$\delta \in \omega^{\gamma_0 - 1}$ будет удовлетворять условиям случая I или II [11], откуда $I(\omega_\alpha, T') \geqslant \beta_{\gamma_0-2}(|\alpha+\omega|^{\omega})$. Это также противоречит неравенству $I(\omega_\alpha, K) \leqslant \beta_{\gamma_0-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha|})$.

Заметим, что все функции, указанные в теореме 13.1, реализуются в квазимногообразиях. Соответствующие примеры строятся легко. □

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Заффе Ю., Палютин Е. А., Старченко С. С.** Модели суперстабильных хорновых теорий // Алгебра и логика.— 1985.— Т. 24, № 3.— С. 278—326.
2. **Старченко С. С.** Число моделей полных хорновых теорий конечной глубины // Алгебра и логика.— 1986.— Т. 25, № 3.— С. 347—360.
3. **Палютин Е. А.** Нормальность хорновых теорий с немаксимальным спектром // Алгебра и логика.— 1985.— Т. 24, № 5.— С. 551—587.
4. **Палютин Е. А., Старченко С. С.** Спектры квазимногообразий // XVIII Всесоюз. алгебраическая конф., Кишинев, сент. 1985 г.:— С. 82.
5. **Палютин Е. А.** О числе моделей в квазимногообразиях // Всесоюз. конф. по прикладной логике, Новосибирск, окт. 1985 г.: Тез. докл.— Новосибирск, 1985.— С. 168—169.
6. **Палютин Е. А.** О простых моделях в A-теория // VIII Всесоюз. конф. по мат. логике, посвящ. 85-летию акад. П. С. Новикова, Москва, сент. 1986 г.: Тез. докл.— М., 1986.— С. 148.
7. **Палютин Е. А., Старченко С. С.** Спектры хорновых классов // Докл. АН СССР.— 1986.— Т. 290, № 6.— С. 1298—1300.
8. **Палютин Е. А.** Категоричные хорновы классы. I // Алгебра и логика.— 1980.— Т. 19, № 5.— С. 582—614.
9. **Burris S., Sankappanavar H. P.** A course in universal algebra.— Berlin a. o.: Springer, 1980.
10. **Shelah S.** Classification theory and the number of non-isomorphic models.— Amsterdam a. o.: North-Holland, 1978.
11. **Saffe J.** The number of uncountable models of ω-stable theories // Ann. pure and appl. log.— 1983.— V. 24, N 2.— P. 231—261.
12. **Shelah S.** The spectrum problem I, II // Isr. J. math.— 1982.— V. 43, N 4.— P. 324—364.
13. **Saffe J.** Einige Ergebnisse über die Anzahl abzählbarer Modelle superstabile Theorien: Dis … Dokt. d. Naturwissenschaften.— Univ. Hannover, 1981.
14. **Makkai M.** A survei of basic stability theory with particular emphasis on orthogonality and regular types // Isr. J. math.— 1984.— V. 49, N 1—3.— P. 181—238.
15. **Lachlan A.** Theories with a finite member in an uncountable power are categorical // Pacif. J. math.— 1975.— V. 61, N 3.— P. 465—481.
16. **Еримбетов М. М.** Полные теории с $I$-кардинальными формулами // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 3.— С. 245—257.


# ЧИСЛО МОДЕЛЕЙ ПОЛНЫХ ТЕОРИЙ УНАРОВ


*А. Н. РЯСКИН*


*Унаром* называется алгебраическая система, сигнатура которой состоит из символа одной одноместной функции $f$. Вопросы, касающиеся полных теорий унаров, рассматривались в работах [1—5]. Ю. Е. Шишмарев получил описание несчетно- и счетно-категоричных теорий унаров [1]; в [3] Л. Маркус решил вопрос о числе неизоморфных счетных моделей полной теории унаров; А. А. Ивановым получен критерий элементарной эквивалентности унаров [4].

В настоящей работе описываются возможные числа неизоморфных моделей (функции спектра) полной теории унаров в бесконечных мощностях. С. Шелах [6—8] и Ю. Заффе [9] вычислили функции спектра тотально трансцендентных теорий. В [10, 11] С. Шелахом получены оценки для значений функций спектра суперстабильных теорий. Вначале показывается, что все одноразмерные теории унаров несчетно-категоричны, и замечается совпадение понятий $F^a_{\omega_\gamma}$-насыщенности и $\omega_\gamma$-насыщенности при всех ординалах $\gamma$ для моделей произвольной полной теории унаров. Далее описываются возможные функции спектра и изучаются некоторые структурные свойства полных теорий унаров, например, устанавливается, что любая полная теория унаров не имеет свойств dop, otop. Результаты данной работы анонсированы в [5].

Автор выражает благодарность Е. А. Палютину за помощь, оказанную при работе над статьей.

## § 1. ТЕРМИНОЛОГИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Если не оговорено противное, будем использовать терминологию из [6, 12—14]. Все необходимые сведения из теории множеств могут быть найдены в [15].

Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторый унар. Обозначим: $f^0(x)=x$, $f^{n+1}(x)=f(f^n(x))$, $n\in\omega$. Элементы $a$, $b\in\mathfrak{A}$ называются *$\mathfrak{A}$-связанными*, если существуют натуральные числа $m$ и $n$ такие, что $\mathfrak{A}\models(f^m(a)=f^n(b))$. Множество $X\subseteq\mathfrak{A}$ называется *$\mathfrak{A}$-связанным*, если любые два элемента из $X$ $\mathfrak{A}$-связаны. Подсистема $\mathfrak{B}\subseteq\mathfrak{A}$, носитель которой является максимальным $\mathfrak{A}$-связанным подмножеством носителя $\mathfrak{A}$, называется *компонентой* в $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{B}$ — компонента в системе $\mathfrak{A}$, то множество $\{a\in\mathfrak{B}\mid\mathfrak{A}\models(f^n(a)=a)$ для некоторого $n\in\omega\}$ называется *кольцом компоненты* $\mathfrak{B}$. Через $G(b,\mathfrak{A})$ обозначается компонента в $\mathfrak{A}$, содержащая $b$. Считаем, что *элементы $a$, $b$ из $\mathfrak{A}$ принадлежат одному слою*, если существует $n\in\omega$, для которого $\mathfrak{A}\models(f^n(a)=f^n(b))\wedge\neg(f^n(a)=f^{n-1}(a))\wedge\neg(f^n(b)=f^{n-1}(b))$ и $f^n(a)$ не лежит в кольце. *Высота компоненты* — это число слоев ее элементов, если их конечное число, и $\infty$ в противном случае. Через $K(a,\mathfrak{A})$ обозначаем ограничение $\mathfrak{A}$ на множество $\{b\in\mathfrak{A}|\mathfrak{A}\models(f^n(b)=a)$ для некоторого $n\in\omega\}$ и называем его *корнем элемента* $f(a)$ *в унаре* $\mathfrak{A}$. Элемент $a$ называется *вершиной корня* $K(a,\mathfrak{A})$. Будем отождествлять носитель унара (корня, компоненты) с унаром (корнем, компонентой).

Пусть $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ — унары, $a\in\mathfrak{A}_1$, $a_0\in\mathfrak{A}_3$, $C$ — некоторый корень элемента $a_0$ в унаре $\mathfrak{A}_3$. Определим $\mathfrak{A}_1\oplus\mathfrak{A}_2$ как унар, являющийся дизъюнктным объединением унаров $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$. Определим унар $\mathfrak{A}_1\overset{a}{\oplus}C$. Носитель $\mathfrak{A}_1\overset{a}{\oplus}C$ совпадает с объединением носителей $\mathfrak{A}_1$ и $C_1$, где $C_1$ — изоморфная копия $C$ такая, что носители $\mathfrak{A}_1$ и $C_1$ не пересекаются. Функция $f$ действует на носителе $\mathfrak{A}_1\overset{a}{\oplus}C$ так: $f(b)=f^{\mathfrak{A}_1}(b)$, если $b\in\mathfrak{A}_1$; $f(b)=f^{C_1}(b)$, если $b\in C_1$ и $b$ не является вершиной $C_1$; $f(b)=a$, если $b$ — вершина $C_1$, где $f^{\mathfrak{A}_1}$, $f^{C_1}$ — функции унара $\mathfrak{A}$ и корня $C_1$ соответственно.

Пусть в дальнейшем $T$ — полная теория унаров, имеющая бесконечные модели. Теория $T$ называется *ограниченной*, если существует такое натуральное число $n_0$, что в $T$ истинна формула $\forall x\left(\bigvee\limits_{n<m<n_0}(f^n(x)=f^m(x))\right)$, в противном случае теория называется *неограниченной*.

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель $T$. Элемент $a$ из $\mathfrak{M}$ называется *алгебраическим над* $B\subseteq\mathfrak{M}$, если существуют кортеж $\mathbf{b}\in B$ и формула $\varphi(x,\mathbf{b})$, выполняющаяся на элементе $a$ в модели $\mathfrak{M}$, и $\varphi(x,\mathbf{b})$ является конечной в теории $T$, т. е. имеет не более чем конечное множество реализаций в $\mathfrak{M}$.

Понятия множества в теории $T$, типа над $A$, множества $\models S_{\mathbf{x}}(A)$ совместных типов над $A$, множества $S_{\mathbf{x}}(A)$ полных типов над $A$, где $A$ — множество в $T$ и $\mathbf{x}$ — кортеж переменных, могут быть найдены в [13, с. 325, 326].

Через $|A|$ обозначается, как обычно, мощность множества $A$. Если $\mathfrak{M}$ — модель $T$, то через $\|\mathfrak{M}\|$ обозначаем мощность носителя $\mathfrak{M}$. Вместо $\mathbf{a} \in A^n (n \in \omega)$ будем писать $\mathbf{a} \in A$.

Предполагается существование $T$-модели $\mathfrak{C}$, что все $T$-модели, которые мы рассматриваем, элементарно вкладываются в $\mathfrak{C}$. Для обоснования этого утверждения достаточно рассмотреть в качестве $\mathfrak{C}$ $k$-насыщенную $T$-модель, где $k$ — кардинал, больший тех, которые мы рассматриваем. Для любой рассматриваемой $T$-модели $\mathfrak{M}$ имеем $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{C}$. Поэтому понятия $\mathfrak{M}$-связанности и $\mathfrak{C}$-связанности совпадают, и, говоря о связанности элементов, можно опускать обозначение $T$-модели $\mathfrak{M}$, в которой эти элементы связаны. Так как $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{C}$, то иногда в записи $\mathfrak{M} \models \varphi[\mathbf{a}]$ для $\mathbf{a} \in \mathfrak{M}$ будем опускать символ $\mathfrak{M}$.

Пусть $\mathbf{b}$ — кортеж элементов $\mathfrak{C}$, $\mathbf{x}$ — кортеж переменных, $A$ — множество в $T$. Через $\mathrm{tp}(\mathbf{b}, A)$ обозначается множество $\{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \mid \mathbf{a} \in A, \models \varphi[\mathbf{b}, \mathbf{a}]\}$. Для бесконечного множества $U$ пусть $\mathbf{x}_U = \{x_u \mid u \in U\}$, для кортежа $\mathbf{u} = \langle u_i \rangle_{i<n}$ пусть $\mathbf{x_u} = \langle x_{u_i} \rangle_{i<n}$. Если $A$, $B$ — множества в $T$ и $\omega \leqslant |B|$, то символом $\mathrm{tp}(B, A)$ обозначается множество $\{\varphi(\mathbf{x_b}, \mathbf{a}) \mid \mathbf{b} \in B, \mathbf{a} \in A, \models \varphi[\mathbf{b}, \mathbf{a}]\}$. Для $A \subseteq \mathfrak{C}$ через $\mathrm{acl}(A)$ обозначается множество $\{a \mid a \in \mathfrak{C}$ и для некоторой конечной в $T$ формулы $\varphi(x, \mathbf{b})$, где $\mathbf{b} \in A$, имеем $\models \varphi[a, \mathbf{b}]\}$.

Будем использовать, не оговаривая особо, теоремы Левенгейма — Скулема о подъеме и спуске.

**Лемма** 1 [2, 3]. (а) *Пусть $a$, $b$ — элементы $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — модель $T$, $\models (f(a) = b)$ и элемент $a$ не алгебраичен над $\{b\}$. Тогда $\mathfrak{M} \setminus K(a, \mathfrak{M}) \prec \mathfrak{M}$.*

(б) *Пусть $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ — модели $T$ и для некоторого связного унара $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ имеется различное число компонент, элементарно эквивалентных унару $\mathfrak{A}$. Тогда $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{A}$. Кроме того, условие $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{A}$ выполняется для некоторого связного унара $\mathfrak{A}$, если и только если существует $T$-модель $\mathfrak{M}_3$, в которой есть $\omega$ компонент, изоморфных унару $\mathfrak{A}$.*

**Следствие** 1. *Любая полная теория унаров суперстабильна.*

Доказательство. Из (б) следует, что число полных типов $p(x)$ над моделью $\mathfrak{M}$, содержащих множество $\{\neg(f^n(x) = a) \mid a \in \mathfrak{M}, n \in \omega\}$, не более чем $2^\omega$. Из (а) следует, что число полных типов $p(x)$ над $\mathfrak{M}$, содержащих формулу $(f(x) = a)$ для некоторого $a \in \mathfrak{M}$, не более чем $\|\mathfrak{M}\| + 2^\omega$. Далее, индукцией по $n \in \omega$, используя (а), получим, что число полных типов, содержащих формулу $(f^n(x) = b)$ для некоторого $b \in \mathfrak{M}$, не более чем $\|\mathfrak{M}\| + 2^\omega$. Значит, и число полных типов над $\mathfrak{M}$ не более чем $\|\mathfrak{M}\| + 2^\omega$.

## § 2. $F^a_{\omega_\gamma}$-НАСЫЩЕННОСТЬ И ОДНОРАЗМЕРНЫЕ ТЕОРИИ УНАРОВ

Понятия сильного типа $\mathrm{stp}(\mathbf{a}, A)$ кортежа $\mathbf{a}$ над $A$, где $A$ — множество в $T'$ и $T'$ — некоторая произвольная полная теория, $F^a_{\omega_\gamma}$-насыщенности и одноразмерной теории введены в [6, III—V].

**Предложение** 1. *Понятия $F^a_{\omega_\gamma}$-насыщенности и $\omega_\gamma$-насыщенности для $T$-моделей совпадают при всех ординалах $\gamma$.*

Доказательство. Ясно, что $F^a_{\omega_\gamma}$-насыщенность всегда влечет $\omega_\gamma$-насыщенность. Для $\gamma \geqslant 1$ из $\omega_\gamma$-насыщенности следует $F^a_{\omega_\gamma}$-насыщенность для любой полной теории [6, IV. 2.2 (7)]. Пусть $\mathfrak{M}$ — $\omega$-насыщенная $T$-модель. Достаточно доказать, что для любого множества $C \subseteq \mathfrak{M}$ и элемента $a \in \mathfrak{C}$ существует множество $C_1$, для которого $C \subseteq C_1 \subseteq \mathfrak{M}$, $|C_1 \setminus C| \leqslant 1$ и $\mathrm{stp}(a, C_1) \equiv \mathrm{tp}(a, C_1)$. Если для некоторых $n \in \omega$, $b \in \mathfrak{M} \setminus C$ множество формул $\mathrm{stp}(a, C) \cup \{\neg(f^l(x) = a_1) \mid l < n, a_1 \in \mathfrak{M}\}$ совместно и $\mathrm{stp}(a, C) \vdash (f^n(x) = b)$, то в качестве $C_1$ возьмем множество $C \cup \{b\}$, иначе положим $C_1$ равным $C$. По построению $C_1$ для любой эквивалентности

$E(x, y, \mathbf{a}_0)$ с конечным числом классов, где $\mathbf{a}_0 \in C_1$, любых элементов $a_1$, $a_2$ из $\mathfrak{C}$, реализующих $\mathrm{tp}(a, C_1)$, имеем $\models E[a_1, a_2, \mathbf{a}_0]$. Следовательно, $\mathrm{stp}(a, C_1) \equiv \mathrm{tp}(a, C_1)$.

В дальнейшем, говоря о полной теории унаров $T$, будем часто использовать предложение 1, а именно: всюду вместо $F^a_{\omega_\gamma}$-насыщенности, $F^a_{\omega_\gamma}$-простоты, $F^a_{\omega_\gamma}$-изолированности будем писать $\omega_\gamma$-насыщенность, $\omega_\gamma$-простота, $\omega_\gamma$-изолированность.

Полная теория $T'$ произвольной сигнатуры называется *одноразмерной*, если в любой $F^a_\omega$-насыщенной $T'$-модели $\mathfrak{M}$ максимальные неразличимые множества имеют одну и ту же мощность. Для суперстабильных теорий данное определение одноразмерных теорий совпадает с определением из [6] в силу [6, III.3.8(2), 3.9; V.2.10].

**Теорема 1.** *Если теория унаров $T$ одноразмерна, то $T$ будет $\omega_1$-категоричной теорией.*

Доказательство. В работе [1] (см. также [13]) есть описание Ю. Е. Шишмарева $\omega_1$-категоричных теорий унаров. Покажем, что одноразмерные теории унаров будут удовлетворять этому описанию. Если $\mathfrak{N}$ — модель $T$ и $a \in \mathfrak{N}$, то через $n_a^{\mathfrak{N}}$ обозначается мощность множества $\{b \in \mathfrak{N} \mid \models (f(b) = a)\}$.

