ВАРИАНТ БИФУРКАЦИИ ЧЕТЫРЕХКРАТНОГО СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ С ДВУМЯ НУЛЕВЫМИ СОБСТВЕННЫМИ ЧИСЛАМИ

Е. П. ВОЛОКИТИН, С. А. ТРЕСКОВ

Рассмотрим плоскую динамическую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &\dot{x} = y, \\ &\dot{y} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \varepsilon_4 x^2 + ax^4 + y(x + \varepsilon_3)(b + cx + dx^2), \end{aligned} \tag{1}$$

правая часть которой зависит от четырех параметров ε_1, ε_2, ε_3, ε_4. По мнению авторов, система (1) служит модельной системой [1] для изучения вырождения коразмерности 4 — бифуркации четырехкратного состояния равновесия с двумя нулевыми собственными числами. С бифуркацией такого типа мы столкнулись при изучении системы дифференциальных уравнений, описывающей динамику каталитического окисления [2].

Параметрический портрет системы (1) существенно зависит от соотношений между коэффициентами a, b, c, d. В настоящей статье рассмотрен один из вариантов общего положения, которому отвечают значения коэффициентов $a = 1/32$, $b = 3$, $c = -1/2$, $d = 1/32$, и дано полное описание параметрической окрестности нуля U в пространстве параметров $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ системы (1) при этих значениях коэффициентов.

Терминология, используемая для описания бифуркаций, в основном заимствована из [1, 3].

При $\varepsilon = 0$ система (1) имеет единственное положение равновесия (0, 0), которое является четырехкратным седло-узлом с двумя нулевыми собственными числами [4]. На рис. 1 изображены траектории системы (1) при $\varepsilon = 0$, окружность отвечает экватору сферы Пуанкаре *⁾.

Полное описание четырехмерной параметрической окрестности нуля U состоит в перечислении всех бифуркационных множеств, расположенных в этой окрестности, указании взаиморасположения этих множеств и областей в пространстве параметров, отвечающих грубым фазовым портретам системы (1). Мы опишем типичные трехмерные сечения окрестности U гиперплоскостями вида $\varepsilon_4 = \text{const}$, достаточно близкими к точке $\varepsilon = 0$. Такими типичными будут три сечения, отвечающие значениям $\varepsilon_4 > 0$, $\varepsilon_4 = 0$, $\varepsilon_4 < 0$.

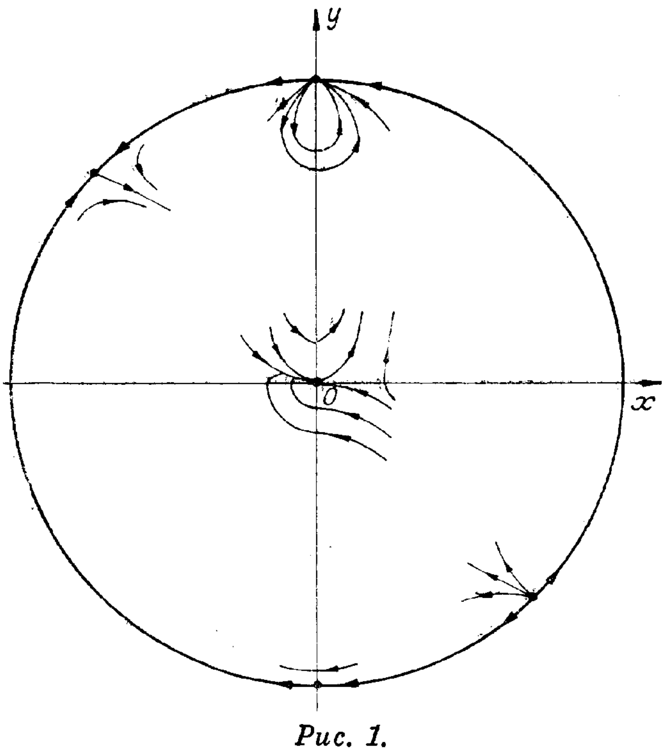
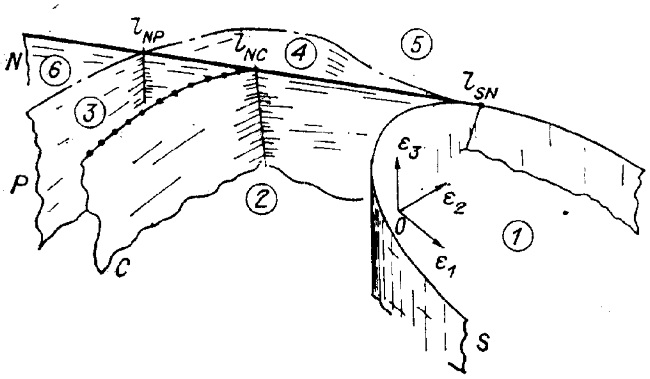


Рис. 1.

