})$;*

б) *существуют реализации $\bar{b}$ и $\bar{c}$ типов $p(x)$ и $q(y)$ соответственно, для которых имеет место $\vdash \neg\Phi(\bar{b}, \bar{c}, \bar{a})$.*

(2) *Будем говорить, что h-формула $\Phi(\bar{u}, \bar{w}, \bar{a})$ инъективно связывает $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$, если выполнены условия* а) $\{\Phi(\bar{u}, \bar{w}, \bar{a}), \Phi(\bar{u}', \bar{w}, \bar{a})\} \vdash \bar{u} \approx \bar{u}'$; б) $\{\Phi(\bar{u}, \bar{w}, \bar{a}), \Phi(\bar{u}, \bar{w}', \bar{a})\} \vdash \bar{w} \approx \bar{w}'$.

(3) *Если существует h-формула над множеством C, (инъективно) связывающая типы $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$, то говорим, что $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ (инъективно) связаны над C. Будем называть типы $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ (инъективно) связанными, если они связаны над некоторым C и абсолютно (инъективно) связанными, если они (инъективно) связаны над $\varnothing$.*

Легко доказывается

Лемма 2.7. *Если типы $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ инъективно связаны, то*

(а) $\mathrm{Deg}(p(\bar{x})) = \mathrm{Deg}(q(\bar{y}))$,

(б) $HR(p(\bar{x})) = HR(q(\bar{y}))$. $\square$

Определение. *Тип $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A)$ назовем аддитивным, если существует такая h-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$, что $p \vdash \Phi(\bar{x}, \bar{a})$ и на $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$ в T имеется h-терм Мальцева.*

Лемма 2.8. *Пусть теория T хорнова, суперстабильна и $p \in {}^{\subseteq}S_x(A)$ — аддитивный тип. Тогда*

$$\mathrm{Deg}(p^+(x) \cup p^-(x)) = \mathrm{Deg}(p^+(x)) = HR(p(x)).$$

В частности, если $p \in S_x(A)$, то $\mathrm{Deg}(p(x)) = HR(p(x))$.

Доказательство. Достаточно показать, что если $\varphi(x) = (\Phi_0(x) \wedge \neg\Phi_1(x) \wedge \ldots \wedge \neg\Phi_k(x))$, где $\Phi_0, \ldots, \Phi_k$ — h-формулы над A и на $\Phi_0(x)$ в T существует h-терм Мальцева, то $\mathrm{Deg}(\varphi(x)) = \mathrm{Deg}(\Phi_0(x)) = HR(\Phi_0(x))$. Ясно, что всегда $\mathrm{Deg}(\Phi_0(x)) \leqslant HR(\Phi_0(x))$ и в силу леммы 2.6 (б) $\mathrm{Deg}(\varphi(x)) \leqslant \mathrm{Deg}(\Phi_0(x))$. Покажем вначале, что $\mathrm{Deg}(X(x, \bar{a})) = HR(X(x, \bar{a}))$ для любой совместной h-формулы $X(x, \bar{a})$, для которой $\vdash X(x, \bar{a}) \to \Phi_0(x)$. Достаточно индукцией по α показать

$$HR(X(x, \bar{a})) \geqslant \alpha \Rightarrow \mathrm{Deg}(X(x, \bar{a})) \geqslant \alpha. \tag{2.11}$$

Для $\alpha = 0$ доказывать нечего. Для предельного α свойство (2.11) следует из индукционного предположения. Пусть $\alpha = \beta + 1$ и $HR(X(x, \bar{a})) \geqslant \alpha$. Тогда существует h-формула $\Psi(x, \bar{b})$, для которой $\vdash\Psi(x, \bar{b}) \to X(x, \bar{a})$, $\vdash \exists x (X(x, \bar{a}) \wedge \neg\Psi(x, \bar{b}))$ и $HR(\Psi(x, \bar{b})) \geqslant \beta$. Возьмем элемент e, реализующий $\Psi(x, \bar{b})$. Пусть $\Psi^*(x_1, x_2, x_3, x)$ — h-терм Мальцева на $\Phi_0(x)$. По 2.4 и 2.3 (в) формула $\Psi^*(x_1, x_2, e, x)$ будет определять сложение $x = x_1 + x_2$ на множестве реализаций формулы $\Phi_0(x)$, а формулы $X(x, \bar{a})$ и $\Psi(x, \bar{b})$ будут определять в T-модели M, содержащей $\bar{a}$ и $\bar{b}$, подгруппы $G \supseteq G_1$ относительно этого сложения. Из леммы 1.1 (б) следует, что индекс G_1 в G бесконечен. Для любых $c_1, c_2 \in X(M, \bar{a})$ формула $X(x, \bar{a}) \wedge X(y, \bar{a}) \wedge x - c_1 \approx y - c_2$ будет инъективно связывать формулы $\Psi(x - c_1, \bar{b})$ и $\Psi(x - c_2, \bar{b})$, которые определяют смежные классы $c_1 + G$ и $c_2 + G$ по подгруппе G_1. По лемме 2.7 (а) $\mathrm{Deg}(\Psi(x - c_1, \bar{b})) = \mathrm{Deg}(\Psi(x - c_2, \bar{b}))$. По теореме компактности найдутся такие e_i, $i \in \omega$, что $\vdash X(e_i, \bar{a}) \wedge \neg\Psi(e_i - e_j, \bar{b})$ и $\mathrm{tp}(e_i, \bar{a}) = \mathrm{tp}(e_j, \bar{a})$, $i < j < \omega$. Из определения Deg тогда получаем $\mathrm{Deg}(X(x, \bar{a})) \geqslant \mathrm{Deg}(\Psi(x, \bar{b})) + 1$. Так как $HR(\Psi(x, \bar{b})) \geqslant \beta$, то по индукционному предположению $\mathrm{Deg}(\Psi(x, \bar{b})) \geqslant \beta$. Следовательно, $\mathrm{Deg}(X(x, \bar{a})) \geqslant \alpha$.

Таким образом, осталось показать, что

$$\mathrm{Deg}\left(\Phi_0(x) \wedge \neg\Phi_1(x) \wedge \ldots \wedge \neg\Phi_k(x)\right) = \mathrm{Deg}\left(\Phi_0(x)\right).$$

Предположим, что

$$\mathrm{Deg}\left(\Phi_0(x) \wedge \neg\Phi_1(x) \wedge \ldots \wedge \neg\Phi_k(x)\right) < \mathrm{Deg}\left(\Phi_0(x)\right). \tag{2.12}$$

Из определения Deg легко выводится, что если для некоторых формул $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ мы имеем $\mathrm{Deg}(\varphi_1(x) \vee \varphi_2(x)) = \alpha$, то для некоторого $j \in \{1, 2\}$ выполняется $\mathrm{Deg}(\varphi_j(x)) = \alpha$. Поэтому из (2.12)

$$\mathrm{Deg}\left(\Phi_0(x)\right) = \mathrm{Deg}\left(\Phi_0(x) \wedge \Phi_i(x)\right). \tag{2.13}$$

для некоторого $i \in \{1, \ldots, k\}$. По доказанному выше из (2.13) следует $HR(\Phi_0(x)) = HR(\Phi_0(x) \wedge \Phi_i(x))$. Из определения HR тогда получаем $\vdash \Phi_0(x) \to \Phi_i(x)$. Это противоречит совместности $\varphi(x)$. □

Определение. *Будем говорить, что h-эквивалентность $\eta(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ делит тип $p(\bar{x}) \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A)$, если $p(\bar{x}) \vdash \eta(\bar{x}, \bar{x})$ и существуют реализации $\bar{a}^1$, $\bar{a}^2$ типа $p(\bar{x})$, для которых $\vdash \neg\eta(\bar{a}^1, \bar{a}^2)$.*

Следующую лемму в дальнейшем мы будем называть *термальной леммой.*

Лемма 2.9. *Пусть типы $p(\bar{x}) \in {}^{\subseteq}S(A)$ и $q(\bar{y}) \in {}^{\subseteq}S(B)$ связаны, но не абсолютно связаны. Тогда для некоторых h-формулы, $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$, для которой $p(\bar{x}) \vdash \Phi(\bar{x}, \bar{a})$ и h-эквивалентности $\Theta(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, делящей $p(\bar{x})$, существует h-терм Мальцева $\Psi^*(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x})$ на $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/\Theta$ в T. При этом в качестве Θ можно взять $\bar{u}X$, где $X(\bar{u}, \bar{w}, \bar{c})$ — h-формула, связывающая $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$, а в качестве $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$ — h-формулу $\exists\bar{z}X(\bar{x}, \bar{e}, \bar{z}) \wedge \exists\bar{w}X(\bar{x}, \bar{w}, \bar{c})$, где $\bar{e}$ — произвольная реализация типа $q(\bar{y})$.*

Доказательство. Будем считать, что кортежи $\bar{x}$ и $\bar{y}$ не содержат общих переменных. Пусть $X(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ — h-формула, связывающая $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$. Так как $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ не связаны абсолютно, то h-формула $\exists\bar{z}X(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ не связывает $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$. Следовательно,

$$p(\bar{x}) \cup q(\bar{y}) \vdash \exists\bar{z}X(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}). \tag{2.14}$$

Пусть $\bar{e}$ — реализация типа $q(\bar{y})$. Обозначим через $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$ h-формулу $\exists\bar{z}X(\bar{x}, \bar{e}, \bar{z}) \wedge \exists\bar{y}X(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$, а через $\Psi(\bar{y}, \bar{b})$ — h-формулу $\exists\bar{x}(\Phi(\bar{x}, \bar{a}) \wedge X(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c}))$. Из h-нормальности T получаем

$$\{\Phi(\bar{x}, \bar{a}), \Psi(\bar{y}, \bar{b})\} \vdash \exists\bar{z}X(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \tag{2.15}$$

а из (2.14) — $p(\bar{x}) \vdash \Phi(\bar{x}, \bar{a})$. Ясно, что $X(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ связывает $\{\Phi(\bar{x}, \bar{a})\}$ и $\{\Psi(\bar{y}, \bar{b})\}$.

Обозначим через $\Theta(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ h-эквивалентность $\bar{x}X$, а через $\eta(\bar{x}^1, \bar{y}^1, \bar{x}^2, \bar{y}^2)$ — h-эквивалентность $\bar{x}\bar{y}X$. Из h-нормальности T, свойства (2.15) и связанности $\{\Phi(\bar{x}, \bar{a})\}$ и $\{\Psi(\bar{y}, \bar{b})\}$ с помощью $X(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ вытекает, что для любых реализаций $\bar{g}$ и $\bar{f}$ формул $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$ и $\Psi(\bar{y}, \bar{b})$ соответственно формула $\eta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{g}, \bar{f})$ определяет в любой T-модели M, содержащей $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{g}$ и $\bar{f}$, взаимно-однозначное соответствие между Θ-классами, лежащими в $\Phi(M, \bar{a})$, и $\bar{y}X$-классами, лежащими в $\Psi(M, \bar{b})$. Возьмем некоторую T-модель M, для которой $\bar{a}$, $\bar{b} \in M$, и зафиксируем некоторый кортеж $\bar{f} \in \Psi(M, \bar{b})$. Пусть даны произвольные $\bar{a}^1$, $\bar{a}^2$, $\bar{a}^3 \in \Phi(M, \bar{a})$. Тогда найдутся $\bar{g} \in \Phi(M, \bar{a})$ и $\bar{f}' \in \Psi(M, \bar{b})$, для которых $M \models \eta(\bar{a}^3, \bar{f}', \bar{a}^1, \bar{f}) \wedge \eta(\bar{g}, \bar{f}, \bar{a}^2, \bar{f}')$. При этом Θ-класс кортежа $\bar{g}$ и $\bar{y}X$-класс кортежа $\bar{f}'$ однозначно определены Θ-классами кортежей $\bar{a}^1$, $\bar{a}^2$, $\bar{a}^3$ и $\bar{y}X$-классом кортежа $\bar{f}$. Так как η определяет в M на множестве $\Phi(M, \bar{a}) \times \Psi(M, \bar{b})$ эквивалентность, то из $\Theta\bar{a}^2 = \Theta\bar{a}^3$ вытекает $\Theta\bar{g} = \Theta\bar{a}^1$, а из $\Theta\bar{a}^1 = \Theta\bar{a}^3$ — $\bar{y}X(\bar{f}, \bar{f}')$ и $\Theta\bar{g} = \Theta\bar{a}^2$. Таким образом, h-формула $\tau(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, \bar{a}, \bar{b}, \bar{f}) = \exists\bar{y}\left(\Psi(\bar{y}, \bar{b}) \wedge \eta(\bar{x}^3, \bar{y}, \bar{x}^1, \bar{f}) \wedge \eta(\bar{x}, \bar{f}, \bar{x}^2, \bar{y})\right)$ будет h-термом Мальцева на $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/\Theta$ в M. По предложению 2.3 (б) найдется h-формула $\Psi^*(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x})$, являющаяся h-термом Мальцева на $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/\Theta$ в M. Ясно, что Ψ^* будет h-термом Мальцева на $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/\Theta$ в T. □

В следующих определении и предложении мы не предполагаем h-нормальности теории T.

Определение. *Пусть T — полная теория и M^F — фильтрованная степень некоторой T-модели M по фильтру Фреше F на ω. По известной теореме Фефермана — Вота теория $T^h = Th(M^F)$ не зависит от выбора T-модели M. Теорию T^h будем называть h-компаньоном теории T.*

Если A — множество в T, то через $F(A)$ будем обозначать множество в T^h, являющееся образом A при естественном вложении T-модели M, содержащей A, в T-модель M^F. Если p — тип в теории T, то через $F(p)$ обозначаем тип $\{\varphi(\bar{x}, F(\bar{a}))\,|\,\varphi(\bar{x}, \bar{a})\in p\}$ в теории T^h.

Предложение 2.10. *Пусть T — полная теория. Тогда*

(а) *T^h — полная хорнова теория;*

(б) *T h-нормальна $\Leftrightarrow$ T^h h-нормальна;*

(в) *h-формула $\Phi(\bar{u}, \bar{w}, \bar{c})$ связывает h-типы $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ в $T \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \Phi(\bar{u}, \bar{w}, F(\bar{c}))$ связывает h-типы $F(p)(\bar{x})$ и $F(q)(\bar{y})$ в T^h;*

(г) *$\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, \bar{b})$ является h-термом Мальцева на $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/\Theta$ в $T \Leftrightarrow \Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}, F(\bar{b}))$ является h-термом Мальцева на $\Phi(\bar{x}, F(\bar{a}))/\Theta$ в T^h.*

Доказательство. Пункт (а) следует из предложения 1.3 (б). Остальные легко вытекают из фильтруемости h-формул. □

Одним из наиболее полезных следствий термальной леммы является

Следствие 2.11. *Если h-компаньон T^h полной теории T суперстабилен, то в условиях термальной леммы для любой T-модели M, содержащей $\bar{a}$, система $[\Phi(M, \bar{a}), \Theta, M]$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей h-множеств.*

Доказательство. Ясно, что достаточно показать, что для T^h-модели M^F система $A = [\Phi(M^F, F(\bar{a})), \Theta, M^F]$ удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей h-множеств. Пусть $\Psi(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x})$ — h-терм Мальцева на $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/\Theta$ в T. По предложению 2.10 (г) Ψ^* будет h-термом Мальцева на $\Phi(\bar{x}, \bar{a})/\Theta$ в T^h. Из леммы 1.1 (б) и определения системы A вытекает, что $A \models \alpha(\Phi, \Psi_0, \ldots, \Psi_n; \bar{y})$ для любых h-формул $\Phi(x, \bar{y})$, $\Psi_0(x, \bar{y})$, $\ldots$, $\Psi_n(x, \bar{y})$. Из предложения 1.3 (б) получаем тогда, что теория $T_1 = \mathrm{Th}(A)$ хорнова. Индукцией по ординалам легко устанавливается, что $\mathrm{Deg}(T_1) \leqslant \mathrm{Deg}(\Phi(\bar{x}, F(a)))$ ($\mathrm{Deg}(T)$ — это $\mathrm{Deg}(x \approx x)$ в T). В частности, теория T_1 суперстабильна и, следовательно, h-нормальна. Так как в теории T_1 на $x \approx x$ имеется в силу термальной леммы h-терм Мальцева, то по лемме 2.8 $\mathrm{Deg}(T_1) = HR(T_1)$. По лемме 2.6 (в) и суперстабильности T_1 тогда получаем $HR(T_1) < \infty$. Следовательно, по лемме 2.5 (в) система A удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей h-множеств. □

§ 3. h^*-БАЗИРУЕМОСТЬ

Определение. *Теория T (не обязательно полная) называется h^*-базируемой, если любая формула сигнатуры T эквивалентна в T булевой комбинации h-формул и формул, имеющих не более одной свободной переменной.*

В данном параграфе мы разовьем необходимую для дальнейшего теорию типов для h-нормальных, h^*-базируемых полных теорий. Всюду в этом параграфе, если не оговорено противное, через T обозначается полная h-нормальная и h^*-базируемая теория.

Предложение 3.1. *Теория T стабильна.*

Доказательство. Так же как в доказательстве предложения 1.4, из h-нормальности T получаем

$$|\{p^+ | p \in S_x(A)\}| \leqslant |A|^{|T|} \tag{3.1}$$

для любого бесконечного множества A в T. Для любой теории T выполнено также

$$|\{p \upharpoonright \varnothing \mid p \in S_x(A)\}| \leqslant 2^{|T|}. \tag{3.2}$$

В силу h^*-базируемости T любой тип $p \in S(A)$ полностью определяется своим подтипом $p^+ \cup p \upharpoonright \varnothing$. Следовательно, свойства (3.1) и (3.2) влекут стабильность T в мощности $2^{|T|}$. □

Определение. *Тип p называется копией типа q над множеством A, если в T существует элементарное отображение E, для которого* $\operatorname{dom} p \cup A \subseteq \operatorname{dom} E$, $E(p) = q$, $E(a) = a (a \in A)$.

Ясно, что отношение «быть копией над A» является эквивалентностью.

Определение. *Будем говорить, что тип $p \in S(A)$ ответвляется над множеством $B \subseteq A$* (обозначаем $p \curlywedge B$), *если в T имеется более $2^{|T|}$ попарно несовместных копий p над B. Если $p \in S(A)$ не ответвляется над $B \subseteq A$, то пишем $p \downarrow B$.*

Следующее предложение объясняет совпадение обозначения $p \downarrow B$ для понятий «p не ответвляется над B» и «p свободный над B» (см. определение в § 1).

Предложение 3.2. *Пусть T — полная стабильная хорнова теория. Для того чтобы тип $p \in S(A)$ не ответвлялся над $B \subseteq A$ необходимо и достаточно, чтобы p был свободным над B.*

Доказательство. Достаточность. Пусть p свободен над B и q — копия p над B. Так как $p^+ \sim p^+ \upharpoonright B$, то $q^+ \sim p^+$. Пусть $\neg\Phi \in q^-$. Из эквивалентности $q^+ \sim p^+$ вытекает, что $p^+ \cup \{\neg\Phi\}$ совместно. Из леммы 1.8 (а) и эквивалентности $q^+ \sim p^+$ получаем совместность $p^+ \cup p^- \cup \cup q^+ \cup q^-$, а из предложения 1.3 (а) и леммы 1.8 (б) — совместность $p \cup q$. Таким образом, мы показали, что у свободных над B типов p нет несовместных с p копий над B, следовательно, p не ответвляется над B.

Необходимость. Предположим, что p не является свободным над B. Тогда существует h-формула $\Phi_0(\bar{x}, \bar{a}) \in p^+$, для которой $p^+ \upharpoonright B \cup \cup \{\neg\Phi_0(\bar{x}, \bar{a})\}$ совместно. Таким образом, h-эквивалентность $x\Phi$ делит $p \upharpoonright B$. По теореме компактности, лемме 1.8 и h-нормальности T для любого множества I найдутся такие кортежи $\bar{a}_i$, $i \in I$, что $\operatorname{tp}(\bar{a}_i, B) = \operatorname{tp}(\bar{a}, B)$ и $\vdash \Phi_0(\bar{x}, \bar{a}_i) \to \neg\Phi_0(\bar{x}, \bar{a}_j)$, $i, j \in I$, $i \neq j$. Пусть $E_i \colon A \to C_i$, $i \in I$,— такие элементарные отображения, что $E_i(\bar{a}) = \bar{a}_i$ и $E_i(b) = b$ для $b \in B$. Тогда типы $E_i(p)$, $i \in I$, будут попарно несовместными копиями над B типа p. В силу произвольности множества I получаем, что p ответвляется над B. □

Условие $p \curlywedge B$ для теории T эквивалентно условию «p форкуется над B», введенному С. Шелахом для стабильных теорий. Напомним это понятие.

Определения. (1) *Формула $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ в полной теории T делится над B, если существуют кортежи $\bar{a}^i$, $i \in \omega$, и число $m \in \omega$, для которых выполняются условия*

а) $\operatorname{tp}(\bar{a}^i, B) = \operatorname{tp}(\bar{a}, B)$, $i \in \omega$;

б) *множество* $\{\varphi(\bar{x}, \bar{a}^i) \mid i \in \omega\}$ *m-несовместно, т. е. для любого множества $u \subseteq \omega$ мощности m формула $\bigwedge_{i \in u} \varphi(\bar{x}, \bar{a}^i)$ несовместна в T.*

(2) *Тип $p \in S_{\bar{x}}(A)$ в стабильной теории T форкуется над $B \subseteq A$, если существует $\varphi(\bar{x}, \bar{a}) \in p$, которая делится над B.*

Определения. (1) *Индексом* $[p(\bar{x})\colon \eta]$ *h-эквивалентности* $\eta(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ *в типе* $p(\bar{x})$ *называется максимальное число* $k \in \omega$ *(если оно существует), для которого найдутся реализации* $\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^k$ *типа* $p(\bar{x})$ *такие, что* $\vdash \eta(\bar{a}^i, \bar{a}^i)$ *и* $\vdash \neg\eta(\bar{a}^i, \bar{a}^j)$, $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$. *Если такого* $k \in \omega$ *не существует, то говорим, что индекс* η *в типе* $p(\bar{x})$ *бесконечен и пишем* $[p(\bar{x})\colon \eta] = \infty$.

2) *Пусть* $p(\bar{x})$ — *некоторый тип. Назовем h-формулы* $\Phi(\bar{x}, \bar{a})$ *и* $\Psi(\bar{x}, \bar{b})$ $p(x)$*-подобными, если* $p(\bar{x}^1) \cup p(\bar{x}^2) \vdash (\bar{x}\Phi)(\bar{x}^1, \bar{x}^2) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow (\bar{x}\Psi)(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$.

Лемма 3.3. *Пусть* $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A)$ и $\bar{p} \restriction \varnothing$ — *полный тип. Если для h-формул* $\Phi_0(\bar{x}, \bar{a}_0), \ldots, \Phi_n(\bar{x}, \bar{a}^n)$ *выполнено* $[p(\bar{x})\colon \bar{x}\Phi_0] = \infty$ *и множество* $p(\bar{x}) \cup \{\neg\Phi_0(\bar{x}, \bar{a}^0), \ldots, \neg\Phi_n(\bar{x}, \bar{a}^n)\}$ *несовместно, то множество* $p(x) \cup \{\neg\Phi_1(\bar{x}, \bar{a}^1), \ldots, \neg\Phi_n(\bar{x}, \bar{a}^n)\}$ *также несовместно.*

Доказательство. По теореме компактности и h^*-базируемости T можно считать, что $p = p \restriction \varnothing \cup \{\Psi(\bar{x}, \bar{b})\}$, где $\Psi(\bar{x}, \bar{b})$ — h-формула. Доказательство проведем индукцией по мощности k_0 максимального подмножества $X \subseteq \{\Phi_0(\bar{x}, \bar{a}^0), \ldots, \Phi_n(\bar{x}, \bar{a}^n)\}$, элементы которого попарно не $p(\bar{x})$-подобны. Если $k_0 = 1$, то в силу $[p(\bar{x})\colon \bar{x}\Phi_0] = \infty$ множество $p(\bar{x}) \cup \{\neg\Phi_0(\bar{x}, \bar{a}^0), \ldots, \neg\Phi_n(\bar{x}, \bar{a}^n)\}$ совместно и доказывать нечего. Предположим, что $k_0 > 1$ и $\{\Phi_0(\bar{x}, \bar{a}^0), \ldots, \Phi_n(\bar{x}, \bar{a}^n)\}$ — минимальное множество, для которого $p(\bar{x}) \cup \{\neg\Phi_0(\bar{x}, \bar{a}^0), \ldots, \neg\Phi_n(\bar{x}, \bar{a}^n)\}$ несовместно.

Случай 1: найдутся такие $m, l \in \{0, \ldots, n\}$, что $[p(\bar{x}) \cup \{\Phi_m(\bar{x}, \bar{a}^m)\}\colon \bar{x}\Phi_l] = \infty$. Так как $p \restriction \varnothing$ — полный тип, то для любой реализации $\bar{a}$ типа $p(\bar{x})$ имеем $[p(\bar{x}) \cup \{(\bar{x}\Phi_m)(\bar{x}, \bar{a})\}\colon \bar{x}\Phi_l] = \infty$. Очевидно, что согласно полноте $p \restriction \varnothing$ множество реализаций типа $p(\bar{x})$ покрывается $(\bar{x}\Phi_m)$-классами, следовательно, по индукционному предположению множество

$$p(\bar{x}) \cup (\{\neg\Phi_0(\bar{x}, \bar{a}^0), \ldots, \neg\Phi_n(\bar{x}, \bar{a}^n)\} \setminus \{\neg\Phi_l(\bar{x}, \bar{a}^l)\})$$

несовместно. Это противоречит минимальности n.

Случай 2: отрицание случая 1. Так как $k_0 > 1$, то найдутся $m, l \in \{0, \ldots, n\}$, для которых $\Phi_m(\bar{x}, \bar{a}^m)$ и $\Phi_l(\bar{x}, \bar{a}^l)$ не $p(\bar{x})$-подобны. Поскольку случай 1 не выполняется, то множества реализаций как типа $p(\bar{x}) \cup \{\Phi_m(\bar{x}, \bar{a}^m)\}$, так и типа $p(\bar{x}) \cup \{\Phi_l(\bar{x}, \bar{a}^l)\}$ покрываются конечным числом классов h-эквивалентности $\eta = (\bar{x}\Phi_m) \wedge (\bar{x}\Phi_l)$. Заменим в множестве $\{\Phi_0(\bar{x}, \bar{a}^0), \ldots, \Phi_n(\bar{x}, \bar{a}^n)\}$ все формулы $\Phi_i(\bar{x}, \bar{a}^i)$, которые $p(\bar{x})$-подобны формуле $\Phi_m(\bar{x}, \bar{a}^m)$ или формуле $\Phi_l(\bar{x}, \bar{a}^l)$, на конечное число h-формул $\eta(\bar{x}, \bar{c}^0), \ldots, \eta(\bar{x}, \bar{c}^2)$, для которых $p(\bar{x}) \vdash \Phi_i(\bar{x}, \bar{a}^i) \leftrightarrow \bigvee\limits_{j<r} \eta(\bar{x}, \bar{c}^j)$. В результате получим множество $\{\Psi_0(\bar{x}, \bar{b}^0), \ldots, \Psi_s(\bar{x}, \bar{b}^s)\}$, имеющее меньшее чем k не $p(\bar{x})$-подобных элементов. По индукционному предположению множество $p(\bar{x}) \cup \{\neg\Psi_{i_1}(\bar{x}, \bar{b}^{i_1}), \ldots, \neg\Psi_{i_n}(\bar{x}, \bar{b}^{i_n})\}$ несовместно, где $\{\Psi_{i_1}(\bar{x}, \bar{b}^{i_1}), \ldots, \Psi_{i_n}(\bar{x}, \bar{b}^{i_n})\}$ получается из $\{\Psi_0(\bar{x}, \bar{b}^0), \ldots$ $\ldots, \Psi_s(\bar{x}, \bar{b}^s)\}$ удалением всех формул $\Psi_i(\bar{x}, \bar{b}^i)$, для которых $p(\bar{x}) \vdash$ $\vdash \Psi_i(\bar{x}, \bar{b}^i) \to \Phi_0(\bar{x}, \bar{a}^0)$. Отсюда в силу построения множества $\{\Psi_{i_1}(\bar{x}, \bar{b}^{i_1}), \ldots, \Psi_{i_n}(\bar{x}, \bar{b}^{i_n})\}$ получаем утверждаемую леммой несовместность множества $p(\bar{x}) \cup \{\neg\Phi_1(\bar{x}, \bar{a}^1), \ldots, \neg\Phi_n(\bar{x}, \bar{a}^n)\}$. □

Напомним определение ранга $D^m(\varphi(\bar{x}, \bar{a}), L, \infty)$, $l(\bar{x}) = m$, введенное С. Шелахом:

а) $D^m(\varphi(\bar{x}, \bar{a}), L, \infty) \geqslant 0$, если формула $\varphi(\bar{x}, \bar{a})$ совместна;

б) если δ — предельный ординал, то $D^m(\varphi(\bar{x}, \bar{a}), L, \infty) \geqslant \delta \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow D^m(\varphi(\bar{x}, \bar{a}), L, \infty) \geqslant \alpha$, $\alpha < \delta$;

в) $D^m(\varphi(\bar{x}, \bar{a}), L, \infty) \geqslant \alpha + 1 \Leftrightarrow$ существует формула $X(\bar{x}, \bar{y})$, кортежи b^i, $i \in \omega$, и $n \in \omega$ такие, что $\mathrm{tp}(\bar b^i, \bar a) = \mathrm{tp}(\bar b^0, \bar a)$, $\{X(\bar x, \bar b^i) \mid i \in \omega\}$ n-несовместно и $D^m(\varphi(\bar x, \bar a) \wedge X(\bar x, \bar b^0), L, \infty) \geqslant \alpha$.

Лемма 3.4. (а) *Для любой формулы* $\varphi(\bar x, \bar a)$ *в* T *выполнено* $D^m(\varphi(\bar x, \bar a), L, \infty) = \mathrm{Deg}(\varphi(\bar x, \bar a))$.

(б) *Для* $p \in S(A)$ *и* $B \subseteq A$ *условие* $p \curlywedge B$ *равносильно условию «p форкуется над B».*

Доказательство. Оба утверждения леммы легко вытекают из h^*-базируемости и h-нормальности T в силу следующего факта: если бесконечное множество $X = \{\varphi(\bar x, \bar a^i) \mid i \in I\}$ копий над $\varnothing$ формулы $\varphi(\bar x, \bar a) = \Phi_0(\bar x, \bar a) \wedge \neg \Phi_1(\bar x, \bar a) \wedge \ldots \wedge \neg \Phi_n(\bar x, \bar a)$, где Φ_k, $k \leqslant n$,— h-формулы, является m-несовместным для $m \in \omega$, а $\varphi(\bar x, \bar a)$ совместна, то найдется такое бесконечное множество $I_1 \subseteq I$, что $\{\Phi_0(\bar x, \bar a^i) \mid i \in I_1\}$ 2-несовместно. Установим этот факт. Предположим, что такого I_1 нет. В силу h-нормальности T тогда найдется бесконечное множество $I_0 \subseteq I$, для которого $\Phi_0(\bar x, \bar a^i) \sim \Phi_0(\bar x, \bar a^j)$, $i, j \in I$. Возьмем такой $p \in S_{\bar x}(\varnothing)$, что $p(\bar x) \cup \{\varphi(\bar x, \bar a)\}$ совместно. Пусть $r \subseteq \{1, \ldots, n\}$ — минимальное множество, для которого найдется $m_1 \in \omega$ такой, что для любого $u \subset I_0$ мощности m_1 множество

$$p(\bar x) \cup \left\{\Phi_0(\bar x, \bar a^i) \wedge \bigwedge_{j \in r} \neg \Phi_j(\bar x, \bar a^j)\right\}, \quad i \in I_0,$$

несовместно. По лемме 3.3 и минимальности r получаем $[p(\bar x) \cup \{\Phi_0(\bar x, \bar a^i)\}\colon \bar x \Phi_j] < \infty$ для всех $j \in r$, $i \in I_0$. Следовательно, найдется бесконечное $I_1 \subseteq I_0$ такое, что

$$p(\bar x) \cup \{\Phi_0(\bar x, \bar a^i)\} \vdash \Phi_k(\bar x, \bar a^i) \leftrightarrow \Phi_k(\bar x, \bar a^j)$$

для всех $i, j \in I_1$ и $k \in r$. Отсюда получаем, что множество

$$p(\bar x) \cup \{\Phi_0(\bar x, \bar a^i)\} \cup \{\neg \Phi_k(\bar x, \bar a^j) \mid j \in I_1, k \in r\}, \quad i \in I_1,$$

совместно. Это противоречит m-несовместности множества X. □

Из леммы 3.4 и известных свойств отношения «p форкуется над A» вытекает

Лемма 3.5. *Пусть* $p \in S_{\bar x}(A)$ *и* $B \subseteq A \subseteq C$. *Тогда*

(а) $p \downarrow A$;

(б) *если* $p \downarrow B$ *и* $B \subseteq B_1 \subseteq A$, *то* $p \downarrow B_1$ *и* $p \restriction B_1 \downarrow B$;

(в) *если* $p \not\downarrow B$, *то существует* $\bar a \in A$, *что* $(p \restriction (B \cup \bar a)) \curlywedge B$;

(г) *если* $q \in S_{\bar x}(C)$, $p = q \restriction A$, $p \downarrow B$ *и* $q \downarrow A$, *то* $q \downarrow B$;

(д) *если* $p \downarrow B$, *то существует такой* $q \in S_{\bar x}(C)$, *что* $p = q \restriction A$ и $q \downarrow B$;

(е) *если* $\mathrm{tp}(\bar a, B \cup \bar b) \downarrow B$, *то* $\mathrm{tp}(\bar b, B \cup \bar a) \downarrow B$;

(ж) $\mathrm{tp}(\bar a \wedge \bar b, A) \downarrow B \Leftrightarrow \mathrm{tp}(\bar a, A) \downarrow B$ *и* $\mathrm{tp}(\bar b, A \cup \bar a) \downarrow B \cup \bar a$;

(з) *если* T *суперстабильна, то* $p \downarrow B \Leftrightarrow \mathrm{Deg}(p) = \mathrm{Deg}(p \restriction B)$, *в частности, для любого* $p \in S_{\bar x}(A)$ *существует* $\bar a \in A$, *для которого* $p \downarrow \bar a$. □

Предложение 3.6. (а) *Пусть* $p \in S_{\bar x}(A)$ *и* $B \subseteq A$. *Для выполнения условия* $p \curlywedge B$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала формула* $\Phi(\bar x, \bar a) \in p^+$, *для которой* $[p \restriction B\colon \bar x \Phi] = \infty$.