Докажем, что не существует такой $T$-модели $\mathfrak{M}$, в которой найдутся два различных элемента с бесконечным числом $f$-прообразов. Пусть утверждение неверно. Теория $T$ суперстабильна, следовательно, по [6, III, 3.12] существует насыщенная $T$-модель $\mathfrak{N}$ мощности $(2^\omega)^+$. По предположению в $\mathfrak{N}$ есть различные элементы $a_1$, $a_2$ с бесконечным числом $f$-прообразов. Тогда $a_1$ имеет $(2^\omega)^+$ корней, у которых один и тот же тип изоморфизма $\theta$. Пусть $a$ — вершина одного из них. Определим индукцией по $i < (2^\omega)^{++}$ $T$-модели $\mathfrak{N}_i$: $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_{i+1} = \mathfrak{N}_i \overset{f(a)}{\oplus} K(a, \mathfrak{N})$, $\mathfrak{N}_i = \bigcup\limits_{j<i} \mathfrak{N}_j$, если $i$ — предельный ординал. Через $\mathfrak{N}^1$ обозначим $\underbrace{i < (2^\omega)^{++}}\, \mathfrak{N}_i$. По лемме 1(а) $\mathfrak{N}_i \prec \mathfrak{N}_{i+1}$, $i < (2^\omega)^{++}$, следовательно, $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{N}^1$. Пусть $A_1 = \{b \in \mathfrak{N}^1 \mid \models (f(b) = a_1)\}$, $A_2 = \{b \in \mathfrak{N}^1 \mid \models (f(b) = a_2)\}$. Тогда существуют бесконечные неразличимые множества $I_1$ и $I_2$ такие, что $I_1 \subseteq A_1$, $I_2 \subseteq A_2$ и $|I_1| = |A_1| = (2^\omega)^{++}$, $|I_2| = |A_2| = (2^\omega)^+$. Можно считать $I_1$ и $I_2$ максимальными неразличимыми множествами. Модель $\mathfrak{N}^1$ является $(2^\omega)^+$-насыщенной. Противоречие с одноразмерностью $T$. Следовательно, существует такое натуральное число $n_0$, что для любой $T$-модели $\mathfrak{N}$ и всех (за исключением, быть может, одного) $b \in \mathfrak{N}$ выполняется $n_b^{\mathfrak{N}} \leqslant n_0$.

Пусть $T$ — ограниченная теория. Аналогично предыдущему, используя, если нужно, лемму 1(б), можно доказать выполнение для любой $T$-модели $\mathfrak{N}$ следующих условий:

1) если в $\mathfrak{N}$ существует элемент $b$ с бесконечным $n_b^{\mathfrak{N}}$, то в $\mathfrak{N}$ имеется лишь конечное число компонент и все корни элемента $b$, за исключением конечного числа, изоморфны;

2) если в $\mathfrak{N}$ нет элемента $b$ с бесконечным $n_b^{\mathfrak{N}}$, то все компоненты, за исключением конечного числа, изоморфны.

Таким образом, для ограниченной теории $T$ выполняются условия теоремы 2.20 [13]. Поэтому $T$ — несчетно-категоричная теория.

Пусть $T$ — неограниченная теория. Как и выше, показывается, что в любой $T$-модели $\mathfrak{N}$ нет элемента с бесконечным числом $f$-прообразов.

Предположим, что $T$ не $\omega_1$-категорична. Тогда существуют $T$-модели $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ мощности $(2^\omega)^+$ и компонента $C_0$ такие, что у $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ различное число компонент, изоморфных $C_0$. Так как $\|\mathfrak{M}_i\| = (2^\omega)^+$, $i = 1, 2$, и нет элемента с бесконечным числом $f$-прообразов во всех $T$-моделях, то найдутся компоненты $C_i$, $i = 1, 2$, для которых $\mathfrak{M}_i$ содержит $(2^\omega)^+$ компонент, изоморфных $C_i$, $i = 1, 2$. Тогда $C_0$ не изоморфна одной из компонент $C_1$, $C_2$. Пусть $\neg(C_0 \cong C_i)$. По лемме 1(б) есть $T$-модель $\mathfrak{M}$, у которой имеется бесконечное число компонент, изоморфных $C_1$.

Так как все элементы в $T$-моделях имеют конечное число $f$-прообразов, то любая компонента $T$-модели счетна, и любая $T$-модель, в которой каждый неалгебраический тип над $\varnothing$ реализуется несчетным множеством элементов, будет $\omega_1$-насыщенной. Кроме того, любые элементы, принадлежащие неизоморфным компонентам, реализуют различные типы над $\varnothing$.

Расширим $\mathfrak{M}$ до $\omega_1$-насыщенной $\mathfrak{M}'$, которая содержит $\omega_1$ копий $C_0$ и $\omega_2$ копий $C_1$. Пусть $a_0$ и $a_1$ содержатся в компонентах, изоморфных $C_0$ и $C_1$ соответственно. Рассмотрим максимальные неразличимые множества $J_0$ и $J_1$ такие, что $a_0 \in J_0$, $a_1 \in J_1$. Мощности $J_0$, $J_1$ совпадают с числом копий $C_0$ и $C_1$ соответственно, т. е. $\omega_1$ и $\omega_2$. Это противоречит одноразмерности $T$. Доказательство теоремы 1 завершено.

Если полная теория $T'$ произвольной сигнатуры имеет ограниченную функцию спектра, т. е. существует кардинал $\varkappa$, что число неизоморфных моделей $T'$ в любой мощности $\omega_\alpha$ меньше чем $\varkappa$, то по [6, V.2.10 (1)] теория $T'$ одноразмерна. Таким образом, из теоремы 1 получаем

**Следствие 2.** *Функция спектра некатегоричной теории унаров $T$ не ограничена.*

## § 3. НЕОДНОРАЗМЕРНЫЕ ТЕОРИИ УНАРОВ

При изучении полных теорий очень полезным является понятие *ответвляемости* (forking) типа над множеством, введенное С. Шелахом [6, III, определение 1.4]. В [13] это понятие называлось *разветвлением*.

Пусть $p$ — некоторый совместный тип над $B$, $B \subseteq \mathfrak{C}$, $A \subseteq \mathfrak{C}$. Будем пользоваться следующими обозначениями: $p \curlywedge A$, если тип $p$ ответвляется над $A$; $p \downarrow A$, если тип $p$ не ответвляется над $A$.

**Лемма 2.** *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель $T$, $\mathbf{x} = \langle x_i \rangle_{i<n}$ — кортеж переменных, $\mathbf{b}$ — кортеж элементов $\mathfrak{C}$, $p \in S_{\mathbf{x}}(\mathfrak{M} \cup \mathbf{b})$. Тогда*

(а) *если $\mathbf{b} = \varnothing$ и тип $p$ содержит множество $\{\neg(f^m(x_i) = a) \mid i < n$, $m \in \omega$, $a \in \mathfrak{M}\}$, то $p \downarrow \varnothing$;*

(б) *если $\mathbf{b} = \varnothing$ и для некоторых $J \subseteq \{0, \ldots, n-1\}$, $J \neq \varnothing$, $\mathbf{a} \in \mathfrak{M}$, $\mathbf{a} = \langle a_i \rangle_{i \in J}$, $n_i \in \omega\, (i \in J)$, тип $p$ содержит множество $\left\{\left(f^{n_i}(x_i) = a_i\right) \middle| i \in J\right\} \cup \left\{\neg\left(f^{m_i}(x_i) = a\right) \middle| a \in \mathfrak{M}, m_i \in \omega, \text{ если } i \notin J \text{ и } m_i < n_i \text{ для } i \in J\right\}$, то $p \downarrow \mathbf{a}$;*

(в) *если $\mathbf{b} \neq \varnothing$, $\mathbf{b} \cap \mathfrak{M} = \varnothing$ и для некоторых $b' \in \mathbf{b}$, $m \in \omega$, $i \in n$ тип $p$ содержит формулу $(f^m(x_i) = b')$, то $p \curlywedge \mathfrak{M}$.*

Доказательство. (а) Предположим, что $p$ удовлетворяет условию пункта (а), но $p \curlywedge \varnothing$. Тогда существует формула $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{c}_0)$, $\mathbf{c}_0 \in \mathfrak{M}$, и $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{c}_0)$ делится над $\varnothing$, т. е. существует бесконечное неразличимое множество $I = \{\mathbf{c}_i \mid i \in \omega\}$ такое, что $\{\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{c}_i) \mid i \in \omega\}$ будет $k$-несовместным для некоторого $k \in \omega$ [6, III.1.1, упражнение III.4.15].

Рассмотрим $T$-модель $\mathfrak{M}' \succ \mathfrak{M}$, для которой $I \subseteq \mathfrak{M}'$ и существует кортеж $\mathbf{b} = \langle b_0, \ldots, b_{n-1} \rangle$ из $\mathfrak{M}'$, реализующий $p$. Так как стабильные теории имеют насыщенные модели как угодно больших мощностей, то можно взять в качестве $\mathfrak{M}'$ насыщенную $T$-модель мощности строго больше, чем $(\|\mathfrak{M}\| + 2^{\omega})^+$. В силу насыщенности и леммы 1(б) в $\mathfrak{M}'$ имеется $\|\mathfrak{M}'\|$ изоморфных копий $G(b_i, \mathfrak{M}')$, $i \in n$, в частности, существует кортеж $\mathbf{d} = \langle d_i \rangle_{i<n}$, такой, что $\mathbf{d} \in \mathfrak{M}'$, $C(d_i, \mathfrak{M}') \cap I = \varnothing$ для $i < n$ и $p = \mathrm{tp}(\mathbf{d}, \mathfrak{M})$.

Зафиксируем изоморфизм $g$ кортежа $\mathbf{b}$ на $\mathbf{d}$. Так как $\mathbf{c}_j$, $j \in \omega$, реализуют один и тот же тип над $\varnothing$ и $\mathbf{c}_j \cap (\cup \{G(d_i, \mathfrak{M}') \mid i < n\}) = \varnothing$ при $j \in \omega$, то для каждого $j \in \omega$ существует автоморфизм $g_j$ унара $\mathfrak{M}'$, продолжающий $g$ и переводящий $\mathbf{c}_0$ в $\mathbf{c}_j$. Поскольку формула $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{c}_0)$ реализуется кортежем $\mathbf{b}$, то формулы $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{c}_j)$ будут реализовываться $\mathbf{d}$ при всех $j \in \omega \setminus \{0\}$. Это противоречит $k$-несовместности.

(б) Доказывается аналогично с леммой 1(а) вместо леммы 1(б).

(в) Формула $(f^m(x_i)=b')$ будет делиться над $\mathfrak{M}$, поэтому $p \curlywedge \mathfrak{M}$.

Часто будем использовать существование неответвляющегося расширения: если $q \in^{\subseteq} S_{\mathbf{x}}(B)$ и $q \downarrow A$, то существует $p \in S_{\mathbf{x}}(B)$ такой, что $q \subseteq p$ и $p \downarrow A$ [6, III.1.4].

Приведем некоторые определения из [6, 16].

Если $p \in S_{\mathbf{x}}(A)$ и $q \in S_{\mathbf{y}}(A)$, то будем говорить, что $p$ *почти ортогонален* $q$ тогда, когда для любых реализаций $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ типов $p$, $q$ соответственно $\operatorname{tp}(\mathbf{a}, A \cup \mathbf{b}) \downarrow A$.

Если $p \in S_{\mathbf{x}}(A)$ и $q \in S_{\mathbf{y}}(B)$, то будем говорить, что $p$ *ортогонален* $q$ тогда, когда для любых множества $C \supseteq A \cup B$, типов $p_1 \in S_{\mathbf{x}}(C)$ и $q_1 \in S_{\mathbf{y}}(C)$, удовлетворяющих условиям $p \subseteq p_1$, $q \subseteq q_1$, $p_1 \downarrow A$, $q_1 \downarrow B$, тип $p_1$ почти ортогонален $q_1$.

Тип $p \in S_{\mathbf{x}}(A)$ называется *регулярным*, если для любых $B \supseteq A$, $q \in S_{\mathbf{x}}(B)$ таких, что $p \subseteq q$ и $q \curlywedge A$, имеем ортогональность типа $p$ к типу $q$.

Тип $p \in S_{\mathbf{x}}(A)$ называется *стационарным*, если для любого $B \supseteq A$ существует единственный $q \in S_{\mathbf{x}}(B)$ такой, что $p \subseteq q$, $q \downarrow A$.

Определения почти ортогональности, ортогональности типов, регулярности типа совпадают для стационарных типов с определениями из [6] (см. [6, определения III.4.1, 4.2, V.1.1, леммы III.4.18(1), V.1.1, теорему V.12]). Отношение почти ортогональности (ортогональности) симметрично, т. е. тип $p$ почти ортогонален (ортогонален) $q$ если и только если тип $q$ почти ортогонален (ортогонален) $p$ [6, III.4.13]. Полный тип над моделью будет стационарным [6, III.2.15], полный тип, являющийся неответвляющимся расширением стационарного типа,— стационарным типом.

**Лемма 3.** *Пусть $A \subseteq \mathfrak{C}$ и $p \in S_x(A)$ является стационарным типом. Тогда $p$ — регулярный тип.*

Доказательство. Можно считать, что $A$ — модель $T$ [6, V.1.8(1)]. Пусть $k$ — некоторый кардинал, $k \geqslant \|A\| + 2^{\omega}$; $\mathfrak{M}_1$ — $k$-простая над $\varnothing$ модель $T$, содержащая $A$; $\mathfrak{M}_2$ — $k$-простая над $\mathfrak{M}_1 \cup \{a\}$ модель $T$, где $\operatorname{tp}(a, \mathfrak{M}_1) \downarrow A$ и $p \subseteq \operatorname{tp}(a, \mathfrak{M}_1)$. Модели $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ являются насыщенными моделями $T$ мощности $k$ [6, III.3.12].

Возьмем элемент $b \in \mathfrak{M}_2 \backslash \mathfrak{M}_1$ такой, что $\operatorname{tp}(b, A) = \operatorname{tp}(a, A)$. Тогда существует частичный изоморфизм $\mathfrak{M}_2$, тождественный на $A$ и переводящий $a$ в $b$. Так как $\mathfrak{M}_2$ — насыщенная $T$-модель, то этот изоморфизм продолжается до автоморфизма всей $T$-модели $\mathfrak{M}_2$. Обозначим его через $g_1$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $a$ не связан ни с одним элементом $T$-модели $\mathfrak{M}_1$. Согласно построению $T$-модели $\mathfrak{M}_2$ все элементы $\mathfrak{M}_2 \backslash \mathfrak{M}_1$ связаны с $a$. Рассмотрим отображение $g_2$ такое, что $g_2 \restriction G(a, \mathfrak{M}_2) = g_1 \restriction G(a, \mathfrak{M}_2)$ и $g_2$ тождественно на $\mathfrak{M}_1$.

Случай 2. *Существуют* $d \in \mathfrak{M}_1$, $n \in \omega$ такие, что $\{(f^n(x) = d)\} \cup \cup \{\neg(f^m(x) = c) \mid c \in \mathfrak{M}_1,\ m < n\} \subseteq \operatorname{tp}(a, \mathfrak{M}_1)$. Элемент $d \in \mathfrak{M}_1$ будет элементом $A$, так как иначе по лемме 2 получаем противоречие с условием $\operatorname{tp}(a, \mathfrak{M}_1) \downarrow A$. Рассмотрим отображение $g_2$ модели $\mathfrak{M}_2$ на себя такое, что $g_2 \restriction K(f^{n-1}(a), \mathfrak{M}_2) = g_1 \restriction K(f^{n-1}(a), \mathfrak{M}_2)$ и $g_2$ тождественно на $\mathfrak{M}_2 \backslash (K(f^{n-1}(a), \mathfrak{M}_2) \cup K(f^{n-1}(b), \mathfrak{M}_2))$.

Построенное отображение $g_2$ будет автоморфизмом $\mathfrak{M}_2$, при котором $\mathfrak{M}_1$ остается на месте, а элемент $a$ переходит в $b$, т. е. $\operatorname{tp}(a, \mathfrak{M}_1) = \operatorname{tp}(b, \mathfrak{M}_1)$. Применяя [6, V.1.9], получаем регулярность типа $p$.

Изучим вопрос о существовании теории унаров, обладающий свойством dop [7, 9] или свойством otop [11]. Известно, что теория, имеющая dop или otop, обладает максимальной функцией спектра [7, 9, 11].

**Лемма 4.** *Пусть $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ — $\omega_T$-насыщенные $T$-модели, тогда $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ будет $\omega_T$-насыщенной $T$-моделью. Если $a \in \mathfrak{M}_2 \backslash \mathfrak{M}_1$ и $f(a) \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, то $\mathfrak{M}_1 \cup K(a, \mathfrak{M}_2)$ будет $\omega_T$-насыщенной $T$-моделью.*

Доказательство. Мы докажем только первое утверждение, второе доказывается аналогично. Используя лемму 1 и элементарные цепи, получим, что $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_2 \prec \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$. Покажем $\omega_\gamma$-насыщенность $T$-модели $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$. Рассмотрим $\omega_\gamma$-изолированный тип $q \in^{\subseteq} S_x(\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2)$ и изолирующий его тип $p = \mathrm{tp}(a_1, A)$, где $A \subseteq \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, $|A| < \omega_\gamma$.