При любом фиксированном $\varepsilon_4 > 0$ такое сечение, расположенное в пространстве параметров $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \mathbf{R}^3$, выглядит сравнительно просто (рис. 2). Опишем его основные элементы. Координаты положений равновесия системы (1) удовлетворяют системе уравнений $y = 0$, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \varepsilon_4 x^2 + ax^4 = 0$. Количество стацио-

*⁾ Поведение траекторий на бесконечности не меняется, если $\varepsilon \neq 0$.



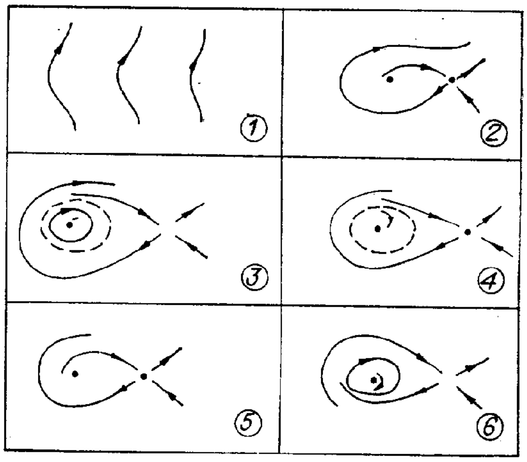


Рис. 2.

наров и их взаиморасположение не зависят от ε_3. Поэтому поверхность кратности S, отвечающая существованию в системе (1) двукратного положения равновесия, будет цилиндром с образующей, параллельной оси $O\varepsilon_3$. Направляющей поверхности S служит кривая, параметрические уравнения которой суть

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_4 x^2 + 3ax^4, \quad \varepsilon_2 = -2\varepsilon_4 x - 4ax^3, \\ \varepsilon_3 = 0, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

При $\varepsilon_4 > 0$ кривая (2) является параболой, поверхность S разбивает пространство $\mathbf{R}^3$ на две части, отвечающие либо наличию двух стационаров у исследуемой системы, либо их отсутствию. Поверхность нейтральности N, отвечающая существованию в системе (1) положения равновесия с двумя собственными числами на мнимой оси (поверхность бифуркации Андронова — Хопфа), задается соотношениями

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_4\varepsilon_3^2 - a\varepsilon_3^4, \ \varepsilon_2 < 2\varepsilon_3\varepsilon_4 + 4a\varepsilon_3^3. \tag{3}$$

Поверхности S и N отвечают бифуркациям коразмерности 1 и касаются друг друга в точках кривой l_{SN}, соответствующей бифуркации коразмерности 2 и отвечающей наличию у системы (1) двукратного положения равновесия с двумя нулевыми собственными числами; кривая l_{SN} является границей поверхности N и задается условиями

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3^2\varepsilon_4 + 3a\varepsilon_3^4, \ \varepsilon_2 = 2\varepsilon_3\varepsilon_4 + 4a\varepsilon_3^3.$$

Кривая l_{SN} служит границей также и для бифуркационной поверхности P, соответствующей бифуркации коразмерности 1 и отвечающей наличию в системе (1) петли сепаратрисы седла. Поверхность P, как и поверхность N, касается поверхности S. Первая и вторая ляпуновские величины сложного фокуса, вычисленные согласно [5], даются выражениями

$$L_1 = -\frac{\pi}{4r}\left(\left(\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3\varepsilon_4 - 4a\varepsilon_3^3\right)(c - 2d\varepsilon_3) - \left(b - c\varepsilon_3 + d\varepsilon_3^2\right)\left(\varepsilon_4 + 6a\varepsilon_3^2\right)\right),$$

$$L_2 = \frac{\pi}{24r}\left(3ab - 7ad\varepsilon_3^2 + 17ac\varepsilon_3 + 5d\varepsilon_4\right),$$

$$r = \left(2\varepsilon_3\varepsilon_4 + 4a\varepsilon_3^2 - \varepsilon_2\right)^{3/2}.$$

