Следствие. *Для любого множества X отображение $h(X)$, определенное в* 6.9, *есть биекция.*

6.13. Рассмотрим произвольное биективное отображение $u\colon X \to Y$. Функторы μ и δ порождают два новых биективных отображения $\mu(u)\colon \mu(X) \to \mu(Y)$ и $\delta(u)\colon \delta(X) \to \delta(Y)$. Завершить доказательство теоремы 6.8 можно рассуждениями, аналогичными приведенным в п. 6.7.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Букур И., Деляну А.** Введение в теорию категорий и функторов.— М.: Мир, 1972.
2. **Голдблатт Р.** Топосы.— М.: Мир, 1983.
3. **Ионин В. К.** Один способ задания аффинной структуры // Геометрический сборник.— Томск, 1982.— Вып. 23.— С. 3—16.
4. **Ионин В. К. Сулейменов Е. К.** Характеризация векторных структур линейными отображениями // Докл. АН СССР.— 1983.— Т. 268, № 4.— С. 781—784.
5. **Александров А. Д.** Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.; Л.: ОГИЗ, 1948.
6. **Александров А. Д., Залгаллер В. А.** Двумерные многообразия ограниченной кривизны.— М.; Л., 1962.— (Труды Мат. ин-та АН СССР; Т. 63).

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

А. Г. КУСРАЕВ

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Основное внимание здесь уделяется изучению различных классов операторов в решеточно нормированных пространствах и пространствах со смешанной нормой. В основном будем придерживаться терминологии и обозначений из [1, 2]. Тем не менее перечислим некоторые обозначения, фиксированные на протяжении всего текста: E и F — это K-пространства; V и W — решеточно нормированные пространства с E- и F-значными нормами соответственно; X и Y — банаховы пространства; $M(V, W)$ — пространство линейных мажорированных операторов из V в W; $\mathscr{L}(X, Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов из X в Y; $L_r(E, F)$ — пространство регулярных операторов из E в F; $X' := \mathscr{L}(X, \mathbf{R})$ — сопряженное к X, E'_n — пространство o-непрерывных регулярных функционалов на E. Каноническая билинейная форма всех встречающихся ниже двойственностей обозначается символом $\langle\cdot, \cdot\rangle$. Используются также аббревиатуры: ПБК — пространство Банаха — Канторовича, РНП — решеточно нормированное пространство. При этом в отличие от [1] норма РНП не обязательно разложима.

Векторные нормы обозначаются, как правило, через $|\cdot|$. Напомним, что включение $T \in M(V, W)$ означает линейность оператора $T\colon V \to W$ и существование такого положительного $S \in L_r(E, F)$, что $|Tv| \leqslant S(|v|)$ для всех $v \in V$. Норма $|T|$ оператора T — это наименьший элемент в $L_r(E, F)$ среди всех указанных S. Известно, что $M(V, W)$ — пространство Банаха — Канторовича, нормированное посредством K-пространства $L_r(E, F)$.

Для каждого РНП V с разложимой нормой существует полная булева алгебра коммутирующих проекторов $\mathfrak{Pr}(V)$, действующих в V, и изоморфизм h из булевой алгебры $\mathfrak{Pr}(E)$ проекторов (на компоненты нормирующего K-пространства E) на $\mathfrak{Pr}(V)$ такой, что $\pi|v| = |h(\pi)v|$ для всех $\pi \in \mathfrak{Pr}(E)$ и $v \in V$. Булевы операции в $\mathfrak{Pr}(V)$ имеют вид

$$\pi \vee \rho := \pi + \rho - \pi \circ \rho, \quad \pi \wedge \rho := \pi \circ \rho, \quad \pi^* := I_V - \pi.$$

В дальнейшем проектор из $\mathfrak{Pr}(E)$ и его образ в $\mathfrak{Pr}(V)$ при изоморфизме h часто обозначаем одной и той же буквой. Для элемента $v \in V$ положим $\pi := \bigwedge\{\pi \in \mathfrak{Pr}\{V\}\colon \pi v = v\}$. Скажем, что *элементы u и $v \in V$ дизъюнктны* и напишем udv, если $\pi u = 0$ и $\pi^* v = 0$ для некоторого $\pi \in \mathfrak{Pr}(V)$. Понятно, что $udv \leftrightarrow \pi_u \circ \pi_v = 0 \Leftrightarrow |v| \wedge |u| = 0$. Положим $\{v\}^{dd} := \{u \in V\colon \pi_v u = u\}$ и заметим, что имеют место эквивалентности $u \in \{v\}^{dd} \leftrightarrow \pi_u \leqslant \pi_v \Leftrightarrow |u| \in \{|v|\}^{dd}$. Множество вида $A^d := \{v \in V\colon \forall a \in A\, adv\}$, $A \subset V$, называется *компонентой*. Совокупность всех компонент обозначим символом $\mathfrak{B}(V)$ (в [1, 2] вместо $\mathfrak{Pr}$ принято обозначение $\mathfrak{B}$) и назовем *базой компонент* РНП V. Шар относительно векторной нормы $|\cdot|$ с центром в начале координат и радиуса $0 \leqslant e \in E$ обозначается через $B_V(e) := \{v \in V\colon |v| \leqslant e\}$.