(б) *Пусть* $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar x}(A)$, $B \subseteq A$ *и* $p \restriction B$ — *полный тип. Для того, чтобы тип* $p \restriction B \cup p^+ \cup p^-$ *расширялся до полного типа* $q \in S_{\bar x}(A)$, *не ответвляющегося над* B, *необходимо и достаточно, чтобы для любой* $\Phi(\bar x, \bar a) \in p^+$ *имело место* $[p \restriction B\colon x\Phi] < \infty$.

Доказательство. (а) Достаточность. Пусть для некоторой $\Phi(\bar x, \bar a) \in p^+$ мы имеем $[p \restriction B\colon x\Phi] = \infty$. Из полноты $p \restriction B$ тогда вытекает, что для любого I существуют $\bar a^i$, $i \in I$, для которых $\mathrm{tp}(\bar a^i, B) = \mathrm{tp}(\bar a, B)$, $i \in I$, и формулы $\Phi(\bar x, \bar a^i)$, $i \in I$, попарно несовместны. Ясно, что тогда найдутся копии p_i, $i \in I$, типа p над B, содержащие соответственно $\Phi(\bar{x}, \bar{a}^i)$, $i \in I$, следовательно, попарно несовместны.

Необходимость. Пусть $p \curlywedge B$. Предположим, что для любой $\Phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p^+$ выполнено $[p \restriction B\colon \bar{x}\Phi] < \infty$. В силу этого предположения и определения отношения $p \curlywedge B$ найдутся такие две несовместные копии q_1 и q_2 типа p над B, что для любой h-формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y})$, если $\Phi(\bar{x}, \bar{a}^i) \in q_i^+$, $i \in \{1, 2\}$ и $[p \restriction B\colon \bar{x}\Phi] < \infty$, то $\Phi(\bar{x}, \bar{a}^1) \sim \Phi(\bar{x}, \bar{a}^2)$. В силу h^*-базируемости T это противоречит лемме 3.3.

(б) Необходимость следует из (а). Для доказательства достаточности в силу (а) нужно показать совместность множества $p \restriction B \cup p^+ \cup \cup p^- \cup \{\neg\Phi(\bar{x}, \bar{a}) \mid \Phi - h\text{-формула}, \bar{a} \in A \text{ и } [p \restriction B, \bar{x}\Phi] = \infty\}$. Совместность данного множества вытекает из леммы 3.3. $\square$

Определение. *Пусть $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A)$ и $q \in {}^{\subseteq}S_{\bar{y}}(B)$. Говорим, что h-формула $\Phi(\bar{u}, \bar{w}, \bar{c})$ сильно связывает $p(\bar{x})$, $q(\bar{y})$, если она связывает $p(\bar{x})$, $q(\bar{y})$ и $[p(\bar{u})\colon \bar{u}\Phi] = \infty$. Типы $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ называем сильно связанными (над A), если существует h-формула $\Phi(\bar{u}, \bar{w}, \bar{c})$ (в A), сильно связывающая $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$. Если типы $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ сильно связаны над $\varnothing$, то говорим, что $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ абсолютно сильно связаны.*

Предложение 3.7. *Следующие условия для типов p, $q \in S(A)$ равносильны:*

(а) *типы $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ сильно связаны над A;*

(б) *существуют такие реализации $\bar{a}$ и $\bar{b}$ типов $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ соответственно, для которых выполнено $\mathrm{tp}(\bar{a}, A \cup \bar{b}) \curlywedge A$.*

Доказательство. (а)$\Rightarrow$(б). Пусть h-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ сильно связывает типы $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ (мы полагаем, что $\bar{x}$ и $\bar{y}$ не имеют общих переменных), где $\bar{c} \in A$. Выберем такие реализации $\bar{a}$ и $\bar{b}$ типов $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ соответственно, для которых выполнено $\vdash \Phi(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$. Из определения сильной связанности $[p_1(\bar{x})\colon \bar{x}\Phi] = \infty$, где $p_1(\bar{x}) = \mathrm{tp}(\bar{a}, A \cup \bar{b})$. Поэтому в силу предложения 3.6 (а) и условия $\Phi(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}) \in p_1^+(\bar{x})$ тип $p_1(\bar{x})$ ответвляется над A.

(б)$\Rightarrow$(а) Предположим, что для некоторых реализаций $\bar{a}$ и $\bar{b}$ типов $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$ соответственно, тип $p_1(\bar{x}) = \mathrm{tp}(\bar{a}, A \cup \bar{b})$ ответвляется над A. По предложению 3.6(а) существует $\bar{c} \in A$ и h-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{b}, \bar{c}) \in p_1^+(\bar{x})$, для которой $[p_1(\bar{x})\colon \bar{x}\Phi] = \infty$. Так как $p(\bar{x})$ — полный тип над A, то для любой реализации $\bar{a}^1$ типа $p(\bar{x})$ найдется реализация $\bar{b}^1$ типа $q(\bar{y})$, для которых $\vdash \Phi(\bar{a}^1, \bar{b}^1, \bar{c})$. Из полноты $q(\bar{y})$ получаем аналогичное свойство для типа $q(\bar{y})$. Таким образом, мы получили, что h-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{c})$ сильно связывает $p(\bar{x})$ и $q(\bar{y})$. $\square$

Определение. *Тип $p \in S(B)$ называется стационарным, если для любого множества $A \supseteq B$ в теории T существует только один тип $q \in S_{\bar{x}}(A)$, содержащий тип p и неответвляющийся над A.*

Предложение 3.8. *Тип $p \in S_{\bar{x}}(A)$ тогда и только тогда является стационарным, когда для любой h-эквивалентности $\eta(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ выполнено условие $[p(\bar{x})\colon \eta] \in \{0, 1, \infty\}$.*

Доказательство. Предположим, что для некоторой h-эквивалентности $\eta(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ выполнено $2 \leqslant [p(\bar{x})\colon \eta] = k < \infty$. Пусть $\bar{a}^1, \ldots, \bar{a}^k$ — попарно не η-эквивалентные реализации типа $p(\bar{x})$ и $A_1 = A \cup \bar{a}^1 \cup \ldots \ldots \cup \bar{a}^k$. По лемме 3.5 найдется $q \in S_{\bar{x}}(A_1)$, для которого $q \restriction A = p$ и $q \not\curlywedge A$. Так как $\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_k\}$ — максимальное множество попарно не η-эквивалентных реализаций типа $p(\bar{x})$, то для некоторого $i_0 \in \{1, \ldots, k\}$ имеем $\eta(\bar{x}, \bar{a}^{i_0}) \in q$. По лемме 3.5(б) получаем $q \restriction (A \cup \bar{a}^{i_0}) = r_0 \not\curlywedge A$. Поскольку $k \geqslant 2$, то найдется $j_0 \in \{1, \ldots, k\} \setminus \{i_0\}$. В силу $\mathrm{tp}(\bar{a}^{i_0}, A) = \mathrm{tp}(\bar{a}^{j_0}, A) = p$ существует копия $r_1 \in S_{\bar{x}}(A \cup \bar{a}^{j_0})$ типа r_0 над A, для которой $\eta(\bar{x}, \bar{a}^{j_0}) \in r_1$. Ввиду $r_0 \not\curlywedge A$ имеем также $r_1 \not\curlywedge A$. По лемме 3.5(д) найдутся $q_i \in S_{\bar{x}}(A \cup \bar{a}^{i_0} \cup \bar{a}^{j_0})$, $i \in \{0, 1\}$, такие, что $r_i \subseteq q_i$

и $q_i \nmid A$, $i \in \{0, 1\}$. Так как $q_0 \cup q_1$ несовместно и $p \subseteq r_0 \cap r_1 \subseteq q_0 \cap q_1$, то p не стационарный.

Предположим теперь, что p не стационарный, т. е. существуют $B \supseteq A$ и типы q_1, $q_2 \in S_{\bar{x}}(B)$, для которых $p \subseteq q_i$, $q_i \nmid A$, $i \in \{1, 2\}$ и $q_1 \neq q_2$. В силу h^*-базируемости найдется такая h-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{b})$ в B, что $\Phi(\bar{x}, \bar{b}) \in q_{i_0}$ и $\neg\Phi(\bar{x}, \bar{b}) \in q_{3-i_0}$ для некоторого $i_0 \in \{0, 1\}$. Тогда $[p(\bar{x}) : \bar{x}\Phi] \geqslant 2$. По лемме 3.6(а) $[p(\bar{x}) : \bar{x}\Phi] < \infty$. □

Из 3.6 и 3.8 вытекает

Предложение 3.9. *Пусть* $p \in S_{\bar{x}}(A)$, $B \subseteq A$ *и* $p \restriction B$ — *стационарный тип. Тогда равносильны условия* $p \nmid B$ *и* $p \restriction B \vdash p^+$. □

Предложение 3.10(а). *Если M — модель, то любой $p \in S(M)$ является стационарным.*

(б) *Если тип $p \in S_{\bar{x}}(B)$ стационарный и T^h суперстабильна, то существует такой кортеж $\bar{b} \in B$, что тип $p \restriction \bar{b}$ стационарный.*

Доказательство. Пункт (а) выполняется для любой полной теории T (см. [10]). Если бы (б) не выполнялся, то нашлись бы такие h-эквивалентности E_i, $i \in \omega$, что $\vdash E_{i+1} \to E_i$ и для любой реализации $\bar{a}$ типа $p \restriction \varnothing$ и любого $i \in \omega$ тип $p \restriction \varnothing \cup \{E_i(\bar{x}, \bar{a})\}$ делился бы h-эквивалентностью E_{i+1}. Ясно, что это выполнено также для T^h с заменой $p \restriction \varnothing$ на $(p \restriction \varnothing)^+$. Противоречие с предложением 1.11(б). □

Мы говорим, что тип $p \in S_{\bar{x}}(A)$ является *неответвляющимся расширением типа* $q \in S_{\bar{x}}(B)$ *или просто p неответвляется над q* (обозначаем $p \nmid q$), если $q \subseteq p$ и $p \nmid B$. Если $q \subseteq p$ и $p \curlywedge B$, то говорим, что p — *ответвляющееся расширение* q и пишем $p \curlywedge q$.

Определения. (1) *Если для типов p, $q \in S(A)$ не выполняются равносильные условия предложения* 3.7, *то говорим, что p и q почти ортогональны и обозначаем $p \perp^a q$.*

(2) *Типы $p \in S(A)$ и $q \in S(B)$ называются ортогональными* (обозначается $p \perp q$), *если для любого $C \supseteq A \cup B$, любого $p_1 \in S(C)$ и любого $q_1 \in S(C)$ из $p_1 \nmid p$, $q_1 \nmid q$ вытекает $p_1 \perp^a q$.*

(3) *Тип $p \in S(A)$ называется почти ортогональным к множеству $B \subseteq A$* (обозначается $p \perp^a B$), *если для любого $q \in S(A)$ из $q \nmid B$ следует $p \perp^a q$.*

(4) Тип $p \in S(A)$ называется ортогональным к множеству B (обозначается $p \perp B$), если $p \perp q$ для любого $q \in S(B)$. Если условие $p \perp B$ не выполняется, то пишем $p \pm B$.

В силу предложения 3.7 введенные выше понятия совпадают с одноименными понятиями, употребляемыми в литературе. В дальнейшем мы пишем $\operatorname{tp}(A_1, A_2) \nmid A_0$, если $\operatorname{tp}(\bar{a}, A_2) \nmid A_1$ для любого $\bar{a} \in A_1$.

Определения. (1) *Множества A_1, A_2 называются независимыми над A_0, если* $\operatorname{tp}(A_1, A_2 \cup A_0) \nmid A_0$.

(2) *Копия q типа p над A называется независимой копией над A, если* $\operatorname{tp}(\operatorname{dom} q, \operatorname{dom} p) \nmid A$.

Следующая лемма справедлива для любых стабильных теорий T.

Лемма 3.11. *Пусть M — T-модель, $M \subseteq B$ и $p \in S(B)$. Следующие условия равносильны:*

(а) $p \pm M$;

(б) *$p \pm p_1$ для любой копии p_1 типа p над M;*

(в) *$p \pm p_1$ для некоторой независимой копии p_1 типа p над M.* □

Напомним еще одно известное в теории стабильности понятие. Тип $p \in S_{\bar{x}}(A)$ называется *регулярным*, если $p \perp q$ для любого $B \supseteq A$ и $q \in S_{\bar{x}}(B)$, являющегося ответвляющимся расширением p. Одно из основных свойств регулярных типов состоит в том, что отношения $p \pm^a q$ и $p \pm q$ транзитивны на регулярных типах. Это свойство выполняется, однако, и для более широкого класса типов.

Определения. (1) *Тип* $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A)$ *называется транзитивным, если для любых h-эквивалентностей $\alpha(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, $\beta(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, делящих p, существует такая h-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p^+$, что h-эквивалентность $[(\alpha \wedge \bar{x}\Phi) \cup (\beta \wedge \bar{x}\Phi)]$ делит p.*

(2) *Тип $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A)$ называется слабо регулярным, если для любых h-эквивалентностей $\alpha(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ и $\beta(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$, для которых $[p(\bar{x}):\alpha] = \infty$ и $[p(\bar{x}):\beta] = \infty$, найдется такая h-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{a}) \in p^+$, что $[p(x): [(\alpha \wedge \bar{x}\Phi) \cup (\beta \wedge \bar{x}\Phi)]] = \infty$.*

Предложение 3.12. (а) *Пусть p, q, $r \in S(A)$ и q — транзитивный (слабо регулярный) тип. Если p (сильно) связан с q над A и q (сильно) связан с r над A, то p (сильно) связан с r над A.*

(б) *Если тип $p \in S(A)$ стационарный, то слабая регулярность p равносильна транзитивности p.*

(в) *Если тип $p \in S(A)$ транзитивный, то $F(p)$ транзитивный в T^h.*

(г) *Если тип $p \in S(A)$ регулярный, то p слабо регулярный.*

Доказательство. Пункт (б) сразу вытекает из определений, (в) — из фильтруемости h-формул. Для доказательства (а) предположим, что $p(\bar{x})$ связан с транзитивным $q(\bar{y})$ с помощью h-формулы $\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a})$, а $q(\bar{y})$ связан с $r(\bar{z})$ с помощью $X(\bar{y}, \bar{z}, \bar{b})$. Тогда h-эквивалентности $\bar{y}\Phi$ и $\bar{y}X$ делят $q(\bar{y})$. По транзитивности q найдется такая $\Psi(\bar{y}, \bar{c}) \in q^+$, что h-эквивалентность $[(\bar{y}\Phi \wedge \bar{y}\Psi) \cup (\bar{y}X \wedge \bar{y}\Psi)]$ делит $q(\bar{y})$. Ясно, что тогда h-формула

$$\varkappa(\bar{x}, \bar{z}, \bar{d}) = \exists \bar{y}(\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{a}) \wedge X(\bar{y}, \bar{z}, \bar{b}) \wedge \Psi(\bar{y}, \bar{c}))$$

будет связывать p и r. Аналогично рассматривается сильная связь.

(г) Предположим, что h-эквивалентности $\alpha(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ и $\beta(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ опровергают слабую регулярность p. Возьмем произвольную реализацию $\bar{a}$ типа p. Пусть $p_1 \in S_{\bar{x}}(A \cup \bar{a})$ — некоторое неответвляющееся расширение $p(\bar{x})$. Возьмем максимальный тип $p_2 \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(A \cup \bar{a})$, содержащий $p \cup \{\beta(\bar{x}, \bar{a})\}$, для которого множество $p_1(\bar{x}^1) \cup \{\alpha(\bar{x}^1, \bar{x}^2)\} \cup p_2(\bar{x}^2)$ совместно. Ясно, что $p_2(\bar{x}^2)$ — полный тип. Из условий на α, β и леммы 3.6(а) получаем, что $\alpha(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ сильно связывает p_1 и p_2. Таким образом, $p \pm p_2$. Так как $[p(\bar{x}):\alpha] = \infty$ и $\alpha(\bar{x}, \bar{a}) \in p_2$, то $p_2 \wedge A$, значит, p не регулярный. □

В оставшейся части параграфа T будет полной стабильной хорновой теорией. Как показано в § 1, T h-нормальна и h-базируема.

Предложение 3.13. *Пусть T — стабильная хорнова теория.*

(а) *Если $p \in S_{\bar{x}}(A)$ и $\eta(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ — h-эквивалентность, то $[p(x):\eta] \in \{0, 1, \infty\}$.*

(б) *Любой тип $p \in S(A)$ стационарный.*

(в) *Понятия связанности и сильной связанности, а также транзитивность и слабая регулярность типов совпадают.*

Доказательство. Пункт (а) вытекает из утверждений 1.8(б) и 1.8(а). Пункты (б) и (в) являются простыми следствиями (а). □

Предложение 3.14. *Пусть T — стабильная хорнова теория, p, $q \in S(A)$. Следующие условия равносильны:*

(а) $p \perp^a q$;

(б) *p не связан с q над A;*

(в) *p^+ не связан с q^+ над A:*

Доказательство. В силу 3.13(в) и определения отношения $\perp$ требует доказательства только утверждение (б) $\Rightarrow$ (в), которое, в свою очередь, легко вытекает из утверждений 1.8(б) и 1.8(а). □

Из 3.14 и 3.2 вытекает

Следствие 3.15. *Если T — стабильная хорнова теория, $p \in S(A)$ и $q \in S(B)$, то условие $p \pm q$ равносильно связанности p^+ и q^+.* □

Предложение 3.16. *Пусть T — стабильная хорнова теория.*

(а) *Транзитивность полного типа p равносильна транзитивности типа p^+.*

(б) *Если* $\mathrm{tp}(\bar a, A \cup \bar b^i) \curlywedge A$, $i \in \{1, 2\}$, *и тип* $\mathrm{tp}(\bar a, A)$ *транзитивный, то* $\mathrm{tp}(\bar b^1, A \cup \bar b^2) \curlywedge A$.

(в) *Если p, q_1, q_2 — полные типы и тип p транзитивный, то из* $q_1 \pm p \pm q_2$ *следует* $q_1 \pm q_2$.

Доказательство. Из $p \sim p^{\pm}$ и h-неприводимости T следует, что если h-эквивалентность $\eta(\bar x, \bar y)$ делит тип $p^+(\bar x)$, то $\eta(\bar x, \bar y)$ делит также $p(\bar x)$. Отсюда получаем (а). Пункт (в) вытекает из (а), (б), 3.14 и 3.5(е). Докажем (б). В силу 3.9 и 3.13(б) найдутся такие $\Phi_i(\bar x, \bar c^i, \bar b^i) \in \mathrm{tp}^+(\bar a, A \cup \bar b^i)$, $i \in \{1, 2\}$, что h-эквивалентности $\alpha_i(\bar x^1, \bar x^2) = \bar x \Phi_i$, $i \in \{1, 2\}$, делят $\mathrm{tp}(\bar a, A)$. По транзитивности $\mathrm{tp}(\bar a, A)$ найдется $\Psi(\bar x, \bar d) \in \mathrm{tp}(\bar a, A)$ такая, что h-эквивалентность $\mathrm{X}(\bar x^1, \bar x^2) = [(\alpha_1 \wedge \bar x \Psi) \cup (\alpha_2 \wedge \bar x \Psi)]$ делит $\mathrm{tp}(\bar a, A)$. Следовательно, существуют реализации $\bar f^1$, $\bar f^2$ типа $\mathrm{tp}(\bar a, A)$, что $\vdash \neg \mathrm{X}(\bar f^1, \bar f^2)$. Предположим, что $\mathrm{tp}(\bar b^1, A \cup \bar b^2) \curlywedge A$. Тогда найдутся $\Theta_i(\bar y^i, \bar e^i) \in \mathrm{tp}^+(\bar b^i, A)$, $i \in \{1, 2\}$, такие, что

$$\vdash \left(\bigwedge_{i=1}^{2} \Theta_i(\bar y^i, \bar e^i)\right) \to \exists \bar x \left(\Psi(\bar x, \bar d) \wedge \bigwedge_{i=1}^{2} \Phi_i(\bar x, \bar c^i, \bar y^i)\right).$$

Так как $\Phi_i(\bar x, \bar c^i, \bar y^i)$ связывает $\mathrm{tp}^+(\bar a, A)$ и $\mathrm{tp}^+(\bar b^i, A)$, то найдутся такие реализации $\bar g^1$, $\bar g^2$ типов $\mathrm{tp}^+(\bar b^1, A)$ и $\mathrm{tp}^+(\bar b^2, A)$, что $\vdash \Phi_i(\bar f^i, \bar c_i, \bar g^i)$, $i \in \{1, 2\}$. По выбору $\Theta_i(\bar y_i, \bar e_i)$ существует $\bar f$, для которого $\vdash \Psi(\bar f, \bar d) \wedge \bigwedge_{i=1}^{2} \alpha_i(\bar f, \bar f^i)$. Это противоречит условию $\vdash \neg \mathrm{X}(\bar f^1, \bar f^2)$. □

Определение. *Будем говорить, что h-формула $\Phi(\bar x^1, \bar x^2, \bar x^3)$ осуществляет сжатие h-типа $p(\bar x)$, если*

а) *h-эквивалентность* $\Psi(\bar x, \bar x^1) = \bar x^2(\exists \bar x^1 \Phi(\bar x^1, \bar x^2, \bar x^3))$ *делит* $p(\bar x)$;

б) *из* $\vdash p(\bar a)$ *следует, что* $\Phi(\bar x^1, \bar x^2, \bar a)$ *связывает* $p(\bar x)$ *и* $p(\bar x) \cup \{\Psi(\bar x, \bar a)\}$.

Предложение 3.17. *Пусть T — суперстабильная хорнова теория. Тип* $p \in S_{\bar x}(A)$ *тогда и только тогда является регулярным, когда не существует h-формулы Φ, осуществляющей сжатие h-типа p^+.*

Доказательство. Пусть h-формула $\Phi(\bar x^1, \bar x^2, \bar x^3)$ осуществляет сжатие p^+. Возьмем реализацию $\bar b$ типа p и $r(\bar x) = fr(p^+ \cup \{\exists \bar x^1 \Phi(\bar x^1, \bar x, \bar b)\}, A \cup \bar b)$. Из определения сжатия и 3.9 получаем, что $r \curlywedge p$ и $\Phi(\bar x^1, \bar x^2, \bar b)$ связывает p^+ и r^+, т. е. p не регулярный. Пусть теперь h-формула $\Psi(\bar x^1, \bar x^2, \bar d)$ связывает p^+ с r^+ для некоторого $r \curlywedge p$. Возьмем реализацию $\bar b$ типа $r(\bar x)$ и h-формулу $\Phi(\bar x, \bar a) \in r^+$, для которой $r^+ \sim r^+ \upharpoonright \varnothing \cup \{\Phi(\bar x, \bar a)\}$ (см. 1.11 (в)). Пусть $\mathrm{X}(\bar x^1, \bar x^2) = \bar x \Phi$. Так как $r \curlywedge p$, то X делит p. Из h-нормальности T вытекает, что если для кортежа $\bar c$ множество $p^+(\bar x) \cup r^+(\bar x^1) \cup \{\Psi(\bar x, \bar x^1, \bar c)\}$ совместно, то формула $\Psi(\bar x, \bar x^1, \bar c)$ связывает p^+ и r^+. Предположим, что $p^+(\bar x) \vdash \exists \bar z \Psi(\bar x, \bar b, \bar z)$. Возьмем кортеж $\bar c$, для которого $\vdash \Psi(\bar b, \bar b, \bar c)$. В силу h-нормальности T найдется h-формула $\Theta(\bar x, \bar x^1, \bar b)$, для которой $\vdash \Theta(\bar x, \bar x^1, \bar b) \leftrightarrow \Psi(\bar x, \bar x^1, \bar c)$. Тогда $\Theta(\bar x, \bar x^1, \bar b)$ связывает p^+ и r^+, поэтому h-формула $\Theta(\bar x^1, \bar x^2, \bar x^3) \wedge \mathrm{X}(\bar x^2, \bar x^3)$ осуществляет сжатие p^+. Пусть теперь $\neg(p^+(\bar x) \vdash \exists \bar z \Psi(\bar x, \bar b, \bar z))$. Тогда формула $\Phi(\bar x^1, \bar x^2, \bar x^3) = (\exists \bar z \Psi(\bar x^1, \bar x^2, \bar z) \wedge \mathrm{X}(\bar x^2, \bar x^3))$ будет осуществлять сжатие p^+. □

Предложение 3.18. *Пусть T — стабильная хорнова теория,* $p \in S_{\bar x}(B)$ *и* $A \subseteq B$. *Следующие условия равносильны:*

(а) $p \pm A$;

(б) *p^+ связан с любой своей копией над A,*

(в) *p^+ связан с некоторой своей независимой копией над A.*

Доказательство можно провести аналогично доказательству известной леммы 3.11, используя 3.13(б) и 3.15. □

§ 4. ТЕОРИЯ T^{eh}

В этом параграфе мы дадим конструкцию теории T^{eh}, дающую возможность рассматривать множество классов любой h-эквивалентности теории T, как h-формульное множество. Пусть T — произвольная, не обязательно полная, теория сигнатуры Σ. Определим сигнатуру Σ_T^{eh} теории T^{eh}.

Сигнатура Σ_T^{eh} содержит:

1) одноместные предикаты P_E для каждой h-эквивалентности $E(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ теории T;

2) n-местные предикаты R_φ для каждой атомарной формулы $\varphi(\bar{x})$, $l(\bar{x}) = n$, теории T;

3) $(n+1)$-местные предикаты $F_E(\bar{x}, y)$ для каждой h-эквивалентности $E(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ теории T, $l(\bar{x}^1) = l(\bar{x}^2) = n$.

Пусть M — модель теории T. Если $E(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ — h-эквивалентность в T, $\bar{m} \in M$ и $M \models E(\bar{m}, \bar{m})$, то через $\bar{m}/E$ обозначим пару $\langle E(M, \bar{m}), E\rangle$. Для h-эквивалентности $E = x_1 \approx x_2$ вместо m/E, $P/_E$ и F_E пишем $m/=$, $P_=$ и $F_=$ соответственно.

Для T-модели M определим алгебраическую систему M^{eh} сигнатуры Σ_T^{eh} следующим образом:

а) носителем M_T^{eh} является множество $\{\bar{m}/E \mid M \models E(\bar{m}, \bar{m}),\ E(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ — h-эквивалентность в $T\}$.

б) $P_E(M^{eh}) = \{\bar{m}/E \mid M \models E(\bar{m}, \bar{m})\}$;

в) $F_E(M^{eh}) = \{\langle m_1/=, \ldots, m_n/=, \bar{m}/E \mid \bar{m} = \langle m_1, \ldots, m_n\rangle,$
$M \models E(\bar{m}, \bar{m})\}$;

г) $R_\Phi(M^{eh}) = \{\langle m_1/=, \ldots, m_n/=\rangle \mid M \models \Phi(m_1, \ldots, m_n)\}$.

В дальнейшем мы будем отождествлять элементы $m \in M$ с элементами $m/= \in M^{eh}$.

В сигнатуре Σ_T^h предикаты R_Φ определены только для атомарных формул Φ сигнатуры Σ. Мы расширим это определение для произвольных формул сигнатуры Σ. Индукцией по построению формулы $\Phi(\bar{x})$ сигнатуры Σ, определим формулу $R_\Phi(\bar{x})$ сигнатуры Σ_T^{eh}:

а) для атомарной формулы $\Phi(\bar{x})$ в качестве R_Φ возьмем предикат $R_\Phi(\bar{x})$;

б) если $\Phi(\bar{x}) = \Psi_1(\bar{x})\tau\Psi_2(\bar{x})$, то $R_\Phi = R_{\Psi_1}\tau R_{\Psi_2}$; $\tau \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$;

в) если $\Phi(\bar{x}) = \neg\Psi_1(\bar{x})$, то $R_\Phi = R_{x=x} \wedge \neg R_{\Psi_1}$;

г) если $\Phi(\bar{x}) = \exists y \Psi(\bar{x}, y)$, то $R_\Phi = \exists y R_\Psi$;

д) если $\Phi(\bar{x}) = \forall y \Psi(\bar{x}, y)$, то $R_\Phi = \exists y R_{x=x}(y) \wedge \forall y \big(R_{x=x}(y) \rightarrow R_\Psi(\bar{x}, y)\big)$.

Ясно, что для любых формулы Φ сигнатуры Σ и T-модели M имеет место $\Phi(M) = R_\Phi(M^{eh})$. Также очевидно, что Φ является h-формулой тогда и только тогда, когда R_Φ является h-формулой.

Определения. (1) *Формула $\varphi(\bar{y}^0, \ldots, \bar{y}^n)$ теории T называется $\langle E_0, \ldots, E_n\rangle$-замкнутой, где $E_i(\bar{x}^i, \bar{z}^i)$ — h-эквивалентности теории T, если $l(\bar{x}^i) = l(\bar{z}^i) = l(\bar{y}^i)$ и*

$$T \vdash \forall \bar{y}^0 \ldots \bar{y}^n \bar{z}^0 \ldots \bar{z}^n \Big(\big(\varphi(\bar{y}^0, \ldots, \bar{y}^n) \wedge \bigwedge_{i \leqslant n} E_i(\bar{y}^i, \bar{z}^i)\big) \rightarrow \varphi(\bar{z}^0, \ldots \bar{z}^n)\Big).$$

(2) *Формула $\Psi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры Σ_T^{eh} называется FR-формулой (hFR-формулой), если она имеет вид $\exists \bar{y}^0 \ldots \bar{y}^n \Big(\bigwedge_{j \leqslant n} F_{E_j}(\bar{y}^j, x_{i_j}) \wedge R_\Phi(\bar{y}^0, \ldots, \bar{y}^n)\Big)$, где Φ — $\langle E_0, \ldots, E_n\rangle$-замкнутая формула ($h$-формула) теории T, не обязательно атомарная.*

(3) *Формулы $\Phi_1(\bar{x})$ и $\Phi_2(\bar{x})$ сигнатуры Σ_T^{eh} называются* eh-*эквивалентными* (обозначается $\Phi_1 \overset{eh}{\longleftrightarrow} \Phi_2$), *если $M^{eh} \models \forall \bar{x} (\Phi_1 \leftrightarrow \Phi_2)$ для любой T-модели M.*

Лемма 4.1. (1) *Любая формула сигнатуры* Σ_T^{eh} eh-*эквивалентна одной из следующих формул*:

(а) $\exists x\ x \approx x$;

(б) $\neg \exists x\ x \approx x$;

(в) *булева комбинация формул вида* $x \approx y$ *и* FR-*формул.*

(2) *Любая* h-*формула сигнатуры* Σ_T^{eh} eh-*эквивалентна одной из следующих формул*:

(а) $\exists x\ x \approx x$;

(б) $\neg \exists x\ x \approx x$;

(в) *конъюнкция формул вида* $x \approx y$;

(г) hFR-*формула*;

(д) $\Phi_1(\bar z) \wedge \Phi_2(\bar x)$, *где* $\Phi_1(\bar z)$ — hFR-*формула*, $\Phi_2(\bar x)$ — *конъюнкция формул вида* $x \approx y$, *при этом* $\bar z \cap \bar x = \varnothing$.