Случай 1. Пусть существуют $l, n \in \omega$, $b \in A$, для которых $(f^n(x) = f^l(b)) \in p$. Выберем такое минимальное $n$ и соответствующие ему $l \in \omega$ и $b \in A$. Обозначим через $D$ множество $\{d \in \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2 |$ существуют $m \in \omega$, $b' \in A \cup \{a_1\}$, что $\vDash (f^m(b') = d)$ и $f^{m-1}(b') \notin \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2\}$. Можно считать, что $D \subseteq A$, $a_1 \notin \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$, $f^l(b) \in A \cap \mathfrak{M}_1$, т. е. $(f^n(x) = b_1) \in p$ для $b_1 = f^l(b)$. Множество $A$ представимо в виде $A_1 \cup A_2$, где $A_1 \subseteq \mathfrak{M}_1$, $A_2 \subseteq \mathfrak{M}_2 \backslash \mathfrak{M}_1$. Тип $\mathrm{tp}(a_1, A_1)$ реализуется в $\mathfrak{M}_1$ элементом $a_2$; этот элемент будет реализовывать и тип $p$.

Случай 2. Пусть $\{\neg(f^n(x) = f^l(b)) | l, n \in \omega, b \in A\} \subseteq p$. Рассуждениями, аналогичными проведенным в случае 1, получаем реализуемость в любой из $T$-моделей $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$.

Определение [7]. *Суперстабильная теория $T'$ произвольной сигнатуры имеет свойство* dop, *если существуют $F^a_\omega$-насыщенные $T'$-модели $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, что $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_0 \prec \mathfrak{M}_2$, $\mathrm{tp}(\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_1) \downarrow \mathfrak{M}_0$ и $F^a_\omega$-простая над $\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ модель $T'$ не является $F^a_\omega$-минимальной.*

Определение [11]. *Суперстабильная теория $T'$ произвольной сигнатуры имеет свойство* otop, *если есть тип $p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in S_{\mathbf{xyz}}(\varnothing)$ такой, что для каждого кардинала $\lambda$ и любого двухместного отношения $R$ на $\lambda$ существуют $T'$-модель $\mathfrak{M}$ и последовательность $(\mathbf{a}_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ кортежей из $\mathfrak{M}$, для которых выполняется условие: для всех $\alpha < \beta < \lambda$ тип $p(\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta, \mathbf{z})$ реализуется в $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\alpha R \beta$.*

**Теорема 2.** *Любая теория унаров не имеет свойств* dop, otop.

Доказательство. Из лемм 1, 4, [11, определение 1.6, теорема 3.3] получаем требуемый результат.

Если $p \in S_{\mathbf{x}}(B)$, $A \subseteq B$, то будем говорить, что $p$ *почти ортогонален* $A$ тогда, когда $p$ почти ортогонален всем типам $q \in S_{\mathbf{x}_1}(B)$, неответвляющимся над $A$. Тип $p \in S_{\mathbf{x}}(B)$ называется *ортогональным* $A$, если $p$ ортогонален всем полным типам над $A$ [6, 7].

В [7] было введено понятие глубины Dp. Будем использовать следующее эквивалентное ему определение (см. [9]).

Пусть $T'$ — некоторая полная теория произвольной сигнатуры, $\mathfrak{M}$ — $F^a_\omega$-насыщенная $T'$-модель, $p = \mathrm{tp}(a, \mathfrak{M})$ — регулярный тип и $\mathfrak{M}'$ — $F^a_\omega$-простая над $\mathfrak{M} \cup \{a\}$ модель $T'$. Тогда определим $\mathrm{Dp}(p) = \mathrm{Dp}(a, \mathfrak{M})$ индукцией:

$$\mathrm{Dp}(p) \geqslant 0 \text{ для всех таких } p,$$

$$\mathrm{Dp}(p) \geqslant \alpha + 1 \quad (\alpha \text{ — непредельный ординал}),$$

если для некоторого регулярного типа $q \in S_x(\mathfrak{M}')$ имеем ортогональность $q$ к $\mathfrak{M}$ и $\mathrm{Dp}(q) \geqslant \alpha$,

$$\mathrm{Dp}(p) \geqslant \delta + 1 \ (\delta \text{ — предельный ординал}),$$

если для всех $i < \delta$ имеем $\mathrm{Dp}(p) \geqslant i$.

Будем считать $\mathrm{Dp}(p) = \alpha$, если $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \alpha$, но не верно, что $\mathrm{Dp}(p) \geqslant \alpha + 1$. Если такого $\alpha$ не существует, то полагаем $\mathrm{Dp}(p) = \infty$.

Если $q \in S_x(A)$ регулярный и стационарный, то положим $\mathrm{Dp}(q) = \mathrm{Dp}(p)$, где $p \in S_x(\mathfrak{M})$, $\mathfrak{M}$ — $F^a_\omega$-простая над $A$ модель $T'$, $q \subseteq p$, $p \downarrow A$ (тип $p$ регулярен по [6, V.1.8 (1)]).

Теперь можно определить *глубину теории* $T'$: $\mathrm{Dp}(T') = \sup\{\mathrm{Dp}(p) | p \in S_x(A)$ для некоторого множества $A$ в $T'\} + 1$. Теория $T'$ называется *глубокой*, если $Dp(T') = \infty$.

Замечание 1. Если $d$ — алгебраический элемент над множеством $A$ в $T$, то $d$ будет алгебраическим над некоторым элементом $d_1$ из $A$.

Если $d$ алгебраичен над $\{d_1\}$, то множество, являющееся неразличимым над $\{d_1\}$, будет неразличимым над $\{d\}$, и по [6, IV.1.1 (3)] получаем $q \downarrow \{d_1\}$ для любого типа $q$, что $q \downarrow \{d\}$.

**Лемма 5.** *Пусть $A \subseteq \mathfrak{C}$, $D \subseteq \mathfrak{C}$, $\mathbf{x} = \langle x_i \rangle_{i<n}$ — кортеж переменных. Стационарный тип $q \in S_{\mathbf{x}}(D)$ ортогонален $A$ тогда и только тогда, когда $q \vdash \bigwedge_{i<n} \left(f^{m_i}(x_i) = a_i\right)$ для некоторых $m_i \in \omega$, $a_i \in \mathfrak{C} \backslash \mathrm{acl}(A)$ $(i < n)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — модель $T$, $A \cup D \subseteq \mathfrak{M}$, $\mathrm{acl}(A) \neq \mathfrak{M}$.

Необходимость. Предположим, что $q$ ортогонален $A$, но не удовлетворяет условию теоремы. В силу стационарности $q$, [6, V.1.2(4)] тип $q' \in S_{\mathbf{x}}(\mathfrak{M})$ такой, что $q' \downarrow D$ и $q \subseteq q'$, будет ортогонален $A$. Пусть $q_i \in S_{x_i}(\mathfrak{M})$ и $q_i \subseteq q'$ для всех $i < n$. Тогда типы $(q_i)_{i<n}$ тоже ортогональны $A$. Пусть для некоторого $i < n$ существуют $n_i \in \omega$, $b_i \in \mathrm{acl}(A)$ и $q \vdash \left(f^{n_i}(x_i) = b_i\right)$, $\neg(q \vdash (f^m(x_i) = b))$ для любых $m < n_i$, $b \in \mathfrak{M}$. Так как $q$ стационарен, $q' \downarrow D$, $q \subseteq q'$, $\neg(q \vdash (f^m(x_i) = b))$ для любых $m < n_i$, $b \in \mathfrak{M}$, то по замечанию 1, леммам 1, 2 тип $q_i$ содержит множество $\{\neg\left(f^m(x_i) = b\right) \mid m < n_i,\ b \in \mathfrak{M}\} \cup \left\{\left(f^{n_i}(x_i) = b_i\right)\right\}$. По лемме 2 $q_i \downarrow \{b_i\}$, и по замечанию 1 $q_i \downarrow \{d_i\}$, где $d_i \in A$ и $b_i$ алгебраичен над $\{d_i\}$, а значит, $q_i \downarrow A$. Противоречие с ортогональностью $q_i$ к $A$. Если $\neg(q \vdash (f^m(x_i) = b))$ для некоторого $i < n$ и любых $m \in \omega$, $b \in \mathfrak{M}$, то по стационарности $q$, леммам 1, 2 тип $q_i$ содержит $\{\neg(f^m(x_i) = b) \mid m \in \omega,\ b \in \mathfrak{M}\}$ и $q_i \downarrow \varnothing$. Следовательно, $q_i \downarrow$ A; противоречие с ортогональностью $q_i$ к $A$.

Достаточность. Пусть $q \vdash \bigwedge_{i<n} \left(f^{m_i}(x_i) = a_i\right)$, $a_i \in \mathfrak{M} \backslash \mathrm{acl}(A)$, $m_i \in \omega$, $i < n$, $q \subseteq q'$, $q' \downarrow D$. В силу [6, V.1.2(2—4), III.2.15(2)], лемм 1, 2 достаточно доказать, что $q'$ почти ортогонален по всем типам $p \in S_{\mathbf{y}}(\mathfrak{M})$, которые не ответвляются над $A$. Пусть $p \in S_{\mathbf{y}}(\mathfrak{M})$, $p \downarrow A$, $\mathbf{b} = \langle b_i \rangle_{i<n}$, $\mathbf{b}^0$ — реализации типов $q'$ и $p$ соответственно. Можно считать, что $\mathbf{b}^0 \cap \mathfrak{M} = \varnothing$ и $\neg\left(q \vdash \left(f^{n_i}(x_i) = c\right)\right)$ для любых $i < n$, $n_i < m_i$, $c \in \mathfrak{M}$. По стационарности $q$ и замечанию 1 для любого $i < n$ элемент $f^{m_i-1}(b_i)$ не является алгебраическим над $A$. Поэтому, предположив $d \in \mathbf{b}^0 \cap K(a_j, \mathfrak{C})$ для некоторого $j < n$, получим противоречие с условием $\mathrm{tp}(\mathbf{b}^0, \mathfrak{M}) \downarrow A$, так как тогда формула $(f^l(x_j) = a_j)$, где $\vDash (f^l(d) = a_j) \wedge \bigwedge \neg(f^{l-1}(d) = a_j)$, будет делиться над $A$. В силу лемм 1, 2 $\mathrm{tp}(\mathbf{b}, \mathfrak{M} \cup \mathbf{b}^0) \downarrow \{a_i | i < n\}$, следовательно, $\mathrm{tp}(\mathbf{b}, \mathfrak{M} \cup \mathbf{b}^0) \downarrow \mathfrak{M}$. Типы $q'$ и $p$ почти ортогональны, поэтому $q$ ортогонален $A$.

Обозначим через $I^t(\omega_\alpha, T)$ число неизоморфных $T$-моделей мощности $\omega_\alpha$ и через $I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)$ — число неизоморфных $\omega_\gamma$-насыщенных $T$-моделей мощности $\omega_\alpha$.

**Лемма 6.** *Пусть $T$ не тотально трансцендентна и $\mathrm{Dp}(T) = 1$. Тогда $I^t(\omega_\alpha, T) = \min\left(2^{\omega_\alpha}, |\alpha + 1|^{2^\omega}\right)$ при $\alpha \geqslant 1$, $I^t(\omega, T) = 2^\omega$; $I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T) = I^t(\omega_{\alpha-\gamma}, T)$ при $\omega_\alpha \geqslant 2^\omega$, $\alpha > \gamma$.*

Доказательство. Теория $T$ не тотально трансцендентна, поэтому существует счетная $T$-модель $\mathfrak{M}$, что $|S_x(\mathfrak{M})| = 2^\omega$.

Пусть существует компонента $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{C}$, что $2^\omega$ типов над $\mathfrak{N}$ реализуются элементами из этой компоненты. Так как $\mathrm{cf}(2^\omega) \neq \omega$, $\mathrm{Dp}(T) = 1$, то по лемме 5 существуют алгебраический над $\varnothing$ элемент $b \in \mathfrak{B}$ (значит, $b \in \mathfrak{M}$), различные типы $q_i \in S_x(\mathfrak{M})$ для всех $i < 2^\omega$, содержащие формулу $(f(x) = b)$. По лемме 2 и замечанию 1 $q_i \downarrow \varnothing$ для всех $i < 2^\omega$. Типы $q_i (i < 2^\omega)$ в силу леммы 3 регулярны. Кроме того, по леммам 1, 2 они попарно ортогональны.

Предположим, что любая компонента в $\mathfrak{C}$ реализует меньше чем $2^\omega$ различных типа над $\mathfrak{M}$. Тогда в $\mathfrak{C}$ существует $2^\omega$ неизоморфных компонент, не пересекающихся с носителем $\mathfrak{M}$. Выберем в каждой из этих компонент по элементу и рассмотрим их типы над $\mathfrak{M}$, обозначим эти типы через $q_i$, где $i < 2^\omega$. По лемме 3 они регулярны, по леммам 1, 2 — попарно ортогональны.

Таким образом, существуют $2^\omega$ попарно ортогональных регулярных типов $q_i \in S_x(\mathfrak{M})$ $(i < 2^\omega)$, не являющихся копиями над $\varnothing$, и если $(f^m(x) = b_1) \in q_i$ для некоторых $i < 2^\omega$, $n \in \omega$, $b_1 \in \mathfrak{M}$, то найдется алгебраический над $\varnothing$ элемент $b$ такой, что $(f(x) = b) \in q_j$ для всех $j < 2^\omega$.

Пусть $\mathfrak{N}$ — $\omega_1$-насыщенная над $\mathfrak{M}$ модель $T$. Каждый $q_i (i < 2^\omega)$ реализуется некоторым элементом $b_i \in \mathfrak{N}$ $(i < 2^\omega)$ соответственно. Определим для $i < 2^\omega$, $\delta \leqslant \alpha$ множества $A_{i\delta} = \{b_{i\delta j} | j < \omega_\delta\}$, где элементы $b_{i\delta j}$ реализуют тип $q_i$. Для $i < 2^\omega$, $\delta \leqslant \alpha$, $j < \omega_\delta$ определим автоморфизм $g_{i\delta j}$ модели $\mathfrak{C}$: $g_{i\delta j}(b_i) = b_{i\delta j}$. Для $i < 2^\omega$, $\delta \leqslant \alpha$, $j < \omega_\delta$ обозначим: $K_{i\delta j} = g_{i\delta j}(K(b_i, \mathfrak{N}))$, если $(f(x) = b) \in q_i$ для некоторого $b \in \mathfrak{N}$ и $K_{i\delta j} = g_{i\delta j}(G(b_i, \mathfrak{N}))$ в противном случае, и $B_{i\delta} = \cup \{K_{i\delta j} | j < \omega_\delta\}$. Так как $\mathrm{Dp}(T) = 1$, то $|K_{i\delta j}| \leqslant \omega$ для всех $i < 2^\omega$, $\delta \leqslant \alpha$, $j < \omega_\delta$.

Пусть $Y = \{u \,|\, u \in {}^{\omega_\alpha}|\alpha + 1|, u(0) = \alpha\}$, если $\omega_\alpha < 2^\omega$, и $Y = \{u \,|\, u \in {}^{2^\omega}|\alpha + 1|, u(0) = \alpha\}$, если $2^\omega \leqslant \omega_\alpha$. Рассмотрим унары $\mathfrak{M}(u) = \mathfrak{M} \cup \bigcup\limits_{i \in \mathrm{dom}(u)} B_{iu(i)}$, где $u \in Y$. По лемме 1 унары $\mathfrak{M}(u)$ для $u \in Y$ будут $T$-моделями. Так как типы $q_i$ при $i < 2^\omega$ не являются копиями над $\varnothing$, то $T$-модели $\mathfrak{M}(u)$ для $u \in Y$ не являются попарно изоморфными. Поэтому $\min\left(2^{\omega_\alpha}, |\alpha + 1|^{2^\omega}\right) \leqslant I^t(\omega_\alpha, T)$. В силу [6, IV.4.9(2), V.1.10(1)] $\omega_\gamma$-простые над $\mathfrak{M}(u)$ модели $T$, где $u \in Y$ и $\gamma \leqslant u(i)$ для всех $i \in \mathrm{dom}(u)$, будут попарно неизоморфны. Ясно, что мощность их носителей совпадает с $2^\omega \omega_\alpha$. Поэтому $\min\left(2^{\omega_\alpha}, |(\alpha - \gamma) + 1|^{2^\omega}\right) \leqslant I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)$ при $\gamma \leqslant \alpha$, $2^\omega \leqslant \omega_\alpha$. Можно было поступить иначе: рассмотрев в предыдущей конструкции $\omega_\gamma$-простую над $\varnothing$ модель $T$ в качестве $\mathfrak{M}$, и воспользоваться леммой 4.

Возьмем произвольную $T$-модель $\mathfrak{N}$ и ее некоторую счетную подмодель $\mathfrak{M}$. Пусть $I_1 = \{c | c \in \mathfrak{N}, G(c, \mathfrak{N}) \cap \mathfrak{M} = \varnothing\}$ и $I_3 = \{d | d \in \mathfrak{N} \backslash \mathfrak{M}, f(d) \in \mathfrak{M}\}$. Введем подмножество $I_2$ множества $I_1$ следующим образом: для любых $c_1$, $c_2$ из $I_2$ выполняется $G(c_1, \mathfrak{N}) \cap G(c_2, \mathfrak{N}) = \varnothing$ и для любого $c_3 \in I_1$ существует $c_4 \in I_2$, для которого $G(c_3, \mathfrak{N}) = G(c_4, \mathfrak{N})$. Глубина теории $\mathrm{Dp}(T)$ равна 1, следовательно, по лемме 5 каждый элемент $\mathfrak{N} \backslash \mathfrak{M}$ является алгебраическим над некоторым элементом $I_2 \cup I_3$. Число полных типов над $\mathfrak{M}$, реализуемых элементами $I_2 \cup I_3$, не более чем $2^\omega$, а значит, $I^t(\omega_\alpha, T) \leqslant \min\left(2^{\omega_\alpha}, |\alpha + 1|^{2^\omega}\right)$ при $1 \leqslant \alpha$. Неравенство $I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T) \leqslant \min\left(2^{\omega_\alpha}, |(\alpha - \gamma) + 1|^{2^\omega}\right)$ при $\gamma \leqslant \alpha$, $2^\omega \leqslant \omega_\alpha$ получается аналогично. Так же вычисляется и число счетных $T$-моделей. Лемма 6 доказана.

