ТЕОРЕМА СРАВНЕНИЯ УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. А. АКБАРОВ, В. А. ТОПОНОГОВ

Для полного риманова многообразия $M^n(k)$, секционная кривизна которого ограничена снизу числом k, справедлива теорема сравнения углов треугольника: если ABC — треугольник в $M^n(k)$, составленный из кратчайших, то его углы не меньше соответствующих углов треугольника $A'B'C'$ с теми же длинами сторон в плоскости R_k постоянной кривизны k [1, 2]. Условие ограниченности секционной кривизны снизу числом k эквивалентно следующему: нормальные кривизны сферы произвольного радиуса r в $M^n(k)$ не превосходят геодезической кривизны окружности того же радиуса r в плоскости R_k.

В работе определяются римановы многообразия $M^n(r_0, k)$, в которых указанное условие выполняется не для всех сфер, а только для сфер с радиусами не меньше, чем r_0. Оказывается, что в этом случае теорема сравнения углов остается справедливой для достаточно больших треугольников, а именно для таких, у которых расстояние от любой вершины до противоположной стороны не меньше r_0. Более общая и точная формулировка теоремы дана в § 1. Доказательство этой теоремы проводится по стандартной схеме, предложенной А. Д. Александровым (в доказательстве нуждается только лемма об «узких треугольниках» [1]). Из основной теоремы выводится ряд геометрических следствий, обобщающих известные уже теоремы для римановых многообразий $M^n(k)$.

§ 1. Определение римановых многообразий классов $M^n(r_0, k)$ и $M^n(r_0, k^+)$. Формулировки основных теорем

Пусть M^n — полное риманово бесконечно дифференцируемое многообразие размерности n. Компоненты метрического тензора M^n обозначим через g_{ij}, $i, j=\overline{1, n}$, расстояние между точками A и B — через AB, а кратчайшую, соединяющую точки A и B — через $\overline{AB}$; при этом будем считать, что на $\overline{AB}$ задана ориентация от начала A к концу B. Пусть γ — произвольная кратчайшая в M^n, $\gamma(t)$ — ее параметризация, заданная с помощью длины дуги t, отсчитываемой от одного из ее концов, $0<t<l$, $l=l(\gamma)$ — длина γ. Пусть в точке $\gamma(l)$ задан вектор $\lambda\neq\pm\dot{\gamma}(l)$. Обозначим через $\lambda(t)$ вектор в точке $\gamma(t)$, полученный из λ параллельным переносом вдоль γ, а через $k(t)$ — риманову кривизну M^n в точке $\gamma(t)$ и в двумерном направлении, определенном векторами $\lambda(t)$ и $\dot{\gamma}(t)$. Пусть, далее, $\eta(t)$ — решение уравнения $\eta''+k(t)\eta=0$ с начальными условиями $\eta(0)=0$, $\eta'(0)=1$ и

$$f_k(t)=\begin{cases}(1/\sqrt{k})\sin\sqrt{k}t & \text{при } k>0,\\ t & \text{при } k=0,\\ (1/\sqrt{|k|})\operatorname{sh}\sqrt{|k|}\,t & \text{при } k<0.\end{cases}$$

Введем обозначение:

$$\omega(\gamma, \lambda, k) = \int_0^l (k(t) - k)\,\eta(t)\, f_k(t)\, dt.$$

Определение. Будем говорить, что *полное риманово многообразие M^n принадлежит классу $M^n(r_0, k)$* (соотв. $M^n(r_0, k^+)$), если для любой кратчайшей γ, длины, не меньшей, чем r_0, и любого вектора λ, $\lambda \neq \dot{\gamma}(l)$, справедливо неравенство $\omega(\gamma, \lambda, k) \geq 0$ (соотв. $\omega(\gamma, \lambda, k) > 0$).

Условие $\omega(\gamma, \lambda, k) \geq 0$ при $l(\gamma) \geq r_0$, как уже упоминалось, эквивалентно тому, что нормальные кривизны всех сфер в $M^n \in M^n(r_0, k)$, радиус которых не меньше, чем r_0, не превосходят геодезической кривизны окружности того же радиуса в R_k. Нормальные кривизны сфер в M^n и окружностей в R_k определяются так, чтобы для сфер в M^n и окружностей в R_k малого радиуса они были положительными.

Под *треугольником в* M^n мы будем понимать фигуру, состоящую из трех вершин A, B, C и трех кратчайших $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, и будем обозначать через $\triangle ABC$, опуская указание на то, какие именно кратчайшие соединяют его вершины. *Углом треугольника* ABC в некоторой его вершине будем называть угол между касательными к кратчайшим, выходящим из этой вершины. Треугольник $ABC \subset M^n \in M^n(r_0, k)$ назовем *допустимым относительно одной из его вершин*, если расстояние от этой вершины до противоположной стороны не меньше, чем r_0, и просто *допустимым*, если $\triangle ABC$ является допустимым относительно всех своих вершин. Для $k > 0$ под R_k мы понимаем двумерную сферу радиуса $1/\sqrt{k}$, и в этом случае будем дополнительно предполагать, что $r_0 < \pi/\sqrt{k}$. Каждому $\triangle ABC$ в M^n сопоставим $\triangle A'B'C'$ с теми же длинами сторон в плоскости R_k ($A'B' = AB$, $A'C' = AC$, $B'C' = BC$). Треугольник $A'B'C'$ будем называть *треугольником сравнения для* $\triangle ABC$.