Поверхность нейтральности N содержит кривую l_{NC}, соответствующую бифуркации коразмерности 2 и отвечающую наличию у системы (1) сложного фокуса кратности два. В точках этой кривой обращается в нуль величина L_1, т. е.

$$l_{NC} = \left\{\varepsilon\colon \varepsilon_1 = \varepsilon_2\varepsilon_3 - \varepsilon_3\varepsilon_4^2 - a\varepsilon_3^4, \ \varepsilon_2 = 2\varepsilon_3\varepsilon_4 + 4a\varepsilon_3^3 + \frac{\left(b - c\varepsilon_3 + dc_3^2\right)\left(\varepsilon_4 + 6a\varepsilon_3^2\right)}{c - 2d\varepsilon_3}\right\}. \tag{4}$$

Отметим, что $l_{NC} \cap S = \varnothing$, если $\varepsilon_4 > 0$.

Величина L_2 положительна всюду в изучаемой нами окрестности U. Поэтому поверхность C кратного цикла, границей которой служит кривая l_{NC}, соответствует бифуркации коразмерности 1 и отвечает наличию у системы (1) двукратного цикла, устойчивого изнутри.

Существование граничных кривых l_{SN}, l_{NC} и поведение поверхностей P, C вблизи этих кривых следуют из общих результатов теории бифуркаций [3]; общий вид поверхностей P, C был выяснен нами в результате численных расчетов. При расчетах использовались программы [6].

Поверхность P петли сепаратрисы пересекает поверхность N в точках кривой l_{NP}, соответствующей бифуркации коразмерности $1+1$.

Взаиморасположение многообразий S, N, P, C, l_{SN}, l_{NP}, l_{NC} ясно из рис. 2. Рядом с бифуркационной диаграммой изображены соответствующие грубые фазовые портреты системы (1).

При изучении сечения окрестности U гиперплоскостью $\varepsilon_4=0$ мы не обнаруживаем параметрических областей, отличных от *1—6*. Новым здесь является то обстоятельство, что кривая l_{NC} имеет теперь одну общую точку с поверхностью S: $\bar{\varepsilon}=0$. Через эту же точку проходят кривые l_{SN}, l_{NP}.

Рассмотрим сечение параметрической окрестности U гиперплоскостью $\varepsilon_4=\mathrm{const}$ при $\varepsilon_4<0$. Поверхность кратности S по-прежнему будет цилиндром. Ее направляющая (2) будет теперь кривой, имеющей две точки возврата и точку самопересечения. Ребра возврата l_1, l_2 поверхности S соответствуют бифуркациям коразмерности 2 и отвечают наличию у системы (1) трехкратных состояний равновесия: ребро l_1 — трехкратных седел, ребро l_2 — трехкратных неседел. Ребро самопересечения l_3 соответствует бифуркации коразмерности $1+1$ и отвечает наличию у системы одновременно пары двукратных состояний равновесия,

$$l_1=\{\varepsilon\colon\ \varepsilon_1=-\varepsilon_4^2/12a,\ \varepsilon_2=(-4/3)\,\varepsilon_4\,(-\varepsilon_4/6a)^{3/2},\ \varepsilon_3\in\mathbf{R}\}_3$$

$$l_2=\{\varepsilon\colon\ \varepsilon_1=-\varepsilon_4^2/12a,\ \varepsilon_2=4/3\varepsilon_4\,(-\varepsilon_4/6a)^{3/2},\ \varepsilon_3\in\mathbf{R}\},$$

$$l_3=\{\varepsilon\colon\ \varepsilon_1=\varepsilon_4^2/4a,\ \ \varepsilon_2=0,\ \varepsilon_3\in\mathbf{R}\}.$$