По лемме 6 и [9, 4.8 или 6, IX.2.3, IX.2.4] получаем следующую теорему.

**Теорема 3.** *Пусть $T$ — полная теория унаров,* $\mathrm{Dp}(T) = 1$.

(а) *Если $T$ — суперстабильная, не тотально трансцендентная теория, то $I^t(\omega, T) = 2^\omega$ и*

$$I^t(\omega_\alpha, T) = \min\left(2^{\omega_\alpha}, |\alpha + 1|^{2^\omega}\right) \text{ при } 1 \leqslant \alpha,$$

$$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T) = \min\left(2^{\omega_\alpha}, |(\alpha - \gamma) + 1|^{2^\omega}\right) \text{ при } \gamma \leqslant \alpha,\ 2^\omega \leqslant \omega_\alpha.$$

(б) *Если $T$ — тотально трансцендентная теория, то выполняется один из следующих случаев:*

1) *$I^t(\omega_\alpha, T) = I^a(\omega, \omega_\alpha, T) = 1$ для всех $\alpha$;*

2) *$I^t(\omega, T) = \omega$, $I^a(\omega, \omega, T) = 1$, $I^t(\omega_\alpha, T) = I^a(\omega, \omega_\alpha, T) = 1$ для всех $\alpha \geqslant 1$;*

3) *$I^t(\omega, T) = I^a(\omega, \omega, T) = 1$; $I^t(\omega_\alpha, T) = I^a(\omega, \omega_\alpha, T) = |\alpha + 1|^\mu / G$ при $\alpha < \omega$ для некоторого $\mu < \omega$ и некоторой группы $G$ перестановок*

*множества* $\{0, \ldots, \mu-1\}$; $I^t(\omega_\alpha, T)=I^a(\omega, \omega_\alpha, T)=|\alpha|$ *при* $\omega\leqslant\alpha$;

4) $I^t(\omega_\alpha, T)=|\alpha+\omega|$ *для всех* $\alpha$, $I^a(\omega, \omega_\alpha, T)$ *как в случае* 3;

5) $I^t(\omega_\alpha, T)=I^a(\omega, \omega_\alpha, T)=|\alpha+1|^\omega$ *для всех* $\alpha$;

6) $I^t(\omega_\alpha, T)=|\alpha+1|^\omega\omega$, $I^a(\omega, \omega_\alpha, T)=|\alpha+1|^\omega$ *для всех* $\alpha$;

7) $I^t(\omega_\alpha, T)=|\alpha+\omega|^\omega$, $I^a(\omega, \omega_\alpha, T)=|\alpha+1|^\omega$ *для всех* $\alpha$, *причем* $I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=I^a(\omega, \omega_{\alpha-\gamma}, T)$ *для всех* $\gamma\leqslant\alpha$.

*Ко всем указанным выше случаям можно привести примеры теорий.*

Далее будем предполагать, что $\mathrm{Dp}(T)>1$.

Рассмотрим введенное в [9] понятие $p$-$a$-модели, где $p\in S_x(A)$ и $A$ — множество в $T$. Нас будет интересовать случай, когда $p\in S_x(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{A}$ — $\omega$-насыщенная модель $T$. Пусть $c_0\in\mathfrak{C}$ реализует $p$.

Модель $\mathfrak{N}$ теории $T$ называется *$p$-$a$-моделью* $T$, если $\mathfrak{N}$ — $\omega$-насыщенная модель $T$ и тип $\mathrm{tp}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M}_1)$ ортогонален $\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{M}_1$ — $\omega$-простая над $\mathfrak{M}\cup\{c_0\}$ модель $T$ и $\mathfrak{M}_1\prec\mathfrak{N}$.

**Лемма 7.** *Пусть* $p\in S_x(\mathfrak{A})$, $\mathfrak{A}$ — *$\omega$-насыщенная $T$-модель. Модель* $\mathfrak{N}$ *теории $T$ является $p$-$a$-моделью $T$ тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{N}$ — *$\omega$-насыщенная $T$-модель и для некоторой реализации* $c_0$ *типа* $p$ *в* $\mathfrak{N}$

а) $\mathfrak{N}=\mathfrak{A}\cup G(c_0, \mathfrak{N})$, *если* $\{\neg(f^m(x)=a)\,|\,a\in\mathfrak{A},\ m\in\omega\}\subseteq p$;

б) $\mathfrak{N}=\mathfrak{A}\cup K(f^{n-1}(c_0), \mathfrak{N})$, *если для некоторых* $n\in\omega$, $a_0\in\mathfrak{A}$ *тип* $p$ *содержит* $\{(f^n(x)=a_0)\}\cup\{\neg(f^m(x)=a)\,|\,m<n,\ a\in\mathfrak{A}\}$.

Доказательство вытекает из лемм 1, 4, 5.

Определение. *Пусть* $\mathfrak{M}_0$ — *$\omega$-насыщенная $T$-модель,* $p\in S_x(\mathfrak{M}_0)$, $c_0$ *реализует* $p$ *в* $\mathfrak{C}$. *Модель* $\mathfrak{M}_1$ *теории $T$ называется $p$-$a$-$\gamma$-моделью $T$, если для некоторой $\omega_\gamma$-насыщенной $T$-модели* $\mathfrak{M}_2$, *содержащей* $\mathfrak{M}_0\cup\{c_0\}$, *имеем*

а) $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_0\cup G(c_0, \mathfrak{M}_2)$, *когда* $\{\neg(f^n(x)=a)\,|\,a\in\mathfrak{M}_0,\ n\in\omega\}\subseteq p$;

б) $\mathfrak{M}_1=\mathfrak{M}_0\cup K(f^{n-1}(c_0), \mathfrak{M}_2)$, *когда для некоторых* $a_0\in\mathfrak{M}_0$, $n\in\omega$ *тип* $p$ *содержит* $\{(f^n(x)=a_0)\}\cup\{\neg(f^m(x)=a)\,|\,m<n,\ a\in\mathfrak{M}_0\}$.

Заметим, что по леммам 4, 7 *$p$-$a$-$\gamma$-модель $T$ будет $p$-$a$*-моделью $T$, и если $\gamma=0$, то понятия $p$-$a$-$\gamma$-модели $T$ и $p$-$a$-модели $T$ совпадают.

Определение. *Модель* $\mathfrak{M}_1$ *теории $T$ называется $p$-$a$-$\gamma$-простой моделью $T$, где* $p\in S_x(\mathfrak{M}_0)$ *и* $\mathfrak{M}_0$ — *$\omega$-насыщенная $T$-модель, если* $\mathfrak{M}_1$ — *$p$-$a$-$\gamma$-модель $T$ и $T$-модель* $\mathfrak{M}_2$ *из определения $p$-$a$-$\gamma$-модели $T$ будет $\omega_\gamma$-простой над* $\mathfrak{M}_0\cup\{c_0\}$ *моделью $T$.*

Определение. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *множество в* $T$, $\mathrm{acl}(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}$, $p\in S_x(\mathfrak{A})$, $c_0$ *реализует* $p$ *в* $\mathfrak{C}$. *Будем говорить, что* $\mathfrak{N}$ — *$p$-$t$-модель $T$, если для некоторой $T$-модели* $\mathfrak{N}_2$, *содержащей* $\mathfrak{A}\cup\{c_0\}$, *имеем*

а) $\mathfrak{N}=\mathfrak{A}\cup G(c_0, \mathfrak{N}_2)$, *когда* $\{\neg(f^n(x)=a)\,|\,a\in\mathfrak{A},\ n\in\omega\}\subseteq p$;

б) $\mathfrak{N}=\mathfrak{A}\cup K(f^{n-1}(c_0), \mathfrak{N}_2)$, *когда для некоторых* $n\in\omega$, $a_0\in\mathfrak{A}$ *тип* $p$ *содержит* $\{(f^n(x)=a_0)\}\cup\{\neg(f^m(x)=a)\,|\,m<n,\ a\in\mathfrak{A}\}$.

Заметим, что в силу леммы 1, если в определении множество $\mathfrak{A}$ является $T$-моделью, то $p$-$t$-модель $\mathfrak{N}$ теории будет $T$-моделью.

Предположим, что $p\in S_x(\mathfrak{A})$ и $\mathfrak{A}$ — множество в $T$, $\mathrm{acl}(\mathfrak{A})=\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — $\omega_\gamma$-насыщенная $T$-модель, $\gamma$ — ординал). Тогда две $p$-$t$($p$-$a$-$\gamma$)-модели $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ теории $T$ называются *$p$-$t$($p$-$a$)-изоморфными*, если существует тождественный на $\mathfrak{A}$ изоморфизм унаров $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$. Через $I^t(\omega_\alpha, p, T)$ ($I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, p, T)$) обозначим число не $p$-$t$($p$-$a$)-изоморфных $p$-$t$($p$-$a$-$\gamma$)-моделей $T$ мощности $\leqslant\omega_\alpha$.

Следующее определение введено в [9].

Пусть $T'$ — полная теория произвольной сигнатуры, $a$ — элемент некоторой $T'$-модели, типы $p\in S_x(A\cup B_0\cup\{a\}\cup B_1)$ и $\mathrm{tp}(a, A)$ без конечных формул, регулярны и стационарны. Тогда $p$ называется *1-$a$-последователем* $\mathrm{tp}(a, A)$, если $\mathrm{tp}(a, A\cup B_0)\not\downarrow A$, $\mathrm{tp}(B_0, A)$ — $F^a_\omega$-изолированный тип, $\mathrm{tp}(B_1, A\cup B_0\cup\{a\})$ — $F^a_\omega$-изолированный тип, который почти ортогонален $A\cup B_0$, $tp(B_1\cup\{a\}, A\cup B_0)$ стационарен и тип $p$ *ортогонален* $A\cup B_0$. Тип $p$ называется *непосредственным 1-$a$-последователем* $tp(a, A)$, если $p$ является 1-$a$-последователем $\mathrm{tp}(a, A)$ и $p$ не ортогонален $A\cup B_0\cup\{a\}$.

Изменим это определение. Пусть $p \in S_x(A \cup B_0 \cup \{a\} \cup B_1)$ — (непосредственный) 1-$a$-последователь типа $\mathrm{tp}(a, A)$, определенный, как и выше, $q \in S_x(D)$, $q$ — стационарный регулярный тип и существует $p_1 \in S_x(A \cup B_0 \cup \{a\} \cup B_1 \cup D)$, что $p \subseteq p_1$, $q \subseteq p_1$, $p_1 \downarrow (A \cup B_0 \cup \{a\} \cup B_1)$, $q \vdash p \upharpoonright \{a\}$. Тогда будем говорить, что $q$ тоже является (*непосредственным*) *1-$a$-последователем* $\mathrm{tp}(a, A)$.

По [6, V.1.2(4)] тип $q$ ортогонален $A \cup B_0$ (и не ортогонален $A \cup B_0 \cup \{a\}$, если $p$ — непосредственный 1-$a$-последователь $\mathrm{tp}(a, A)$). Если $T'$ — теория унаров, то это выполняется и по леммам 2, 5.

**Лемма 8.** *Стационарный тип $q \in S_x(D)$ является (непосредственным) 1-$a$-последователем $\mathrm{tp}(a, A)$, если и только если $q \vdash (f^m(x) = e)$ для некоторых $m \in \omega$, $e \in \mathfrak{C} \setminus \mathrm{acl}(A)$, что $\mathrm{tp}(e, A \cup \{a\}) \curlywedge A$ ($e \in \mathrm{acl}(\{a\}) \setminus \mathrm{acl}(A)$) и существует единственный $q_1 \in S_x(\{a\})$, для которого $q \cup q_1$ совместно.*

Доказательство. Пусть все используемые здесь обозначения будут как и в предыдущем определении.

Необходимость. Тип $p \in S_x(A \cup B_0 \cup \{a\} \cup B_1)$ ортогонален $A \cup B_0$ и по лемме 5 существуют $m_1 \in \omega$ и $e_1 \in \mathfrak{C} \setminus \mathrm{acl}(A \cup B_0)$, что $p \vdash (f^{m_1}(x) = e_1)$. Ясно, что $e_1 \in \mathrm{acl}(A \cup B_0 \cup \{a\} \cup B_1)$. По замечанию 1 имеем $e_1 \in \mathrm{acl}(\{a\})$ или $e_1 \in \mathrm{acl}(B_1)$. Если $p$ — непосредственный 1-$a$-последователь $\mathrm{tp}(a, A)$, то $e_1 \in \mathrm{acl}(\{a\})$ по лемме 5. Пусть $e_1 \in \mathrm{acl}(B_1)$. Без ограничения общности можно считать $e_1 \in B_1$. Тип $\mathrm{tp}(B_1, A \cup B_0 \cup \{a\})$ почти ортогонален $A \cup B_0$, поэтому для всех $b \in B_1$ имеем $\mathrm{tp}(b, A \cup B_0 \cup \{a\}) \curlywedge (A \cup B_0)$. Следовательно, в силу $\mathrm{tp}(a, A \cup B_0) \downarrow A$ для всех $b \in B_1$ по леммам 1, 2 $\mathrm{tp}(b, A \cup \{a\}) \curlywedge A$. Так как $p \subseteq p_1$, $q \subseteq p_1$, $p_1 \downarrow D$, $p_1 \downarrow \mathrm{dom}(p)$, то по леммам 1, 2 получаем требуемый результат.

Достаточность получаем из лемм 1, 2, 5, положив множества $B_0$, $B_1$ равными $A$ и $\{e\}$ соответственно.

Определим индукцией по $n \in \omega$ понятие (непосредственного) $n$-$a$-последователя типа $p_1 \in S_x(A_1)$. Понятие (непосредственного) 1-$a$-последователя уже известно. Тип $p_2 \in S_x(A_2)$ называется (*непосредственным*) *$(m+1)$-$a$-последователем типа $p_1$, если существует $p_3 \in S_x(A_3)$*, что тип $p_3$ будет (непосредственным) $m$-$a$-последователем $p_1$, и $p_2$ является (непосредственным) 1-$a$-последователем $p_3$.

Множество $\{A_i | i \in I\}$ называется *независимым над $B$*, где $I$ — множество индексов, $B$, $A_i$ — множества в $T$ для всех $i \in I$, если $\mathrm{tp}\left(A_i, B \cup \bigcup_{j \in I \setminus \{i\}} A_j\right) \downarrow B$ для всех $i \in I$.

**Лемма 9.** (а) *Пусть $\mathfrak{M}$ — модель $T$ ($\mathfrak{M}$ — $\omega_\gamma$-насыщенная $T$-модель) мощности $\omega_\alpha$, $1 \leqslant \alpha (\gamma < \alpha)$. Тогда для произвольной счетной $T$-модели $\mathfrak{M}_1$ ($\omega$-простой над $\varnothing$ модели $\mathfrak{M}_1$ теории $T$) такой, что $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$, некоторых кардиналов $\beta$, $\delta$, $\beta \leqslant 2^\omega$, множества (попарно ортогональных) типов $(p_i)_{i \in \beta} \in S_x(\mathfrak{M}_1)$ независимого над $\mathfrak{M}_1$ множества унаров $\{\mathfrak{N}_j | j \in \delta\}$, каждого $j \in \delta$ имеем: существует $i \in \beta$, что $\mathfrak{N}_j$ — $p_i$-$t$($p_i$-$a$-$\gamma$)-модели и $\mathfrak{M} = \bigcup_{j \in \delta} \mathfrak{N}_j$.*

(б) *Пусть $\mathfrak{M}$ — $p$-$t$($p$-$a$-$\gamma$)-модель $T$ мощности $\omega_\alpha$, $1 \leqslant \alpha (\gamma < \alpha)$, $p \in S_x(\mathfrak{N})$, где $\mathfrak{N}$ — счетное множество в $T$, $\mathrm{acl}(\mathfrak{N}) = \mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$ — $\omega$-насыщенная $T$-модель), $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$, элемент $c \in \mathfrak{M}$ реализует $p$. Тогда для произвольного множества $\mathfrak{M}_1$ такого, что $\mathrm{acl}(\mathfrak{N} \cup \{c\}) \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}_2$ — счетная $p$-$t$-модель $T$ ($\omega$-простой над $\mathfrak{N} \cup \{c\}$ модели $\mathfrak{M}_1$ теории $T$, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}$), некоторых кардиналов $\beta$, $\delta$, $\beta \leqslant 2^\omega$ множества попарно ортогональных типов $(q_i)_{i \in \beta} \in S_x(\mathfrak{M}_1)$ таких, что для каждого $i \in \beta$ существует $b_i \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{N}$ и $(f(x) = b_i) \in q_i$, независимого над $\mathfrak{M}_1$ множества унаров $\{\mathfrak{N}_j | j \in \delta\}$, каждого $j \in \delta$ имеем: существует $i \in \beta$, что $\mathfrak{N}_j$ — $q_i$-$t$($q_i$-$a$-$\gamma$)-модель $T$ и $\mathfrak{M} = \bigcup_{j \in \delta} \mathfrak{N}_j$.*

Доказательство. (а) Пусть $\mathfrak{M}$ — модель $T$ мощности $\omega_\alpha$. Возьмем произвольную счетную $T$-модель $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}$ и рассмотрим множества

$I_1$, $J: I_1 \cup J \subseteq \mathfrak{M} \backslash \mathfrak{N}$, $I_1 = \{a | a \in \mathfrak{M}$, $\{\neg(f^m(x) = b) | m \in \omega$, $b \in \mathfrak{M}_1\} \subseteq \mathrm{tp}(a, \mathfrak{M}_1)\}$, $J = \{a | a \in \mathfrak{M}$, $(f(x) = b) \in \mathrm{tp}(a, \mathfrak{M}_1)$ для некоторого $b \in \mathfrak{M}_1\}$. Пусть $I \subseteq I_1$ и выполняются следующие условия на $I$:

1) для каждого $a' \in I_1$ существует $a \in I$ и числа $n$, $m \in \omega$ такие, что $\models (f^n(a) = f^m(a'))$;

2) любые два различных элемента $I$ не связаны. Легко понять, что для любых $a_1$, $a_2 \in J$ типы $\mathrm{tp}(a_1, \mathfrak{M}_1)$ и $\mathrm{tp}(a_2, \mathfrak{M}_1)$ либо совпадают, либо ортогональны.