Теорема 1 (основная). *Если в многообразии $M^n \in M^n(r_0, k)$ треугольник ABC является допустимым относительно одной из своих вершин, то его углы при двух других вершинах не меньше соответствующих углов треугольника сравнения $A'B'C'$.*

Из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Если в многообразии $M^n \in M^n(r_0, k)$ треугольник ABC является допустимым относительно двух или трех своих вершин, то все углы треугольника ABC не меньше соответствующих углов треугольника сравнения $A'B'C'$.*

Треугольник ABC будем называть *вырожденным*, если длина одной из его сторон равна сумме длин двух других, и *невырожденным* в противном случае.

Теорема 3. *Если в многообразии $M^n \in M^n(r_0, k^+)$ невырожденный треугольник ABC является допустимым относительно одной из его вершин, то его углы при двух других вершинах строго больше соответствующих углов треугольника сравнения $A'B'C'$.*

Из теоремы 3 следует

Теорема 4. *Если в многообразии $M^n \in M^n(r_0, k)$ невырожденный треугольник ABC является допустимым относительно двух или трех своих вершин, то все углы $\triangle ABC$ строго больше соответствующих углов треугольника сравнения $A'B'C'$.*

§ 2. Координаты Ферми. Вторая вариация длины и пленки Синга

Координатами Ферми в M^n в окрестности геодезической линии γ будем называть такие координаты $(u^1, u^2, \ldots, u^n)$, что $u^2 = \ldots = u^n = 0$ вдоль γ и $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 0$ $(i, j, k = \overline{1, n})$ в точках геодезической γ. Такие координаты были введены Ферми (см., например, [2, с. 99]).

Рассмотрим подробнее двумерный случай. Обозначим через $O(0, 0)$ и $A(l, 0)$ концы γ. Предположим, что A не сопряжена точке O вдоль γ. Тогда для любой точки $A(z):=(l, z)$ при достаточно малых $|z|$ существует единственная близкая к γ геодезическая линия γ_z, соединяющая O с $A(z)$. Пусть $u^2=u^2(u^1, z)$ — уравнение γ_z, $u^2(u^1, 0)=0$, $u^2(0, z)=0$, $u^2(l, z)=z$ и $l(z)$ — длина γ_z:

$$l(z)=\int\limits_0^l \sqrt{g_{11}+2g_{12}\frac{\partial u^2}{\partial u^1}+g_{22}\left(\frac{\partial u^2}{\partial u^1}\right)^2}\,du^1.$$

Через $k(u^1)$ обозначим гауссову кривизну M^2 вдоль γ, и пусть

$$\tilde{\xi}(u^1)=\left.\frac{\partial u^2}{\partial z}\right|_{z=0},\quad \theta(u^1)=\left.\frac{\partial^2 u^2}{\partial z^2}\right|_{z=0}$$

Тогда $\tilde{\xi}(0)=0$, $\tilde{\xi}(l)=1$, $\theta(0)=0$, $\theta(l)=0$. Пользуясь свойствами метрического тензора в координатах Ферми, нетрудно вывести следующие формулы [2, с. 100; 3]:

$$k(u^1)=\frac{1}{2\left(g_{11}g_{22}-g_{12}^2\right)}\left.\frac{\partial^2 g_{11}}{\partial (u^1)^2}\right|_{u^2=0}, \tag{2.1}$$

$$\left.\frac{dl}{dz}\right|_{z=0}=\frac{g_{12}(u^1, 0)}{\left(g_{11}(u^1, 0)\right)^{1/2}}, \tag{2.2}$$

$$\left.\frac{d^2 l}{dz^2}\right|_{z=0}=\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}{(g_{11})^{3/2}}\int\limits_0^l\left[\left(\tilde{\xi}'(u^1)\right)^2-k(u^1)\left(\tilde{\xi}(u^1)\right)^2\right]du^1, \tag{2.3}$$

$$\left.\frac{d^3 l}{dz^3}\right|_{z=0}=\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}{(g_{11})^{5/2}}\left[g_{11}^2 k(l)\,\tilde{\xi}^3(l)\,g_{12}^2-3g_{12}\tilde{\xi}(l)\left(\tilde{\xi}'(l)\right)^2+g_{11}^2\tilde{\xi}(l)\,\theta'_{u^1}(l)\right]. \tag{2.3*}$$

Уравнение Якоби в координатах Ферми вдоль γ принимает вид

$$y''(u^1)+g_{11}(u^1, 0)\,k(u^1)\,y(u^1)=0. \tag{2.4}$$

Обозначим через $\xi(u^1)$ решение уравнения (2.4) с начальными условиями $\xi(0)=0$, $\xi'(0)=1$. Тогда $\xi(l)\neq 0$, так как A не сопряжено O вдоль γ и $\tilde{\xi}(u^1)=\xi(u^1)/\xi(l)$. Преобразуем формулу (2.3), подставляя вместо $\tilde{\xi}(u^1)$ ее выражение через $\xi(u^1)$

$$\left.\frac{d^2 l}{dz^2}\right|_{z=0}=\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}{g_{11}^{3/2}\xi^2(l)}\int\limits_0^l\left[(\xi'(u^1))^2-k(u^1)(\xi(u^1)^2\right]du^1=\frac{g_{11}g_{12}-g_{12}^2}{g_{11}^{3/2}}\frac{\xi'(l)}{\xi(l)}. \tag{2.5}$$

Предположим дополнительно, что u^1 — длина дуги γ. Тогда $g_{11}=1$ вдоль γ. Пользуясь определением функций $f_k(u^1)$ и $\xi(u^1)$, нетрудно убедиться, что выполняется равенство

$$\xi''(u^1)\,f_k(u^1)-\xi(u^1)\,f_k''(u^1)=-(k(u^1)-k)\,\xi(u^1)\,f_k(u^1). \tag{2.6}$$