Поверхность S разбивает пространство $\mathbf{R}^3$ на три части, отвечающие отсутствию положений равновесия у системы (1) или наличию двух или четырех положений равновесия. Четыре состояния равновесия имеют место в том случае, когда точка ε лежит внутри трехгранной «призмы» с ребрами l_1, l_2, l_3. Эти состояния равновесия расположены на оси Ox в следующем порядке: крайнее слева — неседло, которое мы обозначим o_1, затем седло s_1, затем неседло o_2 и, наконец, седло s_2. В этих обозначениях ребро l_1, отвечает трехкратному седлу $s_1o_2s_2$, ребро l_2 — трехкратному неседлу $o_1s_1o_2$. От поверхности S по-прежнему отходят с касанием вдоль кривой l_{SN} поверхность нейтральности N и поверхность петли сепаратрисы седла P. Кривая нулей первой ляпуновской величины l_{NC} теперь служит частью границы поверхности C двукратного цикла и состоит из двух компонент: к соотношениям (4) добавляется условие $\varepsilon_4+6a\varepsilon_3^2>0$. Если $\varepsilon_4+6a\varepsilon_3^2<0$, то у соответствующего сложного фокуса (o_2) первая ляпуновская величина отрицательна.

Представление о том, как выглядит изучаемое трехмерное сечение окрестности U при достаточно удаленных от нуля значениях ε_3, дает рис. 3. При промежуточных значениях это сечение устроено уже более сложным образом. Кроме перечисленных бифуркационных множеств мы сталкиваемся здесь с бифуркационными множествами, отвечающими нелокальным бифуркациям, связанным с поведением сепаратрис седел s_1, s_2. Мы опишем строение трехмерного сечения окрестности U, рассмотрев его двумерные срезы плоскостями вида $\varepsilon_3=\mathrm{const}$.

На рис. 4 эти срезы изображены по периферии, движение по часовой стрелке отвечает постепенно уменьшающимся значениям ε_3. В середине изображены соответствующие грубые фазовые портреты; пунктирные линии отвечают неустойчивым циклам.

Дадим краткие пояснения к рис. 4. Бифуркационные поверхности и кривые пересекаются с плоскостями $\varepsilon_3 = \mathrm{const}$ по кривым и точкам, за которыми мы сохраним введенные обозначения. Срез, отвечающий достаточно большим значениям $\varepsilon_3 > > 0$, расположен в левом верхнем углу рисунка. От кривой кратности S в точке l_{SN} отходят с касанием кривые N, P*); от кривой N в точке l_{NC} отходит кривая кратного цикла C; кривые N, P пересекаются в точке l_{NP}, точка l_{NC} лежит между точками l_{SN}, l_{NP}. По мере уменьшения значений ε_3 точка l_{SN} скользит по кривой S по направлению к точке l_2. При $\varepsilon_3 = (-3\varepsilon_4/2a)^{1/2}$ кривая нейтральности N пройдет через острие l_1, после чего эта кривая будет пересекать треугольник $l_1l_2l_3$. На параметрическом портрете появляется не встреченная нами ранее область *8*. Затем при некотором $\varepsilon_3 = \alpha$ через острие l_1 пройдет кривая P. Этому событию отвечает точка $\bar{\varepsilon}_\alpha = (-\varepsilon_4^2/12a, (-4/3)(-\varepsilon_4/6a)^{3/2}, \alpha)$ в пространстве параметров ε_1, ε_2, ε_3, лежащая одновременно на поверхности P и ребре l_1, соответствующая бифуркационная ситуация на фазовом портрете изображена на рисунке и заключается в наличии неустойчивой сепаратрисной петли трехкратного седла $s_1o_2s_2$.