Модели $\mathfrak{N}_a = \mathfrak{M}_1 \cup G(a, \mathfrak{M})$, для $a \in I$ и $\mathfrak{N}_a = \mathfrak{M}_1 \cup K(a, \mathfrak{M})$ для $a \in J$, будут $\mathrm{tp}(a, \mathfrak{M}_1)$-$t$-моделями соответственно. По леммам 1, 2 множество $T$-моделей $\{\mathfrak{N}_a | a \in I \cup J\}$ независимо над $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{a \in I \cup J} \mathfrak{N}_a$.

Если $\mathfrak{M}$ — $\omega_\gamma$-насыщенная $T$-модель, то в качестве $\mathfrak{M}_1$ возьмем $\omega$-простую над $\varnothing$ модель $T$, $\mathfrak{M}_1 \prec \mathfrak{M}$. В силу суперстабильности теории унаров и [6, III.3.12, IV.2.2(7)] над $\mathfrak{M}_1$ существует не более $2^\omega$ полных типов. Определим, как и выше, множества $I_1$, $J$ и множество $I \subseteq I_1$, удовлетворяющее условиям 1, 2 и, кроме того, для любых элементов $a_1$, $a_2 \in I$ либо $\mathrm{tp}(a_1, \mathfrak{M}_1) = \mathrm{tp}(a_2, \mathfrak{M}_1)$, либо типы $\mathrm{tp}(a_1, \mathfrak{M}_1)$ и $\mathrm{tp}(a_2, \mathfrak{M}_1)$ ортогональны. Такое $I$ существует по леммам 1, 2 и $\omega$-насыщенности $\mathfrak{M}$, или можно использовать лемму 3 и [6, V.1.12]. Воспользовавшись леммами 4, 7, получим требуемое.

(б) Доказывается аналогично.

Замечание 2. (а) Если $T$ — тотально трансцендентная теория, то существует простая над $A$ модель $T$, где $A$ — произвольное множество в теории $T$ [6, IV.3.1, IV.3.10, IV.4.18]. Поэтому при описании $T$-модели $\mathfrak{M}$, не обязательно $\omega$-насыщенной, можно взять в лемме 9 в качестве $\mathfrak{M}_1$ простую над $\varnothing$ модель $T$ в (а) и простую над $\mathfrak{N} \cup \{c\}$ модель $T$ в (б). Над счетным множеством в тотально трансцендентной теории существует не более $\omega$ типов и мы можем считать $\beta \leqslant \omega$ в лемме 9. По [6, упражнение V.3.16; 9, 0.2] мы можем считать, что типы $(p_i)_{i \in \beta}$ попарно ортогональны, даже если $\mathfrak{M}$ не $\omega$-насыщенная $T$-модель.

(б) В лемме 9(б) по лемме 5 типы $(q_i)_{i \in \beta} \in S_x(\mathfrak{M}_1)$ будут ортогональны $\mathfrak{N}$. В силу леммы 8 они будут непосредственными $n$-$a$-последователями типа $p$ для некоторого $n \in \omega$, и если $\mathfrak{M}_1 = \mathrm{acl}(\mathfrak{N} \cup \{c\})$, то типы $(q_i)_{i \in \beta} \in S_x(\mathfrak{M}_1)$ будут непосредственными 1-$a$-последователями типа $p$. Если $\mathrm{Dp}(T) < \infty$, то $\mathrm{Dp}(q_i) < \mathrm{Dp}(p)$, $i \in \beta$.

(в) Если $\mathrm{Dp}(T) < \omega$, то в лемме 9(а) можно всегда требовать, что типы $(p_i)_{i \in \beta}$ попарно ортогональны.

Докажем пункт (в) замечания 2. Пусть $I_1$ — как в доказательстве леммы 9(а). Выберем $I \subseteq I_1$, удовлетворяющее условиям 1, 2. Если $a_1$, $a_2 \in I$ и $\neg(G(a_1, \mathfrak{C}) \cong G(a_2, \mathfrak{C}))$, то по леммам 1, 2 типы $\mathrm{tp}(a_1, \mathfrak{M}_1)$ и $\mathrm{tp}(a_2, \mathfrak{M}_1)$ ортогональны. Предположим существование $J \subseteq I$, для любых элементов $a_1$, $a_2$ которого типы $\mathrm{tp}(a_1, \mathfrak{M}_1)$ и $\mathrm{tp}(a_2, \mathfrak{M}_1)$ не ортогональны и нельзя выбрать множество $J' \subseteq I_1$, удовлетворяющее условиям: для любых $b_1$, $b_2 \in J'$ типы $\mathrm{tp}(b_1, \mathfrak{M}_1)$ и $\mathrm{tp}(b_2, \mathfrak{M}_1)$ совпадают, для каждого $a \in J$ существует $b \in J'$, что $b$ связан с $a$ и наоборот. Тогда по леммам 1, 2 множество $J$ бесконечно и существуют последовательности $(a_i)_{i \in \omega} \subseteq \mathfrak{C}$ $(n_i)_{i \in \omega} \subseteq \omega$, для которых $\models \left(f^{n_i}(a_i) = a_{i+1}\right)$ и $\mathrm{tp}(a_i, a_{i+1})$ не содержит конечной в $T$ формулы. А значит, $\mathrm{Dp}(T) > \omega$; противоречие.

Немного изменив пример теории $T_0$, для которой $\mathrm{Dp}(T_0) = \omega + 1$, приведенный в конце работы, можно показать, что ослабить условие $\mathrm{Dp}(T) < \omega$ в пункте (в) замечания 2 на условие $\mathrm{Dp}(T) < \infty$ невозможно.

Известно, что если $T'$ — суперстабильная теория и $\mathrm{Dp}(T') = \infty$, то $I^t(\omega_\alpha, T') = 2^{\omega_\alpha}$ при $1 \leqslant \alpha$ и $I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T') = 2^{\omega_\alpha}$ при $\gamma < \alpha$, $\lambda(T') \leqslant \omega_\alpha$, где $\lambda(T')$ — первый кардинал, в котором $T'$ стабильна [9,3.7 или 7,5.1]. В силу леммы 5 теория $T$ глубокая, если и только если существуют последовательности $(a_i)_{i \in \omega}$, $(n_i)_{i \in \omega}$, что $(a_i)_{i \in \omega} \subseteq \mathfrak{C}$, $(n_i)_{i \in \omega} \subseteq \omega$ и для всех

$i \in \omega$ имеем: $\models \left(f^{n_i}(a_{i+1}) = a_i\right)$ и $\operatorname{tp}(a_{i+1}, a_i)$ не содержит конечной формулы.

Кардинал $J_\beta(\alpha)$, где $\alpha$ — некоторый кардинал, $\beta$ — некоторый ординал, определяется индукцией по $\beta$: $J_0(\alpha) = \alpha$; если $\delta$ — предельный ординал, то $J_\delta(\alpha) = \sum_{\gamma<\delta} J_\gamma(\alpha)$; если $\delta = \gamma + 1$, то $J_\delta(\alpha) = 2^{J_\gamma(\alpha)}$.

Для простоты обозначений будем писать $J_\beta(g(\alpha))$ (где $g$ — некоторая функция, $\alpha$, $\beta$ — ординалы, $g(\alpha)$ — кардинал) вместо того, чтобы писать $\min\left(2^{\omega_\alpha}, J_\beta(g(\alpha))\right)$.

**Лемма 10.** *Пусть* $\mathfrak{M}_0$ *— счетное множество в* $T$, $\operatorname{acl}(\mathfrak{M}_0) = \mathfrak{M}_0$ ($\mathfrak{M}_0$ — $\omega$-*насыщенная модель* $T$), $p \in S_x(\mathfrak{M}_0)$, $2 \leqslant \operatorname{Dp}(p)$. *Тогда* $|\alpha + \omega|^{|\alpha|} \leqslant I^t(\omega_\alpha, p, T)$ *при* $1 \leqslant \alpha$ ($|\alpha + \omega|^{|\alpha - \gamma|} \leqslant I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, p, T)$ *при* $\gamma < \alpha$, $\|\mathfrak{M}_0\| \leqslant \omega_\alpha$). *Если* $\operatorname{Dp}(T) = 2$, *то* $|\alpha + \omega|^{|\alpha|} \leqslant I^t(\omega_\alpha, T)$ *при* $1 \leqslant \alpha$ *и* $|\alpha + \omega|^{|\alpha - \gamma|} \leqslant I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)$ *при* $\gamma < \alpha$, $\|\mathfrak{M}_0\| \leqslant \omega_\alpha$.

Доказательство. Пусть $a$ — реализация в $\mathfrak{C}$ типа $p$, $\mathfrak{M}_1$ — счетная $p$-$t$-модель $T$, $a \in \mathfrak{M}_1$ ($\mathfrak{M}_1$ — $p$-$a$-$\gamma$-простая модель $T$, $a \in \mathfrak{M}_1$), $q \in S_x(\mathfrak{M}_1)$ ортогонален $\mathfrak{M}_0$ и $1 \leqslant \operatorname{Dp}(q)$. Существование типа $q$ получается из условия $2 \leqslant \operatorname{Dp}(p)$ и леммы 5. Так как $\operatorname{Dp}(T) \neq \infty$, то $\operatorname{Dp}(q) < \operatorname{Dp}(p)$. Множество $\{b_{ij} | i < \omega_\alpha,\ j \in \alpha + 1\}$ — неразличимое над $\mathfrak{M}_1$ множество реализаций типа $q$, $\mathfrak{M}_{ij}$ — счетная $q$-$t$-модель $T$ ($\mathfrak{M}_{ij}$ — $p$-$a$-$\gamma$-простая модель $T$), $b_{ij} \in \mathfrak{M}_{ij}$ для $i < \omega_\alpha$, $j \in \alpha + 1$. Можно считать, что существуют изоморфизмы между унарами $\mathfrak{M}_{ij}$, $\mathfrak{M}_{kl}$, тождественные на $\mathfrak{M}_1$ и переводящие $b_{ij}$ в $b_{kl}$ при $i, k \in \omega_\alpha$, $j, l \in \alpha + 1$. По лемме 5 тип $q$ содержит множество $\{(f^m(x) = c)\} \cup \{\neg(f^n(x) = b) | b \in \mathfrak{M}_1, n < m\}$ для некоторых $m \in \omega$, $c \in \mathfrak{M}_1$. Будем предполагать, что $f^{m-1}(b_{ij}) \neq f^{m-1}(b_{kl})$ для любых $i, k \in \omega_\alpha$, $j, l \in \alpha + 1$, если $i \neq k$ или $j \neq l$.

В силу условий $1 \leqslant \operatorname{Dp}(q)$, $\operatorname{Dp}(T) \neq \infty$ для $i \in \omega_\alpha$, $j \in \alpha + 1$ существуют типы $q_{ij} \in S_x(\mathfrak{M}_{ij})$, являющиеся копиями над $\mathfrak{M}_1$ такими, что $q_{ij}$ ортогонален $\mathfrak{M}_1$ и $\operatorname{Dp}(q_{ij}) < \operatorname{Dp}(q)$ при $i \in \omega_\alpha$, $j \in \alpha + 1$. По лемме 5 любая реализация типа $q_{ij}$ будет элементом $K(f^{m-1}(b_{ij}), \mathfrak{C})$ для всех $i \in \omega_\alpha$, $j \in \alpha + 1$. Построим для $i \in \omega_\alpha$, $j \in \alpha + 1$ неразличимые над $\mathfrak{M}_{ij}$ множества $B_{ij} = \{b_{ijl} | l < \omega_j\}$, элементы которых реализуют $q_{ij}$ соответственно, и $\{f^n(b_{ijk}) | n \in \omega\} \cap \{f^n(b_{ijl}) | n \in \omega\} \subseteq \mathfrak{M}_{ij}$ и для $k, l \in \omega_j$, $k \neq l$. Пусть $\mathfrak{M}_{ij0}$ — счетная $q_{ij}$-$t$-модель $T$ ($\mathfrak{M}_{ij0}$ — $q_{ij}$-$a$-$\gamma$-простая модель $T$), $b_{ij} \in \mathfrak{M}_{ij}$ для всех $i \in \omega_\alpha$, $j \in \alpha + 1$. Определим автоморфизмы $g_{ijl}$ модели $\mathfrak{C}$, тождественные на $\mathfrak{M}_{ij}$ и $g_{ijl}(b_{ij0}) = b_{ijl}$ и алгебраические системы $\mathfrak{N}_{ij} = \bigcup\{g_{ijl}(\mathfrak{M}_{ij0}) | l \in \omega_j\}$ для $i \in \omega_\alpha$, $j \in \alpha + 1$, $l \in \omega_j$.

Рассмотрим для $h \in {}^{(\alpha+1)}(\omega \cup \{\omega_l | 0 \leqslant l \leqslant \alpha\})$ ($h \in {}^{(\alpha+1)\setminus\gamma}(\omega \cup \{\omega_l | 0 \leqslant l \leqslant \alpha\})$), удовлетворяющих условию $h(0) = \omega_\alpha$ ($h(\gamma) = \omega_\alpha$), алгебраические системы $\mathfrak{N}(h) = \bigcup\{\mathfrak{N}_{ij} | i < h(j),\ j < \alpha + 1\}$ ($\mathfrak{N}(h) = \bigcup\{\mathfrak{N}_{ij} | i < h(j)$, $\gamma \leqslant j < \alpha + 1\}$). Алгебраические системы $\mathfrak{N}(h)$ для указанных выше функций $h$ будут попарно не $p$-$t$($p$-$a$)-изоморфные $p$-$t$($p$-$a$-$\gamma$)-модели $T$ по лемме 1 (леммам 1, 4, 7, [6, III.3.11, IV.4.9]). Эти унары не будут даже изоморфными (если $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}'$ — $\omega_\gamma$-простая над $\varnothing$ модель $T$). Случай $\operatorname{Dp}(T) = 2$ рассматривается аналогично.

**Лемма 11.** (а) *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— счетное множество в* $T$, $\mathfrak{M} = \operatorname{acl}(\mathfrak{M})$ ($\mathfrak{M}$ — $\omega$-*насыщенная* $T$-*модель*), $p \in S_x(\mathfrak{M})$, $a$ *реализует* $p$ *в* $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}' = \operatorname{acl}(\mathfrak{M} \cup \{a\})$ ($\mathfrak{M}'$ — $\omega$-*простая над* $\mathfrak{M} \cup \{a\}$ *модель* $T$), $q \in S_x(\mathfrak{M}')$ *ортогонален* $\mathfrak{M}$, $\delta$ *— кардинал,* $\{\mathfrak{N}_i | i < \delta\}$ *— множество попарно не* $q$-$t$($q$-$a$)-*изоморфных* $q$-$t$($q$-$a$-$\gamma$)-*моделей* $T$ *мощности* $\leqslant \omega_\alpha$, $1 \leqslant \alpha$ ($\gamma < \alpha$). *Тогда существует множество* $\{\mathfrak{M}_i | i < J_0((\alpha + \omega)^\delta)\}$ *не* $p$-$t$($p$-$a$)-*изоморфных* $p$-$t$($p$-$a$-$\gamma$)-*моделей* $T$ *мощности* $\omega_\alpha$.

(б) *Пусть* $\mathfrak{M}$ *— счетное множество в* $T$, $\operatorname{acl}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ — $\omega$-*насыщенная* $T$-*модель*), $p \in S_x(\mathfrak{M})$, $\delta$ *— кардинал,* $\{\mathfrak{N}_i | i < \delta\}$ *— множество попарно не* $p$-$t$($p$-$a$)-*изоморфных* $p$-$t$($p$-$a$-$\gamma$)-*моделей* $T$ *мощности* $\leqslant \omega_\alpha$, $1 \leqslant \alpha$ ($\gamma < \alpha$). *Тогда существует множество* $\{\mathfrak{M}_i | i < J_0(|\alpha + \omega|^\delta)\}$ *неизоморфных* ($\omega_\gamma$-*насыщенных*) $T$-*моделей мощности* $\omega_\alpha$.