Линейной изометрией РНП V и W естественно назвать линейную биекцию $j\colon V \to W$ такую, что $|j(v)| = |v|$ для всех $v \in V$. При этом необходимо, чтобы $E = F$. Однако иногда удобнее (как, например, в § 2 и 3, ниже) не предполагать E и F совпадающими. Ввиду этого примем такое определение. Говорят, что РНП V и W *линейно изометричны*, если существуют линейная биекция $j\colon V \to W$, а также линейный и решеточный изоморфизм $i\colon E \to F$ такие, что $|j(v)| = i(|v|)$ для всех $v \in V$.

§ 1. Порядково непрерывные, разложимые и коразложимые операторы

Булева алгебра компонент K-пространства регулярных операторов $L_r(E, F)$ имеет весьма сложное строение, и ее детальное описание в настоящее время неизвестно. Однако существует несколько интересных результатов в этом направлении. Следующий факт дает одну из возможных характеризаций компоненты порядково непрерывных операторов $L_n(E, F)$.

1.А. Теорема. (Luxemburg W. A. J. [3], Aliprantis C. D., Burkinshaw O. [4]). *Пусть E — векторная решетка, F — K-пространство и $T\colon E \to F$ — положительный оператор. Тогда T является порядково непрерывным в том и только в том случае, если для любого оператора $0 \leqslant S \leqslant T$ нулевой идеал $\mathcal{N}_S := \{x \in E\colon S(|x|) = 0\}$ есть компонента.*

Аналогичный результат имеет место и для порядково σ-непрерывных операторов. Сформулируем также утверждения об описании компоненты, порожденной оператором Магарам и решеточным гомоморфизмом. Ниже $E_\Phi := (\mathcal{N}_\Phi)^d$, $F_\Phi := \Phi[E]^{dd}$.

1.Б. Теорема (Luxemburg W. A. J., Schep A. R. [5]). *Пусть E и F — K-пространства, а $\Phi\colon E \to F$ — оператор Магарам* (т. е. Φ порядково непрерывен и $\Phi([0, e]) = [0, \Phi e]$ для всех $0 \leqslant e \in E$). *Существует булев изоморфизм h из $\mathfrak{Pr}(F_\Phi)$ на правильную подалгебру булевой алгебры $\mathfrak{Pr}(E_\Phi)$ такой, что для каждого 0-непрерывного $\Psi \in L_r(E, F)$ равносильны условия*

(а) $\Psi \in \{\Phi\}^{dd}$;

(б) $\Psi e \in \{\Phi e\}^{dd}$ *для всех* $e \in E$;

(в) $\pi \circ \Psi = \Psi \circ h(\pi)$ *для всех* $\pi \in \mathfrak{Pr}(F_\Phi)$.

1.В. Теорема (Кутателадзе С. С. [6]). *Пусть E — векторная решетка и F — K-пространство. Оператор $0 \leqslant \Phi \in L_r(E, F)$ является решеточным гомоморфизмом в том и только том случае, если для любого $0 \leqslant \Psi \leqslant \Phi$ найдется ортоморфизм $0 \leqslant \alpha \leqslant I_F$ такой, что $\Psi = \alpha \circ \Phi$.*

Для решеточного гомоморфизма имеет место утверждение, двойственное к 1.Б.

1.Г. Теорема. *Пусть E и F — K-пространства, а $\Phi\colon E \to F$ — решеточный гомоморфизм, причем $\Phi(E)^{dd} = F$. Существует булев гомоморфизм $h\colon \mathfrak{Pr}(E) \to \mathfrak{Pr}(F)$ такой, что для каждого $\Psi \in L_r(E, E)$ равносильны условия*

(а) $\Psi \in \{\Phi\}^{dd}$;

(б) $\Psi e \in \{\Phi e\}^{dd}$ *для всех* $e \in E$;

(в) $\Psi \circ \pi = h(\pi) \circ \Psi$ *для всех* $\pi \in \mathfrak{Pr}(E)$.