Доказательство несложно, но довольно громоздко. Мы докажем (2), рассматривая лишь нетривиальные случаи.

Заметим вначале, что если Φ является hFR-формулой, и x входит свободно в Φ, то формула $\Phi \wedge x \approx z$ эквивалентна hFR-формуле. Действительно,

$$\exists \bar y^0 \ldots \bar y^n \Big(\bigwedge_{i \leqslant n} F_{E_i}(\bar y^i, x_{j_i}) \wedge R_{\Phi_0}(\bar y^0, \ldots, \bar y^n) \wedge x_{j_0} \approx z \Big) \overset{\mathrm{eh}}{\longleftrightarrow}$$

$$\overset{\mathrm{eh}}{\longleftrightarrow} \exists \bar y^0 \ldots \bar y^{n+1} \Big(\bigwedge_{i \leqslant n} F_{E_i}(\bar y^i, x_{j_i}) \wedge F_{E_0}(\bar y^{n+1}, z) \wedge R_{\Phi_1}(\bar y^0, \ldots, \bar y^{n+1}) \Big),$$

где $\Phi_1(\bar y^0, \ldots, \bar y^{n+1}) = \Phi_0(\bar y^0, \ldots, \bar y^n) \wedge E_n(\bar y^0, \bar z)$.

Доказательство будем вести индукцией по строению h-формулы.

1. Атомарные формулы. Нетрудно заметить, что

$$P_E(x) \overset{\mathrm{eh}}{\longleftrightarrow} \exists \bar y \,(F_E(\bar y, x) \wedge R_E(\bar y, y));$$

$$F_E(\bar y^0, x) \overset{\mathrm{eh}}{\longleftrightarrow} \exists \bar y^1 \bar y^2 \Big(\bigwedge_{i \leqslant n} F_=(y_i^1, y_i^0) \wedge F_E(\bar y^2, x) \wedge R_E(\bar y^1, \bar y^2) \Big);$$

где $\bar y^k = \langle y_0^k \ldots y_n^k \rangle$, $k \in \{0, 1, 2\}$;

$$R_\Phi(x_0 \ldots x_n) \overset{\mathrm{eh}}{\longleftrightarrow} \exists y_0 \ldots y_n \Big(\bigwedge_{i \leqslant n} F_=(y_i, x_i) \wedge R_\Phi(y_0, \ldots, y_n) \Big).$$

2. Конъюнкция hFR-формул. В этом случае

$$\Big(\exists \bar y^0 \ldots \bar y^n \Big(\bigwedge_{i \leqslant n} F_{E_i}(\bar y^i, x_{j_i}) \wedge R_\Phi(\bar y^0, \ldots, \bar y^n) \Big) \Big) \wedge$$

$$\wedge \Big(\exists \bar y^k \ldots \bar y^l \Big(\bigwedge_{k \leqslant i \leqslant l} F_{E_i}(\bar y^i, x_{j_i}) \wedge R_\Psi(\bar y^k \ldots \bar y^l) \Big) \Big) \overset{\mathrm{eh}}{\longleftrightarrow} \exists \bar y^0 \ldots \bar y^l \bigwedge_{i \leqslant l}$$

$$\bigwedge_{i \leqslant l} F_{E_i}(\bar y^i, x_{j_i}) \wedge R_{(\Phi \wedge \Psi)}(\bar y^0, \ldots, \bar y^l),$$

где $k \leqslant l$, $k \leqslant n+1$, $l \geqslant n$.

3. Пусть $\Phi = \exists \bar y^0 \ldots \bar y^n \Big(\bigwedge_{i \leqslant n} F_{E_i}(\bar y^i, x_{j_i}) \wedge R_\Psi(\bar y^0, \ldots, \bar y^n) \Big)$, где $\Psi(\bar y^0 \ldots \bar y^n)$ — $\langle E_0 \ldots E_n \rangle$ — замкнутая h-формула. Тогда $\forall x_{i_n} \Phi \overset{\mathrm{eh}}{\longleftrightarrow} \neg \exists x\ x \approx x$ и

$$\exists x_{i_n} \Phi \overset{\mathrm{eh}}{\longleftrightarrow} \exists \bar y^0 \ldots \bar y^{n-1} \Big(\bigwedge_{i \leqslant n-1} F_{E_i}(\bar y^i, x_{j_i}) \wedge R_\Theta(\bar y^0, \ldots, \bar y^{n-1}) \Big),$$

где $\Theta(\bar y^0, \ldots, \bar y^{n-1}) = \exists \bar z \,(\Psi(\bar y^0, \ldots, \bar z) \wedge E_n(\bar z, \bar z))$.

4. Рассмотрим h-формулу $X = \exists x_{i_n} \Phi \wedge \forall x_{i_n} (\Phi \to \Psi)$, где $\Phi = \exists \bar y^0 \ldots \bar y^n \Big(\bigwedge_{i \leqslant n} F_{E_i}(\bar y^i, x_{j_i}) \wedge R_{\Phi_1}(\bar y^0, \ldots, \bar y^n) \Big)$. Если Ψ есть формула

$x_{i_n} = z$, то

$$X \overset{\text{eh}}{\longleftrightarrow} \exists \bar{y}^0 \ldots \exists \bar{y}^n \left(\bigwedge_{i<n} F_{E_i}(\bar{y}^i, x_{j_i}) \wedge F_{E_n}(\bar{y}^n, z) \wedge R_{X_1}(\bar{y}^0, \ldots, \bar{y}) \right),$$

где $X_1 = \exists \bar{y} \Phi_1(\bar{y}^0, \ldots, \bar{y}^{n-1}, \bar{y}) \wedge \forall \bar{y} (\Phi_1(\bar{y}^0, \ldots, \bar{y}^{n-1}, \bar{y}) \rightarrow E_n(\bar{y}^n, \bar{y}))$.

Если $\Psi = \exists \bar{y}^k \ldots \bar{y}^{k+l} \left(\bigwedge_{i \leqslant l} F_{E_{k+i}}(\bar{y}^{k+i}, x_{j_{k+i}}) \wedge R_{\Psi_1}(\bar{y}^k, \ldots, \bar{y}^{k+l}) \right)$, где $k \leqslant n \leqslant k + l$, то

$$X \overset{\text{eh}}{\longleftrightarrow} \exists \bar{y}^0 \ldots \bar{y}^{n-1} \bar{y}^{n+1} \ldots \bar{y}^{k+l} \left(\bigwedge_{\substack{i \leqslant k+l \\ i \neq n}} F_{E_i}(\bar{y}^i, x_{j_i}) \wedge \right.$$

$$\left. \wedge R_{X_1}(\bar{y}^0, \ldots, \bar{y}^{n-1}, \bar{y}^{n+1}, \ldots, \bar{y}^{k+l}) \right),$$

где $X_1 = \exists \bar{y}^n (E_n(\bar{y}^n, \bar{y}^n_*) \wedge \Phi_1(\bar{y}^0, \ldots, \bar{y}^n)) \wedge \forall \bar{y}^n (E_n(\bar{y}^n, \bar{y}^n) \wedge \Phi_1(\bar{y}^0, \ldots$
$\ldots, \bar{y}^n) \rightarrow \Psi_1(\bar{y}^k, \ldots, \bar{y}^{k+l})$. □

Лемма 4.2. (а) *Если M — T-модель, то* $\mathrm{Th}(M^{\text{eh}})$ *хорнова, тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Th}(M)$ *хорнова.*

(б) *Если M, N — T-модели, то $M \equiv N \Leftrightarrow M^{\text{eh}} \equiv N^{\text{eh}}$.*

Доказательство. Пункт (а) следует из леммы 4.1 и предложения 1.3(б); (б) — из леммы 4.1(1). □

Определение. Для полной теории T через T^{eh} будем обозначать теорию $\mathrm{Th}(M^{\text{eh}})$ любой T-модели M.

Корректность такого определения следует из леммы 4.2(б).

Лемма 4.3. *Для любой полной теории T_0 имеет место* $(T_0^h)^{\text{eh}} = (T_0^{\text{eh}})^h$.

Доказательство. Пусть $T_1 = (T_0^h)^{\text{eh}}$ и $T_2 = (T_0^{\text{eh}})^h$. Сначала покажем, что сигнатуры теорий T_1 и T_2 совпадают. Так как сигнатуры теорий $(T_0^{\text{eh}})^h$ и T_0^{eh} совпадают, то достаточно показать, что теории T_0^h и T_0 имеют одни и те же h-эквивалентности. Это следует из того, что свойство h-формулы «быть непустой эквивалентностью» выражается h-предложением, и в теориях T_0^h и T_0 выполняются одни и те же h-предложения. Так как T_1 и T_2 являются хорновыми теориями, то для доказательства леммы достаточно показать, что $T_1^+ = T_2^+$. Применяя лемму 4.1(2) для $T = T_0 \cap T_0^h$, получаем, что $(T_0^{\text{eh}})^+ = ((T_0^h)^{\text{eh}})^+ = T_1^+$. Вместе с равенством $T_2^+ = (T_0^{\text{eh}})^+$ это дает $T_1^+ = T_2^+$. □

Далее в этом параграфе под теорией мы будем понимать полную теорию.

Лемма 4.4. *Если T^{eh} h^*-базируема, то T также h^*-базируема.*

Доказательство. Легко заметить, что для любой формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ сигнатуры теории T если $T^{\text{eh}} \vdash \left(R_\Phi \leftrightarrow \bigvee_{i \leqslant n} \bigwedge_{j \leqslant k_i} R_{\Phi_j^i} \right)$, то $T \vdash \left(\Phi \leftrightarrow \bigvee_{i \leqslant n} \bigwedge_{j \leqslant k_i} \Phi_j^i \right)$. Таким образом, достаточно показать, что любая формула вида $R_\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ теории T^{eh} эквивалентна булевой комбинации h-формул вида R_X и одноместных формул. Это следует из h^*-базируемости T^{eh} и леммы 4.1(2). □

Доказательства остальных лемм этого параграфа не отличаются от доказательств соответствующих лемм из [1], поэтому мы приводим здесь только формулировки.

Лемма 4.5. (а) *Если $\lambda \geqslant |T|$, то T стабильна в $\lambda \Leftrightarrow T^{\text{eh}}$ стабильна в λ.*

(б) *Если M — T^{eh}-модель, то $M_1 = \mathrm{cl}(P_\approx(M))$ также T^{eh}-модель и $M_1 \prec M$.*

(в) *Для T^{eh}-модели N тогда и только тогда существует T-модель M такая, что $N \simeq M^{\text{eh}}$, когда $M = \mathrm{cl}(P_\approx(M))$.*

(г) *Пусть M, N — T^{eh}-модели, $M_1 = \mathrm{cl}(P_\approx(M))$, $N_1 = \mathrm{cl}(P_\approx(N))$. Тогда $M \simeq N \Leftrightarrow M_1 \simeq N_1$ и $|M \setminus M_1| = |N \setminus N_1|$.*

(д) $I(\omega_\alpha, T^{\text{eh}}) = (\alpha + \omega) \times I(\omega_\alpha, T) + \bigcup_{\beta < \alpha} I(\omega_\beta, T)$. □

Определения. (1) *Если* M — T^{eh}-*модель, то подмодель* $\mathrm{cl}(P_{\approx}(M))$ *называем стандартной частью* M (*обозначаем* M^{st}). *Будем называть* T^{eh}-*модель* M *стандартной, если* $M = M^{st}$.

(2) *Назовем* h-*формулу* Φ *теории* T^{eh} *ограниченной, если она эквивалентна* hFR-*формуле с тем же множеством свободных переменных, что и* Φ.

Лемма 4.6. (а) $F_E(\bar{y}, x)$, $P_E(x)$, $R_\Phi(x_1, \ldots, x_n)$, *где* Φ — h-*формула, являются ограниченными* h-*формулами.*

(б) *Если* $\Phi(\bar{x})$ — h-*формула,* $\Phi_1(\bar{x})$ — *ограниченная* h-*формула и любая переменная, свободно входящая в* $\Phi(\bar{x})$, *свободно входит в* $\Phi_1(x)$, *то* $\Phi(\bar{x}) \wedge \Phi_1(\bar{x})$ — *ограниченная* h-*формула.* □

Лемма 4.7. (*В* T^{eh}) *Если* $E(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ — *ограниченная* h-*эквивалентность, то существует ограниченная* h-*формула* $F_E(\bar{x}, z)$ *такая, что* $\vdash \forall x(E(\bar{x}, \bar{x}) \to \exists! z F_E(\bar{x}, z))$ *и* $\vdash \forall \bar{x}^1 \bar{x}^2 (\exists z (F_E(\bar{x}^1, z) \wedge F_E(\bar{x}^2, z)) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow E(\bar{x}^1, \bar{x}^2))$. □

Замечание. В дальнейшем мы не будем различать F_E из определения сигнатуры теории T^{eh} и леммы 4.7. Таким образом, если M — T^{eh}-модель, E — ограниченная h-эквивалентность в T^{eh}, то для $\bar{a} \in M$ такого, что $M \models E(\bar{a}, \bar{a})$, через $\bar{a}/E$ обозначим единственный элемент M, для которого $M \models F_E(\bar{a}, \bar{a}/E)$. Если $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar{x}}(M)$, где M — T^{eh}-модель, $E(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ — ограниченная h-эквивалентность $p \vdash E(\bar{x}, \bar{x})$, то через p/E обозначим множество формул $\{\exists \bar{x} (F_E(\bar{x}, y) \wedge \Phi_1(\bar{x}) \wedge \ldots \wedge \Phi_n(\bar{x})) \mid \Phi_1, \ldots, \Phi_n \in p,\ n \in \omega\}$. Ясно, что $p/E \in {}^{\subseteq}S_y(M)$. Если $\Theta(x, y)$ — h-эквивалентность, то она будет либо ограниченной, либо будет определять на T^{eh}-моделях нулевую или единичную эквивалентность. Если Θ определяет нулевую эквивалентность, то для элемента a и типа p запись a/Θ и p/Θ будет обозначать элемент a и тип p соответственно. В дальнейшем мы будем свободно применять обозначения a/Θ и p/Θ, если из контекста ясно, что Θ не единична.

§ 5. *A*-ТЕОРИИ

Определение. *Полная теория* T *имеет размерностный порядок, если существуют такие а-насыщенные* T-*модели* M_i, $i \in \{0, 1, 2\}$, *и тип* $p \in S(N)$ *над* T-*моделью* N, *являющийся а-простой над* $M_1 \cup M_2$, *что выполнены условия*

а) $M_0 \preccurlyeq M_1$, $M_0 \preccurlyeq M_2$;

б) M_1 *и* M_2 *независимы над* M_0 (т. е. $\mathrm{tp}(M_1, M_2) \downarrow M_0$);

в) $p \perp M_i$, $i \in \{1, 2\}$.

Важность для нас этого понятия объясняется тем, что С. Шелах доказал такую теорему: если счетная теория T имеет размерностный порядок, то T имеет максимальный несчетный спектр.

Определение. *Полную теорию* T *назовем* A-*теорией, если ее* h-*компаньон* T^h *суперстабилен и не имеет размерностного порядка.*

Везде в этом параграфе, если не оговорено противное, предполагается, что рассматриваемая теория T является A-теорией.

Предложение 5.1. (а) *Теория* T h-*нормальна.*

(б) *Теория* T^{eh} *является* A-*теорией.*

Доказательство. Пункт (а) следует из 2.10(а), (б) и 1.5; (б) вытекает из 7.3 и известного факта о том, что в определении свойства иметь размерностный порядок пункт в можно заменить на следующий:

в$'$) *над множеством* $M_1 \cup M_2$ *нет минимальной а-простой модели.* □

Определение. *Пусть* $r(x) \in {}^{\subseteq}S^h(A)$. *В теории* T^h *возьмем тип* $q(\bar{x}) = \mathrm{fr}(F(r), F(A))$. *Ординал* $\mathrm{Deg}(q(\bar{x}))$ *будем называть* h-*степенью типа* $r(\bar{x})$ (обозначаем $HD(r(\bar{x}))$).

Предложение 5.2 [3]. *Если h-эквивалентность $\nu(\bar{x}, \bar{y})$ делит h-тип $r(\bar{x}) = \mathrm{tp}^+(a, A)$, то $HD(\{p(\bar{x}), \nu(\bar{x}, \bar{a})\}) < HD(p(\bar{x}))$ для любого $p \subseteq r$.* □

Определение. *Говорим, что h-формула $\Phi(x, y, u, v)$ аддитивно связывает h-типы $p(x)$ и $q(x)$ (или p и q аддитивно связаны с помощью $\Phi(x, y, u, v)$), если для любых реализаций a и b h-типов $p(x)$ и $q(x)$ соответственно формула $\Phi(x, y, a, b)$ связывает $p(x)$ и $q(y)$ и $p(x) \cup q(y) \vdash \Phi(x, y, x, y)$.*

Термин «аддитивно» принят потому, что согласно доказательству термальной леммы, если $p(x)$ и $q(x)$ аддитивно связаны с помощью $\Phi(x, y, u, v)$, то найдется такая $\Psi(x) \in p$, что на $\Psi/x\Phi$ h-определено аффинное сложение.

Предложение 5.3. [3]. *Если h-типы $p(x)$ и $q(x)$ связаны, то они либо абсолютно связаны, либо аддитивно связаны.* □

Определение. *Формулу $\varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{c})$ назовем рефлексивной, если $\vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n, \bar{c}) \to \bigwedge_1^n \varphi(x_i, \ldots, x_i, \bar{c})$.*

Из h-нормальности T легко получаем

Предложение 5.4. *Если h-формула $\Phi(x, y, \bar{c})$ рефлексивна, то она определяет эквивалентность.* □

Определения. (1) *Если h-типы $p(x)$ и $q(x)$ связаны с помощью h-формулы $\Phi(x, y, a, b)$ и формула $\Phi(x, y, u, v)$ рефлексивна, то будем говорить, что $p(x)$ и $q(x)$ рефлексивно связаны с помощью $\Phi(x, y, u, v)$.*

(2) *Если h-типы p и q связаны с помощью h-эквивалентности $\alpha(x, y)$, то будем говорить, что p и q e-связаны.*

Заметим, что если h-эквивалентность $\alpha(x, y)$ связывает p и q, то h-формула $\Phi(x, y, u, v) = (\alpha(x, y) \wedge \alpha(u, u) \wedge \alpha(v, v))$ рефлексивна и также связывает p и q. Поэтому e-связанность влечет рефлексивную связанность.

Предложение 5.5 [3]. *Если h-типы p и q рефлексивно связаны, то они либо аддитивно связаны с помощью рефлексивной формулы, либо e-связаны.* □

Предложение 5.6 [3]. (*В* T^{eh}.) *Если h-типы $p \in S_x^h(A_1)$ и $q \in S_x^h(A_2)$ являются независимыми копиями над некоторым множеством $B \subseteq A_1 \cap A_2$ и связаны, то они рефлексивно связаны.* □

Следующие четыре утверждения составляют основное содержание статьи [3].

Лемма 5.7. (*В* T^{eh}.) *Пусть $\Phi(x, \bar{a})$ — аддитивная h-формула* (см. § 2), *e_1, e_2 — элементы, для которых $\vdash \Phi(e_1, \bar{a}) \wedge \Phi(e_2, \bar{a})$ и $\mathrm{tp}^+(e_1, \varnothing) = \mathrm{tp}^+(e_2, \varnothing)$. Тогда $\mathrm{tp}(e_1, \varnothing) = \mathrm{tp}(e_2, \varnothing)$.* □

Лемма 5.8. (*В* T^{eh}.) *Пусть $\Theta(x, y)$, $\eta(x, y)$ — h-эквивалентности, a, b, e — элементы и выполняются следующие условия:*

а) $\Theta \wedge \eta = 0$;

б) $\mathrm{tp}(a, \varnothing) = \mathrm{tp}(b, \varnothing)$;

в) $\mathrm{tp}^+(e, \varnothing) = \mathrm{tp}^+(a, \varnothing)$;

г) $\vdash \Theta(a, e) \wedge \eta(e, b)$.

Тогда $\mathrm{tp}(e, \varnothing) = \mathrm{tp}(a, \varnothing)$. □

Теорема 5.9. *Любая A-теория h^*-базируема.* □

Следствие 5.10. *Если T — хорнова теория (не обязательно полная) с немаксимальным несчетным спектром, то T h^*-базируема.* □

Заметим, что условие немаксимальности несчетного спектра хорновой теории T в 5.10 можно ослабить до следующего: каждое полное расширение T_0 теории T суперстабильно и не имеет свойства размерностного порядка.

Определение. *Теория T (не обязательно полная) называется нормальной, если существует такое множество Δ формул сигнатуры T, что для любой $\Phi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta$*

$$T \vdash \exists \bar{x}(\Phi(\bar{x}, \bar{y}^1) \wedge \Phi(\bar{x}, \bar{y}^2)) \to \forall \bar{x}(\Phi(\bar{x}, \bar{y}^1) \leftrightarrow \Phi(\bar{x}, \bar{y}^2))$$

и любая формула $\varphi(\bar{x})$ сигнатуры T эквивалентна в T булевой комбинации формул из Δ.

Другими словами, T нормальна, если она Δ-нормальна и Δ-базируема для некоторого Δ. Ясно, что h-нормальные и h^*-базируемые теории нормальны. Поэтому из 5.9 и 5.1(а) получаем

Следствие 5.11. *Если T — A-теория (в частности, если T^h имеет немаксимальный несчетный спектр), то T нормальна.* □

Из 5.10 и 5.1(а) вытекает

Следствие 5.12. *Если T — хорнова теория (не обязательно полная) с немаксимальным несчетным спектром, то T нормальна.* □

Заметим, что для полных хорновых теорий T доказательство следствия 5.12 намного проще (см. 1.3 и 1.5).

Кроме h-нормальности и h^*-базируемости A-теория T обладает еще рядом полезных для нас свойств, которые мы установим в оставшейся части параграфа. Напомним, что всюду в этом параграфе, если не оговорено противное, через T обозначается произвольная A-теория.

Следствие 5.13. *Теория T суперстабильна.*

Доказательство. Индукцией по α легко из определения Deg установить, что если в теории T_1 выполнено $\mathrm{Deg}(p(\bar{x}))\geqslant\alpha$, то в h-компаньоне T_1^h выполнено $\mathrm{Deg}(F(p)(x))\geqslant\alpha$. Так как T h-нормальная и h^*-базируема, а h-компаньон T^h суперстабилен, то суперстабильность теории T вытекает из 2.6(в). □

Лемма 5.14. *Для любого $p\in S_x^h(A)$ существует такая h-формула $\Phi(\bar{x},\bar{a})\in p$, что $p\restriction\varnothing\cup\{\Phi(\bar{x},\bar{a})\}\vdash p$.*

Доказательство. Возьмем $\Phi(\bar{x},\bar{a})\in p$, для которой $HD(p\restriction\varnothing\cup\cup\{\Phi(\bar{x},\bar{a})\})$ минимальный. Предположим, что $\Phi(x,a)$ не удовлетворяет требованиям леммы. Тогда найдется такая $\Psi(\bar{x},\bar{b})\in p$, что $\bar{x}\Psi$ делит $p_1(\bar{x})=p\restriction\varnothing\cup\{\Phi(\bar{x},\bar{a})\}$. Тогда $\bar{x}\Psi$ будет делить $F(p_1(\bar{x}))$ в h-компаньоне T^h. Из 1.8(а) вытекает, что $\bar{x}\Psi$ делит в T^h тип $p_2(\bar{x})=\mathrm{fr}(p\restriction\varnothing\cup\{\Phi(\bar{x},F(\bar{a}))\})$. Так как T^h — полная хорнова теория, то $p_2(\bar{x})$ определяет полный тип над $F(\bar{a})$ и $[p_2(\bar{x}):\bar{x}\Psi]=\infty$. Отсюда $\mathrm{Deg}(p_2(\bar{x})\cup\{\Psi(\bar{x},F(\bar{b}))\})<\mathrm{Deg}(p_2(\bar{x}))$. Это противоречит выбору $\Phi(\bar{x},\bar{a})$. □

Определения. (1) *Назовем h-формулу $\Phi(\bar{x},\bar{a})$ из леммы 5.14 базисной h-формулой для типа p.*

(2) *Если X — множество в полной теории T_1, то через $\mathrm{dcl}(X)$ обозначаем множество в T_1 всех элементов e, для которых существует формула $\varphi(x,\bar{a})$ в X с единственной реализацией e.*

Лемма 5.15. (*В T^{eh}.*) *Пусть $\Phi(x,\bar{c})$ — h-формула, $A=\mathrm{dcl}(A)$, $p\in S_x(A)$ и $p\vdash\Phi(\bar{x},c)$. Тогда найдется h-формула $\Psi(x,\bar{a})\in p^+$, для которой $\Psi(x,\bar{a})\sim\Phi(x,\bar{c})$.*

Доказательство. Если $x\Phi$ — единичная эквивалентность, то в качестве Ψ можно взять $x\approx x$. Пусть $x\Phi$ не единичная. Возьмем формулу $\varphi(x,\bar{b})\in p$, для которой $\vdash\varphi(x,\bar{b})\to\Phi(x,\bar{c})$. По 4.7 формула $\mathrm{X}(y,\bar{b})=\exists x(\varphi(x,\bar{b})\wedge F_{x\Phi}(x,y))$ будет определять одноэлементное множество $\{e\}$ и $F_{x\Phi}(x,e)\sim\Phi(x,\bar{e})$. Из $A=\mathrm{dcl}(A)$ получаем $e\in A$, следовательно, $F_{x\Phi}(x,e)\in p^+$. □

Предложение 5.16. (*В T^{eh}.*) *Пусть $p_i\in S_x(A_i)$, $i\in\{1,2\}$, — независимые копии над $A_0\subseteq A_1\cap A_2$, p_1, $p_1\restriction A_0$ — стационарные типы и $A_1=\mathrm{dcl}(A_1)$. Следующие условия эквивалентны:*

(а) $p_1\pm p_2$;

(б) *p_1^+ связан с p_2^+;*

(в) *p_1^+ аддитивно или e-связан с p_2^+.*

Доказательство. (а)⇒(б) Пусть $A_1\cup A_2\subseteq C$, $q_i\in S_x(C)$, $q_i\downarrow p_i$ для $i\in\{1,2\}$ и h-формула $\Phi(x,y,\bar{c})$ в C сильно связывает $q_1(x)$ с $q_2(y)$.

Возьмем любую $\Psi(y, \bar d) \in p_2^+(y)$ и рассмотрим h-формулу $X(x, \bar e) = \exists y(\Phi(x, y, \bar c) \wedge \Psi(y, \bar d))$. Ясно, что $q_1 \vdash X(x, \bar e)$. По 3.9 получаем $p_1(x) \vdash X(x, \bar e)$. Ввиду 5.15 найдется $\varkappa(x, \bar a) \in p_1^+$, для которой $\varkappa(x, \bar a) \sim X(x, \bar e)$. Отсюда в силу симметричности p_1 и p_2 получаем, что $\Phi(x, y, \bar c)$ связывает $p_1^+(x)$ и $p_2^+(x)$.

(б) $\Rightarrow$ (в) Пусть h-формула $\Phi(x, y, \bar c)$ связывает h-типы $p_1^+(x)$ и $p_2^+(x)$. Предположим, что p_1^+ и p_2^+ не являются аддитивно связанными. Тогда h-формула $X(x, y) = \exists \bar z \Phi(x, y, \bar z)$ связывает $p_1^+(x)$ и $p_2^+(x)$. Предположим, что h-эквивалентность yX не связывает $p_1^+(x)$ и $p_2^+(x)$. Тогда найдется такая $\Phi(x, \bar b) \in p_1^+(x)$ и реализация a h-типа $p_1^+(x)$, для которых $\Phi(x, \bar b) \wedge X(a, x)$ не выполнима. Так как $p_2^+(x) \cup \{X(a, x)\}$ совместно, то из h-нормальности T вытекает, что $\Phi(x, \bar b) \wedge \varkappa(x, \bar d)$ не выполнима, где $\varkappa(x, \bar d) = \exists u(\Phi(u, G(\bar b)) \wedge (yX)(x, u))$, а G — элементарное отображение, тождественное на A_0 и переводящее p_1 в p_2. Так как $X(x, y)$ связывает $p_1^+(x)$ и $p_2^+(x)$, $\varkappa(x, \bar d) \in p_2^+$, и $\varkappa(x, \bar d)$ yX-замкнута, то существует такая $\Theta(x, \bar e) \in p_1(x)$, что $\vdash \exists x(\Theta(x, \bar e) \wedge X(x, y)) \to \varkappa(y, \bar d)$. Отсюда в силу независимости копий p_1 и p_2 над A получаем, что $[p_2 \restriction A_0 \colon x\varkappa] < \infty$. Так как $p_2 \restriction A_0 = p_1 \restriction A_0$ и $p_1 \restriction A_0$ стационарный, то по предложению 3.8 $p_1 \restriction A_0 \vdash \varkappa(x, \bar d)$. Это противоречит несовместности $p_1^+(x) \cup \{\varkappa(x, \bar d)\}$.

(в) $\Rightarrow$ (а) Пусть $p_1^+(x)$ и $p_2^+(x)$ связаны с помощью h-эквивалентности $\eta(x, y)$, $q_i \in S_x(A_1 \cup A_2)$ — неответвляющиеся над A_i расширения p_i, $i \in \{1, 2\}$. Покажем, что $\eta(x, y)$ сильно связывает $q_1(x)$ и $q_2(x)$. Так как $[p_1^+ \colon \eta] > 1$, то из 5.15 вытекает $[p_1 : \eta] > 1$. Из стационарности p_1 и 3.8 получаем $[p_1 : \eta] = \infty$, а из $q_1 \downarrow p_1$ и 3.6(а) $[q_1 : \eta] = \infty$. Таким образом, для доказательства сильной связанности $q_1(x)$ и $q_2(x)$ с помощью $\eta(x, y)$ осталось показать, что для любой реализации a типа $q_1(x)$ найдется реализация b типа $q_2(x)$, для которой $\vdash \eta(a, b)$.

Возьмем базисную h-формулу $X(x, \bar c)$ для типа p_1^+. Поскольку p_2 — копия типа p_1, то существует $\bar d \in A_2$, для которого $X(x, \bar d)$ является базисной h-формулой для p_2^+.

Из 3.9 и 5.15 вытекает $p_i^+ \sim q_i^+$, $i \in \{1, 2\}$. В частности, $X(x, \bar c)$ и $X(x, \bar d)$ будут базисными h-формулами типов q_1^+ и q_2^+ соответственно. Ясно, что $\eta(x, y)$ тогда и только тогда сильно связывает $q_1(x)$ и $q_2(x)$, когда $\eta\,(x/\eta \wedge xX,\ y/\eta \wedge xX)$ связывает $q_1/_{\eta \wedge xX}(x)$ и $q_2/_{\eta\wedge xX}(x)$. Поэтому можно считать, что $\eta \wedge xX = 0$, т. е. $\eta(x, y)$ инъективно связывает $p_1^+(x)$ и $p_2^+(x)$.

Покажем теперь, что для любой реализации a_1 типа $q_1(x)$ найдется реализация a_2 типа $q_2^+(x)$, для которой $\vdash \eta(a_1, a_2)$. В самом деле, если бы такого a_2 не было, то в силу инъективной связанности p_1^+ и p_2^+ с помощью η нашлась бы такая h-формула $\Phi(x, \bar e)$, что $\neg\Phi(x, \bar e) \in q_2(x)$ и

$$q_2^+(y) \cup \{\eta(a_1, y)\} \vdash \Phi(y, \bar e). \tag{5.1}$$

Так как $q_1(x)$ полный тип над $A_1 \cup A_2$, то из (5.1) получаем

$$q_1(x) \cup q_2^+(y) \cup \{\eta(x, y)\} \vdash \Phi(y, \bar e). \tag{5.2}$$

Так как η инъективно связывает p_1^+ и p_2^+, то в силу $\neg\Phi(x, \bar e) \in q_2(x)$ и (5.2) найдется такая $\Psi(x, \bar b) \in q_2^+(x)$, что не имеет места

$$p_1^+(x) \vdash \exists y(\Psi(y, \bar b) \wedge \Phi(y, \bar e) \wedge \eta(x, y)). \tag{5.3}$$

С другой стороны, из связанности q_1^+ с q_2^+ с помощью η и (5.2) вытекает

$$q_1(x) \vdash \exists y(\Psi(y, \bar{b}) \wedge \Phi(y, \bar{e}) \wedge \eta(x(y)),$$

т. е. $\exists y(\Psi(y, \bar{b}) \wedge \Phi(y, \bar{e}) \wedge \eta(x, y)) \in q_1^+(x)$. Это в силу (5.3) противоречит условию $q_1^+ \sim p_1^+$.