Проинтегрируем (2.6) по u^1 от 0 до l. Получим

$$\left(\xi'(u^1)f_k(u^1)-\xi(u^1)f_k'(u^1)\right)\Big|_0^l=-\int\limits_0^l(k(u^1)-k)\,\xi(u^1)\,f_k(u^1)\,du^1$$

или

$$\xi'(l)\,f_k(l)-\xi(l)\,f_k'(l)=-\int\limits_0^l(k(u^1)-k)\,\xi(u^1)\,f_k(u^1)\,du^1.$$

Поделим последнее равенство на $f_k(l)\xi(l)$. Тогда

$$\frac{\xi'(l)}{\xi(l)}=\frac{f_k'(l)}{f_k(l)}-\int_0^l (k(u^1)-k)\frac{\xi(u^1)f_k(u^1)}{f_k(l)\xi(l)}du^1. \tag{2.7}$$

Подставив (2.7) в (2.5), получим

$$\left.\frac{d^2l}{dz^2}\right|_{z=0}=\frac{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}{g_{11}^{3/2}}\left[\frac{f_k'(l)}{f_k(l)}-\int_0^l (k(u^1)-k)\frac{\xi(u^1)f_k(u^1)}{f_k(l)\xi(l)}du^1\right]. \tag{2.8}$$

Пусть теперь $\overline{OA}$ — кратчайшая в M^n и λ — вектор в точке A, образующий угол α с $\overline{OA}$, $\alpha\neq 0$, $\alpha\neq\pi$. Введем на $\overline{OA}$ параметризацию $A(u^1)$ с помощью длины дуги, отсчитываемой от точки O; $0\leqslant u^1\leqslant OA$. Через каждую точку $A(u^1)$ проведем геодезическую γ_{u^1} в направлении вектора $\lambda(u^1)$, полученного из λ параллельным переносом вдоль $AA(u^1)$. Введем на γ_{u^1} параметризацию с помощью длины дуги u^2, отсчитываемой от точки $A(u^1)$ как обычно, со знаком «+» или «−» в зависимости от направления. Полученную поверхность назовем *пленкой Синга* и обозначим через $\mathcal{F}(OA,\lambda)$. Компоненты метрического тензора поверхности $\mathcal{F}(OA,\lambda)$ обозначим через a_{ij} $(i,j=1,2)$. Для поверхности $\mathcal{F}(OA,\lambda)$ справедливо следующее утверждение, доказанное Сингом (см., например, [2, с. 101]).

Лемма 2.1. *Существует такое число d, что при $|u^2|<d$, $0\leqslant u^1\leqslant OA$ поверхность $\mathcal{F}(OA,\lambda)$ есть бесконечно дифференцируемая регулярная поверхность в M^n; координаты (u^1,u^2) являются координатами Ферми вдоль OA на $\mathcal{F}(OA,\lambda)$ $(a_{11}(u^1,0)\equiv 1$, $a_{12}=\cos\alpha$, $a_{22}\equiv 1)$; гауссова кривизна $k(u^1)$ поверхности $\mathcal{F}(OA,\lambda)$ в точках кратчайшей совпадает с римановой кривизной многообразия M^n в тех же точках и в двумерных направлениях, касательных к $\mathcal{F}(OA,\lambda)$.*

Введем на $\mathcal{F}(OA,\lambda)$ новый метрический тензор, полагая

$$\bar a_{11}=a_{11}+\mu\varphi(u^1,u^2),\ \bar a_{12}=a_{12},\ \bar a_{22}=a_{22};\ \mu>0,$$

где

$$\varphi(u^1,u^2)=\begin{cases}(u^2)^2e^{-1/(\varepsilon^2-(u^1)^2)} & \text{при } 0\leqslant u^1\leqslant\varepsilon,\\ 0 & \text{при } u^1>\varepsilon,\end{cases}$$

$0<\varepsilon<OA$, $|u^2|<d$. Обозначим поверхность, в которую переходит $\mathcal{F}(OA,\lambda)$ после изменения метрики, через $\bar{\mathcal{F}}(OA,\lambda,\mu)$.

Лемма 2.2. *Линия $\overline{OA}$ есть кратчайшая на $\bar{\mathcal{F}}(OA,\lambda,\mu)$, и на замкнутой дуге $\overline{OA}$ нет точек сопряженных O вдоль $\overline{OA}$.*

Доказательство. Докажем первое утверждение леммы 2.2. В самом деле, во-первых, $\overline{OA}$ есть кратчайшая на поверхности $\mathcal{F}(OA,\lambda)$ и длина OA на поверхности $\mathcal{F}(OA,\lambda)$ совпадает с длиной OA на $\bar{\mathcal{F}}(OA,\lambda,\mu)$, а во-вторых, длина любой кривой на $\bar{\mathcal{F}}(OA,\lambda,\mu)$ в силу неравенства

$$\sqrt{\bar a_{11}(\dot u^1)^2+2\bar a_{12}(\dot u^1)(\dot u^2)+\bar a_{22}(\dot u^2)^2}\geqslant\sqrt{a_{11}(\dot u^1)^2+2a_{12}(\dot u^1)(\dot u^2)+a_{22}(\dot u^2)^2}$$