Доказательство. (а) По лемме 5 для некоторых $m \in \omega$, $b \in \mathfrak{M}'$ имеем $\{(f^m(x)=b)\} \cup \{\neg(f^n(x)=b') \mid n<m,\ b' \in \mathfrak{M}'\} \subseteq q$. Для всех $i<\delta$ и реализации $a_i$ типа $q$ в $\mathfrak{N}_i$ (по лемме 7) выполняется $\mathfrak{N}_i=\mathfrak{M}' \cup K(f^{m-1}(a_i),\ \mathfrak{N}_i)$. (Можно считать, что для всех $i<\delta$ унар $\mathfrak{N}_i$ не является $q$-$a$-$\gamma$-простой моделью $T$.) Не ограничивая общности, можно предполагать, что если $k,\ l \in \delta$, $k \neq l$, то $\vDash \neg(f^{m-1}(a_k)=f^{m-1}(a_l))$. Обозначим: $\beta=\min(\delta,\ \omega_\alpha)$.

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — счетная $p$-$t$-модель $T$, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}_1$ ($\mathfrak{M}_1$ — $p$-$a$-$\gamma$-простая модель $T$, $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{M}_1$), $\mathfrak{M}_1 \cap (\cup\{\mathfrak{N}_i \mid i<\beta\})=\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{A}_i=\mathfrak{M}_1 \cup K(f^{m-1}(a_i),\ \mathfrak{N}_i)$ для всех $i \in \beta$. Построим неразличимое над $\mathfrak{M}_1$ множество $\{b_{ij} \mid i<\beta,\ j<\omega_\alpha\}$. Для всех $i<\beta$ имеем равенство $\vDash(b_{i0}=f^{m-1}(a_i))$. Найдем для всех $i<\beta$, $j<\omega_\alpha$ автоморфизмы $g_{ij}$ модели $\mathfrak{C}$, тождественные на $\mathfrak{M}_1$ и переводящие $b_{i0}$ в $b_{ij}$. Для $h \in {}^\beta(\omega \cup \{\omega_l \mid 0 \leqslant l \leqslant \alpha\})$, удовлетворяющих условию $h(0)=\omega_\alpha$, определим алгебраические системы $\mathfrak{M}(h)=\cup\{g_{ij}(\mathfrak{A}_i) \mid i<\beta,\ j<h(i)\}$. По леммам 1, 5 (леммам 1, 4, 5, 7, [6, III.3.11, IV.4.9]) алгебраические системы $\mathfrak{M}(h)$ для указанных выше функций $h$ будут не $p$-$t$($p$-$a$)-изоморфные $p$-$t$($p$-$a$-$\gamma$)-модели $T$.

(б) Доказывается аналогично.

**Лемма 12.** (а) *Пусть $p \in S_x(A)$, $a$ — реализация $p$ в $\mathfrak{C}$, $\beta$ — кардинал, $(q_i)_{i<\beta} \in S_x(\mathrm{acl}(A \cup \{a\}))$ — максимальное множество попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей типа $p$ и $\omega<\beta$. Тогда $\beta=2^\omega$.*

(б) *Пусть $p \in S_x(A)$, $a$ — реализация $p$ в $\mathfrak{C}$, $\beta$ — кардинал, $(q_i)_{i<\beta} \in S_x(\mathrm{acl}(A \cup \{a\}))$ — максимальное множество попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей типа $p$, $\omega<\beta$ и для всех $i<\beta$ имеем $\mathrm{Dp}(q_i)=1$. Тогда $\beta=2^\omega$.*

Доказательство. (а) Пусть $\{q_i \mid i<\omega_k\}$ — множество попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей типа $p$, $\omega_k \leqslant 2^\omega$. Покажем существование множества типов $S$, удовлетворяющего условиям: $S \supseteq \{q_i \mid i<\omega_k\}$, $|S|=2^\omega$, $S$ — множество попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей типа $p$. Обозначим: $A_1=\mathrm{acl}(A \cup \{a\})$.

По лемме 8 и регулярности кардинала $\omega_1$ существует $b \in \mathrm{acl}(\{a\}) \setminus \mathrm{acl}(A)$ такой, что $\omega_1$ непосредственных 1-$a$-последователей типа $p$ содержат множество формул $\{(f^m(x)=b)\} \cup \{\neg(f^l(x)=d) \mid l<m,\ d \in A_1\}$ для некоторых $m \in \omega$, $b \in A_1$. Не ограничивая общности, можно считать, что это множество совпадает с $(q_i)_{i<\omega_k}$ и $k=1$.

Пусть $(a_i)_{i<\omega_1}$ — реализации типов $(q_i)_{i<\omega_1}$ соответственно. Рассмотрим при $i<\omega_1$ элементы $b_i=f^{m-1}(a_i)$. Типы $(q_i)_{i<\omega_1}$ попарно ортогональны, поэтому по лемме 2, если $i,\ j \in \omega_1$ и $i \neq j$, то $\mathrm{tp}(b_i,\ \mathrm{acl}(A \cup \{a\})) \neq \mathrm{tp}(b_j,\ \mathrm{acl}(A \cup \{a\}))$. По лемме 8 типы $(\mathrm{tp}(b_i,\ \mathrm{acl}(A \cup \{a\})))_{i<\omega_1}$ будут непосредственными 1-$a$-последователями типа $p$. Типы $(\mathrm{tp}(b_i,\ b))_{i<\omega_1}$ будут стационарными и $\mathrm{tp}(b_i,\ \mathrm{acl}(A \cup \{a\})) \downarrow \{b\}$ для всех $i<\omega_1$ по лемме 2. Таким образом, над $\{b\}$ существует $\omega_1$ типов, содержащих формулу $(f(x)=b)$. А значит, над $\{b\}$ существует $2^\omega$ типов $(p_i)_{i<2^\omega}$, содержащих эту формулу. В силу леммы 9 они, за исключением быть может одного, будут непосредственными 1-$a$-последователями типа $p$; по лемме 2 они попарно ортогональны.

В качестве $S$ возьмем множество $(\{p_i \mid i<2^\omega\} \setminus \{(\mathrm{tp}(b_i,\ \mathrm{acl}(A \cup \{a\})) \mid i<\omega_1\}) \cup \{q_i \mid i<\omega_1\}$. В силу леммы 2 оно будет удовлетворять требуемым условиям.

(б) По лемме 8 и регулярности кардинала $\omega_1$ существуют $n \in \omega$, $d \in \mathrm{acl}(\{a\}) \setminus \mathrm{acl}(A)$, $S \subseteq \beta$, $\omega_1 \leqslant |S|$ такие, что для всех $i \in S$ имеем $(f^n(x)=d) \in q_i$ и $1 \leqslant \mathrm{Dp}(q_i)$. Воспользовавшись ортогональностью типов $(q_i)_{i<\beta}$, как и в (а), можно считать $n=1$. По лемме 8 тип $q$, содержащий формулу $(f(x)=d)$, имеет глубину не меньше 1, если и только если для некоторого $m \in \omega$ тип $q$ содержит множество

$$\left\{\exists y_1 \ldots y_l \left(\bigwedge_{i=1}^{l} (f^m(y_i) = x) \wedge \bigwedge_{i=1}^{l} \neg (f^{m-1}(y_i) = x) \wedge \right.\right.$$

$$\left.\left. \wedge \bigwedge_{i,j=1, i \neq j}^{l} \neg (y_i = y_j)\right) \,\middle|\, l \in \omega\right\}.$$

Далее рассуждение проводится аналогично доказательству (а). Лемма 12 доказана.

**Лемма 13.** *Пусть $\mathfrak{M}$ — счетное множество в $T$, $\mathrm{acl}(\mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ — $\omega$-насыщенная $T$-модель), $p \in S_x(\mathfrak{M})$, $a$ реализует $p$ в $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{M}_1 = \mathrm{acl}(\mathfrak{M} \cup \{a\})$ ($\mathfrak{M}_1$ — $\omega$-простая над $\mathfrak{M} \cup \{a\}$ модель $T$), $(q_i)_{i<\beta} \in S_x(\mathfrak{M}_1)$, где $\beta$ — кардинал и $\omega \leqslant \beta \leqslant 2^\omega$ и $(q_i)_{i<\beta}$ — максимальное множество попарно ортогональных непосредственных 1-а-последователей $p$.*

(а) *Тогда $\beta = \omega$ или $\beta = 2^\omega$ и существует множество попарно не $p$-$t$($p$-$a$)-изоморфных $p$-$t$($p$-$a$-$\gamma$)-моделей $\{\mathfrak{N}_i \mid i < J_0(|\alpha + 1|^\beta)\}$ ($\{\mathfrak{N}_i \mid i < J_0(|(\alpha - \gamma) + 1|^\beta)\}$) теории $T$ мощности $\omega_\alpha$, $\|\mathfrak{M}\| \leqslant \omega_\alpha$, $1 \leqslant \alpha (\gamma < \alpha)$.*

(б) *Если существует $S \subseteq \beta$ такое, что $|S| = \delta \geqslant \omega$, $1 \leqslant \mathrm{Dp}(q_i)$ при $i \in S$ и $\mathrm{Dp}(q_i) = 0$ при $i \notin S$, то $\delta = \omega$ или $\delta = 2^\omega$ и существует множество $\{\mathfrak{N}_i \mid i < J_0(|\alpha + \omega|^{|\alpha| \cdot \delta})\}$ ($\{\mathfrak{N}_i \mid i < J_0(|\alpha + \omega|^{|\alpha - \gamma| \cdot \delta})\}$) попарно не $p$-$t$($p$-$a$)-изоморфных $p$-$t$($p$-$a$-$\gamma$)-моделей $T$ мощности $\omega_\alpha$, $\|\mathfrak{M}\| \leqslant \omega_\alpha$, $1 \leqslant \alpha (\gamma < \alpha)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}'$ — счетная $p$-$t$-модель $T$ ($\mathfrak{M}'$ — $p$-$a$-$\gamma$-простая модель $T$), $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}'$, $(p_i)_{i<\beta} \in S_x(\mathfrak{M}')$ $q_i \subseteq p_i$, $p_i \downarrow \mathfrak{M}_1$ для всех $i < \beta$.

(а) По леммам 2, 8, 12(а) $\beta = \omega$ или $\beta = 2^\omega$. Пусть множество $\{b_{ij} \mid j < \omega_\alpha\}$ — неразличимое над $\mathfrak{M}'$ множество реализаций типа $p_i$ и $\{f^m(b_{ik}) \mid m \in \omega\} \cap \{f^m(b_{il}) \mid m \in \omega\} \subseteq \mathfrak{M}_1$ для любых $k$, $l \in \omega_\alpha$, $k \neq l$. Обозначим: $\varepsilon = \min(\omega_\alpha, \beta)$.

Для всех $i < \varepsilon$, $j < \omega_\alpha$ построим счетные $p_i$-$t$-модели $\mathfrak{M}_{2i}$ теории $T$, $b_{i0} \in \mathfrak{M}_{2i}$ ($\mathfrak{M}_{2i}$ — $p_i$-$a$-$\gamma$-простая модель $T$, $b_{i0} \in \mathfrak{M}_{2i}$) и автоморфизмы $g_{ij}$ модели $\mathfrak{C}$ тождественные на $\mathfrak{M}'$ и $g_{ij}(b_{i0}) = b_{ij}$. Для функций $h \in {}^\varepsilon\{\omega_l \mid 0 \leqslant l \leqslant \alpha\}$ ($h \in {}^\varepsilon\{\omega_l \mid \gamma \leqslant l \leqslant \alpha\}$), удовлетворяющих условию $h(0) = \omega_\alpha$, определим унары $\mathfrak{N}(h) = \cup\{g_{ij}(\mathfrak{M}_{2i}) \mid j < h(i),\ i \in \varepsilon\}$. По лемме 1 (леммам 1, 4, 5, 7, [6, III.3.11, IV.4.9]) они будут не $p$-$t$($p$-$a$)-изоморфные $p$-$t$($p$-$a$-$\gamma$)-модели $T$.

(б) По леммам 2, 8, 12 выполняется $\delta = \omega$ или $\delta = 2^\omega$. По лемме 5 для $i < 2^\omega$ существуют $c_i \in \mathrm{acl}(\{a\}) \setminus \mathfrak{M}'$ $m_i \in \omega$ такие, что $\{(f^{m_i}(x) = c_i)\} \cup \cup \{\neg (f^m(x) = b) \mid m < m_i,\ b \in \mathfrak{M}'\} \subseteq p_i$. Возьмем для $i \in S$ неразличимое над $\mathfrak{M}'$ множество $\{b_{ij} \mid j < \omega_\alpha\}$ реализаций типа $p_i$ и $\models \neg (f^{m_i - 1}(b_{ik}) = f^{m_i - 1}(b_{il}))$ для всех $k$, $l \in \omega_\alpha$, $k \neq l$. Пусть $g_{ij}$ — автоморфизм $\mathfrak{C}$, тождественный на $\mathfrak{M}'$ и $g_{ij}(b_{i0}) = b_{ij}$, $\mathfrak{M}_{i0}$ — счетная $p_i$-$t$-модель $T$, $b_{i0} \in \mathfrak{M}_{i0}$ ($\mathfrak{M}_{i0}$ — $p_i$-$a$-$\gamma$-простая модель $T$, $b_{i0} \in \mathfrak{M}_{i0}$) для $i \in S$, $j \in \omega_\alpha$. Для $i \in S$, $j \in \omega_\alpha$ обозначим: $\mathfrak{M}_{ij} = g_{ij}(\mathfrak{M}_{i0})$.

Типы $q_{ij} \in S_x(\mathfrak{M}_{ij})$ для $i \in S$, $j \in \omega_\alpha$ являются копиями над $\mathfrak{M}'$ при фиксированном $i$, ортогональны $\mathfrak{M}'$ и $\mathrm{Dp}(q_{ij}) < \mathrm{Dp}(p_i)$ для $i \in S$, $j \in \omega_\alpha$, так как $\mathrm{Dp}(T) < \infty$. Для $i \in S$, $j \in \omega_\alpha$ множество $\{b_{ijl} \mid l < \omega_\alpha\}$ — неразличимое над $\mathfrak{M}_{ij}$ множество реализаций $q_{ij}$, $\{f^m(b_{ijk}) \mid m \in \omega\} \cap \{f^m(b_{ijl}) \mid m \in \omega\} \subseteq \mathfrak{M}_{ij}$ для любых $k$, $l \in \omega_\alpha$, $k \neq l$. Алгебраическая система $\mathfrak{M}_{ij0}$ — счетная $q_{ij}$-$t$-модель $T$ ($\mathfrak{M}_{ij0}$ — $q_{ij}$-$a$-$\gamma$-простая модель $T$), $b_{ij0} \in \mathfrak{M}_{ij0}$ для $i \in S$, $j \in \omega_\alpha$. Определим для $i \in S$, $j \in \omega_\alpha$, $l \in \omega_\alpha$ автоморфизмы $g_{ijl}$ модели $\mathfrak{C}$, тождественные на $\mathfrak{M}_{ij}$ и $g_{ijl}(b_{ij0}) = b_{ijl}$, и алгебраические системы $\mathfrak{N}_{ij\delta} = \cup \{g_{ijl}(\mathfrak{M}_{ij0}) \mid l < \omega_\delta\}$. Можно считать без ограничения общности, что $S$ — начальный сегмент $2^\omega$. Обозначим $\min(|S|, \omega_\alpha)$ через $\varepsilon$.

Рассмотрим алгебраические системы $\mathfrak{N}(h) = \cup\{\mathfrak{N}_{ij\delta} \mid 0 < h(i, \delta),\ j < h(i, \delta),\ \delta \in \alpha + 1,\ i \in \varepsilon\}$ ($\mathfrak{N}(h) = \cup\{\mathfrak{N}_{ij\delta} \mid 0 < h(i, \delta),\ j < h(i, \delta),\ \gamma \leqslant \delta \leqslant \alpha,\ i \in \varepsilon\}$) для функций $h \in {}^{\varepsilon \times (\alpha+1)}(\omega \cup \{\omega_l \mid 0 \leqslant l \leqslant \alpha\})$ ($h \in {}^{\varepsilon \times ((\alpha+1) \setminus \gamma)} \cup \{\omega_l \mid 0 \leqslant l \leqslant \alpha\})$), удовлетворяющих условию $h(0, 0) = \omega_\alpha (h(0, \gamma) =$

$=\omega_\alpha$). Алгебраические системы $\mathfrak{N}(h)$, для указанных выше функций $h$ будут не $p$-$t(p$-$a)$-изоморфные $p$-$t(p$-$a$-$\gamma)$-модели $T$ по лемме 1 (леммам 1, 4, 5, 7, [6, III.3.11, IV.4.9]). Лемма 13 доказана.

**Лемма 14.** *Пусть $\mathfrak{M}$ — счетное множество в $T$, $\operatorname{acl}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ — $\omega$-насыщенная $T$-модель), $(q_i)_{i<\beta}\in S_x(\mathfrak{M})$, где $\beta$ — кардинал, $\omega\leqslant\beta\leqslant 2^\omega$ и $(q_i)_{i<\beta}$ — максимальное множество попарно ортогональных типов.*

(а) *Тогда $\beta=\omega$ или $\beta=2^\omega$ и существует множество попарно неизоморфных ($\omega_\gamma$-насыщенных) моделей $\{\mathfrak{N}_i | i<J_0(|\alpha+1|^\beta)\}$ ($\{\mathfrak{N}_i | i<J_0(|(\alpha-\gamma)+1|^\beta)\}$) теории $T$ мощности $\omega_\alpha$, $\|\mathfrak{M}\|\leqslant\omega_\alpha$, $1\leqslant\alpha$, ($\gamma<\alpha$).*

(б) *Если существует $S\subseteq\beta$ такое, что $|S|=\delta\geqslant\omega$, $1\leqslant \operatorname{Dp}(q_i)$ при $i\in S$ и $\operatorname{Dp}(q_i)=0$ при $i\notin S$, то $\delta=\omega$ или $\delta=2^\omega$ и существует множество $\{\mathfrak{N}_i | i<J_0(|\alpha+\omega|^{|\alpha|\cdot\delta})\}$ ($\{\mathfrak{N}_i | i<J_0(|\alpha+\omega|^{|\alpha-\gamma|\cdot\delta})\}$) попарно неизоморфных ($\omega_\gamma$-насыщенных) моделей $T$ мощности $\omega_\alpha$, $\|\mathfrak{M}\|\leqslant\omega_\alpha$, $1\leqslant\alpha(\gamma<\alpha)$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 13.