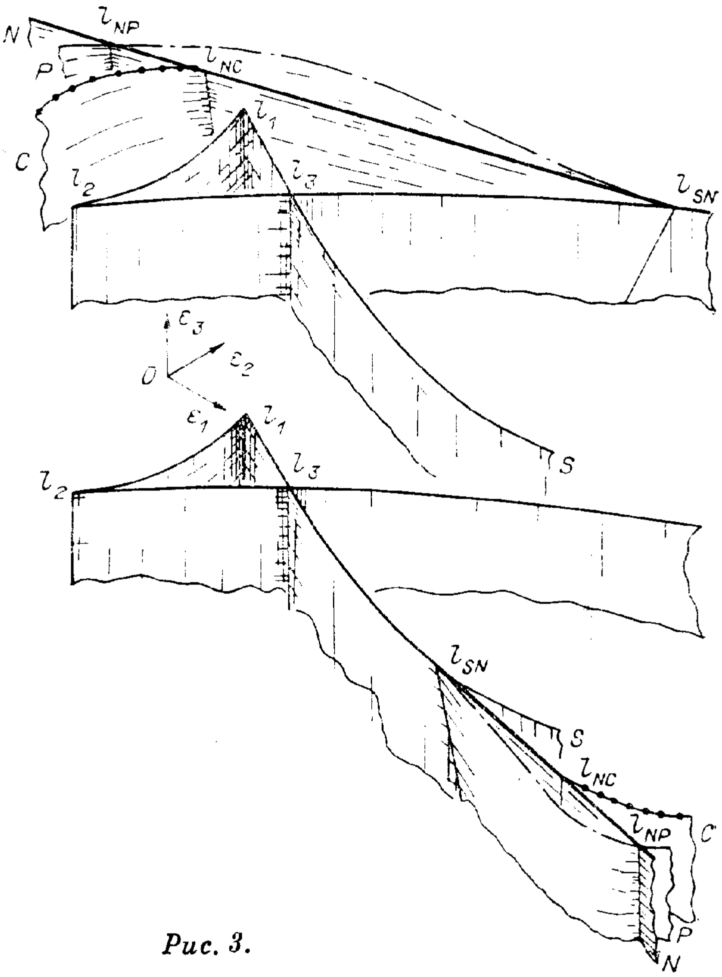


Рис. 3.

Небольшое шевеление параметров в окрестности точки $\bar{\varepsilon}_\alpha$ приведет, с одной стороны, к бифуркациям трехкратного стационара, а с другой — к бифуркациям гомоклинической структуры. В общем случае трехкратное седло либо заменится на невырожденное седло, либо распадется на три стационара (седла s_1, s_2 и узел o_2); α-предельным множеством входящей сепаратрисы седла s_1, которая в точке $\bar{\varepsilon}_\alpha$ образовывала петлю, при этом может служить либо неустойчивый цикл, окружающий точку o_1, либо источник o_2, либо бесконечно удаленная точка. Ситуации первой степени негрубости сводятся к наличию седло-узлов s_1o_2, s_2o_2, либо петли сепаратрисы, либо сепаратрисы, идущей из седла s_2 в седло s_1.

Точки, отвечающие сепаратрисе из s_2 в s_1, образуют в пространстве параметров поверхность Q_1 бифуркационных точек коразмерности 1. Соответствующая кривая Q_1 продолжает линию петли внутрь треугольника $l_1l_2l_3$ и разделяет на бифуркационной диаграмме области *9*, *10*.

По мере уменьшения значений ε_3 точка l_{SN} продолжает приближаться к точке l_2. При некотором $\varepsilon_3 = \beta$ правый конец кривой Q_1 пройдет через точку l_3. Мы имеем здесь дело с бифуркацией коразмерности 3, соответствующей на фазовом портрете наличию двух седло-узлов, связанных сепаратрисой.

При $\varepsilon_3 = \gamma = (-\varepsilon_4/6a)^{1/2}$ точки l_{SN} и l_2 сливаются, туда же приходят и концевые точки всех бифуркационных кривых, лежащих внутри тре-

*) Кривая N в сечении плоскостью $\varepsilon_3 = \mathrm{const}$ будет лучом (см. (3)).