не меньше длины той же кривой на $\mathcal{F}(OA,\lambda)$. Для доказательства второго утверждения леммы достаточно показать, что A не сопряжена O вдоль $\overline{OA}$. Запишем уравнение Якоби в координатах (u^1,u^2) вдоль $\overline{OA}$ на поверхностях $\mathcal{F}(OA,\lambda)$ и $\bar{\mathcal{F}}(OA,\lambda,\mu)$. Имеем

$$\eta''(u^1)+k(u^1)\eta(u^1)=0 \tag{2.10}$$

в метрике $\mathcal{F}(OA,\lambda)$ и

$$\xi''(u^1)+\left(k(u^1)-\frac{\mu}{\sin^2\alpha}e^{-1/(\varepsilon^2-(u^1)^2)}\right)\xi(u^1)=0 \tag{2.11}$$

в метрике $\overline{\mathcal{F}}(OA, \lambda, \mu)$. Если $\eta(u^1)$ и $\xi(u^1)$ — решения уравнений (2.10) и (2.11) с одинаковыми начальными условиями $\eta(0)=\xi(0)=0$, $\eta'(0)=\xi'(0)=1$, то по известной теореме сравнения [4, с. 254] первый нуль (не считая $u^1=0$) функции $\xi(u^1)$ находится от точки O дальше первого нуля функции $\eta(u^1)$. Но поскольку $\overline{OA}$ есть кратчайшая на $\mathcal{F}(OA, \lambda)$, то в силу необходимых условий минимума Якоби [5, с. 205] $\eta(u^1)\neq 0$ при $u^1\in(0, OA)$, и, тем самым, второе утверждение леммы доказано.

§ 3. Основные леммы

Пусть ABC — треугольник в $M^n\in M^n(r_0, k)$. Введем на $\overline{AC}$ параметризацию $A(t)$, где t — расстояние, отсчитываемое от точки A, $0\leqslant t\leqslant l=AC$, $A(0)=A$, $A(l)=C$. Обозначим через $T(t)$ множество кратчайших в M^n, соединяющих B с $A(t)$, а через $h(t)$ — расстояние от точки B до точки $A(t)$. Для любого фиксированного t и любой кратчайшей $\overline{BA}(t)\in T(t)$ на плоскости R_k возьмем отрезок $B''A''(t)$ прямой линии длины $BA(t)$ и через его концы проведем прямую линию b под углом $\alpha(t, \overline{BA}(t))$, равным углу между кратчайшими $\overline{A(t)B}$ и $\overline{A(t)A}$. На прямой b введем параметризацию $A''(z)$ с помощью длины дуги z, отсчитываемой от точки $A''(t)$ как обычно, со знаком «+» или «—» в зависимости от направления и так, чтобы угол $\alpha(t, \overline{BA}(t))$ был равен углу $B''A''(t)A''(z)$ при $z<0$. Определим функцию $f_t(z)$, равную расстоянию от точки B'' до точки $A''(z)$.

Лемма 3.1. *Для каждого допустимого относительно вершины B треугольника $ABC\subset M^n\in M^n(r_0, k)$, углы которого при вершинах A и C отличны от 0 и π, существуют такие константы $c>0$ и $\varepsilon>0$, не зависящие от $t\in[0, AC]$ и $\overline{BA}(t)\in T(t)$, что $h(t+z)<f_t(z)-cz^2$ при $|z|<\varepsilon$, $z\neq 0$ для всех t. При $k>0$ мы предполагаем, что периметр $\triangle ABC$ меньше $2\pi/\sqrt{k}$.*

Доказательство. В множестве кратчайших $T(t)$ введем метрику, полагая расстоянием между двумя кратчайшими угол между касательными векторами к ним в точке B; в этой метрике $T(t)$ замкнуто. Обозначим через $\mathcal{L}$ множество пар $(t, \overline{BA}(t))$, $t\in[0, AC]$, $\overline{BA}(t)\in T(t)$. Нетрудно заметить, что $\mathcal{L}$ — это замкнутое подмножество компакта $S_1^{n-1}\times[0, AC]$, и потому само компактно. Обозначим

$$\omega_0=\min_{(t,\overline{BA}(t))\in\mathcal{L}}\omega\left(\overline{BA}(t), \dot{A}(t), k\right)=$$

$$=\min_{(t,\overline{BA}(t))\in\mathcal{L}}\int_0^{BA(t)}\left(k\left(x, \overline{BA}(t), \dot{A}(t)\right)-k\right)\eta(x)f_k(x)\,dx.$$

Из компактности $\mathcal{L}$ и непрерывности функции $\omega(\overline{BA}(t), \dot{A}(t), k)$ на $\mathcal{L}$ следует, что

$$\omega_0>0. \tag{3.1}$$

Для каждой пары $(t, \overline{BA}(t))\in\mathcal{L}$ построим поверхности $\mathcal{F}(\overline{BA}(t), \dot{A}(t))$ и $\overline{\mathcal{F}}(\overline{BA}(t), \dot{A}(t), \mu)$. Обозначим через $k(\overline{BA}(t), \dot{A}(t), x)$ (соотв. $\overline{k}(\overline{BA}(t), \dot{A}(t), x, \mu)$) гауссову кривизну поверхности $\mathcal{F}(\overline{BA}(t), \dot{A}(t))$ (соотв. $\overline{\mathcal{F}}(\overline{BA}(t), \dot{A}(t), \mu)$) вдоль $\overline{BA}(t)$. Из определения $\overline{\mathcal{F}}(\overline{BA}(t), \dot{A}(t), \mu)$ следуют равенства

$$\lim_{\mu\to 0}\overline{k}\left(\overline{BA}(t), \dot{A}(t), x, \mu\right)=k\left(\overline{BA}(t), \dot{A}(t), x\right) \tag{3.2}$$

$$\lim_{\mu\to 0}\xi\left(x, \overline{BA}(t), \dot{A}(t), \mu\right)=\eta\left(x, \overline{BA}(t), \dot{A}(t)\right), \tag{3.3}$$

где функции $\xi(x, \mu)$ и $\eta(x)$ определены в § 2. Из (3.1)—(3.3) вытекает существование такого числа μ_0, что

$$\omega_{\overline{\mathscr{F}}}(\overline{BA}(t), \dot{A}(t), \mu_0) = \int\limits_0^{BA(t)} [\bar{k}(\overline{BA}(t), \dot{A}(t), x, \mu_0) - $$
$$- k]\, \xi(x, \overline{BA}(t), \dot{A}(t), \mu_0) f_k(x)\, dx > \omega_0/2 \tag{3.4}$$

для любой пары $(t, \overline{BA}(t)) \in \mathscr{L}$.