Итак, найдутся такие a_1, a_2, что $\vdash q_1(a_1)$, $\vdash q_2^+(a_2)$ и $\vdash \eta(a_1, a_2)$. Возьмем произвольную реализацию a типа $q_2(x)$. Тогда $\mathrm{tp}^+(a_1, \varnothing) = \mathrm{tp}^+(a_2, \varnothing)$ и $\mathrm{tp}(a_1, \varnothing) = p_1 \restriction \varnothing = p_2 \restriction \varnothing = \mathrm{tp}(a, \varnothing)$. Так как $\eta \wedge x\mathrm{X} = 0$ и $\vdash (x\mathrm{X})(a, a_2)$, то по 5.8 $\mathrm{tp}(a_1, \varnothing) = \mathrm{tp}(a_2, \varnothing)$. Таким образом, $\mathrm{tp}(a_2, \varnothing) = q_1 \restriction \varnothing = q_2 \restriction \varnothing$ и в силу $\mathrm{tp}^+(a_2, A_1 \cup A_2) = q_2^+$ и h^*-базируемости T^{eh} получаем $\vdash q_2(a_2)$.

Пусть теперь $p_1^+(x)$ и $p_2^+(x)$ аддитивно связаны с помощью h-формулы $\Phi(x, y, u, v)$. Переходя, если нужно, к фактору по $x\Phi \wedge x\mathrm{X}$, можно считать, что $\Phi(x, y, u, v)$ аддитивно инъективно связывает p_1^+ и p_2^+. Возьмем произвольные реализации e_1 и e_2 h-типов p_1^+ и p_2^+ соответственно, и типы $q_1, q_2 \in S_x(A_1 \cup A_2 \cup \{e_1, e_2\})$, являющиеся неответвляющимися расширениями p_1, p_2 соответственно. Покажем, что $\Phi(x, y, e_1, e_2)$ сильно связывает $q_1(x)$ и $q_2(x)$. Так же как в предыдущем случае, достаточно для любой реализации a_1 типа $q_1(x)$ найти реализацию a_2 типа $q_2(x)$, для которой выполнено $\Phi(a_1, a_2, e_1, e_2)$. Так же как в предыдущем случае мы получаем, что для любой реализации a_1 типа $q_1(x)$ найдется реализация a_2 типа $q_2^{\pm}(x)$, для которой $\vdash \Phi(a_1, a_2, e_1, e_2)$. По доказательству термальной леммы q_2^+ — аддитивный тип, поэтому в силу 5.7 $\vdash q_2(a_2)$. □

Предложение 5.17. (*В* T^{eh}.) *Пусть M — модель, $M \subseteq A$, $p \in S_x(A)$ — стационарный тип и $A = \mathrm{dcl}(A)$. Следующие условия равносильны:*

(а) $p \pm M$;

(б) p^+ *аддитивно или e-связан с* q^+ *для некоторого* $q \in S(M)$.

Доказательство. (б)$\Rightarrow$(а). Пусть p^+ аддитивно или e-связан с q^+ для некоторого $q \in S(M)$. Ясно, что тогда для любой копии p_1 типа p над M h-тип p_1^+ аддитивно или e-связан с p^+. Из 5.16 и 3.11 получаем $p \pm M$.

(а)$\Rightarrow$(б). Пусть $p \pm M$. По лемме 3.11 $p \pm p_1$ для некоторой независимой над M копией p_1 типа p. В силу 3.10(а) и 5.16 возможны два случая.

Случай 1: p^+ связан с p_1^+ с помощью h-эквивалентности η. Из независимости копий p и p_1 следует, что $\widehat{p^+} \sim q_1$ для некоторого $q_1 \in {}^{\subseteq}S_x(M)$, где $\widehat{p^+}$ — $\langle\eta\rangle$-замыкание типа p^+:

$$\widehat{p^+} = \{\exists y(\Phi(y, \bar{b}) \wedge \eta(y, x)) \mid \Phi(y, \bar{b}) \in p^+(x)\}.$$

Рассмотрим тип $q_2 = q_1 \cup \{\neg\Phi(x, \bar{m}) \mid \Phi(x, \bar{m})$ — $\langle\eta\rangle$-замкнутая h-формула в M, $q \vdash \neg\Phi(x, \bar{m})\}$. Так как p_3 — стационарный тип и p^+ связан с q_1 с помощью η, то в силу 3.3 тип q_2 совместен. Пусть $q \in S_x(M)$ и $q_2 \subseteq q$. Из определения q_2 вытекает, что $\langle\eta\rangle$-замыкание $\widehat{q^+}$ типа q^+ эквивалентно типу q_1, поэтому тип p^+ связан с q^+ с помощью η.

Случай 2: p^+ аддитивно связан с p_1^+ с помощью h-формулы $\Phi(x, y, u, v)$. Из доказательства 2.11 получаем, что $p^+/x\Phi$ — главный тип. Поскольку p и p_1 — независимые копии над M, то в силу h-нормальности теории T существуют $m \in M$ и h-формула $\Psi(x, m)$ такие, что p^+ связан с h-типом $\{\Psi(x, m)\}$ с помощью $\Phi(x, y, u, v)$. Взяв вместо q_1 тип $\{\Psi(x, m)\}$, а вместо η — h-эквивалентность $y\Phi$ и повторив рассуждения случая 1, найдем $q \in S_x(M)$, для которого p^+ аддитивно связан с q^+. □

§ 6. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПРОСТЫХ МОДЕЛЕЙ

Под T в этом параграфе понимается произвольная A-теория.

Лемма 6.1. (а) *Пусть M — ω-насыщенная модель, $\bar a$ — кортеж в T, $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar x}(\bar a)$ и p локально выполним в M. Тогда p выполним в M.*

(б) *Пусть $p \in {}^{\subseteq}S_{\bar x}(A)$, $p = r \cup s \cup t$, где $r \in {}^{\subseteq}S_{\bar x}(\varnothing)$, $s \in {}^{\subseteq}S^h_x(A)$ и t состоит из отрицаний h-формул. Если в модели M выполняется каждая формула из s, то p локально выполним в M.*

Доказательство. (а) Возьмем полный тип $q \in S_{\bar x}(\bar a)$, содержащий p и локально выполнимый в M. По h^*-базируемости T и 5.14 $q \sim (q \upharpoonright \varnothing \cup \{\Phi_0(\bar x, \bar a)\} \cup q^-)$ для некоторой h-формулы Φ_0. Рассмотрим тип $q_1 = \{\neg \Psi(x, \bar a) \mid \neg \Psi(x, \bar a) \in q^-, \Psi(M, \bar a) \neq \varnothing\}$. Ясно, что множество реализаций в M типа $q \upharpoonright \varnothing \cup \{\Phi_0(x, \bar a)\} \cup q_1$ совпадает с множеством реализации в M типа q. Зафиксируем кортежи $\bar m^0 \in \Phi_0(M, \bar a)$ и $\bar m(\Psi) \in \Psi(M, \text{a})$ для каждого $\neg\Psi(x, a) \in q_1$. Рассмотрим тип $r(\bar y) = \mathrm{tp}(\bar a, \varnothing) \cup \{\Phi_0(\bar m^0, \bar y)\} \cup \{\Psi(\bar m(\Psi), \bar y) \mid \neg \Psi(\bar x, \bar a) \in q_1\}$. Из доказательства 5.14 получаем, $r(\bar y) \sim (\mathrm{tp}(\bar a, \varnothing) \cup \{\Phi(\bar y, \bar m)\})$ для некоторой $\Phi(\bar y, \bar m) \in r^+(\bar y)$. В силу ω-насыщенности модели M найдется кортеж $\bar m^* \in M$, реализующий тип $\mathrm{tp}(\bar a, \varnothing) \cup \{\Phi(\bar y, \bar m)\}$. Ввиду h-нормальности теории T и выбора $\bar m^*$

$$q_1(\bar x) \sim \{\neg \Psi(\bar x, \bar m^*) \mid \neg \Psi(\bar x, \bar a) \in q_1\},\ \Phi_0(\bar x, \bar a) \sim \Phi_0(\bar x, \bar m^*).$$

Так как M ω-насыщена, то существует $\bar e \in M$, реализующий тип $q \upharpoonright \varnothing \cup \{\Phi_0(\bar x, \bar m^*)\} \cup \{\neg\Psi(\bar x, \bar m^*) \mid \neg\Psi(\bar x, \bar a) \in q_1\}$. Тогда $\bar e$ будет реализовать тип $q(\bar x)$ и, следовательно, тип $p(\bar x)$.

(б) Рассмотрим произвольные $\varphi_1(\bar x), \ldots, \varphi_n(\bar x) \in r(\bar x)$; $\Phi_1(\bar x, \bar a^1), \ldots, \Phi_k(\bar x, \bar a^k) \in s(\bar x)$; $\neg\Psi_1(\bar x, \bar b^1), \ldots, \neg\Psi_m(\bar x, \bar b^m) \in t(\bar x)$. Нужно показать, что формула

$$\mathrm{X}(\bar x, \bar a) = \left(\bigwedge_1^n \varphi_i(\bar x) \wedge \bigwedge_1^k \Phi_i(\bar x, \bar a^i) \wedge \bigwedge_1^m \neg\Psi(\bar x, \bar b^i) \right)$$

выполнима в M. Зафиксируем для каждого $i \in \{1, \ldots, k\}$ кортеж $\bar m^i \in \Phi_i(M, \bar a_i)$. Рассмотрим множество $u = \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid \Psi_i(M, \bar b^i) \neq \varnothing\}$, и для каждого $i \in u$ возьмем кортеж $\bar e^i \in \Psi_i(M, \bar b^i)$. Из h-нормальности T и выбора элементов $\bar m^i$, $\bar e^j$ получаем $\vdash \mathrm{X}(\bar x, \bar a) \to \mathrm{X}'(\bar x, \bar m)$ и $\mathrm{X}(M, \bar a) = \mathrm{X}'(M, \bar m)$, где $\mathrm{X}'(\bar x, \bar m)$ — формула в M, определяемая так:

$$\mathrm{X}'(\bar x, \bar m) = \left(\bigwedge_1^n \varphi(\bar x) \wedge \bigwedge_1^k (\bar x\Phi_i)(\bar x, \bar m^i) \wedge \bigwedge_{i \in u} \neg (\bar x\Psi_i)(\bar x, \bar e^i) \right).$$

Так как p — совместный тип и $p(\bar x) \vdash \mathrm{X}(\bar x, \bar a)$, то $\mathrm{X}'(\bar x, \bar m)$ — совместная формула. Следовательно, $\mathrm{X}'(M, \bar m) \neq \varnothing$, и, учитывая равенства $\mathrm{X}(M, \bar a) = \mathrm{X}'(M, \bar m)$, получаем $\mathrm{X}(M, \bar a) \neq \varnothing$. □

Следствие 6.2. *Понятие a-насыщенности для T-моделей совпадает с ω-насыщенностью.*

Доказательство. Ясно, что любой сильный тип $\mathrm{stp}(a, A)$ локально выполним в любой модели M, содержащей множество A. Из 6.1(а) получаем, что в ω-насыщенной модели M реализуется любой сильный тип $\mathrm{stp}(a, \bar m)$, где $\bar m \in M$. □

В дальнейшем мы будем, не оговаривая особо, использовать следствие 6.2 и свободно заменять в понятиях и результатах «a-насыщенность» и «a-простоту» на «ω-насыщенность» и «ω-простоту».

Лемма 6.3. *Если модели M_1 и M_2 независимы над моделью $M_0 \subseteq M_1 \cap M_2$, то в h-компаньоне T^h модели M_1^F и M_2^F независимы над M_0^F.*

Доказательство. Предположим, что для некоторого $\bar{g} \in M_1^F$ в теории T^h имеем $\mathrm{tp}(\bar{g}, M_2^F) \curlywedge M_0^F$. Согласно предложению 3.6(а) и h-нормальности T^h найдется h-формула $\Phi(\bar{x}, \bar{f}) \in \mathrm{tp}^+(\bar{g}, M_2^F)$, для которой $\Phi(M_0^F, \bar{f}) = \varnothing$. В силу фильтруемости h-формул существует $i_0 \in \omega$ такой, что $\Phi(M_0, \bar{f}(i_0)) = \varnothing$. Так как $\Phi(\bar{x}, \bar{f}(i_0)) \in \mathrm{tp}^+(\bar{g}(i_0), M_2)$, то из 3.10(а) и 3.6(а) $\mathrm{tp}(\bar{g}(i_0), M_2) \curlywedge M_0$. □

Определения. (1) *Тип p называется h-изолированным, если $\Phi \vdash p$ для некоторой h-формулы $\Phi \in p^+$. Эту h-формулу Φ будем называть h-изолирующей тип p.*

(2) *Последовательность $\langle b_\alpha | \alpha < \gamma \rangle$ называется h-конструкцией над A, если для всех $\alpha < \gamma$ тип $\mathrm{tp}(b_\alpha, \{b_\beta | \beta < \alpha\} \cup A)$ является h-изолированным.*

(3) *Множество B называется h-конструируемым над A, если существует h-конструкция $\langle b_\alpha | \alpha < \gamma \rangle$ над A и $B = \{b_\alpha | \alpha < \gamma\}$.*

Лемма 6.4. (а) *Пусть C — h-конструируемое над A множество, N — модель и $A \subseteq N$. Тогда существует элементарное вложение $G : A \cup C \to N$, тождественное на A.*

(б) *Пусть C — конструируемое над A множество $e \in C$ и $B \subseteq C$. Тогда тип $\mathrm{tp}(e, B \cup A)$ h-изолирован. В частности, любое вполне упорядоченное подмножество множества C является h-конструкцией.*

(в) *Если N — h-конструируемая над A модель, то N — минимальная простая модель над A.*

Доказательство. (а) Пусть $\langle c_\alpha | \alpha < \gamma \rangle$ — h-конструкция над A, $\beta < \gamma$ и G: $A \cup \{c_\alpha | \alpha < \beta\} \to N$ — элементарное отображение, тождественное на A. Взяв формулу $\Phi(x, \bar{c})$, h-изолирующую тип $\mathrm{tp}(c_\beta, \{c_\alpha | \alpha < \beta\} \cup A)$, и элемент $a \in \Phi(N, G(\bar{c}))$, получим, что отображение $G' = G \cup \{\langle c_\beta, a \rangle\}$ будет элементарным отображением множества $A \cup \{c_\alpha | \alpha \leqslant \beta\}$ в N.

(б) Введя A в сигнатуру, можно считать, что $A = \varnothing$. Покажем вначале, что если $\{c_1, \ldots, c_n\}$ — h-конструируемое над $\varnothing$ множество, то $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle$ — h-конструкция над $\varnothing$. Для этого достаточно показать, что если $\langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ — h-конструкция над $\varnothing$, то $\langle e_1, \ldots, e_{k-2}, e_k, e_{k-1} \rangle$ — h-конструкция над $\varnothing$. Введя для простоты обозначений элементы $e_1, \ldots, e_{k-2}$ в сигнатуру, достаточно показать, что если $\langle c, d \rangle$ — h-конструкция над $\varnothing$, то $\langle d, c \rangle$ — h-конструкция над $\varnothing$. Пусть $\Phi(x)$ h-изолирует тип $p_1(x) = \mathrm{tp}(c, \varnothing)$, а $\Psi(x, c)$ h-изолирует тип $p_2(x) = \mathrm{tp}(d, \{c\})$. Ясно, что h-формула $\Phi_1(x) = \exists y (\Phi(y) \wedge \Psi(x, y))$ будет h-изолировать тип $p_3(x) = \mathrm{tp}(d, \varnothing)$. Следовательно, $\langle d \rangle$ — h-конструкция над $\varnothing$. Пусть $p_4(x) = \mathrm{tp}(c, \{d\})$. Тип $p_4 \restriction \varnothing = p_1$ h-изолирован, поэтому по 5.14 существует h-формула $\mathrm{X}(x, d) \in p_4^+(x)$ такая, что

$$\mathrm{X}(x, d) \vdash p_4^+(x) \cup (p_4 \restriction \varnothing)(x). \tag{6.1}$$

Предположим, что $\mathrm{X}(x, d)$ не h-изолирует тип $p_4(x)$. Тогда найдется совместная h-формула $\varkappa(x, d)$, для которой

$$\vdash \neg \varkappa(c, d) \wedge \forall x (\varkappa(x, d) \to \mathrm{X}(x, d)). \tag{6.2}$$

Покажем, что

$$\vdash \exists y (\Psi(y, c) \wedge \varkappa(c, y)). \tag{6.3}$$

Предположим, что (6.3) не выполняется. Из h-нормальности T получаем

$$\vdash \neg (\forall x \exists y (\Phi_1(y) \wedge \mathrm{X}(x, y)) \to \exists y (\Phi_1(y) \wedge \varkappa(x, y))). \tag{6.4}$$

Так как $\Phi_1(x)$ h-изолирует $p_3(x)$, то из (6.1) вытекает

$$\exists y (\Phi_1(y) \wedge \mathrm{X}(x, y)) \vdash \Phi(x). \tag{6.5}$$

Свойства (6.4) и (6.5) противоречат тому, что $\Phi(x)$ изолирует тип $p_1(x)$ и множество $\{\Phi(x), \exists y (\Phi_1(y) \wedge \varkappa(x, y))\}$ совместно. Так как $\Psi(x, c)$

h-изолирует тип $p_2(x)$, то из (6.3) имеем $\vdash \varkappa(c, d)$. Это противоречит свойству (6.2).

Теперь покажем, что любое конечное множество $X \subseteq C$ является h-конструируемым над $\varnothing$. Так как C — h-конструктивизируемое над $\varnothing$ множество, то пользуясь вполне упорядоченностью h-конструкции, легко показать, что X содержится в некотором h-конструируемом над $\varnothing$ конечном подмножестве $Y \subseteq C$. В силу доказанного выше упорядочение Y, при котором X является начальным отрезком, является h-конструкцией над $\varnothing$. Поэтому X h-конструируемо над $\varnothing$.

Завершим доказательство (б). По доказанному выше $\operatorname{tp}(e, \varnothing)$ является h-изолированным. Поэтому по лемме 5.14 найдется такая $\Phi(x, b_1, \ldots, b_n) \in \operatorname{tp}^+(e, B)$, что

$$\Phi(x, b_1, \ldots, b_n) \vdash \operatorname{tp}^+(e, B). \tag{6.6}$$

Если бы формула $\Phi(x, b_1, \ldots, b_n)$ не h-изолировала $\operatorname{tp}(e, B)$, то нашлись бы элементы $b_{n+1}, \ldots, b_{n+k} \in B$, для которых не имеет места

$$\Phi(x, b_1, \ldots, b_n) \vdash \operatorname{tp}(e, \{b_1, \ldots, b_{n+k}\}). \tag{6.7}$$

Из условия (6.6) получаем

$$\Phi(x, b_1, \ldots, b_n) \vdash \operatorname{tp}^+(e, \{b_1, \ldots, b_{n+k}\}). \tag{6.8}$$

Свойства (6.7) и (6.8) показывают, что $\langle b_1, \ldots, b_{n+k}, e\rangle$ не является h-конструкцией. Это противоречит доказанному выше.

(в) Простота N над A вытекает из (а). Предположим, что N не минимальна над A, т. е. существует модель $M \subseteq N$, для которой $A \subseteq M$ и $N \setminus M \neq \varnothing$. Возьмем некоторый $e \in N \setminus M$. Согласно (б) существует h-формула $\Phi(x, m)$ в M, для которой

$$\Phi(x, \bar{m}) \vdash \operatorname{tp}(e, M). \tag{6.9}$$

Так как M — модель, то найдется $a \in \Phi(M, \bar{m})$. Из условия (6.9) получаем, что элемент a реализует $\operatorname{tp}(e, M)$. Это противоречит условию $e \notin M$. □

Лемма 6.5. (*В* T^{eh}.) *Пусть даны модели* M_1, M_2, *элемент* c, *для которого тип* $\operatorname{tp}(c, M_1 \cup M_2)$ h-*изолирован, и* h-*тип* $p(x, c) \in S^h_x(c)$. *Тогда либо* $p(x, c)$ *имеет единственную реализацию, либо для некоторого* $i_0 \in \{1, 2\}$ h-*тип* $p(x, c)$ *связан с любой своей копией над* M_{i_0}.

Доказательство. Мы будем использовать терминологию и результаты статьи [3]. Пусть $p(x, c)$ имеет более одной реализации. Возьмем h-формулу $\Phi(x, \bar{m}^1, \bar{m}^2)$, $\bar{m}^1 \in M_1$, $\bar{m}^2 \in M_2$, которая h-изолирует тип $\operatorname{tp}(c, M_1 \cup M_2)$. Рассмотрим h-формулы

$$\eta_1(x, \bar{m}^1) = \exists \bar{y} \Phi(x, \bar{m}^1, \bar{y}), \quad \eta_2(x, \bar{m}^2) = \exists \bar{z} \Phi(x, \bar{z}, \bar{m}^2).$$

Формула $\Phi(x, \bar{m}^1, \bar{y})$ связывает или соединяет h-формулу $\eta_1(x, \overline{m}^1) \wedge \eta_2(x, \overline{m}^2)$ с некоторой h-формулой Ψ. Из определения η_2 видно, что $\exists \bar{z} \Phi(x, \bar{z}, \bar{y})$ не связывает $\eta_1(x, \overline{m}^1) \wedge \eta_2(x, \overline{m}^2)$ с Ψ. Отсюда по доказательству термальной леммы получаем, что формула

$$\mathrm{X}(x, \overline{m}^1, \overline{m}^2) = \eta_1(x/x\Phi, \overline{m}^1) \wedge \eta_2(x/x\Phi, \overline{m}^2)$$

аддитивна. Пусть $\varkappa(x, c)$ — базисная h-формула h-типа $p(x, c)$ (см. 5.14) и $r = \operatorname{tp}^+(c, \varnothing)$. Рассмотрим h-типы $q_1(x, y) = r(y) \cup \{\varkappa(x, y)\}$, $q(x, y) = q_1(x, y/x\Phi)$. Так как $\mathrm{X}(x, \bar{m}^1, \bar{m}^2)$ аддитивна и $\vdash \mathrm{X}(c/x\Phi, \bar{m}^1, \bar{m}^2)$, то найдется $\sigma \in r/x\Phi$ такая, что h-эквивалентность $\alpha(x, y) = (\sigma(x) \wedge \sigma(y) \wedge (x\mathrm{X})(x, y))$ будет аддитивной. Рассмотрим h-эквивалентности $\Theta_i(x, y) = (\sigma(x) \wedge \sigma(y) \wedge (x\eta'_i)(x, y))$, $i \in \{1, 2\}$, где $\eta'_i(x, \overline{m}^i) = \eta_i(x/x\Phi, \overline{m}^i)$, $i \in \{1, 2\}$. Ясно, что $\vdash \alpha(x, y) \leftrightarrow (\Theta_1 \wedge \Theta_2)(x, y)$. Так как $p(x, c)$ имеет более одной реализации, то пара $\langle q, x\varkappa\rangle$ является $\langle r, \alpha\rangle$-невырожденной. Из 4.6 и 4.3 [3] получаем, что пара $\langle q, x\varkappa\rangle$ является $\langle r, \Theta_{i_0}\rangle$-связанной для некоторого $i_0 \in \{1, 2\}$.

Предположим, что утверждение леммы ложно. Тогда найдется элемент c_0, для которого

$$\operatorname{tp}(c_0, M_{i_0}) = \operatorname{tp}(c, M_{i_0}), \tag{6.10}$$

$$\operatorname{tp}(c_0, M_{i_0} \cup \{c\}) \downarrow M_{i_0} \tag{6.11}$$

и $p(x, c_0)$ не связан с $p(x, c)$. В силу $\langle r, \Theta_{i_0}\rangle$-связанности пары $\langle q, x\varkappa\rangle$ и условия (6.10), существует элемент c', реализующий формулу $(x\Phi)(x, c)$, для которого типы $p(x, c_0)$ и $p(x, c')$ связаны. Ввиду h^*-базируемости T^{eh} найдется такая h-формула $\delta(y, c_0)$, что

$$\vdash \exists y(\delta(y, c_0) \wedge (x\Phi)(y, c)) \wedge \exists y(\neg\delta(y, c_0) \wedge (x\Phi)(y, c)). \tag{6.12}$$

Из (6.11), 3.10(а) и 3.9 вытекает $\operatorname{tp}(c_0, M_{i_0}) \vdash \exists y(\delta(y, x) \wedge (x\Phi)(y, c))$. Следовательно, имеется $m \in M_{i_0}$, для которого формула $\delta(x, m) \wedge \wedge (x\,\Phi)(x, c)$ совместна. Так как $(x\Phi)(x, c) \sim \Phi(x, \overline{m}^1, \overline{m}^2)$, то в силу условия (6.12) и h-нормальности T^{eh} получаем противоречие с тем, что $\Phi(x, \overline{m}^1, \overline{m}^2)$ h-изолирует тип $\operatorname{tp}(c, M_1 \cup M_2)$. □

Лемма 6.6. *(В T^{eh}.) Пусть даны модели M_1, M_2, h-конструируемое над $M_1 \cup M_2$ множество $C \subseteq \overline{M}^{st}$ и $p \in S_x^h(C)$. Тогда либо $p(x)$ имеет единственную реализацию, либо $p(x)$ аддитивно или e-связан с $q(x)$ для некоторого $i_0 \in \{1, 2\}$ и $q \in S_x^h(M_{i_0})$.*

Доказательство. Согласно 5.14 можно считать, что C — конечное множество. Так как в T^{eh} есть «имена» для кортежей из $\overline{M}^{st}$, то в силу 6.4(б) можно считать, что p есть $p(x, c)$ для некоторого $c \in \overline{M}^{st}$, для которого тип $\operatorname{tp}(c, M_1 \cup M_2)$ h-изолирован. Пусть $p(x, c)$ имеет более одной реализации. По 6.5 найдется $i_0 \in \{1, 2\}$ такой, что любые копии h-типа $p(x, c)$ над M_{i_0} связаны. Возьмем произвольную реализацию e h-типа $p(x, c)$ и элементы e', c', для которых

$$\operatorname{tp}(\langle e', c'\rangle, M_{i_0}) = \operatorname{tp}(\langle e, c\rangle, M_{i_0}), \tag{6.13}$$

$$\operatorname{tp}(\langle e', c'\rangle, M_{i_0} \cup \{e, c\}) \downarrow M_{i_0}. \tag{6.14}$$

Из (6.13) получаем, что $p(x, c')$ — копия h-типа $p(x, c)$ над M_{i_0}, поэтому в силу предложений 5.6 и 5.5 $p(x, c)$ и $p(x, c')$ аддитивно или e-связаны.

Случай 1: $p(x, c)$ и $p(x, c')$ связаны с помощью h-эквивалентности $\nu(x, y)$. Рассмотрим h-тип $\widetilde{p}(x, c) = \{\exists y(\varphi(y, c) \wedge \nu(x, y)) \mid \varphi(x, c) \in \in p(x, c)\}$. Так как $p(x, c') \vdash \widetilde{p}(x, c)$, то ввиду 3.10(а), 5.9 и (6.14) $\widetilde{p}(x, c) \sim q$ для некоторого $q \in S_x^h(M_{i_0})$. Ясно, что $\nu(x, y)$ будет связывать $p(x, c)$ и $q(x)$.

Случай 2: $p(x, c)$ и $p(x, c')$ аддитивно связаны с помощью h-формулы $\Phi(x, y, u, v)$. Так как $\vdash\Phi(e, e', e, e')$, то в силу (6.14) и 3.10(а), 3.9 найдется $m \in M_{i_0}$, для которого $\vdash\Phi(e, m, e, m)$. Из h-нормальности теории T^{eh} получаем, что $p(x, c)$ аддитивно связан с h-типом $q(x, m) = \{(x\mathrm{X})(x, m) \mid \mathrm{X} = \exists y(\Psi(y, c) \wedge \Phi(y, x, e, m)), \Psi(x, c) \in \in p(x, c)\}$. □

Теорема 6.7. *Если T — A-теория, то для любого семейства моделей M_i, $i \in I$, существует простая минимальная модель N над множеством $\bigcup_{i\in I} M_i$. Кроме того, модель N является h-конструируемой над $\bigcup_{i\in I} M_i$.*

Доказательство. Докажем утверждение сначала для двух моделей M_1 и M_2. Рассмотрим модели M_1^{eh}, M_2^{eh} и $\overline{M}^{\mathrm{eh}}$. Отождествляя пары $\langle E(M_i, \overline{m}), E\rangle$ с парами $\langle E(\overline{M}, \overline{m}), E\rangle$, можно считать, что $M_i^{\mathrm{eh}} \subseteq \overline{M}^{\mathrm{eh}}$, $i \in \{1, 2\}$.

Рассмотрим максимальное h-конструируемое над $M_1^{eh} \cup M_2^{eh}$ в T^{eh} множество $B \subseteq \overline{M}^{eh}$. Покажем, что B — модель T^{eh}. Предположим, что это не так. Тогда существует такая формула $\varphi(x, \bar{b})$ в B, что $\vdash \exists x \varphi(x, \bar{b})$ и $\varphi(B, \bar{b}) = \varnothing$. Зафиксируем некоторую нумерацию $\langle \Psi_i(x, \bar{y}^i) \mid i \in \omega \rangle$ всех h-формул теории T^{eh}. Будем строить последовательность $\langle \mathrm{X}_i(x, \bar{d}^i) \mid i \in \omega \rangle$ h-формул в B следующим образом:

а) $\mathrm{X}_0 = x \approx x$;

б) если h-формула $\mathrm{X}_j(x, \bar{d}^j)$ уже построена и существует $\bar{e} \in B$ такой, что формула $\varphi(x, \bar{b}) \wedge \mathrm{X}_j(x, \bar{d}^j) \wedge \Psi_j(x, \bar{e})$ совместна, то в качестве $\mathrm{X}_{j+1}(x, \bar{d}^{j+1})$ берем h-формулу $\mathrm{X}_j(x, \bar{d}^j) \wedge \Psi_j(x, \bar{e})$; в противном случае полагаем $\mathrm{X}_{j+1} = \mathrm{X}_j$.

Возьмем произвольный тип $p \in S_x(B)$, содержащий множество $\{\mathrm{X}_j(x, \bar{d}^j) \mid j \in \omega\} \cup \{\varphi(x, \bar{b})\}$. Из построения и h-нормальности T^{eh} вытекает, что $p^+(x) \sim \{\mathrm{X}_j(x, \bar{d}^j) \mid j \in \omega\}$. Так как $\varphi(B, \bar{b}) = \varnothing$ и множество B замкнуто относительно h-термов, то p^+ имеет более одной реализации. По 6.6 тип p^+ аддитивно или e-связан с некоторым q^+ для некоторого $i_0 \in \{1, 2\}$ и $q \in S_x(M_{i_0})$.

Случай 1: h-эквивалентность $\eta(x, y)$ связывает $p^+(x)$ и $q^+(y)$. Возьмем $j_0 \in \omega$, для которого $\Psi_{j_0} = \eta$. Рассмотрим формулу $\varphi'(x, \bar{c}) = \varphi(x, \bar{b}) \wedge \mathrm{X}_{j_0}(x, \bar{d}^{j_0})$. Из 5.1(б) и 5.9 следует h^*-базируемость T^{eh}, поэтому $\varphi'/\eta(x, \bar{c})$ эквивалентна в T^{eh} формуле $\bigvee\limits_1^n \varkappa_i(x, \bar{c})$, где $\varkappa_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$,— конъюнкции h-формул, отрицаний h-формул и одноместных формул. Возьмем такой $l_0 \in \{1, \ldots, n\}$, что множество $\{\varkappa_{l_0}(x, \bar{c})\} \cup p/\eta(x)$ совместно. Можно считать, что $\varkappa_{l_0}(x, \bar{c}) = (\alpha(x) \wedge \Theta_0(x, \bar{c}) \wedge \wedge \neg\Theta_1(x, \bar{c}) \wedge \ldots \wedge \neg\Theta_k(x, \bar{c}))$, где Θ_j, $j \leqslant k$,— h-формулы. Так как множество $\{\Theta_0(x, \bar{c})\} \cup p/\eta(x)$ совместно, то по построению p^+ мы имеем $p^+/\eta(x) \vdash \Theta_0(x, \bar{c})$. Поскольку p^+ η-связан с q^+, то $q^+/\eta(x) \vdash \Theta_0(x, \bar{c})$. Следовательно, существует реализация $m_0 \in M_{i_0}^{eh}$ формулы $\Theta_0(x, \bar{c})$. По 6.1(б) найдется реализация $m^* \in M_{i_0}^{eh}$ формулы $\varkappa_{l_0}(x, \bar{c})$. Элемент m^* реализует формулу $\varphi'/\eta(x, \bar{c})$, поэтому из построения X_{j_0+1} получаем, что $\eta(x, y)$ не делит $\mathrm{X}_{j_0+1}(x, \bar{d}^{j_0+1})$. Это противоречит тому, что η делит $p^+(x)$ и $\mathrm{X}_{j_0+1}(x, \bar{d}^{j_0+1}) \in p^+(x)$.