◁ Для $\pi \in \mathfrak{P}\mathfrak{r}(E)$ через $h(\pi)$ обозначим проектор на компоненту $(\Phi \circ \pi[E])^{dd}$. Тогда h — булев гомоморфизм, причем $\Phi \circ \pi = h(\pi) \circ \Phi$. Возьмем $\Psi \in L_r(E, F)$. Импликация (а)$\Rightarrow$(б) вытекает из 1.В, а (б)$\Rightarrow$(в) устанавливается так же, как и в [2, теорема 3.4.2]. Докажем (в)$\Rightarrow$(а). Если $0 \leqslant \Psi_0 \leqslant |\Psi|$, то Ψ_0 удовлетворяет условию (б), поэтому $\Psi_0 \circ \pi = h(\pi) \circ \Psi_0$, $\pi \in \mathfrak{P}\mathfrak{r}(E)$. Предположив, что $\Psi_0 d\Phi$, для $0 \leqslant e \in E$ будем иметь

$$\Psi_0 e \wedge \Phi e \leqslant \inf \{h(\pi) \Psi_0 e + h(\pi)^d \Phi e\colon \pi \in \mathfrak{P}\mathfrak{r}(E)\} =$$
$$= \inf \{\Psi_0 \pi e + \Phi \pi^d e\colon \pi \in \mathfrak{P}\mathfrak{r}(E)\} = (\Psi_0 \wedge \Phi) e = 0.$$

Таким образом, $\Psi_0 e = 0$, следовательно, $\Psi \in \{\Phi\}^{dd}$. ▷

В текущем параграфе излагаются аналогичные результаты для мажорированных операторов. Прежде всего выделим соответствующие классы операторов.

1.1. Введем требуемые классы операторов. Напомним, что линейный оператор $T\colon V \to W$ называется *bo-непрерывным*, если для любой сети $(v_\alpha) \subset V$ из $o\text{-}\lim |v_\alpha| = 0$ следует, что $o\text{-}\lim |Tv_\alpha| = 0$. Говорят, что оператор T является а) *разложимым*, если для любых $v \in V$ и дизъюнктных $w_1, w_2 \in W$ из представления $Tv = w_1 + w_2$ следует существование таких $v_1, v_2 \in V$, что $TB_V(|v_i|) \subset \{w_i\}^{dd}$, $i = 1, 2$, $v = v_1 + v_2$; б) *коразложимым* (*d-гомоморфизмом* или *сохраняющим дизъюнктность*), если для любых дизъюнктных v_1 и $v_2 \in V$ элементы Tv_1 и Tv_2 также дизъюнктны. Из разложимости T вытекает, в частности, что $Tv_i = w_i$, $i = 1, 2$. Скажем, что оператор $0 \leqslant \Phi \in L_r(E, F)$ *положительно разложим*, если для $0 \leqslant e \in F$ и дизъюнктных $f_1, f_2 \in F$ из равенства $\Phi e = f_1 + f_2$ следует существование таких $0 \leqslant e_1, e_2 \in E$, что $e = e_1 + e_2$ и $Te_i = f_i$, $i = 1, 2$. Как будет показано ниже, регулярный оператор $T \in L_r(E, F)$ разложим тогда и только тогда, когда $|T|$ положительно разложим. Ниже используются обозначения: $\mathcal{N}_T := \{v \in V\colon B_V(|v|) \subset \operatorname{Ker}(T)\}$, $V_T := (\mathcal{N}_T)^d$, $W_T := T[V]^{dd}$.

1.2. Теорема. *Для любого мажорированного оператора $T\colon V \to W$ имеют место следующие утверждения:*

(а) *оператор T bo-непрерывен в том и только том случае, если он имеет o-непрерывную мажоранту;*

(б) *оператор T разложим в том и только том случае, когда положительно разложим оператор $|T|$;*

(в) *оператор T разложим и o-непрерывен в том и только том случае, если $|T|$ — оператор Магарам;*

(г) *оператор T коразложим в том и только том случае, если $|T|$ — решеточный гомоморфизм.*

◁ (а) Это утверждение установлено в [1].