В лемме 2.1 для каждой поверхности $\mathscr{F}(\overline{BA}(t), \dot{A}(t))$ было определено число $d = d(t, \overline{BA}(t))$. В силу компактности множества $\mathscr{L}$ существует положительное число d_0 такое, что $d_0 < d(t, \overline{BA}(t))$ для всех пар $(t, \overline{BA}(t)) \in \mathscr{L}$. Далее для каждой поверхности $\overline{\mathscr{F}}(\overline{BA}(t), \dot{A}(t), \mu_0)$ в силу лемм 2.1, 2.2 и способа построения $\overline{\mathscr{F}}$ существует такое положительное число $\varepsilon(t, \overline{BA}(t)) < d_0$, что для любого $z \in (t - \varepsilon(t, \overline{BA}(t)), t + \varepsilon(t, \overline{BA}(t)))$ определена бесконечная дифференцируемая функция $\bar{f}_t(z)$, равная длине геодезической линии, соединяющей B с $A(t+z)$ (см. § 2). В силу компактности $\mathscr{L}$ существует положительное число ε_0 такое, что $\varepsilon_0 < \varepsilon(t, \overline{BA}(t))$ для всех пар $(t, \overline{BA}(t)) \in \mathscr{L}$. Из формул (2.2) и (2.3) получаем

$$\left.\frac{d\bar{f}_t}{dz}\right|_{z=0} = \cos\alpha(t, \overline{BA}(t)), \tag{3.5}$$

$$\left.\frac{d^2\bar{f}_t}{dz^2}\right|_{z=0} = \sin^2\alpha(t, \overline{BA}(t)) \left(\frac{f_k'(\overline{BA}(t))}{f_k(\overline{BA}(t))} - \frac{\omega_{\overline{\mathscr{F}}}(\overline{BA}(t), \dot{A}(t), \mu_0)}{f_k(\overline{BA}(t))\, \xi(\overline{BA}(t))}\right). \tag{3.6}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} f_k^0 &= \max_{t \in [0, AC]} f_k(\overline{BA}(t)), \\ \xi_0 &= \max_{(t, \overline{BA}(t)) \in \mathscr{L}} \xi(\overline{BA}(t), \mu_0), \\ \sin\alpha_0 &= \min_{(t, \overline{BA}(t)) \in \mathscr{L}} \sin\alpha(t, \overline{BA}(t)), \end{aligned} \tag{3.7}$$

где $\xi_0 > 0$ в силу леммы 2.2, $f_k^0 > 0$ и $\sin\alpha_0 > 0$ ввиду условий леммы 3.1. Из (3.6), (3.7), (3.4) следует неравенство

$$\left.\frac{d^2\bar{f}_t}{dz^2}\right|_{z=0} < \sin^2\alpha(t, \overline{BA}(t)) \frac{f_k'(\overline{BA}(t))}{f_k(\overline{BA}(t))} - \frac{\omega_0 \sin^2\alpha_0}{2 f_k^0 \xi_0} \tag{3.8}$$

для всех пар $(t, \overline{BA}(t)) \in \mathscr{L}$. В силу (2.3*) $\left.\frac{d^3 f_t}{dz^3}\right|_{z=0}$ является непрерывной функцией на $\mathscr{L}$. Поэтому существует константа $c_2 < \infty$ такая, что

$$\left|\left.\frac{d^3\bar{f}_t}{dz^3}\right|_{z=0}\right| < c_2 \tag{3.9}$$

для всех пар $(t, \overline{BA}(t)) \in \mathscr{L}$. Из построения $f_t(z)$, формул (2.2), (2.5) и из бесконечной дифференцируемости $f_t(z)$ по z получаем формулы

$$\left.\frac{df_t}{dz}\right|_{z=0} = \cos\alpha(t, \overline{BA}(t)), \tag{3.10}$$

$$\left.\frac{d^2 f_t}{dz^2}\right|_{z=0} = \sin^2\alpha(t, \overline{BA}(t)) \frac{f_k'(BA(t))}{f_k(BA(t))}, \tag{3.11}$$

$$\left|\left.\frac{d^3 f_t}{dz^3}\right|_{z=0}\right| \leqslant c_3 < \infty, \tag{3.12}$$

где c_3 не зависит от $t \in [0, AC]$ и $\overline{BA}(t) \in T(t)$. Как видно из (3.5), (3.8) — (3.12), существует такое число ε, $0 < \varepsilon < d_0$, что

$$\bar{f}_t(z) < f_t(z) - c_0 z^2 \tag{3.13}$$

при $|z| < \varepsilon$, $z \neq 0$, для всех пар $(t, \overline{BA}(t)) \in \mathscr{L}$, где $c_0 = ((\omega_0 \sin^2 \alpha_0)/4 f_k^0 \xi_0)$. Наконец, из способа построения поверхности $\overline{\mathscr{F}}(BA(t), \dot{A}(t), \mu_0)$ и определения функций $h(t)$ и $\bar{f}_t(z)$ при $|z| < d_0$ вытекает неравенство

$$h(t+z) \leqslant \bar{f}_t(z). \tag{3.14}$$

Из (3.13) и (3.14) следует утверждение леммы 3.1.