Случай 2: h-формула $\Phi(x, y, u, v)$ аддитивно связывает $p^+(x)$ и $q^+(x)$. По доказательству термальной леммы и 2.11 найдутся такие $\alpha(x, \bar{a}) \in p^+/x\Phi$ и $\beta(x, \bar{m}) \in q^+/y\Phi$, что $\alpha(x, \bar{a}) \sim p^+/x\Phi$ и $\beta(x, \bar{m}) \sim q^+/y\Phi$. Так как $\Phi(x, y, u, v)$ аддитивно связывает $p^+(x)$ и $q^+(x)$, то h-формула

$$\Phi(x, y, u, v) = \Phi(x/x\Phi, y/y\Phi, u/x\Phi, v/y\Phi)$$

будет аддитивно инъективно связывать $\alpha(x, \bar{a})$ и $\beta(x, \bar{m})$. Из 2.11 и 5.7 вытекает, что формула $\alpha(x, \bar{a})$ содержится в некотором h-изолированном типе $p_1 \in S_x(B)$. В силу максимальности B существует $b_0 \in B$, реализующий формулу $\alpha(x, \bar{a})$.

По 5.7 найдутся такие h-формулы $\Theta_0(x, \bar{d}), \ldots, \Theta_k(x, \bar{d})$ в B, что формула $\varkappa(x, \bar{d}) = (\Theta_0(x, \bar{d}) \wedge \neg\Theta_1(x, \bar{d}) \wedge \ldots \wedge \neg\Theta_n(x, \bar{d}))$ совместна и

$$\vdash \varkappa(x, \bar{d}) \to (\varphi(x, \bar{b}) \wedge \alpha(x, \bar{a}))/x\Phi. \tag{6.15}$$

Из построения p^+ мы имеем $(p^+/x\Phi)(x) \vdash \Theta_0(x, \bar{d})$, следовательно, $\vdash \alpha(x, \bar{a}) \to \Theta_0(x, \bar{d})$. Возьмем $m_0 \in M_{i_0}^{eh}$, реализующий формулу $\beta(x, \bar{m})$. Рассмотрим для $i \in \{1, \ldots, k\}$ h-формулы

$$\Theta_i'(y, \bar{d}') = \exists x(\alpha(x, \bar{a}) \wedge \beta(y, \bar{m}) \wedge \Theta_i(x, \bar{d}) \wedge \Phi'(x, y, B_0, m_0)).$$

Ясно, что $\Phi'(x, y, b_0, m_0)$ инъективно связывает формулы $\varkappa'(x, \bar{c}) = (\alpha(x, \bar{a}) \wedge \neg\Theta_1(x, \bar{d}) \wedge \ldots \vee \neg\Theta_n(x, \bar{d}))$ и $\gamma(x, \bar{e}) = (\beta(x, \bar{m}) \wedge \neg\Theta_1'(x, \bar{d}') \wedge \wedge \ldots \wedge \neg\Theta_n'(x, \bar{d}'))$. Поэтому из совместности $\varkappa'(x, \bar{c})$ вытекает совместность $\gamma(x, \bar{e})$. Из условия $\bar{m} \in M_{i_0}^{\mathrm{eh}}$ и 6.1(б) получаем, что найдется $m^* \in M_{i_0}^{\mathrm{eh}}$, реализующий формулу $\gamma(x, \bar{e})$. Тогда формула $\alpha(x, \bar{a}) = \Phi'(x, m^*, b_0, m_0)$ будет иметь единственную реализацию e^* и элемент e^* будет реализовать формулу $\varkappa(x, \bar{d})$. Отсюда $e^* \in B$, и в силу свойства (6.15) и построения типа p^+ имеем $p^+(x) \vdash F_{x\Phi}(x, e^*)$. Так как e^* является $(x\Phi)$-классом, то это противоречит тому, что $x\Phi$ делит $p^+(x)$.

Таким образом, мы показали, что B — T^{eh}-модель. Ясно, что тогда $B' = B \cap \bar{M}$ будет T-моделью. По 6.4(б) B' будет h-конструируемым в T^{eh} над $M_1^{\mathrm{eh}} \cup M_2^{\mathrm{eh}}$. Так как элементы M_i^{eh} являются значениями h-термов от элементов M_i, то B' будет h-конструируемым в T^{eh} множеством над $M_1 \cup M_2$. Из 4.1 вытекает, что B' будет h-конструируемой в T моделью над $M_1 \cup M_2$. В силу 6.4(в) B будет минимальной простой моделью T над $M_1 \cup M_2$.

Для завершения доказательства теоремы вполне упорядочим множество I отношением $\leqslant$ и по трансфинитной индукции будем строить такие модели $\widehat{M}_i$, $i \in I$, что для каждого $i \in I$ выполняются следующие условия:

$$M_i \subseteq \widehat{M}_i, \tag{6.16}$$

$$\widehat{M}_j \subseteq \widehat{M}_i, \quad \text{для всех } j \leqslant i, \tag{6.17}$$

$$\widehat{M}_i \ h\text{-конструируема над } \bigcup_{j<i} \widehat{M}_j \cup \bigcup_{i \in I} M_i. \tag{6.18}$$

Ясно, что $N = \bigcup_{i \in I} \widehat{M}_i$ будет h-конструируемой над $\bigcup_{i \in I} M_i$ и, следовательно, по 6.4(в) простой и минимальной над $\bigcup_{i \in I} M_i$.

Пусть модели $\widehat{M}_j$ для $j < i_0$ уже построены и удовлетворяют условиям (6.16)—(6.18). В силу (6.17) $M' = \bigcup_{j<i_0} \widehat{M}_j$ будет моделью. Рассмотрим максимальное множество $B \subseteq \bar{M}$, являющееся h-конструируемым одновременно над $M' \cup M_{i_0}$ и $M' \cup \bigcup_{i \in I} M_i$. Если B — модель, то для $\widehat{M}_{i_0} = B$ выполняются условия (6.16)—(6.18). Предположим, что B не является моделью. Тогда существует совместная формула $\varphi(x, \bar{b})$ в B, для которой $\varphi(B, \bar{b}) = \varnothing$. По доказанному выше найдется реализация e формулы $\varphi(x, \bar{b})$, для которой $\mathrm{tp}(e, B)$ h-изолирован. Пусть $\Phi(x, \bar{c})$ h-изолирует тип $\mathrm{tp}(e, B)$. Рассмотрим максимальный h-тип $q \in S_x^h \times \times \left(B \cup \bigcup_{i \in J} M_i\right)$, содержащий h-формулу $\Phi(x, \bar{c})$. Пусть b_0 — реализация h-типа $q(x)$. По 5.14 найдется h-формула $\Psi(x, \bar{d})$, для которой $\vdash (\Psi(x, \bar{d}) \to \to \Phi(x, \bar{c}))$ и $q \restriction \varnothing \cup \{\Psi(x, \bar{d})\} \vdash q(x)$. Так как $\Phi(x, \bar{c}) \vdash \mathrm{tp}(e, \varnothing)$, то $\Phi(x, \bar{c}) \vdash \mathrm{tp}(b_0, \varnothing)$. Следовательно, в силу максимальности q и h^*-базируемости T h-формула $\Psi(x, \bar{d})$ h-изолирует $\mathrm{tp}\left(b_0, B \cup \bigcup_{i \in I} M_i\right)$. Таким образом, $B \cup \{b_0\}$ будет h-конструируемым как над $M' \cup M_{i_0}$, так и над $M' \cup \bigcup_{i \in I} M_i$. Поскольку $\vdash \varphi(b_0, \bar{b})$ и $\varphi(B, \bar{b}) = \varnothing$, то $b_0 \notin B$. Это противоречит максимальности B. □

Предложение 6.8. *Пусть M_1, M_2 — ω-насыщенные модели, независимые над моделью $M_0 \subseteq M_1 \cap M_2$, и N — простая модель над $M_1 \cup M_2$. Тогда N является ω-насыщенной.*

Доказательство. Возьмем произвольный полный тип $p \in S_x(\bar{a})$ над кортежем $\bar{a} \in N$. Нужно показать, что p реализуется в N. Пусть

$p_1 \in S_x^h(N)$ — максимальный h-тип над N, для которого $p(x) \cup p_1(x)$ совместно. Возьмем произвольный полный тип $p_2 \in S_x(N)$, содержащий множество $p(x) \cup p_1(x)$. Ввиду максимальности p_1 имеем $p_2^+ = p_1$. По 5.14 найдется $\Phi(x, \bar{b}) \in p_1$, для которой

$$p_1 \restriction \varnothing \cup \{\Phi(x, \bar{b})\} \vdash p_1(x). \tag{6.19}$$

Можно считать, что $\bar{a} \subseteq \bar{b}$. Пусть $p_3 = p_2 \restriction \bar{b}$. Из (6.19) получаем $p_3^+ \sim p_1$.

По 6.7 и 6.4(б) множество $\cup\bar{b}$ h-конструируемое над $M_1 \cup M_2$. Если p_3^+ имеет единственную реализацию, то p_3 — главный тип, следовательно, p_3, а значит и p, реализуется в N. Предположим, что p_3^+ имеет более одной реализации. По 6.6 найдутся $i_0 \in \{1, 2\}$ и тип $q \in S_x^h(M_{i_0})$ такие, что $p_3^+(x)$ аддитивно или e-связан с $q(x)$.

Случай 1: $p_3^+(x)$ связан с $q(x)$ с помощью h-эквивалентности $\eta(x, y)$. Рассмотрим $\langle\eta\rangle$-замыкание $\widehat{p}_3$ типа p_3:

$$\widehat{p}_3(x) = \{\exists y(\varphi(y, \bar{b}) \wedge \eta(y, x)) \mid \varphi(y, \bar{b}) \in p_3(y)\}.$$

В силу h^*-базируемости теории T^{eh} и 4.1 найдутся типы $r \in {}^{\subseteq}S_x(\varnothing)$, $s \in {}^{\subseteq}S_x^h(\bar{b})$ и $t \in {}^{\supseteq}S_x(\bar{b})$, состоящие из $\langle\eta\rangle$-замкнутых формул; при этом t состоит из отрицаний h-формул и $\widehat{p}_3(x) \sim (r(x) \cup s(x) \cup t(x))$. Если $\Phi(x, \bar{b}) \in s$, то $\Phi(x, \bar{b}) \in p_3^+(x)$. По связанности $p_3^+(x)$ с $q(x)$ с помощью η и $\langle\eta\rangle$-замкнутости $\Phi(x, \bar{b})$ получаем $q(x) \vdash \Phi(x, \bar{b})$. Поэтому найдется $m \in M_{i_0}$, реализующий формулу $\Phi(x, \bar{b})$. По 6.1(б) и (а) найдется $m^* \in M_{i_0}$, реализующий тип $\widehat{p}_3(x)$. Тогда множество $p_3(x) \cup \{\eta(x, m^*)\}$ совместно. Так как $p \subseteq p_3$ и $p_3^+ \sim p_1$, то из максимальности p_1 получаем $p_3^+(x) \vdash \eta(x, m^*)$. Это противоречит тому, что η делит p_3^+.

Случай 2: $p_3^+(x)$ аддитивно связан с $q(x)$ с помощью $\Phi(x, y, u, v)$. Рассмотрим $\langle y\Phi\rangle$-замыкание $\widehat{q}$ типа q и $\langle x\Phi\rangle$-замыкание $\widehat{p}_3$ типа p_3:

$$\widehat{q}(x) = \{\exists y(\Psi(y, \bar{m}) \wedge (y\Phi)(x, y)) \mid \Psi(y, \bar{m}) \in q(y)\},$$

$$\widehat{p}_3(x) = \{\exists y(\varphi(y, \bar{b}) \wedge (x\Phi)(x, y)) \mid \varphi(y, \bar{b}) \in p_3(y)\}.$$

По доказательству термальной леммы и 2.11 найдутся такие h-формулы $\alpha(x, \bar{b}) \in (\widehat{p}_3)^+(x)$ и $\beta(x, \bar{m}) \in \widehat{q}(x)$, что $\alpha(x, \bar{b}) \sim (\widehat{p}_3)^+(x)$, $\beta(x, \bar{m}) \sim (\widehat{q})(x)$. Возьмем элементы $n_0 \in \alpha(N, \bar{b})$ и $m_0 \in \beta(M_{i_0}, \bar{m})$. Так как $\Phi(x, y, n_0, m_0)$ связывает $p_3^+(x)$ и q, то $\Phi(x, y, n_0, m_0)$ связывает $\alpha(x, \bar{b})$ и $\beta(x, \bar{m})$. По 5.7 имеем $\widehat{p}_3(x) \sim (\{\alpha(x, \bar{b})\} \cup t(x))$, где $t(x)$ состоит из отрицаний $\langle x\Phi\rangle$-замкнутых h-формул в $\bar{b}$. Рассмотрим тип

$$s(y) = \{\beta(y, \bar{m})\} \cup \{\neg\exists x(\Phi(x, y, n_0, m_0) \wedge \Psi(x, \bar{b})) \mid \neg\Psi(x, \bar{b}) \in t\}.$$

Так как тип $\widehat{p}_3(x)$ совместный, то $s(y)$ — совместный тип. В силу 6.1(б) и (а) найдется $m^* \in M_{i_0}$, реализующий тип $s(y)$. Тогда множество $\{\Phi(x, m^*, n_0, m_0)\} \cup p_3(x)$ совместно, и из максимальности $p_1 \sim p_3^+$ получаем $p_3^+(x) \vdash \Phi(x, m^*, n_0, m_0)$. Это противоречит тому, что $x\Phi$ делит p_3^+. □

Следствие 6.9. *Теория T не имеет размерностного порядка.*

Доказательство. Утверждение сразу вытекает из 6.7 и 6.8, так как в определении размерностного порядка пункт в) можно заменить, как известно, на следующий: N — неминимальная ω-простая модель над $M_1 \cup M_2$. □

Через T в этом параграфе, если не оговорено противное, будет обозначаться счетная A-теория. Напомним известное определение глубины [11].

Определение. *Пусть M — ω-насыщенная модель, тип $p \in S_x(M)$ регулярный, $\vdash p(a)$ и N — ω-простая модель над $M \cup \{a\}$. Определим глубину* $\mathrm{dp}_T(p)$ *типа p по индукции так*:

а) $\mathrm{dp}_T(p) \geqslant 0$ *для всех таких* p;

б) *если* α *не предельный, то* $\mathrm{dp}_T(p) \geqslant \alpha+1 \Leftrightarrow (\mathrm{dp}_T(q) \geqslant \alpha$ *и* $q \perp M$ *для некоторого* $q \in S_x(N))$;

в) *если* α *предельный, то* $\mathrm{dp}_T(p) \geqslant \alpha+1 \Leftrightarrow (\mathrm{dp}_T(p) \geqslant \beta$ *для всех* $\beta < \alpha)$.

Как обычно, пишем $\mathrm{dp}_T(p) = \alpha$, если $\mathrm{dp}_T(p) \geqslant \alpha$ и не имеет места $\mathrm{dp}_T(p) \geqslant \alpha+1$. Если для p такого ординала нет, то пишем $\mathrm{dp}_T(p) = \infty$.

Определения. (1) *Если $q \in S_x(\varnothing)$, $E(x, y)$ — h-эквивалентность и $E(x, x) \in q$,* то *пару $\langle q, E\rangle$ будем называть схемой.*

(2) *Если $p \in S_x(A)$, то схемой типа p назовем схему $\langle p \restriction \varnothing, x\Phi\rangle$, где $\Phi(x, a)$ — базисная h-формула для h-типа p.*

Заметим, что схема типа p не однозначно определяется по типу p. Однако если $\langle r_1, E_1\rangle$ и $\langle r_2, E_2\rangle$ — две схемы типа p и $\vdash p(a)$, то $r_1 = r_2$ и $(r_1(x) \cup \{E_1(x, a)\}) \sim (r_2(x) \cup \{E_2(x, a)\}) \sim p \restriction \varnothing \cup p^+$.

Предложение 3.8 позволяет распространить понятие стационарности на неполные типы, а именно: тип $p(x)$ назовем *стационарным*, если для любой h-эквивалентности $\eta(x, y)$ выполняется условие $[p(x):\eta] \in \{0, 1, \infty\}$. Из 3.3 и h^*-базируемости T (теорема 5.9) сразу вытекает

Предложение 7.1. *Если $p \in^{\subseteq} S_x(A)$ — стационарный тип и $p \restriction \varnothing$ — полный тип, то существует единственный полный тип $q \in S_x(A)$, расширяющий p, для которого $q^+ \sim p^+$.* □

Тип q из предложения 7.1 будем называть *свободным A-пополнением типа p* и обозначать $\mathrm{fr}(p, A)$. Так как в полных хорновых теориях все типы стационарны, то это определение согласуется с соответствующим определением из § 1. Ясно также, что если тип $p \in S_x(A)$ стационарный и $A \subseteq B$, то $\mathrm{fr}(p, B) \not\downarrow A$. Единственность свободного пополнения позволяет нам распространить понятия, данные ранее для полных типов, на неполные стационарные типы $p \in^{\subseteq} S_x(A)$, для которых $p \restriction \varnothing$ — полный тип. В частности мы будем говорить, что такой тип *регулярный*, если $\mathrm{fr}(p, A)$ — регулярный тип.

Определения. (1) *Схема $\langle r, E\rangle$ называется стационарной (регулярной), если для любой реализации a типа $r(x)$ тип $r(x) \cup \{E(x, a)\}$ стационарный (стационарный и регулярный).*

Для стационарных схем $s = \langle q, E\rangle$, $s_1 = \langle q, E_1\rangle$ и h-эквивалентности $E_2(x, y)$ пишем $s \overset{E_2}{<} s_1$ в случае, когда

а) $q(x) \cup q(y) \vdash (E(x, y) \to E_2(x, y)) \wedge (E_2(x, y) \to E_1(x, y))$;

б) если h-эквивалентность $E'(x, y)$ удовлетворяет $q(x) \cup q(y) \vdash (E(x, y) \to E'(x, y)) \wedge (E_1(x, y) \to \exists z\, (E_2(x, z) \wedge E'(y, z) \wedge q(z)))$, то $q(x) \cup q(y) \vdash E_1(x, y) \to E'(x, y)$;

в) для любых реализации a типа q и реализации b свободного $\{a\}$-пополнения типа $q(x) \cup \{E_1(x, a)\}$ типы $q(x) \cup \{E(x, b)\}$ и $q(x) \cup \{E(x, a)\}$ не связаны и имеют более одной реализации.

Определения. (1) *Будем говорить, что стационарная схема $s = \langle p, E\rangle$ покрывает стационарную схему $s_1 = \langle p_1, E_1\rangle$ с помощью h-формулы $\eta(x, y, u, v)$, если для любой реализации a типа $p(x)$ существует реализация b типа $p_1(x)$ такая, что*

а) *$\eta(x, y, a, b)$ связывает типы $p(x) \cup \{E(x, a)\}$ и $p_1(y) \cup \{Q(y, b)\}$, где $Q(x, y) = \exists x_1 x_2 uv\, (E(x_1, x_2) \wedge \eta(x_1, x, u, v) \wedge \eta(x_2, y, u, v))$; при этом $\vdash \eta(a, b, a, b)$*;

б) $\langle p_1, E_1\rangle^{y\eta} < \langle p_1, Q\rangle$.

(2) *Если* s — *регулярная схема, то определим глубину* $\mathrm{Dp}_T(s)$ *схемы* s, *равную ординалу или символу* ∞ *по индукции*:

а) $\mathrm{Dp}_T(s) \geqslant 0$ *для любой регулярной схемы* s;

б) *если* α *не предельный, то* $\mathrm{Dp}_T(s) \geqslant \alpha + 1 \Leftrightarrow \mathrm{Dp}_T(s') \geqslant \alpha$ *для некоторой регулярной схемы* s', *которую покрывает схема* s;

в) *если* α *предельный, то* $\mathrm{Dp}_T(s) \geqslant \alpha + 1 \Leftrightarrow \mathrm{Dp}_T(s) \geqslant \beta$ *для всех* $\beta < \alpha$;

г) *для ординала* α *пишем* $\mathrm{Dp}_T(s) = \alpha$, *если* $\mathrm{Dp}_T(s) \geqslant \alpha$ *и* $\mathrm{Dp}_T(s) \ngeqslant \alpha + 1$, *и* $\mathrm{Dp}_T(s) = \infty$, *если такого ординала не существует.*

Лемма 7.2. *Пусть* M — ω-*насыщенная модель,* $p \in S_x(M)$, $\vdash p(a)$, N — ω-*простая модель над* $M \cup \{a\}$, $q \in S_x(N)$ *и* $q \perp M$. *Тогда схема* $s = \langle r, E\rangle$ *типа* p *покрывает схему* $s_1 = \langle r_1, E_1\rangle$ *типа* q.

Доказательство. Так как типы p и q над моделями, то схемы s и s_1 стационарны. Из $q \perp M$ вытекает, что q неалгебраический. Пусть $\Psi(x, e)$ — базисная h-формула для типа q^+ и $c \in N$ реализует тип $q \restriction \varnothing \cup \{\Psi(x, e)\}$. В силу ω-насыщенности M, 6.1 (б) и неалгебраичности q найдется $\Phi(x, \bar m, a) \in \mathrm{tp}^+(c, M \cup \{a\})$, для которой $\Phi(M, \bar m, a) = \varnothing$. Ясно, что формула $\Phi(y, \bar m, x)$ будет связывать типы $r(x) \cup \{E(x, \bar a)\}$ и $r_1(y) \cup \{Q(y, c)\}$, где $Q(y_1, y_2) = \exists x_1 x_2 \bar z(E(x_1, x_2) \wedge \Phi(y_1, \bar z, x_1) \wedge \Phi(y_2, \bar z, x_2))$. Можно считать, что $\Phi(x, \bar m, a)$ — базисная h-формула типа $\mathrm{tp}^+(c, M \cup \{a\})$. Пусть $q' = \mathrm{tp}^+(c, M)$ и $E_2(x_1, x_2) = x\Phi(x, \bar m, a)$. Из 6.1 (б) вытекает, что для любой h-эквивалентности $E'(x, y)$, такой, что $q'(x) \cup q'(y) \vdash \exists z(q'(z) \wedge E_2(x, z) \wedge E'(y, z))$, имеем $q'(x) \cup q'(y) \vdash E'(x, y)$. Отсюда в силу условия $q \perp M$ получаем $\langle r_1, E_1\rangle^{y\eta} < \langle r_1, Q\rangle$, где $\eta = xy\Phi(y, \bar m, x)$. □

Лемма 7.3. *Пусть стационарная схема* $\langle r, E\rangle$ *покрывает стационарную схему* $\langle r_1, E_1\rangle$ *и* M — *некоторая* ω-*насыщенная модель. Тогда найдутся такой элемент* a *и тип* $q \in S_x(N)$, *где* N — ω-*простая над* $M \cup \{a\}$, *для которых выполнено* $q \perp M$ *и* $\langle r, E\rangle$, $\langle r_1, E_1\rangle$ *являются схемами типов* $\mathrm{tp}(a, M)$, q *соответственно.*

Доказательство. Пусть $a_0 \in M$ реализует тип $r(x)$ и a_1 — реализация типа $r(x) \cup \{E(x, a_0)\}$, для которой $\mathrm{tp}(a_1, M) \downarrow \{a_0\}$. Ясно, что $\langle r, E\rangle$ будет схемой типа $p(x) = \mathrm{tp}(a_1, M)$. Пусть N — ω-простая над $M \cup \{a_1\}$ модель, $b_0 \in M$ и $\eta(x, y, a_0, b_0)$ связывает типы $r(x) \cup \{E(x, a_0)\}$ и $r_1(y) \cup \{Q(y, b_0)\}$, где η, Q — из определения покрываемости схем. Рассмотрим реализацию $b \in N$ типа $r_1(x) \cup \{\eta(a_1, x, a_0, b_0)\}$ и пусть $q \in S_x(N)$ — свободное N-пополнение типа $r_1(x) \cup \{E_1(x, b)\}$. Так как $\eta(x, y, a_0, b_0)$ связывает $r(x) \cup \{E(x, a_0)\}$ и $r_1(y) \cup \{Q(y, b_0)\}$, то $\eta(x, y, a_0, b_0)$ связывает $p(x)$ и $q \restriction M$. Отсюда в силу условия б) отношения $\langle r_1, E_1\rangle^{y\eta} < \langle r_1, Q\rangle$ получаем, что $\langle r_1, Q\rangle$ будет схемой типа $q \restriction M$. Тогда из условия в) этого отношения получаем $q \perp M$. Ясно, что $\langle r_1, E_1\rangle$ — схема типа q. □

Из 7.2 и 7.3 вытекает

Предложение 7.4. *Если* M — ω-*насыщенная модель и* $p \in S_x(M)$ — *регулярный тип, то* $\mathrm{dp}_T(p) = \mathrm{Dp}_T(s)$, *где* s — *схема типа* p. (Заметим, что тип над моделью всегда стационарный.) □

Определения. (1) *Схему* $\langle r, E\rangle$ *назовем приведенной, если для любой* h-*эквивалентности* $E_1(x, y)$, *удовлетворяющей условию* $r(x) \cup r(y) \cup \{E(x, y)\} \vdash E_1(x, y)$, *имеем* $r^+(x) \cup r^+(y) \cup \{E(x, y)\} \vdash E_1(x, y)$.

(2) *Схемы* $s_1 = \langle r_1, E_1\rangle$ *и* $s_2 = \langle r_2, E_2\rangle$ *назовем эквивалентными* (пишем $s_1 \sim s_2$), *если* $r_1 = r_2$ *и* $(r_1(x) \cup \{E_1(x, a)\}) \sim (r_2(x) \cup \{E_2(x, a)\})$ *для любой реализации* a *типа* $r_1(x)$.

Лемма 7.5. *Для любой схемы* $s = \langle r, E\rangle$ *существует приведенная схема* $s_1 = \langle r_1, E_1\rangle$, *эквивалентная схеме* s.

Доказательство. Пусть a — реализация типа $r(x)$. Возьмем такую h-эквивалентность $E_1(x, y)$, что $s \sim s_1 = \langle r, E_1\rangle$ и $HD(r^+(x) \cup \{E_1(x, a)\})$ минимальный. Предположим, что s_1 не приведенная. Тогда найдется такая h-эквивалентность $E_2(x, y)$, что $s_1 \sim s_2 = \langle r, E_2\rangle$, $\vdash E_2 \to E_1$ и E_2 делит h-тип $r^+(x) \cup \{E_1(x, a)\}$. Повторив рассуждение при доказательстве предложения 5.2, получаем $HD(r^+(x) \cup \{E_2(x, a)\}) < HD(r^+(x) \cup \{E_1(x, a)\})$. Это противоречит выбору E_1. □

Лемма 7.6. (а) *Если в T приведенная стационарная схема $s = \langle r, E\rangle$ покрывает приведенную стационарную схему $s_1 = \langle r_1, E_1\rangle$, то в T^h схема $\langle r^\pm, E\rangle$ покрывает схему $\langle r_1^\pm, E_1\rangle$.*

(б) *Если $\langle r, E\rangle$ — приведенная регулярная схема в T, то $\langle r^\pm, E\rangle$ — регулярная схема в T^h и $\mathrm{Dp}_{T^h}(\langle r^\pm, E\rangle) \geqslant \mathrm{Dp}_T(\langle r, E\rangle)$.*

Доказательство. Пункт (а) легко вытекает из фильтруемости h-формул и h-нормальности T и T^h. Предположим, что схема $\langle r^\pm, E\rangle$ в T^h не регулярна. Тогда найдутся h-формула $\Phi(x, y, u)$ и h-эквивалентность $\eta(x, y)$ такие, что $\vdash \eta \to E$ и для любой реализации a в T^h типа $r^\pm(x)$ формула $\Phi(x, y, a)$ связывает типы $q = r^\pm(x) \cup \{E(x, a)\}$, $r^\pm(x) \cup \{\eta(x, a)\}$; причем η делит q. Пусть e реализует в T тип $r(x)$. Рассматривая элемент $F(e)$ в T^h, получаем, что $\Phi(x, y, e)$ связывает в T типы $r^\pm(x) \cup \{E(x, e)\}$ и $r^\pm(x) \cup \{\eta(x, e)\}$. Если существует абсолютная связь этих типов, то из полноты типа $r(x)$ и 5.8 вытекает, что типы $p(x) = r(x) \cup \{E(x,e)\}$, $q'(x) = r(x) \cup \{\eta(x,e)\}$ связаны. Если такой абсолютной связи нет, то из термальной леммы и 5.7 вытекает также связанность типов p и q. Так как $p(x)$ — стационарный тип, то эта связь сильная, что противоречит регулярности p (см. § 3).

Определение. *Глубиной теории T назовем ординал* $\mathrm{Dp}(T) = \sup\{\mathrm{Dp}_T(s) \mid s$ *— регулярная схема в $T\} + 1$, если он существует, и символ ∞ в противном случае.*

В [12] доказано, что если $\mathrm{Dp}(T) = \infty$, то $I(\omega_\alpha, T) = 2^{\omega_\alpha}$, $\alpha \geqslant 1$ (мы учитываем предложение 7.4).

Предложение 7.7 (а) $\mathrm{Dp}(T^h) \geqslant \mathrm{Dp}(T)$.

(б) $\mathrm{Dp}(T) \in \omega_1 \cup \{\infty\}$.

(в) *Если T_1 — счетная хорнова теория (не обязательно полная) с немаксимальным несчетным спектром, то существует $\alpha_0 \in \omega_1$, что $\mathrm{Dp}(T) < \alpha_0$ для любого полного расширения T теории T_1 той же сигнатуры.*

Доказательство. Пункт (а) сразу вытекает из 7.6(б). Утверждение (б) для любых счетных полных теорий сформулировано в [12], хотя там нет полного доказательства этого факта. Полное доказательство (б) для счетных хорновых теорий дано в [1]. Это доказательство можно легко перенести, используя h^*-базируемость T на A-теории. Конструкцию в этом доказательстве легко провести также для h^*-базируемых и h-нормальных неполных хорновых теорий, каковой является T_1 (см. 5.10).

§ 8. ЛЕММА О РАЗЛОЖЕНИИ

Все понятия в этом параграфе, если не оговорено противное, относятся к A-теории T.

Лемма 8.1. (*В T^{eh}.*) *Пусть M_1, M_2 — T^{eh}-модели $M_1 \preccurlyeq M_2$ и $c \in M_2 \setminus M_1$. Тогда либо $\mathrm{tp}(c, M_1)$ регулярный, либо существует ограниченная h-эквивалентность $\Theta(x, y)$ такая, что $M_2 \vDash \Theta(c, c)$, $c/\Theta \notin M_1$* и $\mathrm{Deg}(c/\Theta, M_1) < \mathrm{Deg}(c, M_1)$.

Доказательство. Предположим, что $p(x) = \mathrm{tp}(c, M_1)$ не регулярный. Тогда для некоторого $B \supseteq M_1$ и ответвляющегося над M_1 расширения $q \in S_x(B)$ типа $p(x)$ имеем $p \pm q$. Поэтому найдутся $C \supseteq B$, h-формула $\Phi(x, y, \bar{c})$ в C и типы $p_1, q_1 \in S(C)$, для которых выполнены условия $q_1 \downarrow q$, $p_1 \downarrow p$ и $\Phi(x, y, \bar{c})$ сильно связывает p_1 и q_1. Ясно, что h-формула $\Phi(x/x\Phi, y/y\Phi, \bar{c})$ инъективно связывает $p_1/x\Phi$ и $q_1/y\Phi$. Пусть $r \in S_x(A)$ — некоторый тип, $r_1 \downarrow r$ и $E(x, y)$ — ограниченная h-эквивалентность, для которой $r(x) \vdash E(x, x)$. Тогда $\mathrm{Deg}(r/E) \leqslant \mathrm{Deg}(r)$, и из 3.6(а) легко вытекает $r_1/E \downarrow r/E$. Отсюда в силу 2.7(а) и 3.5(з) получаем $\mathrm{Deg}(p/x\Phi) = \mathrm{Deg}(p_1/x\Phi) = \mathrm{Deg}(q_1/y\Phi) \leqslant \mathrm{Deg}(q_1) = \mathrm{Deg}(q) < \mathrm{Deg}(p)$. Так как $[p : x\Phi] = \infty$, то $c/x\Phi \notin M$, и в качестве Θ можно взять $x\Phi$. □

Лемма 8.2. (*В* T^{eh}.) *Пусть* $N' \leqslant M' \leqslant N$ — T^{eh}-*модели и* $c \in N \setminus M'$. *Тогда либо* $\mathrm{tp}(c, M') \perp N'$, *либо существует* $c' \in N \setminus M'$, *для которого* $\mathrm{Deg}(c', N') \leqslant \mathrm{Deg}(c, M')$.