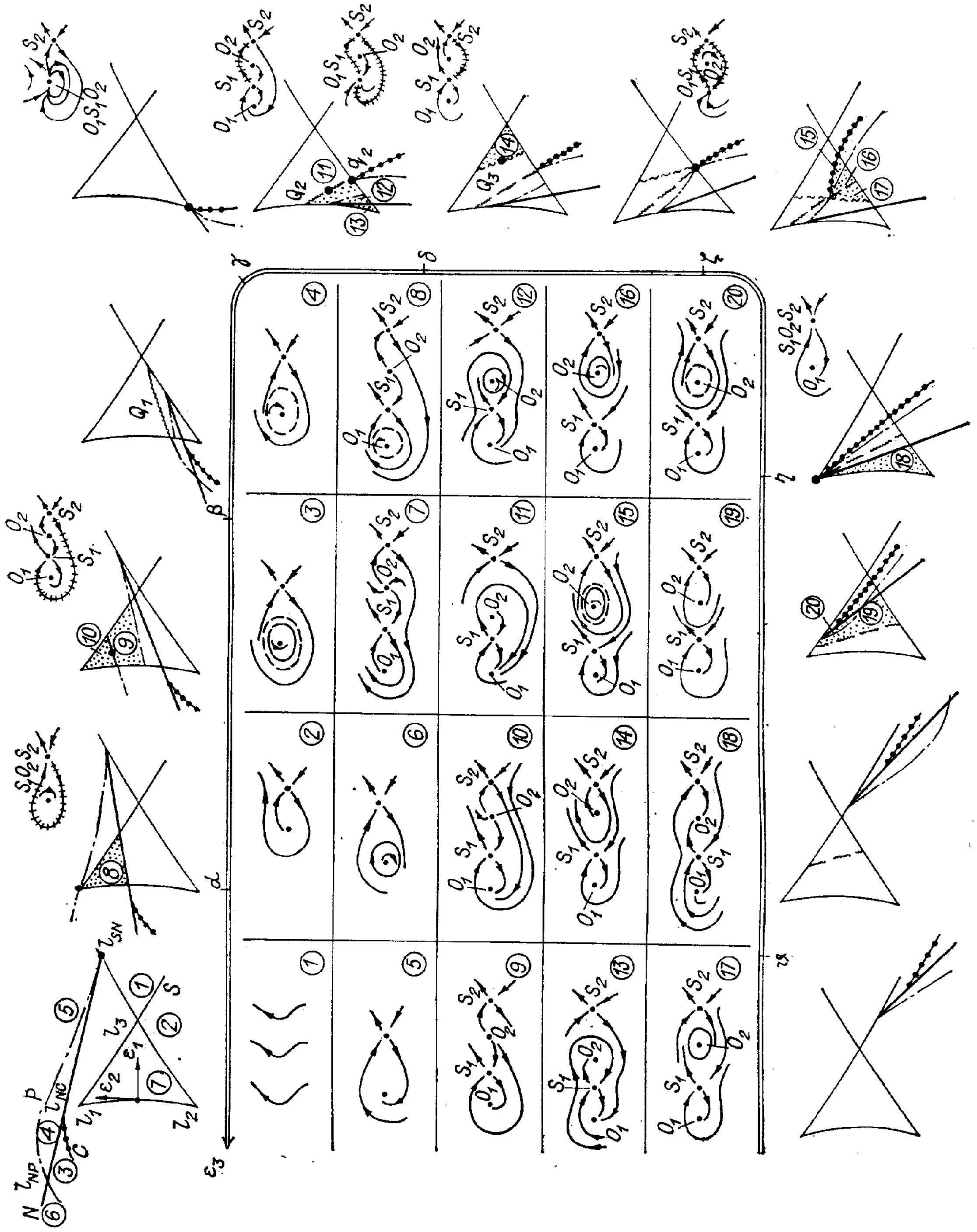


Рис. 4.

угольника $l_1l_2l_3$ (сами кривые при этом стягиваются в точку), а также точки l_{NC}, l_{NP} (последние никогда не попадают внутрь треугольника). Точке ε_γ отвечает наличие в системе (1) трехкратного состояния равновесия $o_1s_1o_2$ с двумя нулевыми собственными числами, которое в нашем случае будет состоянием равновесия с эллиптической областью. Кроме того, на фазовом портрете имеется гиперболическое седло s_2, при этом сепаратрисы седла образуют границу эллиптической области (в последнем можно убедиться, построив подходящие кривые без контакта). Описанный фазовый портрет изображен непосредственно рядом с бифуркационной диаграммой, отвечающей $\varepsilon_3 = \gamma$.

Далее, при $\varepsilon_3 < \gamma$ точка l_{SN} переходит на участок l_1l_2 кривой кратности S. Из этой точки с касанием выходит кривая теперь уже устойчивой петли сепаратрисы седла s_1, окружающая неустойчивое положение равновесия o_2. Эта кривая обрывается на стороне l_2l_3 треугольника $l_1l_2l_3$. Внешний по отношению к треугольнику участок кривой петли сепаратрисы оканчивается в точке q_2 на стороне l_2l_3 треугольника $l_1l_2l_3$. В параметрической точке q_2 в петлю сепаратрисы седла s_2 на ее глобальном участке «влипает» петля седло-узла s_1o_1, петля седла неустойчива, а петля седло-узла устойчива. Это обстоятельство приводит к тому,