Лемма 3.2. *Если в многообразии $M^n \in M^n(r_0, k^+)$ треугольник ABC является допустимым относительно вершины B и углы при вершинах A и C отличны от 0 и π, то $\widehat{BAC} > \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{BCA} > \widehat{B'C'A'}$, где $B'A'C'$ и $B'C'A'$ суть углы в треугольнике сравнения $A'B'C'$. (При $k > 0$ предполагается, что периметр $\triangle ABC$ меньше $2\pi/\sqrt{k}$.)*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — число из леммы 3.1. Разобьем сторону AC точками $A_0 = A_{(0)}$, $A_1 = A(t_1)$, ..., $A_m = A(t_m)$, $A_{m+1} = A(AC) = C$ так, чтобы $A_iA_{i+1} < \varepsilon$ или, что то же самое, $|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon$ при $i = 0, \ldots, m$. Здесь и в дальнейшем мы пользуемся обозначениями, введенными при доказательстве леммы 3.1. Для каждого BA_iA_{i+1} в плоскости R_k построим $\triangle B''A_i''A_{i+1}''$ такой, что $B''A_i'' = BA_i$, $A_i''A_{i+1}'' = A_iA_{i+1}$ и угол $B''A_i''A_{i+1}''$ равен углу BA_iA_{i+1}. Тогда $B''A_i''(t_i + z) = f_{t_i}(z)$, $BA_i(t_i + z) = h(t_i + z)$. В силу леммы 3.1

$$h(t_i + z) < f_{t_i}(z) - cz^2 \tag{3.15}$$

при $|z| < \varepsilon$. Полагая в (3.15) $z = t_{i+1} - t_i$, получим

$$B'A_{i+1}' = h(t_{i+1}) < f_{t_i}(t_{i+1} - t_i) = f_{t_{i+1}}(0) = B''A_{i+1}''. \tag{3.16}$$

У $\triangle B'A_i'A_{i+1}'$ и $\triangle B''A_{i+1}''A_i''$ стороны $A_i'A_{i+1}'$ и $A_i''A_{i+1}''$ равны, а из (3.16) видно, что сторона $B''A_{i+1}''$ треугольника $B''A_i''A_{i+1}''$ больше, чем сторона $B'A_{i+1}'$ треугольника $B'A_i'A_{i+1}'$, следовательно,

$$\widehat{B'A_i'A_{i+1}'} < \widehat{B''A_i''A_{i+1}''} = \widehat{BA_iA_{i+1}}. \tag{3.17}$$

Аналогично доказывается, что

$$\widehat{BA_{i+1}A_i} > \widehat{B'A_{i+1}'A_i'}. \tag{3.18}$$

В плоскости R_k построим многоугольник $\overline{B}'\overline{A}'\overline{A}_1' \ldots \overline{A}_m'\overline{A}_{m+1}'$, прикладывая друг к другу по равным сторонам $B'A_i'$ треугольники $B'A_{i-1}'A_i'$ и $B'A_i'A_{i+1}'$, $i = 1, \ldots, m$. Полученный многоугольник является строго выпуклым, т. е. все его внутренние углы строго меньше π. Действительно, углы при вершинах $\overline{A}' = \overline{A}_0'$ и $\overline{A}_{m+1}' = C'$ не превосходят π, как углы невырожденных треугольников $B'A'A_1'$ и $B'A_m'C'$. Угол при вершине $\overline{A}_i'$, $i = 1, \ldots, m$, равен сумме углов $B'A_i'A_{i-1}'$ и $B'A_i'A_{i+1}'$, каждый из которых меньше углов BA_iA_{i-1} и BA_iA_{i+1} в силу (3.17) и (3.18). Таким образом,

$$\widehat{B'A_i'A_{i+1}'} + \widehat{B'A_i'A_{i-1}'} < \widehat{BA_iA_{i+1}} + \widehat{BA_iA_{i-1}} = \pi. \tag{3.19}$$

Наконец, угол при вершине B' меньше π в силу неравенства $AB + BC > AC$. Применяя теперь m раз к $\overline{B}'\overline{A}'\overline{A}_1' \ldots \overline{A}_m'\overline{A}_{m+1}'$ лемму Александрова о выпуклых четырехугольниках, получим, что угол $B'A'C'$ (соотв. $B'C'A'$) треугольника $A'B'C'$ строго меньше угла BAC (соотв. BCA), что и требовалось доказать.

Теперь мы освободимся от ограничений на периметр $\triangle ABC$ в случае $k>0$.