Доказательство. Пусть $p(x) = \mathrm{tp}(c, M') \pm N'$ и $p_1 \in S_x(M'')$ — независимая копия p над N'. Будем предполагать также, что выполнено условие

$$\mathrm{tp}(M'', M' \cup \{c\}) \downarrow N'. \tag{8.1}$$

В силу 3.18 и 5.16 возможны два случая.

Случай 1: p^+ и p_1^+ связаны с помощью h-эквивалентности $\eta(x, y)$. Покажем, что в качестве c' можно взять c/η. Так как η делит p, то $c/\eta \in N \setminus M'$. В силу (8.1) $\mathrm{tp}(c, M' \cup M'') \downarrow N'$. Из доказательства утверждения (в)$\Rightarrow$(а) предложения 5.16 получаем, что η связывает тип $\mathrm{tp}(c, M' \cup M'')$ с неответвляющимся расширением $q \in S_x(M' \cup M'')$ типа p_1. В частности, найдется реализация e типа $p_1(x)$, для которого $\vdash \eta(c, e)$. Из (8.1)

$$\mathrm{tp}(c, M'') \downarrow N'. \tag{8.2}$$

Из (8.2) и 3.6(а) вытекает

$$\mathrm{tp}(c/\eta, M'') \downarrow N'. \tag{8.3}$$

Так как $e/\eta = c/\eta$ и $\mathrm{tp}(e, M'')$ является копией над N' типа $\mathrm{tp}(c, M')$, то в силу (8.3)

$$\mathrm{tp}(c/\eta, M') \downarrow N'. \tag{8.4}$$

Из (8.4) и 3.5(з) получаем $\mathrm{Deg}(c/\eta, M') = \mathrm{Deg}(c/\eta, N')$, что вместе с очевидным неравенством $\mathrm{Deg}(c/\eta, M') \leqslant \mathrm{Deg}(c, M')$ завершает рассмотрение случая 1.

Случай 2: p^+ аддитивно связан с p_1^+ с помощью h-формулы $\Phi(x, y, u, v)$. Ввиду 2.8 и 5.6 можно считать, что $\Phi(x, y, u, v)$ — рефлексивная формула. Пусть $q = (p^+)/x\Phi$ и $q_1 = (p_1^+)/x\Phi$. Поскольку q и q_1 — аддитивные h-типы, то по 2.11 существует такая h-формула $\Psi(x, \bar{m}) \in q$, что $q(x) \sim \{\Psi(x, \bar{m})\}$. Обозначим через $\Phi^*(x, y, u, v)$ формулу $\Phi(x/x\Phi, y/y\Phi, u/u\Phi, v/v\Phi)$. Так как q и q_1 — независимые копии над N', то найдется такая h-формула $\Phi_0(x, \bar{n}) \in q \restriction N'$, что для любых реализаций b_1, b_2 формулы $\Phi_0(x, \bar{n})$ формула $\Phi^*(x, y, b_1, b_2)$ определяет взаимно-однозначное соответствие между множествами реализаций формул $(x\Psi)(x, b_1)$ и $(x\Psi)(x, b_2)$. Возьмем элементы $n_0 \in \Phi(N', \bar{n})$ и $m_0 \in \Psi(M', \bar{m})$. Тогда найдется элемент $e \in (x\Psi)(N, n_0)$, для которого $\vdash \Phi^*(c/x\Phi, e, m_0, n_0)$. Так как h-эквивалентность $x\Phi$ делит p^+, то $e \notin M'$. Из 5.7 вытекает

$$p/x\Phi \sim (p^+/x\Phi \cup p^-/x\Phi), \tag{8.5}$$

Применяя доказательство леммы 2.8, в котором вместе с (8.5) используется аддитивность и стационарность p, получаем $\mathrm{Deg}(p/x\Phi) = \mathrm{Deg}(p^+/x\Phi)$. Отсюда в силу 2.7(а) $\mathrm{Deg}(p) \geqslant \mathrm{Deg}(p/x\Phi) = \mathrm{Deg}(q) = \mathrm{Deg}(\Psi(x, \bar{m})) = \mathrm{Deg}((x\Psi)(x, \bar{m}_0)) = \mathrm{Deg}((x\Psi)(x, n_0)) = \mathrm{Deg}(e, N')$. □

Определение. *Модель* M *называется* eh-*насыщенной в модели* N, *если* $M \leqslant N$ *и для любых формулы* $\varphi(\bar{x}, \bar{m})$ *в* M, $\bar{b} \in \varphi(N, \bar{m})$ *и* h-*эквивалентности* $E(\bar{x}^1, \bar{x}^2)$ *найдется такой* $\bar{b}' \in \varphi(M, \bar{m})$, *что* $[\mathrm{tp}(\bar{b}, \bar{m}) : E] = [\mathrm{tp}(\bar{b}', \bar{m}) : E]$.

Имеет место

Лемма 8.3. *Если N — модель и $A \subseteq N$, то существует* eh-*насыщенная в N модель M, содержащая A и $|M| \leqslant |A| + |T|$.* □

Лемма 8.4. *Если модель M* eh-*насыщена в N и $M \subseteq B \subseteq N$, то существует такая модель $N' \leqslant N$, что $B \subseteq N'$ и $\mathrm{tp}(N', B) \perp^a M$.*

Доказательство. Из определения отношения $\perp^a$ и 3.5(ж) вытекает, что если $\mathrm{tp}(\bar{a}, B) \perp^a M$ и $\mathrm{tp}(c, B \cup \bar{a}) \perp^a M$, то $\mathrm{tp}(\widehat{\bar{a}c}, B) \perp^a M$. Поэтому достаточно показать, что для любой совместной формулы $\varphi(x, \bar{b})$ в B существует такой элемент $a \in \varphi(N, \bar{b})$, что $\mathrm{tp}(a, B) \perp^a M$. Предположим, это неверно, и пусть $\varphi(x, \bar{b})$ — опровергающая формула с минимальным $\mathrm{Deg}(\varphi(x, \bar{b})) = \alpha_0$. Возьмем произвольный элемент $c \in \varphi(N, \bar{b})$. По нашему предположению $p(\bar{x}) = \mathrm{tp}(c, B) \pm^a M$. Следовательно, существует такой $q \in S_{\bar{y}}(B)$, что $q \nmid M$ и некоторая h-формула $\Phi(x, \bar{y}, \bar{e})$ в B сильно связывает p и q. Рассмотрим формулу $\Psi(\bar{y}, \bar{d}) = \exists x (\Phi(x, \bar{y}, \bar{e}) \wedge \varphi(x, \bar{b}))$. В силу h^*-базируемости T можно считать, что $\Psi(\bar{y}, \bar{z}) = \varphi_0(\bar{y}) \wedge \Phi_0(\bar{y}, \bar{z}) \wedge \bigwedge_1^k \Psi_i(\bar{y}, \bar{z})$, где $\Phi_0, \Psi_1, \ldots, \Psi_k$ — h-формулы. Определим множество $s \subseteq \{1, \ldots, k\}$ так: $i \in s \Leftrightarrow \Psi_i(M, \bar{d}) \neq \varnothing$. Для каждого $i \in s$ возьмем $\bar{a}_i \in \Psi_i(M, \bar{d})$. Ввиду 3.9 и условия $q \nmid M$ найдется $\bar{a}_0 \in \Phi_0(M, \bar{d})$. Возьмем кортеж $\bar{m} \in M$, содержащий элементы $\bar{a}_i$, $i \in S \cup \{0\}$, для которого

$$\mathrm{tp}(\bar{d}, M) \nmid \bar{m}, \tag{8.6}$$

а также элемент $g \in \Phi(c, N, \bar{e})$. Так как $\Phi(x, \bar{y}, \bar{e})$ сильно связывает p и q, то $[\mathrm{tp}(\bar{y}, \bar{m}) : \bar{y}\Phi] = \infty$. Ввиду eh-насыщенности M в N, найдется $\bar{a}^* \in M$, реализующий формулу

$$\varphi_0(\bar{y}) \wedge (\bar{y}\Phi_0)(\bar{y}, \bar{a}_0) \wedge \bigwedge_{i \in s} \neg(\bar{y}\Psi_i)(\bar{y}, \bar{a}_i),$$

для которого $[\mathrm{tp}(\bar{a}^*, \bar{m}) : y\Phi] = \infty$. Ясно, что $\bar{a}^*$ реализует формулу $\Psi(\bar{y}, \bar{d})$, поэтому существует элемент $c^* \in \varphi(N, \bar{b})$, для которого $\vdash \Phi(c^*, \bar{a}^*, e)$. По 3.6(а) получаем $\mathrm{tp}(\bar{a}^*, \bar{m} \cup \bar{d} \cup \{c^*\}) \curlywedge \bar{m}$. Следовательно, по 3.5(е)

$$\mathrm{tp}(\widehat{\bar{d}c^*}, \bar{m} \cup \bar{a}^*) \curlywedge \bar{m}. \tag{8.7}$$

С другой стороны, в силу (8.6) $\mathrm{tp}(\bar{d}, \bar{m} \cup \bar{a}^*) \nmid \bar{m}$, что вместе с (8.7) и 3.5(ж) дает $\mathrm{tp}(c^*, \bar{m} \cup \bar{a}^* \cup \bar{d}) \curlywedge (\bar{m} \cup \bar{d})$. Тогда из 3.5(з) и условия $\vdash \varphi(c^*, \bar{b})$ получаем $\mathrm{Deg}(\mathrm{tp}(c^*, B)) < \mathrm{Deg}(\mathrm{tp}(c^*, \bar{m} \cup \bar{d})) \leqslant \mathrm{Deg}(\mathrm{tp}(c, \bar{b})) = \alpha_0$. Это противоречит минимальности α_0. □

Лемма 8.5. (о разложении модели). *(В T^{eh}.) Пусть T^{eh}-модель M* eh-*насыщенна в T^{eh}-модели N. Тогда существуют элементы $a_i \in N \setminus M$ и подмодели $N_i < N$, $i \in I$, удовлетворяющие следующим условиям:*

(а) $\mathrm{tp}(a_i, M)$ *регулярный;*

(б) *множество* $\{a_i | i \in I\}$ *независимо над* M;

(в) $M \cup \{a_i\} \subseteq N_i$;

(г) $\mathrm{tp}(N_i, M \cup \{a_i\}) \perp^a M$;

(д) N_i — *максимальное подмножество модели N, удовлетворяющее условиям* (в), (г);

(е) *множество* $\{N_i | i \in I\}$ *независимо над* M;

(ж) N — *минимальная и простая T^{eh}-модель над множеством* $\cup\{N_i | i \in I\}$.

Доказательство. Пусть $\{a_i | i \in I\}$ — максимальное множество элементов из $N \setminus M$, удовлетворяющее (а), (б). Выберем максимальные множества $N_i \subseteq N$, удовлетворяющие условиям (в), (г). По 8.4 N_i будут моделями. Из (б) и (г) нетрудно вывести (е). Предположим, что условие (ж) не выполняется, т. е. существует подмодель $M' \subseteq N$, содержащая множество $\cup\{N_i | i \in I\}$, для которой $N \setminus M' \neq \varnothing$. Согласно 6.7 можно считать, что M' h-конструируема над $\cup\{N_i | i \in I\}$. Пусть $\alpha_0 =$

$= \min\{\mathrm{Deg}(e, M') \mid e \in N \setminus M'\}$. В силу 8.1, 8.2 и максимальности $\{a_i \mid i \in I\}$ имеем $\mathrm{tp}(e, M') \perp M$ для любого $e \in N \setminus M'$ с условием $\mathrm{Deg}(e, M') = \alpha_0$. Ввиду суперстабильности T^{eh} и h-конструируемости M' над $\bigcup_{i \in I} N_i$, для любого $e \in N$ найдется конечное $s \subseteq I$ и h-конструируемая над $\bigcup_{i \in s} N_i$ модель $M_s \subseteq M'$ такая, что $\mathrm{tp}(e, M') \downarrow M_s$. Пусть s^* — минимальное множество, для которого существуют $e_0 \in N \setminus M'$ и h-конструируемая над $\bigcup_{i \in s^*} N_i$ подмодель $M_{s^*} \subseteq M'$ такие, что $\mathrm{Deg}(e_0, M') = \alpha_0$ и $\mathrm{tp}(e_0, M') \downarrow M_{s^*}$. Пусть $|s^*| = 1$. Тогда $M_{s^*} = M_{i_0}$, и в силу (д) $\mathrm{tp}(e_0, N_{i_0}) \pm M$. Таким образом, $|s^*| > 1$. Пусть $s^* = s_1 \cup s_2$, $s_1 \cap s_2 = \varnothing$, $s_1 \neq \varnothing$, $s_2 \neq \varnothing$ и M_{s_j} — h-конструируемая над $\bigcup_{i \in s_j} N_i$ подмодель M', $j \in \{1, 2\}$. Согласно 8.2, 3.5(з) и минимальности α_0 и s^* имеем $\mathrm{tp}(e_0, M') \perp M_{s_j}$, $j \in \{1, 2\}$. Из условия $\mathrm{tp}(e_0, M') \downarrow M_{s^*}$ получаем $\mathrm{tp}(e_0, M_{s^*}) \perp M_{s_j}$, $j \in \{1, 2\}$, что противоречит 6.6. □

Пусть λ — кардинал. Будем говорить, что множество J — *λ-дерево*, если J состоит из конечных последовательностей (кортежей) ординалов, меньших λ, и замкнуто относительно взятия начальных отрезков. Если $u = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$, то через u^- будем обозначать последовательность $\langle u_1, \ldots, u_{n-1} \rangle$. Если u — начальный отрезок кортежа $v \in J$ и $u \neq v$, то пишем $u < v$. Пустой кортеж обозначаем символом $\varnothing$ и считаем, что любое λ-дерево содержит пустой кортеж.

Определение. *Пусть N — модель мощности λ, M — подмодель N и J — λ-дерево. Множество $\{\langle M_u, a_u, N_u \rangle \mid u \in J\}$ называется M-представлением модели N, если*

1) $M_\varnothing = M$;
2) $N_\varnothing = N$;
3) *если u^- существует, то* $M_{u^-} \cup \{a_u\} \subseteq M_u$;
4) *тип $p_u = \mathrm{tp}(a_u, M_{u^-})$ регулярный*;
5) $M_{u^-} \subseteq M_u \subseteq N_u \subseteq N_{u^-}$;
6) $\mathrm{tp}(N_u, M_{u^-} \cup \{a_u\}) \perp^a M_{u^-}$;
7) *N_u — максимальное множество, удовлетворяющее условиям 5) и 6)*;
8) *если u^{--} существует, то* $\mathrm{tp}(a_u, M_{u^-}) \perp M_{u^{--}}$;
9) $\{a_{\widehat{u\alpha}} \mid \widehat{u\alpha} \in J\}$ — *независимое над M_u множество*;
10) *N_u минимальна и проста над* $\bigcup\{M_v \mid v \in J,\ u < v\}$;
11) $|M_u| = |M|$.

Из 8.3 и 8.5 вытекает следующая *главная структурная лемма*.

Лемма 8.6. (*В T^{eh}.*) *Если M — eh-насыщенная подмодель модели N, то существует M-представление модели N.* □

§ 9. УСИЛЕННАЯ СТРУКТУРНАЯ ЛЕММА

Всюду в этом параграфе через T обозначается A-теория. Для упрощения доказательств мы будем работать в теории T^{eh}.

Напомним, что тип $p \in S_{\bar{x}}(A)$ называется *t-изолированным*, если $\varphi \vdash p$ для некоторой формулы $\varphi \in p$. Множество B называется *t-насыщенным*, если любой t-изолированный тип $p \in S_x(B)$ реализуется некоторым элементом $b \in B$. Ясно, что любая модель является t-насыщенным множеством.

Лемма 9.1. Пусть *B — t-насыщенное множество, $p, q \in S_x(B)$ и $p \pm q$. Тогда $p \pm^a q$.*

Доказательство. Так как $p \pm q$, то найдутся $C \supseteq B$, p_1, $q_1 \in S_x(C)$, для которых $p_1 \downarrow p$, $q_1 \downarrow q$ и $p_1 \pm^a q_1$. Можно считать, что $\mathrm{dcl}(C) = C$. Рассмотрим два случая.

Случай 1: $p_1(x)$ сильно связан с $q_1(x)$ над B. Пусть h-формула $\Psi(x, y, \bar{b})$ в B сильно связывает $p_1(x)$ и $q_1(y)$. Так как p и q — полные типы над B, $p \subseteq p_1$, $q \subseteq q_1$, то $\Psi(x, y, \bar{b})$ будет сильно связывать $p_1(x)$ и $q_1(y)$.

Случай 2: отрицание случая 1. Пусть h-формула $\Psi(x, y, \bar{c})$ в C сильно связывает $p_1(x)$ и $q_1(y)$. Ясно, что $\Psi(x, y, \bar{c})$ будет связывать $p_1^+(x)$ и $q_1^+(y)$. Случай 1 не выполняется, поэтому h-формула $\exists \bar{z} \Psi(x, y, \bar{z})$ соединяет $p_1(x)$ и $q_1(y)$. Из 5.3 вытекает, что h-формула $X(x, y, u, v) = (xy\Psi)(x, y, u, v)$ будет аддитивно связывать $p_1^+(x)$ и $q_1^+(y)$. По доказательству термальной леммы $p_1^+/x\Psi$ и $q_1^+/x\Psi$ — аддитивные типы. Поскольку B — t-насыщенное множество, то $\mathrm{acl}(B) = B$ и типы p, q стационарны. Отсюда из $p_1 \downarrow p$ и $q_1 \downarrow q$ вытекает $p_1^+ \sim p^+$ и $q_1^+ \sim q^+$. Ввиду 2.11 и t-насыщенности B найдутся b, $c \in B$, реализующие h-типы $(p^+/x\Psi)(x)$ и $(q^+/y\Psi)(x)$ соответственно. Тогда h-формула $X'(x, y, b, c)$, где $X'(x, y, b, c) = X(x/x\Psi, y/y\Psi, u/x\Psi, v/y\Psi)$, будет инъективно связывать $(p/x\Psi)^+(x)$ и $(q/y\Psi)^+(y)$. По 5.7 имеем $(p/x\Psi)^\pm \sim p/x\Psi$ и $(q/y\Psi)^\pm \sim q/y\Psi$. Следовательно, $X(x, y, b, c)$ будет инъективно связывать $p/x\Psi$ и $q/y\Psi$. Так как $[p_1 : x\Psi] = \infty$, $p \subseteq p_1$, то $[p : x\Psi] = \infty$. Таким образом, $p(x)$ и $q(x)$ сильно связаны над B. □

Предложение 9.2. *Пусть T — счетная A-теория, не являющаяся ω-стабильной. Тогда существуют счетное множество B и множество $Q \subseteq S_x(B)$ мощности 2^ω, состоящее из попарно ортогональных типов.*

Доказательство. Так как T не ω-стабильна, то найдется счетное множество B, для которого $|S_x(B)| = 2^\omega$. Если $\varphi(x, \bar{c})$ — формула, B — множество, то пусть $X_\varphi^B = \{q \mid q \in S_x(B), \varphi(x, \bar{c}) \in q\}$. Возьмем h-формулу $\Phi_0(x, \bar{a})$ с минимальным $HD(\Phi_0(x, \bar{a}))$, для которой существует счетное B такое, что $\left|S_{\Phi_0}^{B_0}\right| = 2^\omega$. Можно считать, что B — модель T. Предположим, что предложение ложно. Тогда существует такой $q_0 \in X_{\Phi_0}^{B_0}$, что $\left|\left\{q \mid q \in X_{\Phi_0}^{B_0}, q \pm q_0\right\}\right| > \omega$. Поскольку B_0 — модель, то в силу леммы 9.1 и счетности B_0 найдутся такие $p_0 \in S_x(B_0)$, несчетное множество $Q_1 \subseteq X_{\Phi_0}^{B_0}$ и h-формула $\Psi(x, y, \bar{b})$ в B_0, что $\Psi(x, y, \bar{b})$ сильно связывает $p_0(x)$ с каждым $q(x) \in Q_1$. Возьмем реализацию e_0 типа $p_0(x)$. Тогда формула $\Psi(e_0, y, \bar{b})$ будет совместна с любым типом $q(y)$, $q \in Q_1$. Следовательно, $|X_{\Phi'}^{B'}| > \omega$, где $B' = B_0 \cup \{e_0\}$, $\Phi'(x, \bar{a}') = \Phi_0(x, \bar{a}) \wedge \Psi(e_0, x, \bar{b})$. Так как $y\Psi$ делит $q(y)$ для всех $q \in Q_1$, то по 5.2 $HD \times (\Phi'(x, \bar{a}')) < HD(\Phi_0(x, \bar{a}))$. На множестве вида X_φ^A определяется хаусдорфова топология с базой мощности $|A| + \omega$, поэтому $|X_{\Phi'}^{B'}| > \omega \Leftrightarrow |X_{\Phi'}^{B'}| = 2^\omega$; противоречие с минимальностью $HD(\Phi_0(x, \bar{a}))$. □

Определение. *Тип $q \in S(B)$ называется последователем типа* $\mathrm{tp}(a, A)$, *если $B \supseteq A \cup \{a\}$, тип* $\mathrm{tp}(B, A \cup \{a\})$ *почти ортогонален к A, $|B| \leqslant |A| + \omega$ и $q \perp A$.*

Легко видеть, что для регулярного типа q данное определение совпадает с определением 1-a-последователя [11] с точностью до неответвляющихся расширений.

Для типа $p \in S(A)$ через $V(p)$ будем обозначать $\sup\limits_{A \subseteq B} |\{q \in S(B) \mid q$ — последователь $p\}|$. Из определения последователя легко видеть, что свойство «q есть последователь p» является транзитивным. Следовательно, если тип q — последователь типа p, то $V(q) \leqslant V(p)$.

Для доказательства ряда утверждений нам часто будет нужна некоторая нумерация всех h-эквивалентностей теории T^{eh}. Поэтому мы зафиксируем некоторую нумерацию $\{E_i(x_1, x_2) | i \in \omega\}$ всех h-эквивалентностей теории T^{eh}.

Лемма 9.3. *Пусть M счетная T^{eh}-модель, $V(\mathrm{tp}(a, M)) \leqslant \omega$, $B \supseteq M \cup \{a\}$ и тип $\mathrm{tp}(B, M \cup \{a\})$ почти ортогонален к M. Тогда существует простая над B модель.*

Доказательство. Пусть C — максимальное t-конструируемое над B множество. Тогда C является t-насыщенным и в силу следствия 1.2.10 [13] тип $\mathrm{tp}(C, B)$ почти ортогонален к M. Для доказательства леммы достаточно показать, что C является моделью T^{eh}. Предположим противное. Тогда существует формула $\varphi(x, \bar{b})$ в C такая, что $\vdash \exists x \varphi(x, \bar{b})$ и $\varphi(C, \bar{b}) = \varnothing$.

Для всех $u \in 2^{<\omega}$ построим формулы $\Psi_u(x, \bar{b}^u)$ в C следующим образом:

а) $\Psi_\varnothing(x, \bar{b}^\varnothing) = \varphi(x, \bar{b})$;

б) пусть $\Psi_u(x, \bar{b}^u)$ построена и $l(u) = n$. Так как $\varphi(C, \bar{b}) = \varnothing$, C t-насыщенное множество и $\Psi_u(x, \bar{b}^u) \to \varphi(x, \bar{b})$, то существуют формулы $\Theta_0(x, \bar{c}^0)$, $\Theta_1(x, \bar{c}^1)$ в C такие, что

$$\vdash \bigwedge_{i=0}^{1} (\exists x \Theta_i(x, \bar{c}^i) \wedge (\Theta_i(x, \bar{c}^i) \to \Psi_u(x, \bar{b}^u))) \wedge \neg (\Theta_0(x, \bar{c}^0) \wedge \Theta_1(x, \bar{c}^1)).$$

Для $i \in \{0, 1\}$ в качестве $\Psi_{\widehat{ui}}(x, \bar{b}^{\widehat{ui}})$ выберем такую формулу $\Psi_i^*(x, \bar{c}_i^*)$ в C, что

$$\vdash \exists x \Psi_i^*(x, \bar{c}_i^*) \wedge (\Psi_i^*(x, \bar{c}_i^*) \to \Theta_i(x, \bar{c}^i))$$

и $[\Psi_i^* : E_n] \leqslant [\Psi_i(x, \bar{d}^i) : E_n]$ для любой $\Psi_i(x, \bar{d}^i)$ в C, для которой $\vdash \exists x \Psi_i(x, \bar{d}^i) \wedge (\Psi_i(x, \bar{d}^i) \to \Theta_i(x, \bar{c}^i))$, где E_n — h-эквивалентность с номером n из нашей зафиксированной нумерации.

Пусть $C_0 = M \cup \{a\} \cup \{\bar{b}^u | u \in 2^{<\omega}\}$. Тогда $\mathrm{tp}(C_0, M \cup \{a\}) \perp^a M$ и C_0 счетное множество. Для каждого $f \in 2^\omega$ выберем $p_f \in S(C_0)$ так, что $p_f \supseteq \{\Psi_{f \restriction n} | n \in \omega\}$. Так как $V(\mathrm{tp}(a, M)) \leqslant \omega$ и все p_f различны, то существует $f_0 \in 2^\omega$ такая, что $p_{f_0} \not\perp M$. В силу 9.1 для $p \in S(C)$, $p \downarrow p_{f_0}$ имеем $p \not\perp^a M$, т. е. существуют элементы b и d со свойствами: b реализует p, $\mathrm{tp}(d, C) \downarrow M$ и $\mathrm{tp}(b, C \cup \{d\}) \not\perp M$. Следовательно, найдется h-формула $\Theta(x, y, \bar{c})$ в C такая, что $\vdash \Theta(b, d, \bar{c})$ и $[p : x\Theta] = \infty$. Пусть $n_0 \in \omega$, $x\Theta = E_{n_0}$. Таким образом, для $u_0 = f \restriction (n_0 + 1)$ имеем $[\Psi_{u_0} : E_{n_0}] = \infty$. Так как $\mathrm{tp}(d, C) \downarrow M$ и $\vdash \exists x (\Theta(x, d, c) \wedge \Psi_{u_0}(x, \bar{b}^{u_0}))$, то существует $d' \in M$, при котором формула $X(x, \bar{c}') = \Theta(x, d', \bar{c}) \wedge \Psi_{u_0}(x, \bar{b}^{u_0})$ совместна. Ясно, что $[X(x, \bar{c}') : E_{n_0}] = 1$. Это противоречит построению $\Psi_{u_0}(x, \bar{b}^{u_0})$. □

Лемма 9.4. *Пусть M_0, M, N — T^{eh}-модели, $|M_0| \leqslant \omega$, $V(\mathrm{tp}(a, M_0)) \leqslant \omega$, $M_0 \cup \{a\} \subseteq M \subset N$ и $\mathrm{tp}(N, M_0 \cup \{a\}) \perp^a M_0$. Тогда существует формула $\varphi(x, \bar{m})$ в M такая, что $\varphi(M, \bar{m}) \neq \varphi(N, \bar{m})$ и для любой формулы $X(x, \bar{m}')$ в M либо $X(N \setminus M, \bar{m}') \cap \varphi(N \setminus M, \bar{m}) = \varnothing$, либо $\varphi(N \setminus M, \bar{m}) \subseteq X(N \setminus M, \bar{m}')$.*

Доказательство. Пусть $B = N \setminus M$. Предположим, что лемма неверна. Для всех $u \in 2^{<\omega}$ построим формулы $\Psi_u(x, \bar{b}^u)$ в M со следующими свойствами:

(а) $\Psi_u(B, \bar{b}^u) \neq \varnothing$;

(б) формулы $\Psi_{\widehat{u0}}(x, \bar{b}^{\widehat{u0}})$ и $\Psi_{\widehat{u1}}(x, \bar{b}^{\widehat{u1}})$ несовместны;

(в) $\vdash \Psi_{\widehat{ui}}(x, \bar{b}^{\widehat{ui}}) \to \Psi_u(x, \bar{b}^u)$, $i \in \{0, 1\}$;

если $n = l(u)$, то

(г) $[\Psi_{\widehat{u0}}(x, \bar{b}^{\widehat{u0}}) : E_n]$ и $[\Psi_{\widehat{u1}}(x, \bar{b}^{\widehat{u1}}) : E_n]$ минимальны среди всех формул $\Psi'_{\widehat{u0}}$ и $\Psi'_{\widehat{u1}}$, удовлетворяющих (а)—(в);

(д) если не существует $c \in B$ такого, что $\vdash \Psi_{\widehat{ui}}\left(c, \bar{b}^{\widehat{ui}}\right) \wedge E_n(c, c)$, то $\vdash \Psi_{\widehat{ui}}\left(x, \bar{b}^{\widehat{ui}}\right) \to \neg E_n(x, x)$;

(е) если существует $c \in B$ такой, что $\vdash \Psi_{\widehat{ui}}\left(c, \bar{b}^{\widehat{ui}}\right) \wedge E_n(c, c)$ и $E_n(M, c) = \varnothing$, то формула $\exists y\left(\Psi_{\widehat{ui}}\left(y, \bar{b}^{\widehat{ui}}\right) \wedge E_n(y, x)\right)$ не реализуется в M_0.

Построение будем вести следующим образом. В качестве $\Psi_{\varnothing}(x)$ возьмем формулу $x \approx x$. Пусть $\Psi_u(x, \bar{b}^u)$ построена и $l(u) = n$. Построим формулы $\Psi_{\widehat{u0}}\left(x, \bar{b}^{\widehat{u0}}\right)$ и $\Psi_{\widehat{u1}}\left(x, \bar{b}^{\widehat{u1}}\right)$. В силу предположения противного существуют формулы $\Theta_{\widehat{ui}}\left(x, \bar{b}_0^{\widehat{ui}}\right)$, со свойствами (а) — (д). Если не существует $c \in B$ такого, что $E_n(M, c) = \varnothing$ и $\vdash \Theta_{\widehat{ui}}\left(c, \bar{b}_0^{\widehat{ui}}\right) \wedge E_n(c, c)$, то в качестве $\Psi_{\widehat{ui}}\left(x, \bar{b}^{\widehat{ui}}\right)$ берем $\Theta_{\widehat{ui}}\left(x, \bar{b}_0^{\widehat{ui}}\right)$. Пусть для некоторого $c \in B$ имеют место $\vdash \Theta_{\widehat{ui}}\left(c, \bar{b}_0^{\widehat{ui}}\right) \wedge E_n(c, c)$ и $E_n(M, c) = \varnothing$. Тогда тип $\mathrm{tp}(c/E_n, M)$ не алгебраический. Так как $c/E_n \in N$, то $\mathrm{tp}(c/E_n, M_0 \cup \{a\}) \perp^a M_0$ и, следовательно, $\mathrm{tp}(c/E_n, M) \curlywedge M_0$. Таким образом, существует формула $\mathrm{X}(x, \bar{m})$ в M такая, что $\vdash \mathrm{X}(c, \bar{m})$ и формула $\exists y(\mathrm{X}(y, \bar{m}) \wedge E_n(x, y))$ не реализуется в M_0. В качестве $\Psi_{\widehat{ui}}\left(x, \bar{b}^{\widehat{ui}}\right)$ возьмем $\Theta_{\widehat{ui}}\left(x, \bar{b}_0^{\widehat{ui}}\right) \wedge \mathrm{X}(x, \bar{m})$.

Выберем счетное t-насыщенное множество $C \subseteq M$ такое, что $C \supseteq M_0 \cup \cup \{a\} \cup \cup \{\bar{b}^u | u \in 2^{\omega}\}$. Для каждого $f \in 2^{\omega}$ выберем $p_f(x) \in S(C)$ так, что $p_f \supseteq \{\Psi_{f \restriction n} | n \in \omega\}$ и для формулы $\Theta(x, \bar{c})$ в C имеет место $\Theta \in p_f \Rightarrow \Theta(B, \bar{c}) \neq \varnothing$. Тогда все p_f различны, и ввиду $V(\mathrm{tp}(a, M_0)) \leqslant \omega$ существует $f_0 \in 2^{\omega}$ такая, что $p_{f_0} \pm M_0$, т. е. $p_{f_0}(x)$ сильно связан с некоторым $g(y) \in S(C)$, $q \downarrow M_0$. Возможны два случая.