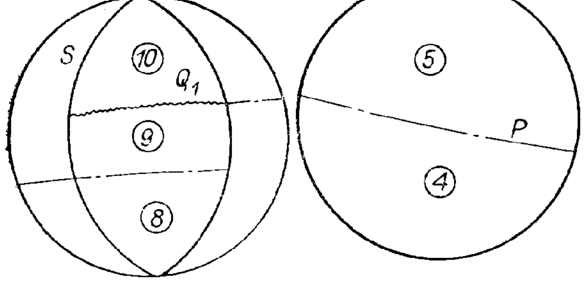


Рис. 5.

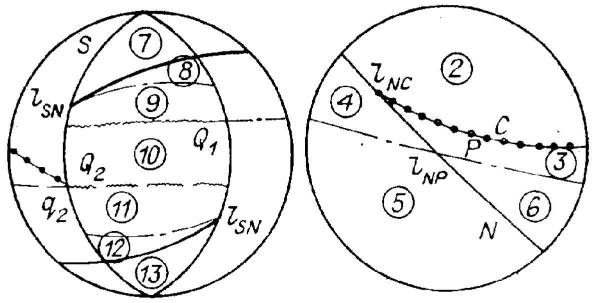


Рис. 6.

что в точке q_2 оканчивается также кривая C кратного цикла. Внутрь треугольника $l_1l_2l_3$ кривые P, C продолжаются кривой Q_2, отвечающей сепаратрисе из седла s_1 в седло s_2. На бифуркационной диаграмме перечисленные поверхности служат частью границ областей *11*, *12*, *13*.

Точки q_2 образуют бифуркационное множество коразмерности 2 в пространстве параметров и служат граничными для следующих бифуркационных поверхностей: поверхности сепаратрисы из седла в седло, поверхности кратных циклов, поверхности петли сепаратрисы седло-узла, поверхности петли сепаратрисы седла (эти две петли имеют разную устойчивость).

По мере уменьшения ε_3 меняется поведение выходящей влево вниз сепаратрисы седла s_2 и при $\varepsilon_3=\delta$ появляется кривая Q_3, означающая, что мы встретили поверхность Q_3, отвечающую наличию в системе (1) сепаратрисы из седла s_2 в седло s_1, теперь уже не огибающей стационара o_1. По мере продвижения вниз по ε_3 концы кривых Q_2, Q_3, лежащие на стороне l_2l_3, сближаются и затем при $\varepsilon_3=\zeta$ совпадают. Мы попадаем в бифуркационную точку $\bar{\varepsilon}_\zeta$ коразмерности 3, соответствующую наличию в системе (1) сепаратрисного контура, одна из вершин которого седло-узел s_1o_1, а другая — седло s_2. Затем общая точка кривых Q_2, Q_3 смещается внутрь треугольника $l_1l_2l_3$, ей отвечает наличие в системе (1) сепаратрисного контура, а сама эта точка является бифуркационной точкой коразмерности 2. Более детальное описание бифуркации сепаратрисного контура см. в [1]. Отметим лишь, что в точке сепаратрисного контура линии петель сепаратрис седел s_1, s_2 продолжают друг друга, кроме того, эта же точка служит концевой для кривой кратного цикла C.

Далее, при $\varepsilon_3=\eta=(-\varepsilon_4/6a)^{1/2}$ точка l_{SN} попадает в точку l_1. Здесь мы имеем дело с локальной бифуркацией коразмерности 3 трехкратного седла с двумя нулевыми собственными числами. Эта бифуркация происходит в полном соответствии с описанием, предложенным в [1], поэтому не будем останавливаться на ней подробно. Укажем только, что при прохождении значения $\varepsilon_3=\eta$ на бифуркационной диаграмме пропадает кривая Q_3.

При $\varepsilon_3<\eta$ точка l_{SN} располагается вначале на стороне l_1l_3 треугольника $l_1l_2l_3$, а затем выходит за вершину l_3. Далее при некотором $\varepsilon_3=\vartheta$ стягиваются в точку концы кривой Q_2, после чего диаграмма становится такой, какой она изображена в левом нижнем углу рисунка, и в дальнейшем качественно не меняется.