Лемма 3.3. *Если $k>0$ и $r<\pi/\sqrt{k}$, то в многообразии $M^n \in M^n(r_0, k^+)$ длина любой кратчайшей строго меньше $\pi/\sqrt{k}$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\overline{OA}$ — кратчайшая в M^n, длина которой не меньше $\pi/\sqrt{k}$: $OA \geqslant \pi/\sqrt{k}$; $A(t)$ — ее параметризация, введенная с помощью длины дуги, отсчитываемой от точки A; λ — произвольный единичный вектор в точке A, ортогональный $\overline{OA}$; $\lambda(t)$ — вектор, полученный из λ параллельным переносом вдоль $\overline{AA}(t)$; $\mathcal{F}(\overline{OA}(t), \lambda(t))$ — пленка Синга. Возьмем число $k_1<k$, удовлетворяющее условиям

$$OA>\pi/\sqrt{k_1}>r_0, \quad \omega(OA(t), \lambda(t), k_1)>0 \tag{3.20}$$

при $t \geqslant r_0$. Пусть $\eta(t)$ — решение уравнения Якоби вдоль $\overline{OA}$ на $\mathcal{F}(\overline{OA}, \lambda)$ с начальными условиями $\eta(0)=0$, $\eta'(0)=1$ (см. § 2). Так как $\overline{OA}$ — кратчайшая в M^n, то она остается кратчайшей и на поверхности $\mathcal{F}(\overline{OA}(t), \lambda)$. Следовательно, в силу необходимого условия минимума Якоби $\eta(t)>0$ при $t \in (0, OA)$. Возьмем последовательность чисел $t_m<\pi/\sqrt{k_1}$ и $\lim\limits_{m\to\infty} t_m=\pi/\sqrt{k_1}$. Из (3.10) видно, что $t_m>r_0$ при достаточно больших m. Для любого m справедлива формула (см. § 2)

$$\frac{\eta'(t_m)}{\eta(t_m)}=\frac{f_k'(t_m)}{f_{k_1}(t_m)}-\frac{\omega(OA(t_m), \lambda(t_m), k_1)}{f_{k_1}(t_m)\,\eta(t_m)}. \tag{3.21}$$

В равенстве (3.21) перейдем к пределу при $m\to\infty$. Предел левой части (3.21) существует и конечен, предел же правой части в силу неравенств (3.20) и определения функции f_{k_1} равен $-\infty$. Полученное противоречие доказывает лемму 3.3.

Лемма 3.4. *Если $k>0$, $r<\pi/\sqrt{k}$ и ABC — треугольник в $M^n \in M^n(r_0, k^+)$, допустимой относительно одной из своих вершин, то периметр $\triangle ABC$ строго меньше $2\pi/\sqrt{k}$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть ABC — треугольник в $M^n \in M^n(r_0, k^+)$, допустимый относительно вершины B, и его периметр не меньше $2\pi/\sqrt{k}$. Введем на кратчайшей $\overline{AC}$ параметризацию $A(t)$ с помощью длины дуги, отсчитываемой от точки A; $0\leqslant t\leqslant AC$. На стороне $\overline{AC}$ возьмем точку $A_1=A(t_1)$ такую, что периметр $\triangle BAA_1$ равен $2\pi/\sqrt{k}$, а при любом $t<t_1$ периметр $\triangle BAA(t)$ меньше $2\pi/\sqrt{k}$. В силу леммы 3.3 треугольник BAA_1, а вместе с ним и треугольники $BAA(t)$ при $0<t<t_1$, являются невырожденными и угол $BA(t)A$ при $0<t<t_1$ отличен от π. Так как $B'A'A_1'$ не вырожден, он совпадает с большей окружностью сферы $S^2_{1/\sqrt{k}}$, и потому все его углы равны π. Однако ввиду леммы 3.2 угол $BA(t)A$ строго больше угла $B'A'(t)A'$ треугольника $B'A'A'(t)$, и, переходя к пределу при $t\to t_1$, получаем, что угол BA_1A равен π вопреки выбору точки A_1. Полученное противоречие доказывает лемму 3.4.

Из леммы 3.4 легко выводится

Лемма 3.5. *Если $k>0$, $r<\pi/\sqrt{k}$ и ABC — треугольник в $M^n \in M^n(r, k)$, допустимый относительно одной из своих вершин, то периметр треугольника ABC не превосходит $2\pi/\sqrt{k}$.*

§ 4. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть треугольник $ABC \subset M^n \in M^n(r_0, k)$ является допустимым относительно вершины B. Рассмотрим сначала случай, когда углы при вершинах A и C треугольника ABC отличны от 0 и π. Возьмем последовательность чисел $k_m < k$, $\lim\limits_{m\to\infty} k_m = k$. Тогда M^n принадлежит $M^n(r_0, k_m^+)$ при любом $m = 1, 2, \ldots$. Обозначим через $A'_m B'_m C'_m$ треугольник в плоскости R_{k_m} с теми же длинами сторон, что и у треугольника ABC. Из леммы 3.2 следует, что

$$\widehat{BAC} > \widehat{B'_m A'_m C'_m}, \quad \widehat{BCA} > \widehat{B'_m C'_m A'_m}. \tag{4.1}$$

Переходя в неравенствах (4.1) к пределу при $m \to \infty$, получим утверждение теоремы 1.

Рассмотрим исключенные ранее случаи. Если углы при вершинах A и C равны π, то утверждение теоремы 1 очевидно. Если хотя бы один из углов BAC или BCA равен нулю, то треугольники ABC и $A'B'C'$ вырождены, и тогда утверждение теоремы очевидно. Остается случай, когда один из углов, например BCA, равен π, а другой угол — угол BAC — отличен от 0 и от π. Введем на стороне $\overline{AC}$ параметризацию $A(t)$, t — длина дуги, отсчитываемая от точки A. Если для любого t кратчайшая $\overline{A(t)B}$ образует угол π с кратчайшей $\overline{A(t)A}$, то $BA = BC + CA$ и, следовательно, треугольник $A'B'C'$ является вырожденным с углами $\widehat{B'A'C'} = 0$, $\widehat{B'C'A'} = \pi$. Таким образом, и в этом случае утверждение теоремы 1 верно. Обозначим через S множество тех чисел $t \in [0, AC]$, для которых существует кратчайшая $\overline{A(t)B}$, образующая $\overline{A(t)A}$ угол меньше π. Пусть $t_0 = \sup S$, а $t_m < t_0$ — последовательность чисел, сходящаяся к t_0. Для треугольников $BAA(t_m)$ утверждение теоремы 1 уже доказано. Поэтому справедливы неравенства