(б) Пусть T — разложимый мажорированный оператор. Допустим, что $|T| e = f_1 + f_2$ для некоторых $0 \leqslant e \in E$ и дизъюнктных $f_1, f_2 \in F$. Существует элемент $v \in V$, для которого $|v| = e$ и, значит, $|Tv| \leqslant f_1 + f_2$. Допустим, что π_1 — проектор на компоненту $\{f_1\}^{dd}$ и $\pi_2 := I_F - \pi_1$. Положим $w_i := \pi_i T v_i$, $i = 1, 2$. По условию найдутся дизъюнктные v_1 и $v_2 \in V$ такие, что $v = v_1 + v_2$, $Tv_i = w_i$ и $T[B_V(|v_i|)] \subset \{w_i\}^{dd}$, $i = 1, 2$. Отсюда видно, что $e \leqslant c_1 + c_2$ и $|T| c_i \in \{f_i\}^{dd}$, где $c_i := |v_i|$, $i = 1, 2$. Если $e_i \in [0, c_i]$ таковы, что $e = e_1 + e_2$, то $|T| e_1 + |T| e_2 = f_1 + f_2$ и $|T| e_i \in \{f_i\}^{dd}$, $i = 1, 2$, следовательно, $f_i = |T| e_i$, $i = 1, 2$.

Наоборот, допустим, что $|T|$ положительно разложим и $Tv = w_1 + w_2$ для $v \in V$ и дизъюнктных $w_1, w_2 \in W$. Пусть π_1 — проектор на компоненту $\{|w_1|\}^{dd}$, $\pi_2 := I_F - \pi_1$ и $f_i := \pi_i |T| (|v|)$, $i = 1, 2$. Тогда $|T|(|v|) = f_1 + f_2$, $f_1 d f_2$, значит найдутся такие $0 \leqslant e_1, e_2 \in E$, что $|T| e_i = f_i$, $i = 1, 2$, и $|v| = e_1 + e_2$. Благодаря разложимости нормы ПБК V имеет место представление $v = v_1 + v_2$, где $|v_i| = e_i$. Если $u_i \in B_V(|v_i|)$, то $|Tu_i| \leqslant |T|(|u_i|) \leqslant f_i$, поэтому $B_V(|v_i|) \subset \pi_i[V]$. Кроме того, $Tv_1 + Tv_2 = Tv = w_1 + w_2$. Применив к последнему равенству проектор π_i и учитывая, что $v_i \in B_V(|v_i|)$, получим $Tv_i = \pi_i Tv_i = w_i$, $i = 1, 2$.

(в) Это вытекает из (а), (б) и свойств операторов Магарам.

(г) Пусть T коразложим. Возьмем дизъюнктные $0 \leqslant e_1$, $e_2 \in E$ и подберем такие v_1, $v_2 \in V$, чтобы $e_i = |v_i|$. Понятно, что для любых $u_i \in B_V(e_i)$ выполняется $u_1 d u_2$, а потому и $Tv_1 d Tv_2$. Теперь из формулы

$$|T| e_i = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |Tu_j| : u_j \in B_V(e_i), \quad u_j d u_k, \quad k \neq j \right\}$$

видно, что $|T| e_1 d |T| e_2$. Но положительный оператор, сохраняющий дизъюнктность, является решеточным гомоморфизмом. Противоположное утверждение тривиально. $\triangleright$

Подпространство $V_0 \subset V$ называется *d-замкнутым*, если для любого дизъюнктного суммируемого семейства $(v_\xi) \subset V_0$ будет $\sum\limits_\xi v_\xi \in V_0$.

1.3. Теорема. *Для произвольного мажорированного оператора T: $V \to W$ равносильны условия*:

(а) *T является bo-непрерывным*;

(б) *если $|T|$ является мажорантой линейного оператора S, то $\mathscr{N}_S$ есть d-замкнутое подпространство V.*

$\triangleleft$ (а)$\Rightarrow$(б). В силу 1.2 (а) из (а) следует, что $|T|$ — порядково непрерывный оператор. Отсюда для $S \in M(V, W)$ благодаря неравенству $|Sv| \leqslant |T|(|v|)$, $v \in V$, вытекает d-замкнутость подпространства $\mathscr{N}_S$.