Замечание 1. Существование бифуркационных поверхностей Q_1, Q_2, Q_3 вытекает в основном из требований непротиворечивости построенного нами параметрического портрета и частично из результатов теории бифуркаций. Общий вид этих поверхностей и их взаиморасположение были уточнены нами на основе численного эксперимента.

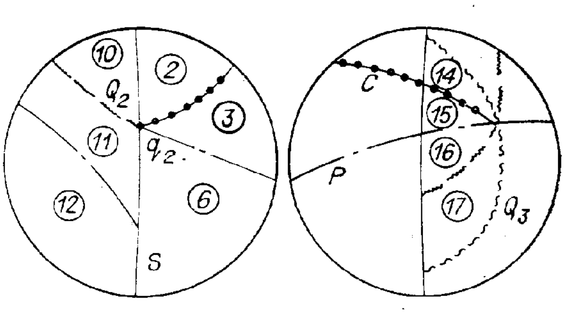


Рис. 7.

Замечание 2. Остановимся подробнее на бифуркационных точках коразмерности 3, отвечающих значениям $\varepsilon_3=\alpha$, $\varepsilon_3=\gamma$, $\varepsilon_3=\zeta$: $\bar{\varepsilon}_\alpha$ — петля трехкратного седла, $\bar{\varepsilon}_\gamma$ — трехкратное состояние равновесия с двумя нулевыми собственными числами, имеющее эллиптическую область, $\bar{\varepsilon}_\zeta$ — сепаратрисный контур, одна из вершин которого седло-узел.

Напомним принятый в [1] способ изображения параметрического портрета в окрестности бифуркационных точек коразмерности 3. Строится пересечение параметрического портрета со сферой достаточно малого радиуса с центром в собственно бифуркационной точке и затем на рисунке изображаются проекции двух дополняющих друг друга полусфер. Построенные таким образом параметрические портреты в окрестностях точек $\bar{\varepsilon}_\alpha$, $\bar{\varepsilon}_\gamma$, $\bar{\varepsilon}_\zeta$ приведены на рис. 5, 6, 7 соответственно, фазовые портреты, отвечающие указанным там областям, см. на рис. 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Базыкин А. Д., Кузнецов Ю. А., Хибник А. И.** Бифуркационные диаграммы динамических систем на плоскости.— Пущино, 1985.— 56 с.— (Информационный материал).
2. **Волокитин Е. П., Тресков С. А.** Математическая модель реакции каталитического окисления (трехпараметрический анализ).— Новосибирск, 1986.— 24 с.— (Препринт/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 4).
3. **Арнольд В. И.** Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.
4. **Баутин Н. Н., Леонтович Е. А.** Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.— М.: Наука, 1976.
5. **Баутин Н. Н.** Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости.— М.: Наука, 1984.
6. **Хибник А. И., Шноль Э. Э.** Программы для качественного исследования дифференциальных уравнений.— Пущино, 1982.— 16 с.— (Информационный материал).

СТРУКТУРЫ, ПОРОЖДАЕМЫЕ МНОЖЕСТВАМИ МОРФИЗМОВ

В. К. ИОНИН

Рассматриваются произвольные множества A, B и произвольное множество Γ отображений A в B. В настоящей статье показывается, как при помощи некоторой стандартной процедуры множество Γ порождает определенные математические структуры на произвольных множествах, другими словами, как Γ порождает некоторый род структуры. Например, все аффинные отображения вещественной прямой в себя порождают род аффинной структуры; все сжатия $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$ — род структуры метрического пространства с внутренней метрикой; все линейные отображения двумерного векторного пространства в одномерное — род структуры векторного пространства.

§ 1. Предварительные определения

В этом параграфе будут приведены известные определения, которые можно найти в книгах [1, 2]. В некоторые определения будут внесены незначительные изменения.

1.1. Будем говорить, что задана категория $\mathscr{K}$, если задан класс $\mathrm{Ob}\,\mathscr{K}$ элементов, называемых *объектами*, причем

1. Для каждой пары объектов (A, B) из $\mathscr{K}$ задано множество $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(A, B)$, называемое *множеством морфизмов A в B* (вместо $u \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{K}}(A, B)$ будем иногда писать $u\colon A \to B$ или $A \xrightarrow{u} B$); A называют *областью морфизма* u, а B — его *кообластью*.