$$\widehat{BAA}(t_m) \geqslant \widehat{B'A'A'}(t_m). \tag{4.2}$$

Переходя в (4.2) к пределу при $m \to \infty$, получим

$$\widehat{BAA}(t_0) \geqslant \widehat{B'A'A'}(t_0). \tag{4.3}$$

Построим в плоскости R_k четырехугольник $B''A''A''(t_0)C''$, прикладывая друг к другу по стороне $B'A'(t_0)$ треугольники $A'B'A'(t_0)$ и $A'(t_0)B'C'$. Этот четырехугольник выпуклый, так как треугольник $A'(t_0)B'C'$ является вырожденным — дважды пройденным отрезком $B'A'(t_0)$. Из неравенства 4.3 и леммы Александрова о выпуклых четырехугольниках следует, что

$$\widehat{B'A'C'} < \widehat{B''A''A''}(t_0) = \widehat{B'A'A'}(t_0) < \widehat{BAC}.$$

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть треугольник $ABC \subset M^n \in M^n(r_0, k^+)$ является допустимым относительно вершины B. Ввиду невырожденности ABC ни один из углов при вершинах A или C не равен нулю. Если оба угла BAC и BCA равны π, то утверждение теоремы 3 очевидно для $k \leqslant 0$ и следует из леммы 3.4 для $k > 0$. Если оба угла отличны от π, то утверждение теоремы следует из леммы 3.2. В случае же, когда один угол равен π, а другой отличен от π, утверждение теоремы 3 доказывается так же, как и в теореме 1 при $k \leqslant 0$ и при $k > 0$ с помощью леммы 3.4. Теорема 3 доказана.

§ 5. Следствия из основных теорем

Назовем *прямой линией в* M^n геодезическую, любой отрезок которой есть кратчайшая.

Теорема 5. *Если в многообразии* $M^n \in M^n(r_0, 0)$ *существует хотя бы одна прямая линия, то* M^n *изометрично* $M^{n-1} \times R$, *где* $M^{n-1} \in M^{n-1}(r_0, k)$.

Теорема 6. *Если* $M^n \in M^n(r_0, k)$, $k > 0$, *и* $r_0 < \pi/\sqrt{k}$, *то диаметр* M^n *не превосходит* $\pi/\sqrt{k}$ *и равен* $\pi/\sqrt{k}$ *тогда и только тогда, когда* M^n *изометрично n-мерной сфере радиуса* $1/\sqrt{k}$.

Теорема 7. *Если* $M^n \in M^n(r_0 k)$, $k > 0$, $r_0 < \pi/\sqrt{k}$, *и существует допустимый треугольник периметра* $2\pi/\sqrt{k}$, *то* M^n *изометрично n-мерной сфере радиуса* $1/\sqrt{k}$.

Теорема 8. *Если открытое многообразие* M^n *принадлежит* $M^n(r_0, 0)$, *то любая орисфера есть выпуклая поверхность.*

Теорема 9. *Если открытое многообразие* M^n *принадлежит* $M^n(r_0, 0^+)$, *то оно гомеоморфно n-мерному евклидову пространству.*

Доказательство теорем 5—9 проводится аналогично доказательству соответствующих теорем для многообразий, секционная кривизна которых ограничена снизу либо нулем, либо числом k, $k > 0$ (см., например, [6—8]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров А. Д.** Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
2. **Топоногов В. А.** Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу // Успехи мат. наук.— 1959.— Т. 14, № 1.— С. 87—130.
3. **Постников М. М.** Вариационная теория геодезических.— М.: Наука, 1965.
4. **Степанов В. В.** Курс дифференциальных уравнений.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
5. **Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А.** Курс вариационного исчисления.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
6. **Топоногов В. А.** Римановы пространства кривизны, ограниченной снизу положительными числами // Докл. АН СССР.— 1958.— Т. 120, № 3.— С. 719—721.
7. **Топоногов В. А.** Римановы пространства, содержащие прямые линии // Докл. АН СССР.— 1959.— Т. 127, № 5.— С. 977—979.
8. **Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.** Риманова геометрия «в целом»: Пер. с нем.— М.: Мир, 1971.

О ЗАМКНУТЫХ КРИВЫХ — ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМАХ ДЛИНЫ ДУГИ

Ю. А. АМИНОВ

В теории кривых имеется большой пробел, связанный с отсутствием эффективных условий замкнутости кривой, выраженных через кривизну и кручение. Обычно условие замкнутости кривых и подмногообразий в формулировках теорем выступает как изначальное. Но так как кривая в E^3 определяется своими кривизной $\mathbf{k}$ и кручением $\varkappa$ однозначно с точностью до движения, то естествен вопрос о необходимых и достаточных условиях на кривизну и кручение, при которых соответствующая кривая будет замкнута. Этот вопрос ставился Н. В. Ефимовым, В. Фенхелем [1], С. С. Черном и другими геометрами. Можно дать на него неэффективный ответ, записав решение линейной системы уравнений Френе по общей теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в виде суммы ряда n-кратных интегралов от функций, определяемых $\mathbf{k}$ и $\varkappa$, кратность которых неограниченно растет с номером элемента ряда (см. [2, 3]). Для конкретно взятых функций $\mathbf{k}(s)$ и $\varkappa(s)$ ответить на вопрос — будет ли кривая замкнута — фактически невозможно.