**Лемма 15.** *Пусть $\mathfrak{M}$ — счетное множество в $T$, $\operatorname{acl}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$, $p\in S_x(\mathfrak{M})$, $p$ имеет непосредственный 1-$a$-последователь, являющийся неглавным типом. Тогда существует $|\alpha+\omega|$ не $p$-$t$-изоморфных $p$-$t$-моделей $T$.*

Доказательство следует из леммы 1 и теоремы об опускании типов.

Напомним, что $\lambda(T)$ — это первый кардинал, в котором $T$ стабильна. Если теория $T$ тотально трансцендентна, то $\lambda(T)=\omega$. Если теория $T'$ суперстабильна, но не тотально трансцендентна, то $\lambda(T)=2^\omega$ [6, II.3.2]. Пусть $\mathfrak{M}$ — $\omega_\gamma$-простая над $\varnothing$ модель теории унаров $T$. Тогда по [6, III.3.12, IV.2.2(7)] выполняется $\|\mathfrak{M}\|=\lambda(T)\omega_\gamma$.

**Лемма 16.** *Пусть $p\in S_x(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — счетное множество в $T$, $\operatorname{acl}(\mathfrak{M})=\mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ — $\omega$-насыщенная $T$-модель), $\operatorname{Dp}(p)=\delta$, $1\leqslant\delta$, $1\leqslant\alpha(\lambda(T)\leqslant\omega_\alpha$, $\gamma<\alpha)$. Тогда*

$$|\alpha+1|\leqslant I^t(\omega_\alpha,p,T)\leqslant J_0\left(|\alpha+1|^{2^\omega}\right)\left(|(\alpha-\gamma)+1|\leqslant I^a(\omega_\gamma,\omega_\alpha,p,T)\leqslant J_0\left(|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}\right)\right) \text{ при } \delta=1,$$

$$J_{\delta-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha|})\leqslant I^t(\omega_\alpha,p,T)\leqslant J_{\delta-1}\left(|\alpha+1|^{2^\omega}\right)\left(J_{\delta-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha-\gamma|})\leqslant I^a(\omega_\gamma,\omega_\alpha,p,T)\leqslant J_{\delta-2}\left(|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}}\right)\right) \text{ при } 2\leqslant\delta\leqslant\omega,$$

$$I^t(\omega_\alpha,p,T)=J_\delta(|\alpha+\omega|)\quad(I^a(\omega_\gamma,\omega_\alpha,p,T)=J_\delta(|\alpha+\omega|)) \text{ при } \omega<\delta.$$

Доказательство проведем индукцией по $\operatorname{Dp}(p)=\delta$. Пусть $\operatorname{Dp}(p)=\delta\geqslant1$ и $(p_i)_{i\in\beta}\in S_x(\mathfrak{M}_0)$ — максимальное множество попарно ортогональных типов, ортогональных $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}_0=\operatorname{acl}(\mathfrak{M}\cup\{c\})$ ($\mathfrak{M}_0$ — $\omega$-простая над $\mathfrak{M}\cup\{c\}$ модель $T$), $c$ — реализация $p$, $\beta$ — кардинал, $\beta\leqslant2^\omega$. По лемме 9 произвольная $p$-$t(p$-$a$-$\gamma)$-модель $T$ однозначно определяется $p_i$-$t(p_i$-$a$-$\gamma)$-моделями $T$ $(i\in\beta)$.

Если $\delta=1$, то по лемме 5 произвольная $p$-$t(p$-$a$-$\gamma)$-модель $T$ однозначно описывается мощностями множеств реализаций типов $(p_i)_{i\in\beta}$. Поэтому $I^t(\omega_\alpha,p,T)\leqslant J_0\left(|\alpha+1|^{2^\omega}\right)\left(I^a(\omega_\gamma,\omega_\alpha,p,T)\leqslant J_0\left(|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}\right)\right)$.

Если $1<\delta<\omega$, то

$$I^t(\omega_\alpha,p,T)\leqslant|\alpha+\omega|^{\left(\sup\left\{I^t(\omega_\alpha,p_i,T)|i\in\beta\right\}\right)\beta}$$

$$\left(I^a(\omega_\gamma,\omega_\alpha,p,T)\leqslant|\alpha+\omega|^{\left(\sup\left\{I^a(\omega_\gamma,\omega_\alpha,p_i,T)|i\in\beta\right\}\right)\beta}\right).$$

По индукционному предположению $I^t(\omega_\alpha,p_i,T)\leqslant J_{\delta-2}(|\alpha+1|^{2^\omega})$ $(I^a(\omega_\gamma,\omega_\alpha,p_i,T)\leqslant J_0(|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega})$, если $\delta=2$, и $I^a(\omega_\gamma,\omega_\alpha,p_i,T)\leqslant J_{\delta-3}\left(|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}}\right)$, если $\delta>2$), так как $\operatorname{Dp}(p_i)<\operatorname{Dp}(p)$ для $i\in\beta$. Следовательно, $I^t(\omega_\alpha,p,T)\leqslant J_{\delta-1}(|\alpha+1|^{\omega})\left(I^a(\omega_\gamma,\omega_\alpha,p,T)\leqslant J_{\delta-2}\right(|\alpha+$

$+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}}\big)\big)$. Если $\delta=\omega+1$, то $\sup\{I^t(\omega_\alpha, p_i, T)\,|\, i\in\beta\}\leqslant \leqslant J_\omega(|\alpha+1|^{2^\omega})=J_\omega(|\alpha+\omega|)$ $(\sup\{I^a(\omega_\gamma,\omega_\alpha, p_i, T)\,|\,i\in\beta\}\leqslant J_\omega(|\alpha+ +\omega|))$, так как $J_0(|\alpha+1|^{2^\omega})\leqslant J_2(|\alpha+\omega|)$ $\big(|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}}\leqslant \leqslant J_3(|\alpha+\omega|)\big)$. Поэтому $I^t(\omega_\alpha, p, T)\leqslant J_\delta(|\alpha+\omega|)$ $(I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, p, T)\leqslant \leqslant J_\delta(|\alpha+\omega|))$ по лемме 9. Так же получим это неравенство и при $\delta>\omega+1$.

Оценки снизу для значений функции $I^t(\omega_\alpha, p, T)$ $(I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, p, T))$ получаются ввиду [6, IV.4.9] при $\delta=1$ и далее по индукции из лемм 10, 11.

**Лемма 17.** *Если* $2\leqslant \mathrm{Dp}(T)<\omega$, *то* $J_{\mathrm{Dp}(T)-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha|})\leqslant I^t(\omega_\alpha, T)\leqslant \leqslant J_{\mathrm{Dp}(T)-1}(|\alpha+1|^{2^\omega})$ *при* $\alpha\geqslant 1$, $J_{\mathrm{Dp}(T)-2}(|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+1|})\leqslant I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)\leqslant \leqslant J_{\mathrm{Dp}(T)-2}(|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}})$ *при* $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$.

*Если* $\mathrm{Dp}(T)>\omega$, *то* $I^t(\omega_\alpha, T)=J_{\mathrm{Dp}(T)}(|\alpha+\omega|)$ *при* $\alpha\geqslant 1$ *и* $I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=I^t(\omega_\alpha, T)$ *при* $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$.

Доказательство следует из лемм 9, 11, 16.

В лемме получено описание числа моделей $T$, удовлетворяющего условию $\omega<\mathrm{Dp}(T)<\infty$. По [7, 4.4(4)], если $\mathrm{Dp}(T')<\infty$, то $\mathrm{Dp}(T')<\omega_1$, для произвольной счетной теории $T'$. Поэтому будем предполагать далее, что $1<\mathrm{Dp}(T)<\omega$.

Последовательность $((\mathfrak{M}_i, c_i))_{1\leqslant i\leqslant m}$ называется $m$-$t$($m$-$a$)-цепью для $p\in S_x(\mathfrak{M}_0)$, если $c_1$ — реализация $p$, $\mathfrak{M}_0$ — счетное множество в $T$, $\mathrm{acl}(\mathfrak{M}_0)=\mathfrak{M}_0$ ($\mathfrak{M}_0$ — $\omega$-насыщенная $T$-модель) и для $i<m$ имеем $\mathfrak{M}_{i+1}= =\mathrm{acl}(\mathfrak{M}_i\cup\{c_{i+1}\})$ ($\mathfrak{M}_{i+1}$ — $\omega$-простая над $\mathfrak{M}_i\cup\{c_{i+1}\}$ модель $T$), $\mathrm{tp}(c_{i+1},\mathfrak{M}_i)$ — регулярный тип и если $m\geqslant 2$, то ортогонален $\mathfrak{M}_{i-1}$ при $1\leqslant i\leqslant m-1$. Понятие $m$-$a$-цепи для некоторого полного типа $p$ было введено в [9].

По лемме 3 все стационарные типы в теории унаров $T$ регулярны.

Если существует $m$-$a$-цепь $((\mathfrak{M}_i, c_i))_{1\leqslant i\leqslant m}$ для типа $p\in S_x(\mathfrak{M}_0)$, то существуют множество $\mathfrak{N}_0$ в $T$ и $m$-$t$-цепь $((\mathfrak{N}_i, c_i))_{1\leqslant i\leqslant m}$ для типа $\mathrm{tp}(c_1, \mathfrak{N}_0)$ такие, что $\mathfrak{N}_i\subseteq\mathfrak{M}_i$ и $\mathrm{tp}(c_{i+1}, \mathfrak{M}_i)\downarrow\mathfrak{N}_i$ для $i\leqslant m-1$ и $\mathfrak{N}_m\subseteq\mathfrak{M}_m$. Верно и обратное утверждение.

Пусть тип $p\in S_x(\mathfrak{M}_0)$ стационарен, где $\mathfrak{M}_0$ — счетное множество в $T$ и $\mathrm{acl}(\mathfrak{M}_0)=\mathfrak{M}_0$. Если $\mathrm{Dp}(p)=\delta$, то есть $(\delta+1)$-$t$-цепь для $p$. Если есть $(\delta+1)$-$t$-цепь для $p$, то $\mathrm{Dp}(p)\geqslant\delta$.

Пусть $\mathfrak{N}$ — множество в $T$, $\mathrm{acl}(\mathfrak{N})=\mathfrak{N}$ ($\mathfrak{N}$ — $\omega$-насыщенная $T$-модель), $c$ — реализация $p\in S_x(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{N}_1=\mathrm{acl}(\mathfrak{N}\cup\{c\})$, ($\mathfrak{N}$ — $p$-$a$-$\gamma$-модель $T$, $c\in \in\mathfrak{N}_1$), $q\in S_x(\mathfrak{N}_1)$ ортогонален $\mathfrak{N}$. Тогда по лемме 5 для некоторого $n\in \in\omega\setminus\{0\}$ тип $q$ будет непосредственным $n$-$a$-последователем $p$.

Заметим, что если теория унаров не тотально трансцендентна, то по леммам 1, 2 над некоторой счетной $T$-моделью $\mathfrak{M}$ существует не менее $2^\omega$ попарно ортогональных типов. Не оговаривая особо, будем использовать эти свойства.

Пусть $\mathfrak{M}_0$ — счетное множество в $T$, $\mathrm{acl}(\mathfrak{M}_0)=\mathfrak{M}_0$ ($\mathfrak{M}_0$ — $\omega$-насыщенная $T$-модель), $p\in S_x(\mathfrak{M}_0)$, $\mathrm{Dp}(p)=\delta\geqslant 1$. Опишем функции $I^t(\omega_\alpha, p, T)$ $(I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, p, T))$. Рассмотрим для этого несколько случаев, в каждом из которых точное описание значений функции получается методом индукции по $\delta\in\omega\setminus\{0\}$. Аргументы во всех случаях одного и того же типа, поэтому приведем их только в случаях 1, 2, но будем указывать леммы, из которых следуют интересующие результаты.

По лемме 9 это описание позволяет получить точные значения для функции $I^t(\omega_\alpha, T)$ $(I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T))$ методом индукции по $\mathrm{Dp}(T)$ при аналогичном разбиении на случаи.

Случай 1. Существует $\delta$-$t$-цепь $((\mathfrak{M}_i, c_i))_{1\leqslant i\leqslant\delta}$ для $p$ и $\mathrm{tp}(c_\delta, \mathfrak{M}_{\delta-1})$ имеет $2^\omega$ попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей. По леммам 10, 11, 16 получаем

$$I^t(\omega_\alpha, p, T) = J_{\delta-1}\left(|\alpha+1|^{2^\omega}\right) \text{ при } \alpha \geqslant 1$$

$$\left(I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, p, T) = J_0\left(|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}\right) \text{ при } \delta = 1,\ \omega_\alpha \geqslant \lambda(T),\ \gamma < \alpha,\right.$$

$$\left.I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, p, T) = J_{\delta-2}\left(|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}}\right) \text{ при } \delta \geqslant 2,\ \omega_\alpha \geqslant \lambda(T), \gamma < \alpha\right).$$

Случай 2. Пусть условия случая 1 не выполнены, но существует $\delta$-$t$-цепь $((\mathfrak{M}_i, c_i))_{1\leqslant i\leqslant\delta}$ для $p$ такая, что $\mathrm{tp}(c_\delta, \mathfrak{M}_{\delta-1})$ имеет $\omega$ попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей. Тогда

$$I^t(\omega_\alpha, p, T) = J_{\delta-1}(|\alpha+1|^\omega) \text{ при } \alpha \geqslant 1$$

$$\left(I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, p, T) = |(\alpha-\gamma)+1|^\omega \text{ при } \delta = 1,\ \omega_\alpha \geqslant \lambda(T),\ \gamma < \alpha,\right.$$

$$\left.I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, p, T) = J_{\delta-2}\left(|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+1|^\omega}\right) \text{ при } \delta \geqslant 2,\ \omega_\alpha \geqslant \lambda(T), \gamma < \alpha\right).$$

Так как $\delta \geqslant 1$, то по лемме 9 произвольная $p$-$t$-модель описывается $p_j$-$t$-моделями $T$ для некоторых попарно ортогональных типов $(p_j)_{j\in\beta} \in S_x(\mathfrak{M}_\delta)$, ортогональных $\mathfrak{M}_{\delta-1}$.

Если $\delta = 1$, то по леммам 5, 9 произвольная $p$-$t$-модель $T$ описывается мощностями множеств реализаций в ней типов $(p_j)_{j\in\beta}$. По лемме 12(а) имеем $\beta \leqslant \omega$. Поэтому при $\delta = 1$ наше предположение верно.

Если $\delta > 1$, тогда $p$-$t$-модель $T$ описывается $p_j$-$t$-моделями $T$, где $j \in \beta$, $\mathrm{Dp}(p_j) \leqslant \delta - 1$ при $j \in \beta$ и $\beta \leqslant 2^\omega$. Если для некоторого $j \in \beta$ выполняется $\mathrm{Dp}(p_j) = \delta - 1$, то не существует $(\delta-1)$-$t$-цепи $((\mathfrak{N}_i, e_i))_{1\leqslant i\leqslant\delta-1}$ для типа $p_j$, что $\mathrm{tp}(e_{\delta-1}, \mathfrak{N}_{\delta-2})$ имеет $2^\omega$ попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей и $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{M}_1$, по индукционному предположению $I^t(\omega_\alpha, p, T) \leqslant J_{\delta-2}(|\alpha+1|^\omega)$. Если $\mathrm{Dp}(p_j) \leqslant \delta - 2$, $j \in \beta$, то по лемме 16 имеем $I^t(\omega_\alpha, p_j, T) \leqslant J_{\delta-3}\left(|\alpha+1|^{2^\omega}\right)$ при $\delta \geqslant 3$ и $I^t(\omega_\alpha, p_j, T) = 1$ при $\delta = 2$ по лемме 5. Отсюда по лемме 9 получаем $I^t(\omega_\alpha, p, T) \leqslant |\alpha+\omega|^{|\alpha+1|^\omega}$ при $\delta=2$, $\alpha \geqslant 1$ и $I^t(\omega_\alpha, p, T) \leqslant |\alpha+\omega|^{J_{\delta-2}(|\alpha+1|^\omega) J_{\delta-3}(|\alpha+1|^{2^\omega})}$ при $\delta \geqslant 3$, $\alpha \geqslant 1$, т. е. $I^t(\omega_\alpha, p, T) \leqslant J_{\delta-1}(|\alpha+1|^\omega)$ при $\alpha \geqslant 1$. (Аналогично вычисляется и $I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, p, T)$.)