Случай 1. $p_{f_0}(x)$ и $q(y)$ абсолютно связаны некоторой h-формулой $\mathrm{X}(x, y)$. Пусть $n_0 \in \omega, E_{n_0}(x_1, x_2) = x\mathrm{X}$. Тогда $[\Psi_{u_0} : E_{n_0}] = \infty$ и $\vdash \exists x\left(\Psi_{u_0}\left(x, \bar{b}^{u_0}\right) \wedge E_{n_0}(x, x)\right)$ для $u_0 = f_0 \restriction (n+1)$. Отсюда согласно (д) существует $c \in \Psi_{u_0}\left(B, \bar{b}^{u_0}\right)$ такой, что $\vdash E_{n_0}(c, c)$. Так как $[\Psi_{u_0} : E_{n_0}] = \infty$, то по (г) имеем $E_{n_0}(M, c) = \varnothing$. В силу (е) формула $\exists y\left(\Psi_{u_0}\left(y, \bar{b}^{u_0}\right) \wedge E_{n_0}(x, y)\right)$ не реализуется в M_0. Поскольку $\mathrm{X}(x, y)$ связывает $p_{f_0}(x)$ и $q(y)$, то $\exists x\left(\mathrm{X}(x, y) \wedge \Psi_{u_0}\left(x, \bar{b}^{u_0}\right)\right) \in q$. Ввиду $q \downarrow M_0$ найдется $m \in M_0$ такой, что $\vdash \exists x\left(\mathrm{X}(x, m) \wedge \Psi_{u_0}\left(x, \bar{b}^{u_0}\right)\right)$. Следовательно, формула $\exists y\left(E_{n_0}(x, y) \wedge \Psi_{u_0}\left(x, \bar{b}^{u_0}\right)\right)$ также реализуется в M_0; противоречие.

Случай 2: отрицание случая 1. Из 5.3, 2.11 и 5.7 получаем противоречие с предположением противного. □

Из 9.4 и D.15 [14] вытекает

Лемма 9.5. *Пусть* M_0, M, N — T^{eh}*-модели,* $|M_0| \leqslant \omega$, $V(\mathrm{tp}(a, M_0)) \leqslant \omega$, $M_0 \cup \{a\} \subseteq M < N$ *и* $\mathrm{tp}(N, M_0 \cup \{a\}) \perp^a M_0$. *Тогда существует* $b \in N \setminus M$ *такой, что тип* $\mathrm{tp}(b, M)$ *сильно регулярный.* □

Из 8.5, 9.3, 9.5 получаем следующую *специальную лемму о разложении модели.*

Лемма 9.6. *Пусть* N' *— счетная* T^{eh}*-модель,* $V(\mathrm{tp}(a, N')) \leqslant \omega$, N *простая над* $N' \cup \{a\}$, $N \subseteq M$ *и* $\mathrm{tp}(M, N) \perp N'$. *Тогда существуют элементы* $\{a_i | i < \alpha\}$ *и модели* N_i, M_i, $i < \alpha$, *такие, что*

а) $N \leqslant N_i \leqslant M_i \leqslant M$;

б) *тип* $\mathrm{tp}(a_i, N)$ *сильно регулярный и* $\mathrm{tp}(a_i, N) = \mathrm{tp}(a_j, N)$ *либо* $\mathrm{tp}(a_i, N) \perp \mathrm{tp}(a_j, N)$;

в) N_i *проста над* $N \cup \{a_i\}$;

г) $\mathrm{tp}(M_i, N_i) \perp N$ *и* M_i — *максимальное множество, удовлетворяющее этому условию*;

д) M *проста и минимальна над* $\bigcup_{i<\alpha} M_i$. □

Из 8.6 и 9.6 следует *усиленная структурная лемма*:

Лемма 9.7. *Пусть* M — *модель* T^{eh} *мощности* λ, *множество* $A \subseteq M$ *и* $|A| \leqslant \omega$. *Тогда существуют дерево* $I \subseteq \lambda^{<\omega}$ *и множество* $\{M_u, a_u, N_u | u \in I\}$ *такие, что*

1) *для* $u \in I \setminus \{\varnothing\}$ *имеет место* $M_{u^-} \cup \{a_u\} \subseteq M_u$, $M_{u^-} \leqslant M_u \leqslant N_u \leqslant N_{u^-}$, $\mathrm{tp}(N_u, M_{u^-} \cup \{a_u\}) \perp {}^a M_{u^-}$ *и* N_u — *максимальное множество, удовлетворяющее этому условию*;

2) *для* $u \in I \setminus \{\varnothing\}$ *тип* $p_u = \mathrm{tp}(a_u, M_{u^-})$ *является регулярным*;

3) *для* $u \in I$ *множество* $\{a_v | v^- = u\}$ *независимо над* M_u;

4) *если* u^{--} *существует, то* $\mathrm{tp}(a_u, M_{u^-}) \perp M_{u^{--}}$;

5) N_u *минимальная и простая над* $\bigcup \{M_v | v \in I, u \subseteq v\}$;

6) $|M_u| \leqslant \omega$;

7) $A \subseteq M_\varnothing$ *и* $N = N_\varnothing$;

8) *если* $V(p_u) \leqslant \omega$, *то для всех* $v \geqslant u$ *модель* M_v *является простой над* $M_{v^-} \cup \{a_v\}$;

9) *если* $V(p_u) \leqslant \omega$, $u \leqslant u'$ *и* $v^- = w^- = u'$, *то тип* p_v *сильно регулярный и* $p_v = p_w$ *либо* $p_v \perp p_w$. □

Если $A \subseteq B$ и $\varphi(x, \bar{b})$ — формула в B, то через $S_\varphi^\perp(B, A)$ обозначим множество $\{p \in S(B) | p \perp A, \varphi \in p\}$.

Предложение 9.8. *Пусть* $A \subseteq B$, $\mathrm{dcl}(A) = A$ и B — *счетное* t-*насыщенное множество в* T^{eh}. *Тогда для любой формулы* $\varphi(x, \bar{b})$ *в* B *мощность множества* $S_\varphi^\perp(B, A)$ *либо не менее* ω, *либо равна* 2^ω.

Доказательство. Пусть для формулы $\varphi(x, \bar{b})$ в B мощность множества $S_\varphi^\perp(B, A)$ больше ω. Покажем, что $|S_\varphi^\perp(B, A)| = 2^\omega$. Индукцией по $l(u)$ для всех $u \in 2^\omega$ построим формулы $\Psi_u(x, \bar{b}^u)$ в B, обладающие свойствами

(а) $\Psi_\varnothing(x, \bar{b}^\varnothing) = \varphi(x, \bar{b})$;

(б) формулы $\Psi_{\widehat{u0}}\left(x, \bar{b}^{\widehat{u0}}\right)$ и $\Psi_{\widehat{u1}}\left(x, \bar{b}^{\widehat{u1}}\right)$ несовместны;

(в) $\vdash \exists x \Psi_{\widehat{ui}}\left(x, \bar{b}^{\widehat{ui}}\right) \wedge \forall x \left(\Psi_{\widehat{ui}}\left(x, \bar{b}^{\widehat{ui}}\right) \rightarrow \Psi_u(x, \bar{b}^u)\right)$ для $i \in \{0, 1\}$;

(г) $\left|S_{\Psi_u}^\perp(B, A)\right| > \omega$;

(д) если $n = l(u)$, то $\left[\Psi_{\widehat{u0}} : E_n\right]$ и $\left[\Psi_{\widehat{u1}} : E_n\right]$ минимальны среди всех $\Psi^*_{\widehat{ui}}\left(x, \tilde{b}^{\widehat{ui}}\right)$, $i \in \{0, 1\}$, удовлетворяющих (а) — (г);

(е) если $n = l(u)$, то либо $\vdash \Psi_{\widehat{ui}}\left(x, \bar{b}^{\widehat{ui}}\right) \rightarrow E_n(x, x)$, либо $\vdash \Psi_{\widehat{ui}} \times \times \left(x, \bar{b}^{\widehat{ui}}\right) \rightarrow \neg E_n(x, x)$ для $i \in \{0, 1\}$.

Для каждой $f \in 2^\omega$ выберем $p_f \in S(B)$ такой, что $p_f \supseteq \{\Psi_{f \upharpoonright n} | n \in \omega\}$. Ясно, что все p_f различны. Покажем, что все они ортогональны к A. В силу t-насыщенности B достаточно показать, что все они почти ортогональны к A. Предположим, что это не так, т. е. существуют $f_0 \in 2^\omega$, $f \in S(A)$ и h-формула $\mathrm{X}(x, y, \bar{d})$ в B такие, что $p_{f_0}^+(x)$ и $q^+(y)$ сильно связаны формулой $\mathrm{X}(x, y, \bar{d})$. Выберем элементарное отображение g такое, что $\mathrm{dom}(g) = B$, $g \upharpoonright A = \mathrm{id}$ и $\mathrm{tp}(B_1, B) \downarrow A$, где $B_1 = \mathrm{im}(g)$. Тогда типы $p_{f_0}^+(x)$ и $\left(g\left(p_{f_0}\right)\right)^+(y)$ будут сильно связаны h-формулой $\Theta(x, y, \bar{d}, g(\bar{d})) = \exists z (\mathrm{X}(x, z, \bar{d}) \wedge \mathrm{X}(x, z, g(\bar{d})))$. Пусть $n_0 \in \omega : E_{n_0}(x_1, x_2) = x\Theta$. Тогда для $u_0 = f_0 \upharpoonright (n_0 + 1)$ имеет место $\left[\Psi_{u_0}\left(x, \bar{b}^{u_0}\right) : E_{n_0}\right] = \infty$ и $\vdash \Psi_{u_0}\left(x, \bar{b}^{u_0}\right) \rightarrow E_{n_0}(x, x)$. По условию (г), мощность множества

$S^{\perp}_{\Psi_{u_0}}(B, A)$ больше ω. Для произвольного $p \in S^{\perp}_{\Psi_{u_0}}(B, A)$ имеем $p \perp^a A$. В силу 5.16 $\Theta(x, y, \bar{d}, g(\bar{d}))$ не связывает $p^+(x)$ и $g(p^+)(y)$, т. е. E_{n_0} не делит p. Таким образом, для каждого $p \in S^{\perp}_{\Psi_{u_0}}(B, A)$ найдется формула $\Theta_p(x, \bar{c}^p) \in p$ такая, что $[\Theta_p(x, \bar{c}^p) : E_{n_0}] = 1$ и $\vdash \Theta_p(x, \bar{c}^p) \to \Psi_{u_0}\left(x, \bar{b}^{u_0}\right)$. Так как $|B| = \omega$ и $\left|S^{\perp}_{\Psi_{u_0}}(B, A)\right| > \omega$, то существует $p \in S^{\perp}_{\Psi_{u^0}}(B, A)$ такой, что $\left|S^{\perp}_{\Theta_p}(B, A)\right| > \omega$. Это противоречит условию (д) выбора $\Psi_{u_0}\left(x, \bar{b}_{u_0}\right)$. $\square$

Лемма 9.9. *Пусть A — счетное множество в T^{eh},* $\mathrm{dcl}(A) = A$ *и* $V(\mathrm{tp}(a, A)) > \omega$. *Тогда существуют счетное множество* $B \supseteq A \cup \{a\}$ *и типы* $p_i \in S(B)$, $i \leqslant 2^\omega$, *такие, что*

(а) $\mathrm{tp}(B, A \cup \{a\}) \perp^a A$;

(б) $p_i \perp A$ *для всех* $i \in 2^\omega$;

(в) $p_i \perp p_j$ *для всех* $i < j \in 2^\omega$.

Доказательство. Так как $V(\mathrm{tp}(a, A)) > \omega$, то существуют счетное множество B и формула $\varphi(x, \bar{b})$ в B такие, что $\mathrm{tp}(B, A \cup \{a\}) \perp^a A$ $\left|S^{\perp}_{\varphi}(B, A)\right| > \omega$. Среди всех таких B и φ выберем B_0 и $\varphi_0(x, \bar{b}^0)$ с минимальным $HD(\varphi_0(x, \bar{b}^0))$. Не теряя общности, можно считать, что множество B_0 является t-насыщенным. В силу 9.8 мощность множества $S^{\perp}_{\varphi}(B_0, A)$ равна 2^ω. Предположим, что лемма неверна. Тогда существуют тип $p_0 \in S(B_0)$ и несчетное множество $Q \subseteq S^{\perp}_{\varphi_0}(B_0, A)$ такие, что $p_0 \pm q$ для всех $q \in Q$. Ввиду t-насыщенности и счетности B_0, можно считать, что $p_0(y)$ сильно связан со всеми $q(x) \in Q$ одной и той же формулой $\mathrm{X}(x, y, \bar{d})$ в B_0. Учитывая выбор $\varphi_0(x, \bar{b}^0)$, можно считать, что $HD(q) = HD(\varphi_0(x, \bar{d}^0))$ для всех $q \in Q$. Рассмотрим h-эквивалентность $E(x_1, x_2) = x\mathrm{X}$. Пусть c реализует некоторый тип $p \in Q$. Тогда формула $E(c, x)$ совместна со всеми $q \in Q$ и $HD(q \cup \{E(c, x)\}) < HD(q)$. Так как $|Q| > \omega$, то найдутся несчетное множество $Q_1 \subseteq Q$ и формула $\Psi(x, \bar{d}^1)$ такие, что $\Psi(x, \bar{d}^1) \in q$, $HD(q) = HD(\Psi(x, \bar{d}^1))$ и $HD(q \cup \{E(c, x)\}) = HD(\Psi \wedge E(c, x))$ для всех $q \in Q_1$. Таким образом, существует набор $\langle Q_1, E, c, \Psi(x, \bar{d}^1)\rangle$, удовлетворяющий следующим условиям:

(а) $Q_1 \subseteq S^{\perp}_{\Psi}(B_0, A)$, $\bar{d}^1 \in B_0$, $|Q_1| > \omega$ и $\vdash \Psi(x, \bar{d}^1) \to \varphi_0(x, \bar{b}^0)$;

(б) h-эквивалентность $E(x_1, x_2)$ делит каждый $q \in Q_1$;

(в) $\mathrm{tp}(c, B_0) \perp^a A$;

(г) множество формул $q \cup \{E(x, c)\}$ совместно для всех $q \in Q_1$;

(д) если $q \in Q_1$, то $HD(q) = HD(\Psi(x, \bar{d}^1))$ и

$HD(q \cup \{E(x, c)\}) = HD(\Psi(x, \bar{d}^1) \wedge E(x, c)) < HD(\Psi(x, \bar{d}^1))$.

Среди всех наборов, удовлетворяющих условиям (а) — (д), выберем набор $\langle Q_0, E_0, c_0, \Psi_0(x, \bar{d}^0)\rangle$ с минимальным $\alpha_0 = HD(\Psi_0(x, \bar{d}^0) \wedge E_0(x, c_0))$. Рассмотрим множество типов $Q' = \{p \in S(B_0 \cup \{c_0\}) \mid p \restriction B_0 \in Q_0, \Psi_0(x, \bar{d}^0) \wedge E_0(x, \bar{c}^0) \in p, HD(p) = \alpha_0\}$. Ясно, что $|Q'| > \omega$. Выберем несчетное $Q'' \subseteq Q'$ такое, что для $q_1, q_2 \in Q''$ если $q_1 \restriction B_0 = q_2 \restriction B_0$, то $q_1 = q_2$. В силу выбора $\varphi_0(x, \bar{b}^0)$ и (д) $\left|S^{\perp}_{\Psi_0 \wedge E_0(x, c_0)}(B_0 \cup \{c_0\}, A)\right| \leqslant \omega$. Следовательно, найдется несчетное $Q_2 \subseteq Q''$ такое, что $q \pm A$ для всех $q \in Q_2$, т. е. каждый $q \in Q_2$ сильно связан с некоторым $p_q \in S(B_0 \cup \{c\})$ таким, что $p_q \not\perp A$. Если существует $q \in Q_2$ абсолютно связанный с p_q, то тогда и $q \restriction B_0$ сильно связан с $p_q \restriction B_0$, что невозможно, так как $q \restriction B_0 \in Q_0$. Таким образом, каждый $q \in Q_2$ связан, но не абсолютно связан, с некоторым $p_q \in S(B_0 \cup \{c\})$. По 2.11 и 5.7 найдутся несчетное $Q_2' \subseteq Q_2$ и h-эквивалентность $E_1(x_1, x_2)$, делящая все $q \in Q_2'$, такие, что для любого $q \in Q_2'$ h-тип $q^{E_1} = \{\exists y(E_1(x, y) \wedge \Psi(y, \bar{e})) \mid \Psi \in q^+\}$ является главным. Так как Q_2' несчетно, то существует несчетное $Q_3 \subseteq Q_2'$ такое, что $q^{E_1} = q_1^{E_1}$ для всех $q, q_1 \in Q_3$. Это значит, что любые два типа $q, q_1 \in Q_3$ связаны h-формулой $E_1(x, y)$.

Пусть c_1 реализует некоторый $p \in Q_3$. Тогда для любого $q \in Q_3$ множество формул $q \cup \{E_1(x, c_1)\}$ совместно, и так как E_1 делит, в частности, и $E_0(x_1, x_2)$, то $HD(q \restriction B_0 \cup \{E_0(x, c_1) \wedge E_1(x, c_1)\}) = HD(q \restriction B_0 \cup \{E_0(x, c_0) \wedge E_1(x, c_1)\}) < \alpha_0$. Поскольку $\restriction B^0 \in Q_0$, то $\mathrm{tp}(c_1, B_0) \perp A$, и в силу несчетности Q_3 существуют несчетное $Q_4 \subseteq Q_3$ и формула $\Psi_2(x, \bar{d}^2)$ такие, что набор $\langle \{p \restriction B_0 \mid p \in Q_4\}, E_0 \wedge E_1, c_1, \Psi_2 \rangle$ удовлетворяет условиям (а)—(д) и $HD(\Psi_2(x, \bar{d}^2) \wedge E_0(x, c_1) \wedge E_1(x, c_1)) < \alpha_0$; противоречие. □

§ 10. ОСНОВНЫЕ ГРАНИЦЫ СПЕКТРА

Все понятия в этом параграфе относятся к A-теории T. Для упрощения доказательств мы будем работать в теории T^{eh}.

Предложение 10.1 [12]. Если $Dp(T) = \infty$, *то* $I(\omega_\alpha, T) = 2^\omega$ для $\alpha \geqslant 1$.

В дальнейшем будем предполагать $Dp(T) < \infty$.

Из результатов VIII.1.8 и VIII.1.7(2) [10] вытекает

Предложение 10.2. *Если T не ω-стабильна, то* $I(\omega_\alpha, T) \geqslant \min\left(2^{\omega_\alpha}, 2^{2^\omega}\right)$ для $\alpha \geqslant 1$.

Определения. *Пусть M — T-модель и $p \in S(M)$ регулярный тип.*

(1) *Тройка $\langle N, f, a\rangle$ называется p-моделью, если*

а) *N — T-модель и $a \in N$;*

б) *$f\colon M \to N$ — элементарное вложение и* $\mathrm{tp}(a, f(M)) = f(p)$;

в) $\mathrm{tp}(N, f(M) \cup \{a\}) \perp^a f(M)$.

(2) *Если $\langle N, f, a\rangle$ — p-модель, то ее мощностью называется мощность N.*

(3) *Две p-модели $\langle N_0, f_0, a_0\rangle$ и $\langle N_1, f_1, a_1\rangle$ называются p-изоморфными, если существует изоморфизм $g\colon N_0 \to N_1$ такой, что $g \circ f_0 = f_1$ и $g(a_0) = a_1$.*

Через $I^{\leqslant}(p, \omega_\alpha)$ обозначим число попарно не p-изоморфных p-моделей мощностей, не превосходящих ω_α.

Непосредственно из леммы о разложении модели 8.5 и специальной леммы о разложении модели вытекает

Лемма 10.3. (а) *Пусть M_i, $i < \lambda$,— список всех счетных моделей теории T. Для каждого $i < \lambda$ выберем множество Δ_i всех регулярных типов из $S_x(M_i)$. Тогда*

$$I(\omega_\alpha, T) \leqslant \sum_{i<\lambda}\left(|\alpha + \omega|^{\sum\limits_{p\in\Delta_i} I^{\leqslant}(p,\omega_\alpha)}\right).$$

(б) *Пусть M^0 — счетная T-модель, $q = \mathrm{tp}(a, M^0)$ — регулярный тип, M_i, $i < \lambda$,— список всех счетных моделей, содержащих $M^0 \cup \{a\}$. Для каждого $i < \lambda$ выберем множество Δ_i всех регулярных типов из $S_x(M_i)$, ортогональных к M^0. Тогда*

$$I^{\leqslant}(q, \omega_\alpha) \leqslant \sum_{i<\lambda}\left(|\alpha + \omega|^{\sum\limits_{p\in\Delta_i} I^{\leqslant}(p,\omega_\alpha)}\right).$$

(в) *Пусть M_0 — счетная T-модель, $q = \mathrm{tp}(a, M_0)$ — регулярный тип, $V(q) \leqslant \omega$ и M_1 проста над $M_0 \cup \{a\}$. Выберем максимальное множество $\Delta \subseteq S_x(M_1)$, состоящее из сильно регулярных попарно ортогональных и ортогональных к M_0 типов. Тогда*

$$I^{\leqslant}(q, \omega_\alpha) \leqslant |\alpha + \omega|^{\sum\limits_{p\in\Delta} I^{\leqslant}(p,\omega_\alpha)}. \qquad \square$$

Из леммы 9.3 вытекает

Предложение 10.4. *Пусть M — счетная t-модель, $p \in S_x(M)$, $\mathrm{Dp}(p) = 0$ и $V(p) \leqslant \omega$. Тогда $I^{\leqslant}(p, \omega_\alpha) = 1$.* □

Определим функцию $\beta_\gamma(\varkappa)$ для кардинала $\varkappa$ и $\gamma \in \mathrm{Ord} \cup \{-1\}$ следующим образом: $\beta_{-1}(\varkappa) = 1$, $\beta_0(\varkappa) = \varkappa$ и $\beta_\gamma(\varkappa) = \sup\{2^{\beta_\varepsilon(\varkappa)} \mid \varepsilon < \gamma\}$ для $\gamma > 0$.

Определения. (1) *Для типов над счетными моделями определим отношение $\mathrm{Dpv}(p) \geqslant \alpha$, где α ординал, индукцией по α:*

а) $\mathrm{Dpv}(p) \geqslant 0$ *для всех* p;

б) $\mathrm{Dpv}(p) \geqslant 1 \Leftrightarrow V(p) > \omega$;

в) *если $M = \mathrm{dom}(p)$, a реализует p и α — не предельный ординал, то $\mathrm{Dpv}(p) \geqslant \alpha + 1 \Leftrightarrow$ существует счетная p-модель $\langle N, id_M, a\rangle$ и тип $q \in S(N)$ такие, что $q \perp M$ и $\mathrm{Dpv}(q) \geqslant \alpha$;*

г) *если α предельный ординал и $\alpha \neq 0$, то $\mathrm{Dpv}(p) \geqslant \alpha + 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathrm{Dpv}(p) \geqslant \beta$ для всех $\beta < \alpha$.*

Как обычно пишем $\mathrm{Dpv}(p) = \alpha \Leftrightarrow \mathrm{Dpv}(p) \geqslant \alpha$ и неверно, что $\mathrm{Dpv}(p) \geqslant \alpha + 1$. Если T ω-стабильна, то $\mathrm{Dpv}(T) = -1$; если T не ω-стабильна и $V(p) \leqslant \omega$ для всех p, то $\mathrm{Dpv}(T) = 0$; в противном случае $\mathrm{Dpv}(T) = \sup\{\mathrm{Dpv}(p) + 1\}$.

Из 10.3 и 10.4 вытекает

Лемма 10.5. *Если $\mathrm{Dp}(T) = \gamma_0$ и $\mathrm{Dpv}(T) = \gamma_1$, то*

$$I(\omega_\alpha, T) \leqslant \beta_{\gamma_1 - 1}\left(|\alpha + 1|^{2^\omega}\right)\beta_{\gamma_0 - 1}\left(|\alpha + 1|^\omega\right). \quad \square$$

Определение. *Пусть $\mathfrak{A}_i = \langle N_i, f_i, a_i\rangle$ — p_i-модели, $i \in \{1, 2\}$. Модели $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ называются p_1-p_2-изоморфными, если существуют модель N и элементарные вложения g_i: $N_i \to N$ такие, что для некоторых M^*, N_*^1, N_2^* и $M_i = \mathrm{dom}(g_i)$ выполняются следующие условия:*

а) $g_i(M_i) \subseteq M^*$, $M^* < N_*^i < N$;

б) $\mathrm{tp}(g_i(a_i), N_*^i) \downarrow g(M_i)$;

в) $\mathrm{tp}(g_1(a_1), M^* \cup g_2(a_2)) \curlywedge M^*$;

г) $\mathrm{tp}(N, N_*^i \cup g_i(a_i)) \perp^a N_*^i$;

д) *N проста над* $N_*^i \cup g_i(N_i)$.

Обозначим через $I^*(p, \omega_\alpha)$ число не p-p-изоморфных p-моделей мощности ω_α.

Лемма 10.6. (а) *Пусть M, M_1 — счетные T-модели, $p = \mathrm{tp}(a, M)$ — регулярный тип, $\mathrm{tp}(M_1, M \cup \{a\}) \perp^a M$, $q \in S(M_1)$ и $q \perp M$. Тогда*

$$I^*(p, \omega_\alpha) \geqslant \min\{2^{\omega_\alpha}, |\alpha + 1|^{I^*(q, \omega_\alpha)}\}.$$

(б) *Пусть M — счетная T-модель и $p = \mathrm{tp}(a, M)$ — регулярный тип. Тогда*

$$I(\omega_\alpha, T) \geqslant \min\{2^{\omega_\alpha}, |\alpha + 1|^{I^*(p, \omega_\alpha)}\}.$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 5.11 [11]. □

Лемма 10.7. *Пусть M — счетная T-модель, $p \in S(M)$ — регулярный тип $\mathrm{Dp}(p) \geqslant 2$ и $V(p) \leqslant \omega$. Тогда*

$$I^*(p, \omega_\alpha) \geqslant \min\{2^{\omega_\alpha}, |\alpha + \omega|^{|\alpha|}\}.$$

Доказательство в силу лемм 9.3 и 9.5 аналогично доказательству соответствующего случая из теоремы 5.10 [11]. □

Из 9.2 и 9.9 обычной техникой независимости размерностей ортогональных типов получаем следующий результат.

Лемма 10.8 (а) *Если T не ω-стабильна, то*

$$I(\omega_\alpha, T) \geqslant \min\{2^{\omega_\alpha}, |\alpha + 1|^{2^\omega}\}.$$

(б) *Если M — счетная T-модель, $p \in S(M)$ — регулярный тип и $V(p) > \omega$, то*

$$I^*(p, \omega_\alpha) \geqslant \min\{2^{\omega_\alpha}, |\alpha+1|^{2^\omega}\}. \qquad \square$$

Суммируя результаты настоящего параграфа и применяя тривиальную кардинальную арифметику, получаем следующую теорему.

Теорема 10.9. (а) *Если $\omega < \gamma = \mathrm{Dp}(T) < \infty$, то*

$$I(\omega_\alpha, T) = \min\{2^{\omega_\alpha}, \beta_\gamma(|\alpha+\omega|)\}.$$

(б) *Если $\mathrm{Dp}(T) = \gamma_0 < \omega$ и $\mathrm{Dpv}(T) = \gamma_1$, то*

$$\min\left\{2^{\omega_\alpha}, \beta_{\gamma_1-1}\left(|\alpha+1|^{2^\omega}\right)\right\}\beta_{\gamma_0-2}\left(|\alpha+\omega|^{|\alpha|}\right) \leqslant I(\omega_\alpha, T) \leqslant$$

$$\leqslant \min\left\{2^{\omega_\alpha}, \beta_{\gamma_1-1}\left(|\alpha+1|^{2^\omega}\right)\right\}\beta_{\gamma_0-1}\left(|\alpha+1|^{\omega}\right). \qquad \square$$

§ 11. КОНЕЧНАЯ ГЛУБИНА

Все понятия в этом параграфе относятся к A-теории T.

Из теоремы IX.2.4. [10] и леммы 10.8 (а) вытекает

Лемма 11.1. *Если $\mathrm{Dp}(T) = 1$, то функция $I(\omega_\alpha, T)$ может быть только одной из следующих:*

а) 1;

б) $|(\alpha+1)^n/G - \alpha^n/G|$, *где G — группа подстановок на $n \in \omega$;*

в) $|\alpha+1|^\omega$;

г) $|\alpha+\omega|$;

д) $|\alpha+1|^{2^\omega}$.

В силу 9.3 и 9.5 для p-моделей типов p с $V(p) \leqslant \omega$ выполняются все основные свойства p-моделей в ω-стабильных теориях. Таким образом, все основные результаты [11, § 5] переносятся и на p-модели в A-теориях для типов с $V(p) \leqslant \omega$. Следовательно, имеет место

Лемма 11.2. *Если* $\mathrm{Dp}(T) = n < \omega$ и $\mathrm{Dpv}(p) = m$, *то функция $I(\omega_\alpha, T)$, $\alpha \geqslant 1$, может быть только одной из следующих:*

а) $\min\{2^{\omega_\alpha}, \beta_{m-1}\left(|\alpha+1|^{2^\omega}\right)\beta_{n-1}\left(|\alpha+1|^{\omega}\right)\}$;

б) $\min\{2^{\omega_\alpha}, \beta_{m-1}\left(|\alpha+1|^{2^\omega}\right)\beta_{n-1}\left(|\alpha+\omega|\right)\}$;

в) $\min\{2^{\omega_\alpha}, \beta_{m-1}\left(|\alpha+1|^{2^\omega}\right)\beta_{n-2}\left(|\alpha+\omega|^{|\alpha|}\right)\}$. $\square$

Так как для любой функции $I(\omega_\alpha)$ из перечисленных в леммах 11.1 и 11.2 легко построить A-теорию T_0 такую, что $I(\omega_\alpha, T_0) = I(\omega_\alpha)$, $\alpha \geqslant 1$, то имеет место

Теорема 11.3. *Функция $I(\omega_\alpha)$, $\alpha \geqslant 1$, тогда и только тогда является спектром $I(\omega_\alpha, T_0)$ некоторой счетной A-теории T_0, когда $I(\omega_\alpha) = \min\{2^{\omega_\alpha}, f(\alpha)\}$ и $f(\alpha)$ принадлежит списку*

(а) 2^{ω_α},	(г) $\beta_{\gamma_0}\left(|\alpha+\omega|^{|\alpha|}\right)$,
(б) $|\alpha+\omega|^{\mu_0}$,	(д) $\beta_{\gamma_0}(|\alpha+\omega|)\beta_{\gamma_1}\left(|\alpha+1|^{2^\omega}\right)$,
(в) $|(\alpha+1)^n/G - \alpha^n/G|$,	(е) $\beta_{\gamma_2}(|\alpha+\omega|^\omega)$,

где $\mu_0 \in \{1, \omega, 2^\omega\}$, $n \in \omega$, $\gamma_0, \gamma_1 \in \omega \cup \{-1\}$, γ_2 — не предельный счетный ординал, G — группа подстановок на n. При этом $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ не превосходят глубины $\mathrm{Dp}(T)$ теории T. $\square$

§ 12. НЕПОЛНЫЕ ТЕОРИИ

Теорема 12.1. *Функция $I(\omega_\alpha)$, $\alpha \geqslant 1$, тогда и только тогда является спектром $I(\omega_\alpha, T_0)$ некоторой счетной хорновой теории T_0 (не обязательно полной), когда $I(\omega_\alpha) = \min\{2^{\omega_\alpha}, f(\alpha)\}$ для $f(\alpha)$ из списка*

(1) 2^{ω_α}, (5) $\beta_{\gamma_0}(|\alpha+\omega|^{|\alpha|})$,

(2) λ_0, (6) $\beta_{\gamma_0}(|\alpha+\omega|)\beta_{\gamma_1}(|\alpha+1|^{2^\omega})$,

(3) $\lambda_0|\alpha+\omega|^{\mu_0}$, (7) $\beta_{\gamma_2}(|\alpha+\omega|^\omega)$,

(4) $\sum\limits_{i=1}^{m}|(\alpha+1)^{n_i}\setminus\alpha^{n_i}|$,

где $\lambda_0\in\omega\cup\{\omega, 2^\omega\}$, $\mu_0\in\{1, \omega, 2^\omega\}$, $m, n_i\in\omega$, $\gamma_0, \gamma_1\in\omega\cup\{-1\}$, $0\leqslant\gamma_2<\omega_1$.

Доказательство. Пусть V — множество всех полных расширений T теории T_0 (той же сигнатуры). Если $I(\omega_\alpha, T)=2^{\omega_\alpha}$, $\alpha\geqslant 1$, для некоторой $T\in V$, то T_0 имеет максимальный несчетный спектр. Поэтому мы будем предполагать, что все теории $T\in V$ имеют немаксимальный несчетный спектр. Так как T_0 хорнова, то $T^h\in V$ для любой $T\in V$. Поэтому любая теория $T\in V$ является A-теорией. Если для некоторой $T\in V$ имеем $I(\omega_\alpha, T)=|(\alpha+1)^n/G-\alpha^n/G|$ и группа G не единична, то согласно определению группы G (см. [10, теорема IX.2.4]) в T имеются две ортогональные копии некоторого регулярного типа. Из h^*-базируемости T (теорема 5.9) тогда получаем, что в h-компаньоне T^h есть уже бесконечное множество таких копий. Следовательно, $I(\omega_\alpha, T_0)\geqslant|\alpha+\omega|$. По 7.7 (в) найдется такой счетный ординал α_0, что $\mathrm{Dp}(T)<\alpha_0$ для всех $T\in V$. Из 11.3 имеем $I(\omega_\alpha, T_0)=\min\{2^{\omega_\alpha}, f(\alpha)\}$, где $f(\alpha)$ является суммой не менее чем 2^ω функций из списка (а)—(е). При этом параметр γ_2 у членов этой суммы ограничен ординалом α_0, поэтому фактически $f(\alpha)$ является суммой счетного числа функций из списка (а)—(е). Учитывая сделанное выше замечание относительно группы G, нетрудно видеть, что $f(\alpha)$ принадлежит списку (1)—(7). В силу предыдущего, для того, чтобы реализовать любую функцию из списка (1)—(7) в хорновой теории T_0, достаточно для любого семейства хорновых теорий $\{T_i|i<\varkappa\}$, $1<\varkappa\leqslant\omega$, построить такую хорнову теорию T', для которой выполняется равенство $I(\omega_\alpha, T')=\sum\limits_{i<\varkappa}I(\omega_\alpha, T_i)$. При этом можно считать, что сигнатуры Σ_i у теорий T_i, $i<\varkappa$, попарно не содержат общих символов и содержат только предикатные символы. Пусть P_i, $i<\varkappa$,— одноместные предикатные символы, не входящие в $\bigcup\limits_{i<\varkappa}\Sigma_i$. Рассмотрим теорию T'' со следующими аксиомами:

1) $\exists xP_i(x)\to\forall xP_i(x)$, $i<\varkappa$;
2) $\neg P_k(x)\vee\neg P_j(x)$, $k<j<\varkappa$;
3) $\exists xP_i(x)\to\Phi$, $i<\varkappa$, Φ — хорново предложение из T_i;
4) $R(x_1, \ldots, x_n)\to\exists xP_i(x)$, $i<\varkappa$, R — символ сигнатуры Σ_i.

Ясно, что T'' хорнова и $I(\omega_\alpha, T'')=\left(\sum\limits_{i<\varkappa}I(\omega_\alpha, T_i)\right)+1$. Таким образом, осталось построить хорнову теорию T''' со спектром $I(\omega_\alpha, T''')=$ $=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m}k_i|(\alpha+1)^{n_i}\setminus\alpha^{n_i}|$, где $1\leqslant n_1<\ldots<n_m$. Сигнатура T''' будет состоять из одноместных предикатных символов $P_0, \ldots, P_{n_m}$ и констант $c_1^i, \ldots, c_{k_i}^i$ $(1\leqslant i\leqslant m)$. Аксиомами T''' будут

1) $P_i(x)\to P_{i+1}(x)$, $1\leqslant i<n_m$;
2) $P_{n_m}(x)\wedge\neg P_0(x)$;
3) $\exists x(P_{i+1}(x)\wedge\neg P_i(x))\to\exists x(P_i(x)\wedge\neg P_{i-1}(x))$ $1\leqslant i<n_m$;
4) $\exists x\left(P_{n_i+1}(x)\wedge\neg P_{n_i}(x)\right)\to\exists^{\geqslant k}x(P_j(x)\wedge\neg P_{j-1}(x))$, $1\leqslant i\leqslant m$, $n_i<j\leqslant n_{i+1}$, $k\in\omega$;
5) $P_1(c_j^i)$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant k_i$;
6) $c_j^{i-1}\approx c_l^{i-1}\to(P_{n_i+1}(x)\to P_{n_i}(x))$, $1<i\leqslant m$, $1\leqslant j<l\leqslant k_i$.

Легко проверить, что класс T'''-моделей замкнут относительно фильтрованных произведений, следовательно, T''' хорнова. Также легко проверить, что T''' имеет нужный нам спектр. $\square$

§ 13. КВАЗИМНОГООБРАЗИЯ

В этом параграфе мы опишем несчетные спектры квазимногообразий. Напомним, что *квазимногообразием* мы называем универсальный хорнов класс, т. е. хорнов класс, замкнутый относительно взятия подсистем и содержащий единичную систему.

Теорема 13.1. *Функция $I(\omega_\alpha)$, $\alpha \geqslant 1$, тогда и только тогда является функцией спектра $I(\omega_\alpha, K)$ некоторого квазимногообразия K счетной сигнатуры, когда $I(\omega_\alpha) = \min\left\{2^{\omega_\alpha}, f(\alpha)\right\}$ где $f(\alpha)$ совпадает с одной из функций* (1)—(3), (6)—(7) *теоремы* 12.1. $\square$

В силу теоремы 12.1 нам нужно показать, что для спектров квазимногообразий $I(\omega_\alpha, K) = \min\left\{2^{\omega_\alpha}, f(\alpha)\right\}$ функция $f(\alpha)$ не может иметь вид (4), (5), отличный от (1)—(3) и (6)—(7).

Определения. (1) *Тип $p \in S_x(A)$ называется $(h, 1)$-изолированным, если существует такая формула $\neg\Psi(x, \bar{a}) \in p^-$, что $p^+ \cup \{\neg\Psi(x, a)\} \vdash p$. При этом будем говорить, что $\neg\Psi(x, a)$ $(h, 1)$-изолирует тип p.*

(2) *Последовательность $\langle a_\alpha | \alpha < \lambda\rangle$ называется $(h, 1)$-конструкцией над A, если для каждого $\alpha < \lambda$ тип $\mathrm{tp}(a_\alpha, A \cup \{a_\beta | \beta < \alpha\})$ является $(h, 1)$-изолированным.*

(3) *Множество B называется $(h, 1)$-конструируемым над A, если существует $(h, 1)$-конструкция $\langle a_\alpha | \alpha < \lambda\rangle$ над A и $B = \{a_\alpha | \alpha < \lambda\}$.*

Пусть M — T-модель. Пишем $B \overset{h}{<} M$, если B — подсистема M и для любой h-формулы $\Phi(\bar{x})$ и $\bar{b} \in B$

$$B \models \Phi(\bar{b}) \Leftrightarrow M \models \Phi(\bar{b}). \qquad (13.1)$$

Определение. *Если M — T-модель, $A \subseteq M$ и $B \subseteq M$ — максимальное $(h, 1)$-конструируемое над A подмножество M, то B называется $(h, 1)$-замыканием A в M.*

Лемма 13.2. *Пусть T — полная хорнова теория, M — ω-насыщенная модель, $A \subseteq M$ и B — $(h, 1)$-замыкание A в M. Тогда $B \overset{h}{<} M$.*

Доказательство. Ясно, что B — подсистема M. Будем доказывать условие (13.1) индукцией по длине h-формулы $\Phi(\bar{x})$. Для атомных формул условие (13.1) выполнено, так как B — подсистема M. Пусть $\Phi(\bar{x})$ — h-формула минимальной длины, для которой (13.1) не выполняется для некоторого $\bar{b} \in B$.

Случай 1: $\Phi(\bar{x}) = \exists y\Phi_1(y, \bar{x})$. Тогда найдется $a \in M$ такое, что $M \models \Phi_1(a, \bar{b})$. Рассмотрим максимальный h-тип $p \in S_x^h(B)$, для которого $\Phi_1(x, \bar{b}) \in p$. Так как M ω-насыщена, то найдется реализация e h-типа $p(x)$. Из максимальности h-типа $p(x)$ и h-базируемости T получаем, что $p \vdash \mathrm{tp}(e, B)$. Следовательно, $\mathrm{tp}(e, B)$ является $(h, 1)$-изолированным. В силу максимальности B имеем $e \in B$. Это противоречит условию $B \models \neg\Phi(\bar{b})$ и выбору Φ. Так как h-формула $\forall x\Phi$ эквивалентна h-формуле $\exists x(x \approx x) \wedge \forall x(x \approx x \to \Phi)$, то осталось рассмотреть

Случай 2: $\Phi(\bar{x}) = \exists y\Phi_1(y, \bar{x}) \wedge \forall y(\Phi_1(y, \bar{x}) \to \Psi(y, \bar{x}))$. Поскольку (13.1) не выполняется и Φ минимальна, то $B \models \forall y(\Phi_1(y, \bar{b}) \to \Psi(y, \bar{b}))$ и $M \models (\Phi_1(a, \bar{b}) \wedge \neg\Psi(a, \bar{b}))$ для некоторого $a \in M$. Рассмотрим максимальный h-тип $p \in S_x^h(B)$, для которого $\Phi(x, \bar{b}) \in p$ и $\{\neg\Psi(x, \bar{b})\} \cup p$ совместно. Из максимальности $p(x)$ получаем, что если e реализует тип $p(x) \cup \{\neg\Psi(x, \bar{b})\}$, то $p \cup \{\neg\Psi(x, \bar{b})\} \vdash \mathrm{tp}(e, B)$, т. е.

тип $\operatorname{tp}(e, B)$ $(h, 1)$-изолирован; противоречие с максимальностью B и выбором Φ. □

Лемма 13.3. *Пусть T — полная хорнова теория, M — ω-насыщенная T-модель, $A \subseteq M$, $p \in S(A)$, $\langle a_0, \ldots, a_{n+2}\rangle$ — независимый набор реализаций в M типа p и B — $(h, 1)$-замыкание множества $A \cup \{a_0, \ldots, a_{n+1}\}$ в M. Тогда $\operatorname{tp}(a_{n+2}, A \cup \{a_0, \ldots, a_{n+1}\}) \vdash \operatorname{tp}(a_{n+2}, B)$. В частности, если p неалгебраический, то $a_{n+2} \notin B$.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Обозначим кортеж $\langle a_0, \ldots, a_{n+1}\rangle$ через $\bar a$. Пусть α — минимальный ординал такой, что $\{b_i \mid i < \alpha\} \subseteq M$, $\langle b_i \mid i < \alpha\rangle$ — $(h, 1)$-конструкция над $A \cup \bar a$ и не имеет места $\operatorname{tp}(a_{n+2}, A \cup \bar a) \vdash \operatorname{tp}(a_{n+2}, A \cup \bar a \cup \{b_i \mid i < \alpha\})$. Из минимальности α следует $\alpha = \beta + 1$ для некоторого β. Пусть $C = A \cup \bar a \cup \{b_i \mid i < \beta\}$, формула $\neg\Psi(x, \bar b)$ $(h, 1)$-изолирует тип $r(x) = \operatorname{tp}(b_\beta, C)$, h-формула $X(x, b_\beta, \bar b)$ делит тип $q(x) = \operatorname{tp}(a_{n+2}, A \cup \bar a)$ и $\bar b \in C$. В силу минимальности α h-формула $X(x, y, \bar b)$ связывает $q^+(x)$ и $r^+(y)$. Покажем, что существует не более одного $i \in \{0, \ldots, n+1\}$, для которого $\{X(a_i, y, \bar b)\} \cup r^+(y) \vdash \Psi(y, \bar b)$. Предположим, что это не так. Тогда найдутся такие $\Phi(y, \bar e) \in r^+(y)$, $i_1 < i_2 \leqslant n + 1$, что $M \models \forall y ((X(a_{i_k}, y, \bar b) \wedge \Phi(y, \bar e)) \rightarrow \Psi(y, \bar b))$ для $k \in \{1, 2\}$. Так как $X(x, y, \bar b)$ связывает $q^+(x)$ и $r^+(y)$, а элементы $a_0, \ldots, a_{n+1}$ реализуют $q^+(x)$, то $M \models \exists y (X(a_{i_k}, y, \bar b) \wedge \Phi(y, \bar e))$. Таким образом, $M \models \varkappa(a_{i_1}, a_{i_2})$, где $\varkappa(x, y)$ — x-нормализация h-формулы

$$\exists y (X(x, y, \bar b) \wedge \Phi(y, \bar e)) \wedge \forall y ((X(x, y, \bar b) \wedge \Phi(y, \bar e)) \rightarrow \Psi(y, \bar b)). \quad (13.2)$$

Ввиду независимости a_{i_1}, a_{i_2} над A и $M \models \varkappa(a_{i_1}, a_{i_2})$ получаем, что реализация d типа $q(x)$ реализует формулу (13.2). Это противоречит тому, что $q(x) \cup X(x, b_\beta, \bar b)$ совместно и $\models \neg\Psi(b_\beta, \bar b)$. Таким образом, найдется такой $i_0 \in \{0, \ldots, n+1\}$, что $\{X(a_{i_0}, y, \bar b)\} \cup r^+(y) \cup \{\neg\Psi(y, \bar b)\}$ совместно. Отсюда в силу того, что $\neg\Psi(x, \bar b)$ $(h, 1)$-изолирует тип $r(x) \in S(C)$ и $\{a_0\} \cup \bar b \subseteq C$, получаем $X(a_{i_0}, y, \bar b) \in r(y)$. Это противоречит тому, что $X(x, b_\beta, \bar b)$ делит тип $q(x)$. □

Лемма 13.4. *Пусть T — стабильная хорнова ω-категоричная не ω_1-категоричная теория, M — ее счетная модель. Тогда существуют счетные $N_i \overset{h}{<} M$, $i \in \omega$, с попарно различными теориями $\operatorname{Th}(N_i)$.*

Доказательство. Из ω-категоричности T вытекает, что имеется лишь конечное число h-эквивалентностей $\eta(x, y)$, не эквивалентных в T. Отсюда в силу h-нормальности и h-базируемости T найдется h-эквивалентность $\eta(x, y)$, определяющая на T-моделях эквивалентность с сильно минимальными или одноэлементными классами, причем по крайней мере один из этих классов сильно минимальный. Пусть M_1, M_2 — T-модели $M_1 < M_2$, $a \in M_1$, $\eta(M_1, a)$ — сильно минимальное множество и $b \in M_2 \setminus M_1$. Предположим, что h-типы $\{\eta(x, a)\}$ и $\operatorname{tp}^+(b, M_1)$ связаны. Из ω-категоричности и h-нормальности T вытекает, что $\operatorname{tp}^+(b, M_1)$ главный. Следовательно, существует его реализация e_1 в M_1. Тогда найдется h-формула $\Phi(x, y, a, e)$, связывающая h-типы $\{\eta(x, a)\}$ и $\operatorname{tp}^+(b, M_1)$. Ясно, что h-формула $\Phi(x, b, a, e) \wedge \eta(x, a)$ не реализуется в M_1, поэтому существует $d \in M_2 \setminus M_1$, реализующий формулу $\eta(x, a)$. Таким образом, если в T все неалгебраические h-типы связаны, то формула $\eta(x, a)$ недвукардинальна. Так как T не ω_1-категорична, то это противоречит теореме Еримбетова — Лахлана [15, 16]. Итак, найдутся такая h-эквивалентность $\Theta(x, y)$ и пара $\langle a_0, b_0\rangle \in M^2$, свободно реализующая формулу $\eta(x, x) \wedge \Theta(y, y)$, для которой h-формулы $\eta(x, a_0)$, $\Theta(y, b_0)$ неалгебраические и не связаны. Пусть $X = \{a_i \mid i \in \omega\}$ — независимое множество реализаций формулы $\eta(x, a_0)$, Y — независимое множество реализаций формулы

$\Theta(x, b_0)$. Для каждого $1 < k < \omega$ возьмем $X_k = \{a_i | i < k\}$, и пусть N_k — $(h, 1)$-замыкание множества $X_k \cup Y$ в M. По лемме 13.2 $N_k \prec M$. Так как $\eta(x, a_0)$ и $\Theta(x, b_0)$ не связаны, то для любого $k < \omega$ имеем $\mathrm{tp}(a_k, X_k) \vdash \mathrm{tp}(a_k, X_k \cup Y)$. Отсюда в силу 13.3 $\mathrm{tp}(a_k, X_k) \vdash \mathrm{tp}(a_k, N_k)$. Таким образом, в $\mathrm{Th}(N_k)$ размерность $\dim(\eta(N_k, a_0))$ сильно минимального множества $\eta(N_k, a_0)$ в N_k равна k. Пусть a — произвольная реализация формулы $\eta(x, x)$ в N_k. Ясно, что если $\eta(x, a)$ связана с $\Theta(x, b_0)$, то $\dim(\eta(N_k, a)) = \omega$, а если $\eta(x, a)$ связана с $\eta(x, a_0)$, то $k-1 \leqslant \dim(\eta(N_k, a)) \leqslant k$. Так же как выше, используя 13.3, легко показать, что если $\eta(x, a)$ не связана ни с $\eta(x, a_0)$, ни с $\Theta(x, b_0)$, то $\dim(\eta(N_k, a)) \leqslant 2$. Таким образом, теории $\mathrm{Th}(N_i)$, $1 < i < \omega$, попарно различны.

Лемма 13.5. *Если T — полная теория и T^h-категорична, то $T = T^h$.*

Доказательство. Достаточно показать, что T хорнова. Для этого в силу теоремы 2.2 [8] достаточно показать $T \vDash \alpha(\Phi, \Psi_0, \ldots, \Psi_n, \bar{y})$ для любых h-формул $\Phi(x, \bar{y})$, $\Psi_0(x, \bar{y})$, ..., $\Psi_n(x, \bar{y})$. Предположим, что $T \vDash \neg\alpha(\Phi, \Psi_0, \ldots, \Psi_n, \bar{y})$. Тогда для некоторой T-модели M и $\bar{a} \in M$ имеем $\Phi(M, \bar{a}) \subseteq \bigcup\limits_{i \leqslant n} \Psi_i(M, \bar{a})$ и $\Phi(M, \bar{a}) \not\subseteq \Psi_i(M, \bar{a})$, $i \leqslant n$. Можно считать, что $\Psi_i(M, \bar{a}) \subseteq \Phi(M, a)$, $i \leqslant n$. Так как ω_1-категоричная хорнова теория T^h удовлетворяет условию минимальности для h-множеств (см. леммы 6, 7 [8]), то T также удовлетворяет этому условию. Поэтому можно считать, что h-ранг $HR(\Phi(M, \bar{a}))$ выбран минимальным. Поскольку в ω_1-категоричных хорновых теориях любые два неалгебраических h-типа связаны, то же верно в T для любых h-типов, имеющих более одной реализации.

Случай 1: для некоторого $i_0 \leqslant n$ множество $\Psi_{i_0}(M, \bar{a})$ более чем одноэлементно. Возьмем h-формулу $\mathrm{X}(x, y, \bar{b})$, связывающую $\Psi_{i_0}(x, \bar{a})$ и $\Phi(y, \bar{a})$. Так как $HR(\Phi(M, \bar{a}))$ минимальный, то для любого $a \in \Psi_{i_0}(M, \bar{a})$ найдется $j \leqslant n$, для которого $\mathrm{X}(a, M, \bar{b}) \cap \Phi(M, \bar{a}) \subseteq \Psi_j(M, \bar{a})$. Тогда $M \vDash \neg\alpha(\Psi_{i_0}, \varkappa_0, \ldots, \varkappa_n, \widehat{\bar{u}\,\bar{y}})$, где $\varkappa_i(x, \bar{u}, \bar{y}) = \exists z(\mathrm{X}(x, \bar{z}, \bar{u}) \wedge \Phi(z, \bar{y})) \wedge \forall z(\mathrm{K}(x, z, \bar{u}) \wedge \Phi(z, \bar{y}) \to \Psi_i(z, \bar{y}))$. Это противоречит выбору Φ, поскольку $HR(\Psi_{i_0}(x, \bar{a})) < HR(\Phi(x, \bar{a}))$.

Случай 2: $|\Psi_i(M, \bar{a})| \leqslant 1$, $i \leqslant n$. Тогда $1 < |\Phi(M, \bar{a})| < \omega$. Пусть $\Psi(M, \bar{b})$ — бесконечное h-множество с минимальным $HR(\Psi(x, \bar{b}))$. Ясно, что $\Phi(x, \bar{a})$ тогда не может быть связанной с $\Psi(x, \bar{b})$; противоречие. □

Доказательство теоремы 13.1. Предположим, что для квазимногообразия K выполнено $I(\omega_1, K) < \omega$. Если все K-системы имеют ω_1-категоричную теорию, то $I(\omega_\alpha, K) = \lambda_0$, где λ_0 — число различных теорий K-систем. Пусть некоторая K-система M имеет не ω_1-категоричную теорию $T = \mathrm{Th}(M)$. По 13.5 h-компаньон T^h также не ω_1-категоричен. Так как $1 < I(\omega_1, T^h) < \omega$, то по теореме Лахлана теория T^h ω-категорична. Пусть M_0 — счетная T^h-модель. Поскольку K — универсальный класс, то любая система $N^h \prec M_0$ является K-системой. Из 13.4 вытекает $I(\omega_1, K) \geqslant \omega$, что противоречит предположению.

Для завершения доказательства теоремы нужно установить, что $I(\omega_\alpha, K) \neq \min\left\{2^{\omega_\alpha}, \beth_k\left(|\alpha + \omega|^{|\alpha|}\right)\right\}$, $0 \leqslant k < \omega$. Предположим, что для некоторого $k_0 \in \omega$ выполнено $I(\omega_\alpha, K) = \min\left\{2^{\omega_\alpha}, \beth_{k_0}\left(|\alpha + \omega|^{|\alpha|}\right)\right\}$. Так как K имеет немаксимальный несчетный спектр, то для любой K-системы M теория $\mathrm{Th}(M)$ является A-теорией. Из 11.3 и 11.2 получаем, что найдется K — система M, для теории $\mathrm{Th}(M) = T_0$ которой выполнено $I(\omega_\alpha, T_0) = \min\left\{2^{\omega_\alpha}, \beth_{k_0}\left(|\alpha + \omega|^{|\alpha|}\right)\right\}$, и глубина γ_0 теории T_0 равна $k_0 + 2$. Спектр вида $\min\left\{2^{\omega_\alpha}, \beth_{k_0}\left(|\alpha + \omega|^{|\alpha|}\right)\right\}$ минимальный среди спектров A-теорий глубины $k_0 + 2$, а глубина T_0^h не меньше γ_0 (см. § 7), поэтому

$I(\omega_\alpha, T_0^h) = \min\left\{2^{\omega_\alpha}, \beta_{k_0}\left(|\alpha+\omega|^{|\alpha|}\right)\right\}$. Отсюда глубина T_0^h равна $\gamma_0 = k_0 + 2$ и в силу результатов § 7 существуют такие регулярные схемы $s_i = \langle p_i, E_i\rangle$, $i \leqslant \gamma_0$, что для $i \leqslant \gamma_0 - 1$ s_i покрывает s_{i+1} с помощью h-формулы $\eta_i(x, y, u, v)$. Возьмем в T_0^h такие элементы a^δ, $\delta \in \omega^{\leqslant\gamma_0}\setminus\{\varnothing\}$, для которых

1) если $n = l(\delta) \leqslant \gamma_0$, то $\langle a^{\widehat{\delta i}} \mid i \in \omega\rangle$ — независимая последовательность реализаций типа $p_n(x) \cup \{E_n(x, a^{\widehat{\delta 0}})\}$;

2) если $l(\delta) \leqslant \gamma_0 - 1$, то $\vDash \eta(a^{\widehat{\delta i}}, a^{\widehat{\delta i k}}, a^{\widehat{\delta 0}}, a^{\widehat{\delta i 0}})$, $i, k \in \omega$.

Определим множество $A \subseteq \left\{a^\delta \mid \delta \in \omega^{\leqslant\gamma_0}\right\}$ так: элемент a^δ тогда и только тогда принадлежит A, когда выполняется одно из следующих условий:

а) $l(\delta) \leqslant \gamma_0$;

б) $l(\delta) = \gamma_0 + 1$, $\delta = \widehat{\delta_1 i k}$, $k \in \omega$ и $\exp_2(i) = 0$, где через $\exp_2(i)$ обозначена степень числа 2 в разложении i на простые множители; при этом считаем $\exp_2(0) = 0$;

в) $l(\delta) = \gamma_0 + 1$, $\delta = \widehat{\delta_1 i k}$ и $k \leqslant \exp_2(i)$, $\exp_2(i) \neq 0$.

Пусть M — ω_1-насыщенная T_0^h-модель, содержащая множество $\left\{a^\delta \mid \delta \in \omega^{\leqslant\gamma_0}\right\}$, B — $(h, 1)$-замыкание в M множества A. Рассмотрим теорию $T' = \mathrm{Th}(B)$. Пусть $p'_\delta(x)$ — тип над $\varnothing$, реализуемый элементом a^δ в системе B. Из существования соответствующих автоморфизмов системы M вытекает $p'_{\delta_1} = p'_{\delta_2}$, если $l(\delta_1) = l(\delta_2) \leqslant \gamma_0 - 1$, а также $p'_{\widehat{\delta_1 i}} = p'_{\widehat{\delta_2 j}}$, $p'_{\widehat{\delta_1 i k}} = p'_{\widehat{\delta_2 j m}}$, если $l(\delta_1) = l(\delta_2) = \gamma_0 - 1$ и $\exp_2(i) = \exp_2(j)$. Поэтому, если $1 \leqslant l(\delta_1) = l(\delta) = \gamma_0 - 1$, то тип p'_{δ_1} можно обозначать через $p^{l(\delta_1)-1}$, тип $p'_{\widehat{\delta i}}$ — через $p^{l(\delta)}_{\exp_2(i)}$ и тип $p'_{\widehat{\delta i j}}$ — через $p^{l(\delta)+1}_{\exp_2(i)}$. Из условия $B \overset{h}{<} M$ (лемма 13.2), включения $A \subseteq B$ и выбора элементов a^δ вытекает, что для $i < \gamma_0 - 2$ схема $s'_i = \langle p^i, E_i\rangle$ покрывает схему $s'_{i+1} = \langle p^{i+1}, E_{i+1}\rangle$, для $i = \gamma_0 - 2$ схема $s'_i = \langle p^i, E_i\rangle$ покрывает схемы $s^k_{i+1} = \langle p^{i+1}_k, E_{i+1}\rangle$ $(k \in \omega)$ и для $i = \gamma_0 - 1$ схема $s^0_i = \langle p^i_0, E_i\rangle$ покрывает схему $s^0_{i+1} = \langle p^{i+1}_0, E_{i+1}\rangle$. Таким образом, глубина γ' теории T' не меньше γ_0. Так как A-теории глубины строго больше, чем γ_0, имеют спектр, строго больший $I(\omega_\alpha, K)$, то $\gamma' = \gamma_0$. Из определения покрываемости схем и выбора элементов a^δ вытекает

$$\mathrm{tp}\left(a^{\widehat{\delta i}}, \{a^{\widehat{\delta j}} \mid j < i\}\right) \vdash \mathrm{tp}\left(a^{\widehat{\delta i}}, \{a^{\delta'} \mid \delta' \neq \widehat{\delta j}, j \in \omega\} \cup \{a^{\widehat{\delta j}} \mid j < i\}\right).$$

В силу 13.3, если $\delta \in \omega^{\gamma_0 - 1}$, $\delta = \widehat{\delta_1 m}$ и $\exp_2(m) = k$, то $\langle a^{\widehat{\delta 0}}, \ldots, a^{\widehat{\delta (k-1)}}\rangle$ — максимальная независимая последовательность реализаций в B типа $p_k^{\gamma_0 - 1} \cup \left\{E_{\gamma_0 - 1}(x, a^{\widehat{\delta 0}})\right\}$. Таким образом, возможны два случая.

Случай 1: типы $p_k^{\gamma_0-1}(x) \cup \left\{E_{\gamma_0-1}(x, a^{\widehat{\delta 0}})\right\}$, $\delta \in \omega^{\gamma_0 - 1}$, $\delta = \widehat{\delta_0 n}$, $\exp_2(n) = k$, $k \in \omega$, являются копиями над $\varnothing$ в T'. Тогда в T' для типа $p^{\gamma_0 - 2}(x) \cup \left\{E_{\gamma_0-2}(x, a^\delta)\right\}$ для любого $\delta \in \omega^{\gamma_0 - 1}$ выполняются условия случая IV [11]. Следовательно, $I(\omega_\alpha, T') \geqslant \beta_{\gamma_0 - 1}(|\alpha + \omega|)$, что противоречит неравенству $I(\omega_\alpha, K) \leqslant \beta_{\gamma_0 - 2}\left(|\alpha + \omega|^{|\alpha|}\right)$.

Случай 2: отрицание случая 1. В T' типы $p_k^{\gamma_0 - 1}$, $k \in \omega$, будут попарно различны, а типы $p_k^{\gamma_0-1} \cup \left\{E_{\gamma_0-1}(x, a^\delta)\right\}$, $\delta \in \omega^{\gamma_0}$, $k \in \omega$ — попарно ортогональны. Следовательно, в T' тип $p^{\gamma_0 - 2} \cup \{E_{\gamma_0-2}(x, a^\delta)\}$ для любого

$\delta \in \omega^{\gamma_0 - 1}$ будет удовлетворять условиям случая I или II [11], откуда $I(\omega_\alpha, T') \geqslant \beta_{\gamma_0-2}(|\alpha+\omega|^{\omega})$. Это также противоречит неравенству $I(\omega_\alpha, K) \leqslant \beta_{\gamma_0-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha|})$.

Заметим, что все функции, указанные в теореме 13.1, реализуются в квазимногообразиях. Соответствующие примеры строятся легко. □

ЛИТЕРАТУРА

1. **Заффе Ю., Палютин Е. А., Старченко С. С.** Модели суперстабильных хорновых теорий // Алгебра и логика.— 1985.— Т. 24, № 3.— С. 278—326.
2. **Старченко С. С.** Число моделей полных хорновых теорий конечной глубины // Алгебра и логика.— 1986.— Т. 25, № 3.— С. 347—360.
3. **Палютин Е. А.** Нормальность хорновых теорий с немаксимальным спектром // Алгебра и логика.— 1985.— Т. 24, № 5.— С. 551—587.
4. **Палютин Е. А., Старченко С. С.** Спектры квазимногообразий // XVIII Всесоюз. алгебраическая конф., Кишинев, сент. 1985 г.:— С. 82.
5. **Палютин Е. А.** О числе моделей в квазимногообразиях // Всесоюз. конф. по прикладной логике, Новосибирск, окт. 1985 г.: Тез. докл.— Новосибирск, 1985.— С. 168—169.
6. **Палютин Е. А.** О простых моделях в А-теория // VIII Всесоюз. конф. по мат. логике, посвящ. 85-летию акад. П. С. Новикова, Москва, сент. 1986 г.: Тез. докл.— М., 1986.— С. 148.
7. **Палютин Е. А., Старченко С. С.** Спектры хорновых классов // Докл. АН СССР.— 1986.— Т. 290, № 6.— С. 1298—1300.
8. **Палютин Е. А.** Категоричные хорновы классы. I // Алгебра и логика.— 1980.— Т. 19, № 5.— С. 582—614.
9. **Burris S., Sankappanavar H. P.** A course in universal algebra.— Berlin a. o.: Springer, 1980.
10. **Shelah S.** Classification theory and the number of non-isomorphic models.— Amsterdam a. o.: North-Holland, 1978.
11. **Saffe J.** The number of uncountable models of ω-stable theories // Ann. pure and appl. log.— 1983.— V. 24, N 2.— P. 231—261.
12. **Shelah S.** The spectrum problem I, II // Isr. J. math.— 1982.— V. 43, N 4.— P. 324—364.
13. **Saffe J.** Einige Ergebnisse über die Anzahl abzählbarer Modelle superstabile Theorien: Dis ... Dokt. d. Naturwissenschaften.— Univ. Hannover, 1981.
14. **Makkai M.** A survei of basic stability theory with particular emphasis on orthogonality and regular types // Isr. J. math.— 1984.— V. 49, N 1—3.— P. 181—238.
15. **Lachlan A.** Theories with a finite member in an uncountable power are categorical // Pacif. J. math.— 1975.— V. 61, N 3.— P. 465—481.
16. **Еримбетов М. М.** Полные теории с I-кардинальными формулами // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 3.— С. 245—257.

ЧИСЛО МОДЕЛЕЙ ПОЛНЫХ ТЕОРИЙ УНАРОВ

А. Н. РЯСКИН

Унаром называется алгебраическая система, сигнатура которой состоит из символа одной одноместной функции f. Вопросы, касающиеся полных теорий унаров, рассматривались в работах [1—5]. Ю. Е. Шишмарев получил описание несчетно- и счетно-категоричных теорий унаров [1]; в [3] Л. Маркус решил вопрос о числе неизоморфных счетных моделей полной теории унаров; А. А. Ивановым получен критерий элементарной эквивалентности унаров [4].

В настоящей работе описываются возможные числа неизоморфных моделей (функции спектра) полной теории унаров в бесконечных мощностях. С. Шелах [6—8] и Ю. Заффе [9] вычислили функции спектра тотально трансцендентных теорий. В [10, 11] С. Шелахом получены оценки для значений функций спектра суперстабильных теорий. Вначале показывается, что все одноразмерные теории унаров несчетно-категоричны,