Случай 3. Пусть условия случаев 1, 2 не выполнены, но существует $(\delta-1)$-$t$-цепь для $p$ такая, что $\mathrm{tp}(c_{\delta-1}, \mathfrak{M}_{\delta-2})$ имеет $2^\omega$ попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей глубины 1. В силу предположения $\delta \geqslant 2$. По леммам 9, 11—14, 16

$$I^t(\omega_\alpha, p, T) = J_{\delta-2}\left(|\alpha+\omega|^{|\alpha+2^\omega|}\right) \text{ при } \alpha \geqslant 1$$

$$\left(I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, p, T) = J_{\delta-2}\left(|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+2^\omega|}\right) \text{ при } \omega_\alpha \geqslant \lambda(T),\ \gamma < \alpha\right).$$

Случай 4. Пусть условия случаев 1—3 не выполнены, но существуют $(\delta-1)$-$t$-цепь $((\mathfrak{M}_i, c_i))_{1\leqslant i\leqslant\delta-1}$ для $p$ такая, что $\mathrm{tp}(c_{\delta-1}, \mathfrak{M}_{\delta-2})$ имеет $\omega$ попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей глубины 1, и $(\delta-1)$-$t$-цепь $((\mathfrak{N}_i, e_i))_{1\leqslant i\leqslant\delta-1}$ для $p$ такая, что $\mathrm{tp}(e_{\delta-1}, \mathfrak{N}_{\delta-2})$ имеет $2^\omega$ попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей. В силу предположения $\delta \geqslant 2$. По леммам 9, 11—14, 16

$$I^t(\omega_\alpha, p, T) = J_{\delta-2}\left(|\alpha+1|^{2^\omega}\right) J_{\delta-2}\left(|\alpha+\omega|^{|\alpha+\omega|}\right) = J_{\delta-2}\left(|\alpha+\omega|^{|\alpha+2^\omega|}\right)$$

при $\alpha \geqslant 1$

$$\left(I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, p, T) = J_0\left(|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+\omega|}\, |(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}\right) \text{ при } \delta = 2, \omega_\alpha \geqslant \right.$$

$\geqslant \lambda(T)$, $\gamma < \alpha$,

$$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, p, T) = J_{\delta-2}\left(|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+\omega|}\right) J_{\delta-3}\left(|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}}\right)$$

при $\delta \geqslant 3$, $\omega_\alpha \geqslant \lambda(T)$, $\gamma < \alpha$).

Случай 5. Пусть условия случаев 1—4 не выполнены, но существует $(\delta-1)$-$t$-цепь $((\mathfrak{M}_i,\ c_i))_{1\leqslant i\leqslant \delta-1}$ для $p$ такая, что $\mathrm{tp}(c_{\delta-1},\ \mathfrak{M}_{\delta-2})$ имеет $2^\omega$ попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей. Тогда $\delta\geqslant 2$, и по леммам 9—11, 13, 14, 16

$I^t(\omega_\alpha,\ p,\ T)=J_{\delta-2}(\,|\alpha+\omega|^{|\alpha+2^\omega|})$ при $\alpha\geqslant 1$

$(I^a(\omega_\gamma,\ \omega_\alpha,\ p,\ T)=J_0(\,|\alpha+\omega|^{|\alpha-\gamma|}\,|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega})$ при $\delta=2,\ \omega_\alpha\geqslant \geqslant\lambda(T),\ \gamma<\alpha,$

$I^a(\omega_\gamma,\ \omega_\alpha,\ p,\ T)=J_{\delta-2}(\,|\alpha+\omega|^{|\alpha-\gamma|})\,J_{\delta-3}\left(\,|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}}\right)$

при $\delta\geqslant 3,\ \omega_\alpha\geqslant\lambda(T),\ \gamma<\alpha)$.

Случай 6. Пусть условия случаев 1—5 не выполнены, но существует $(\delta-1)$-$t$-цепь $((\mathfrak{M}_i,\ c_i))_{1\leqslant i\leqslant \delta-1}$ для $p$ такая, что $\mathrm{tp}(c_{\delta-1},\ \mathfrak{M}_{\delta-2})$ имеет $\omega$ попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей глубины 1. Следовательно, $\delta\geqslant 2$. По леммам 9—11, 13, 14, 16

$I^t(\omega_\alpha,\ p,\ T)=J_{\delta-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha+\omega|})=J_{\delta-1}(|\alpha+\omega|)$ при $\alpha\geqslant 1$

$(I^a(\omega_\gamma,\ \omega_\alpha,\ p,\ T)=J_{\delta-2}(|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+\omega|})$ при $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T),\ \gamma<\alpha)$.

Случай 7. Пусть условия случаев 1—6 не выполнены, но существует $(\delta-1)$-$t$-цепь $((\mathfrak{M}_i,\ c_i))_{1\leqslant i\leqslant \delta-1}$ для $p$ такая, что $\mathrm{tp}(c_{\delta-1},\ \mathfrak{M}_{\delta-2})$ имеет $\omega$ попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей. Поэтому $\delta\geqslant 2$. По леммам 9—11, 13, 14, 16

$I^t(\omega_\alpha,\ p,\ T)=J_{\delta-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha+\omega|})=J_{\delta-1}(|\alpha+\omega|)$ при $\alpha\geqslant 1$

$I^a(\omega_\gamma,\ \omega_\alpha,\ p,\ T)=J_0(|\alpha+\omega|^{|\alpha-\gamma|}|(\alpha-\gamma)+1|^\omega)$ при $\delta=2,\ \omega_\alpha\geqslant\lambda(T),$ $\gamma<\alpha,$

$I^a(\omega_\gamma,\ \omega_\alpha,\ p,\ T)=J_{\delta-2}(\,|\alpha+\omega|^{|\alpha-\gamma|})\,J_{\delta-3}(\,|\alpha+\omega|^{|(\alpha-\gamma)+1|^\omega})$ при $\delta\geqslant \geqslant 3,\ \omega_\alpha\geqslant\lambda(T),\ \gamma<\alpha)$.

Случай 8. Пусть условия случаев 1—7 не удовлетворены, но существует $\delta$-$t$-цепь $((\mathfrak{M}_i,\ c_i))_{1\leqslant i\leqslant \delta-1}$ для $p$, что $\mathrm{tp}(c_\delta,\ \mathfrak{M}_{\delta-1})$ имеет неглавный непосредственный 1-$a$-последователь. Тогда по леммам 9—11, 15, 16

$I^t(\omega_\alpha,\ p,\ T)=J_{\delta-1}(|\alpha+\omega|)$ при $\alpha\geqslant 1$

$(|(\alpha-\gamma)+1|\leqslant I^a(\omega_\gamma,\ \omega_\alpha,\ p,\ T)\leqslant|(\alpha-\gamma)+\omega|$ при $\delta=1,\ \omega_\alpha\geqslant\lambda(T),$ $\gamma<\alpha,$

$I^a(\omega_\gamma,\ \omega_\alpha,\ p,\ T)=J_{\delta-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha|})$ при $\delta\geqslant 2,\ \omega_\alpha\geqslant\lambda(T),\ \gamma<\alpha)$.

Случай 9. Пусть условия предыдущих случаев не выполнены. По леммам 9—11, 16

$|\alpha+1|\leqslant I^t(\omega_\alpha,\ p,\ T)\leqslant|\alpha+\omega|$ при $\delta=1,\ \alpha\geqslant 1,$

$I^t(\omega_\alpha,\ p,\ T)=J_{\delta-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha|})$ при $\delta\geqslant 2,\ \alpha\geqslant 1$

$(|(\alpha-\gamma)+1|\leqslant I^a(\omega_\gamma,\ \omega_\alpha,\ p,\ T)\leqslant|(\alpha-\gamma)+\omega|$ при $\delta=1,\ \omega_\alpha\geqslant\lambda(T),$ $\gamma<\alpha,$

$I^a(\omega_\gamma,\ \omega_\alpha,\ p,\ T)=J_{\delta-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha-\gamma|})$ при $\delta\geqslant 2,\ \omega_\alpha\geqslant\lambda(T),\ \gamma<\alpha)$.

Неточность описания функции $I^t(\omega_\alpha,\ p,\ T)\ (I^a(\omega_\gamma,\ \omega_\alpha,\ p,\ T))$, когда $\mathrm{Dp}(p)=1$ в случае 9 (случаях 8, 9) при $\alpha<\omega\ (\alpha-\gamma<\omega)$ связана с тем, что $p$ может иметь любое конечное число попарно ортогональных непосредственных 1-$a$-последователей. Можно было бы получить точные значения этих функций рассуждениями, аналогичными проведенным Ю. Заффе [9] в случае $\mathrm{Dp}(T)=1$, но это не нужно, так как нас интересуют функции $I^t(\omega_\alpha,\ T)$, $I^a(\omega_\gamma,\ \omega_\alpha,\ T)$. А при описании $I^t(\omega_\alpha,\ T)$ $(I^a(\omega_\gamma,\ \omega_\alpha,\ T))$, когда $\mathrm{Dp}(T)=2$, лемма 10 позволяет получить значения этих функций при всех $\alpha\geqslant 1$ $(\omega_\alpha\geqslant\lambda(T),\ \gamma<\alpha)$.

Легко заметить, что значения функций $I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)$ в случаях 3—5, так же как и в случаях 6—8, совпадают не для всех $\alpha$, $\gamma$.

Воспользовавшись описанием Ю. Е. Шишмарева счетно-категоричных теорий унаров ([1] или [3, теорема 3]) и [3, теорема 1] получим следующую теорему.

**Теорема 4.** *Пусть $T$ — полная теория унаров, $\mathrm{Dp}(T)=\beta\geqslant 2$. Тогда выполняется один из следующих случаев*:

1) $\beta<\omega$, $I^t(\omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-1}(|\alpha+1|^{2^\omega}))$ *при* $\alpha\geqslant 1$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=\min\left(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-2}\left(|\alpha+1|^{|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}}\right)\right)$ *при* $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$;

2) $\beta<\omega$, $I^t(\omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-1}(|\alpha+1|^{\omega}))$ *при* $\alpha\geqslant 1$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-2}(|\alpha+1|^{|(\alpha-\gamma)+1|^{\omega}}))$ *при* $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$;

3) $\beta<\omega$, $I^t(\omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-1}(|\alpha+2^\omega|))$ *при* $\alpha\geqslant 1$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-2}(|\alpha+1|^{|(\alpha-\gamma)+2^\omega|}))$ *при* $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$;

4) $\beta<\omega$, $I^t(\omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-1}(|\alpha+2^\omega|))$ *при* $\alpha\geqslant 1$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, (|\alpha+1|^{|(\alpha-\gamma)+\omega|}|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}))$ *при* $\beta=2$, $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=\min\left(J_{\beta-2}(|\alpha+1|^{|(\alpha-\gamma)+\omega|})J_{\beta-3}\left(|\alpha+1|^{|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}}\right), 2^{\omega_\alpha}\right)$ *при* $\beta\geqslant 3$, $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$;

5) $\beta<\omega$, $I^t(\omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-1}(|\alpha+2^\omega|))$ *при* $\alpha\geqslant 1$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, (|\alpha+\omega|^{|\alpha-\gamma|}|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}))$ *при* $\beta=2$, $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=\min\left(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha-\gamma|})\,J_{\beta-3}\left(|\alpha+1|^{|(\alpha-\gamma)+1|^{2^\omega}}\right)\right)$ *при* $\beta\geqslant 3$, $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$;

6) $\beta<\omega$, $I^t(\omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-1}(|\alpha+\omega|))$ *при* $\alpha\geqslant 1$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-2}(|\alpha+1|^{|(\alpha-\gamma)+\omega|}))$ *при* $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$;

7) $\beta<\omega$, $I^t(\omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-1}(|\alpha+\omega|))$ *при* $\alpha\geqslant 1$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, (|\alpha+\omega|^{|\alpha-\gamma|}\cdot|(\alpha-\gamma)+1|^{\omega}))$ *при* $\beta=2$, $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha-\gamma|})\,J_{\beta-3}(|\alpha+1|^{|(\alpha-\gamma)+1|^{\omega}}))$ *при* $\beta\geqslant 3$, $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$;

8) $\beta<\omega$, $I^t(\omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-1}(|\alpha+\omega|))$ *при* $\alpha\geqslant 1$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha-\gamma|}))$ *при* $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$;

9) $\beta<\omega$, $I^t(\omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha|}))$ *при* $\alpha\geqslant 1$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_{\beta-2}(|\alpha+\omega|^{|\alpha-\gamma|}))$ *при* $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$;

10) $\omega<\beta<\omega_1$, $I^t(\omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_\beta(|\alpha+\omega|))$ *при* $\alpha\geqslant 1$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=\min(2^{\omega_\alpha}, J_\beta(|\alpha+\omega|))$ *при* $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$;

11) $\beta=\infty$, $I^t(\omega_\alpha, T)=2^{\omega_\alpha}$ *при* $\alpha\geqslant 1$,

$I^a(\omega_\gamma, \omega_\alpha, T)=2^{\omega_\alpha}$ *при* $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$, $\gamma<\alpha$; *и*

$I^a(\omega_\alpha, \omega_\alpha, T)=1$ *для всех* $\alpha$ *таких, что* $\omega_\alpha\geqslant\lambda(T)$.

*Если теория* $T$ *суперстабильная, нетотально трансцендентная, то* $\lambda(T)=2^\omega$ *и возможны только случаи* 1—5, 10, 11 *и при* $\omega>\beta\geqslant 3$ *случаи* 6—9. *Кроме того,* $I^t(\omega, T)=2^\omega$.

*Если теория* $T$ *тотально трансцендентная, то* $\lambda(T)=\omega$ *и возможны только случаи* 2, 6—11. *В случаях* 2, 6—8, 10, 11 $I^t(\omega, T)$ *может быть равно* $\omega$, $2^\omega$, *в случае* 9—1, $\omega$, $2^\omega$.

Ко всем указанным в теореме случаям можно привести примеры теорий. На одном из них следует особо остановиться: примере теории унаров $T_0$, когда $\mathrm{Dp}(T_0)=\omega+1$. Он существует, несмотря на теорему, приписываемую С. Шелаху в [3].

Опишем счетный унар $\mathfrak{M}$, теория которого будет удовлетворять требуемому условию:

1) для всех $m\in\omega$ множество $P_m$ в теории $T_0$ является компонентой в $\mathfrak{M}$, $\bigcup\limits_{m\in\omega} P_m=\mathfrak{M}$, и в каждой компоненте $P_m$ существует единственный элемент $a_m$, для которого выполняется $\mathfrak{M}\models(f(a_m)=a_m)$;

2) каждый элемент $\mathfrak{M}$ имеет не больше одного $f$-прообраза либо бесконечное множество $f$-прообразов;

3) пусть $A_{nm}=\{a\in P_m\,|\,\mathfrak{M}\models(f^n(a)=a_m)\wedge\neg(f^{n-1}(a)=a_m)\}$ для $m\in\omega$, $n\in\omega\setminus\{0\}$ и $A_{0m}=\{a_m\}$ для $m\in\omega$;

4) для всех $m\in\omega$ элементы $A_{nm}$, где $n=l(m+2)$ для некоторого $l<m+1$, имеют бесконечное множество $f$-прообразов, при $n<(m+1)\times(m+2)$ и $n\neq l(m+2)$ для всех $l<m+1$ элементы $A_{nm}$ имеют точно один $f$-прообраз, элементы $A_{(m+1)(m+2)m}$ не имеют ни одного $f$-прообраза, т. е. $\bigcup\limits_{n\leqslant(m+1)(m+2)} A_{nm}=P_m$.

Таким образом, теоремы 3, 4 дают полное описание числа неизоморфных моделей полных теорий унаров во всех бесконечных мощностях.

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Шишмарев Ю. Е.** О категоричных теориях одной функции // Мат. заметки.— 1972.— Т. 11, № 1.— С. 89—98.
2. **Marcus L.** Minimal models of theories of one function symbol // Isr. J. math.— 1974.— V. 18, N 2.— P. 117—131.
3. **Idem.** The number of a countable models of a theory of one unary function // Fund. math.— 1980.— V. CVIII, N 3.— P. 171—181.
4. **Иванов А. А.** Полные теории унаров // Алгебра и логика.— 1984.— Т. 23, № 1.— С. 48—73.
5. **Рябкин А. Н.** О числе неизоморфных моделей полных теорий унаров // 7-я Всесоюз. конф. по мат. логике, посвящ. 75-летию акад. А. И. Мальцева, Новосибирск, сент. 1984 г.: Тез. докл.— Новосибирск, 1984.— С. 155.
6. **Shelah S.** Classification theory and the number of non-isomorphic models.— Amsterdam a. o.: North-Holland, 1978.
7. **Shelah S.** The spectrum problem. I: $\omega_\varepsilon$-saturated models, the main gap // Isr. J. math.— 1982.— V. 43, N 4.— P. 324—356.
8. **Shelah S.** The spectrum problem. II: Totally transcendental and infinite depth // Ibid.— P. 357—364.
9. **Saffe J.** The number of uncountable models of $\omega$-stable theories // Ann. pure and appl. log.— 1983.— V. 24, N 3.— P. 231—261.
10. **Shelah S.** The spectrum problem III: Universal theories.— 1983.— (Preprint).
11. **Shelah S.** The spectrum problem IV: the main gap for countable theories.— 1983.— (Preprint).
12. **Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.** Математическая логика.— М.: Наука, 1979.
13. **Палютин Е. А.** Спектр и структура моделей полных теорий // Справочная книга по математической логике.— М.: Наука, 1982.— Т. 1.— С. 320—387.
14. **Сакс Дж. Е.** Теория насыщенных моделей: Пер. с англ.— М.: Наука, 1976.
15. **Йех Т.** Теория множеств и метод форсинга: Пер. с англ.— М.: Мир, 1973.
16. **Saffe J.** Einibe Ergebnisse über die Anzahl abzählbarer Modelle superstabiler Theorien: Dissertation.— Univ. Hannover, 1981.