(б)$\Rightarrow$(а). Сначала покажем справедливость соотношения

$$\mathscr{N}_S = \mathscr{M}_S := \{v \in V : |v| \in \mathscr{N}_{|S|}\}.$$

Включение $\mathscr{N}_S \supset \mathscr{M}_S$ очевидно. Возьмем $v \in \mathscr{N}_S$ и пусть $v_1, \ldots, v_n \in V$ таковы, что $\sum\limits_{i=1}^{n} |v_i| \leqslant |v|$. Тогда $|v_i| \in B_V(|v|)$, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n} |Sv_i| = 0$. Тем самым, $|S|(|v|) = 0$, т. е. $v \in \mathscr{M}_S$, что и устанавливает противоположное включение. Рассмотрим теперь оператор Ψ: $E \to F$ такой, что $0 \leqslant \Psi \leqslant |T|$. По теореме из [1] существует $S \in M(V, W)$, для которого $|S| = \Psi$. Непосредственно из определения следует, что $\mathscr{N}_\Psi$ — это r-замкнутый идеал в E. Пусть (e_ξ) — семейство попарно дизъюнктных положительных элементов в $\mathscr{N}_\Psi$, причем $\sup(e_\xi) = e \in E$. Подберем такие $v_\xi \in V$, чтобы $|v_\xi| = e_\xi$. Если $u_\theta := \sum\limits_{\xi \in \theta} v_\xi$ для конечного множества индексов θ, то $|u_\theta - u_{\theta'}| = \sum_{\xi \in \theta \Delta \theta'} e_\xi$. Это означает, что (u_θ) — фундаментальная сеть. Ввиду bo-полноты V существует $v := bo\text{-}\lim u_\theta = \sum\limits_\xi v_\xi$. При этом $|v| = \sum\limits_\xi |v_\xi| = e$. С другой стороны, благодаря d-замкнутости $\mathscr{N}_S$ будет $v \in \mathscr{N}_S = \mathscr{M}_S$, стало быть, $\Psi e = \Psi(|v|) = 0$. Из всего сказанного следует, что $\mathscr{N}_\Psi$ — компонента в E. По теореме 1.А оператор $|T|$ порядково непрерывен. Ясно, что тогда T будет bo-непрерывным. $\triangleright$

Так же, как и в случае порядково ограниченных операторов (см. [4]), можно из 1.3 извлечь следующий факт.

1.4. Теорема. *Эквивалентны следующие утверждения*:

(а) *всякий мажорированный оператор из V в W является bo-непрерывным*;

(б) *всякий ненулевой мажорированный оператор из V в W имеет ненулевой носитель*;

(в) *подпространство $\mathscr{N}_S$ является d-замкнутым для всякого мажорированного оператора S из V в W.*

$\triangleleft$ (а)$\Rightarrow$(б). Если $S \in M(V, W)$ и $\mathscr{N}_S^d = \{0\}$, то $\mathscr{N}_S = V$ из-за bo-непрерывности S. Действительно, из $\mathscr{N}_S^d = \{0\}$ вытекает, что $\mathscr{N}_{|S|}^d = \{0\}$, а o-непрерывность оператора S дает $\mathscr{N}_{|S|} = E$. Отсюда в силу равенства $\mathscr{N}_S = \{v \in V : |v| \in \mathscr{N}_{|S|}\}$ получаем $\mathscr{N}_S = V$.

(б) $\Rightarrow$ (в). Возьмем $S \in M(V, W)$ и обозначим через V_0 компоненту, порожденную множеством $\mathcal{N}_S$. Пусть π — проектор на V_0. Тогда $S \circ \pi$ обращается в нуль на V_0^d, значит $V_0^d \cup \mathcal{N}_S \subset \mathcal{N}_{S\circ\pi}$. Отсюда видно, что $\mathcal{N}_{S\circ\pi}^d = \{0\}$, и по условию должно быть $S \circ \pi = 0$. Это влечет $V_0 \subset \mathcal{N}_S$ и, в частности, $\mathcal{N}_S$ d-замкнуто.

(в) $\Rightarrow$ (а). Это вытекает непосредственно из 1.3. $\triangleright$

1.5. Теорема. *Пусть оператор $T \in M(V, W)$ разложим и bo-непрерывен. Тогда существует булев изоморфизм из $\mathfrak{Pr}(W_T)$ на правильную подалгебру булевой алгебры $\mathfrak{Pr}(V_T)$ такой, что для каждого bo-непрерывного $S \in M(V, W)$ равносильны следующие утверждения:*

(а) $S \in \{T\}^{dd}$;

(б) $Sv \in T[B_V(|v|)]^{dd}$ *для всех* $v \in V$;

(в) $\pi S = Sh(\pi)$ *для всех* $\pi \in \mathfrak{Pr}(W_T)$.

$\triangleleft$ По теореме 1.2 $\Phi := |T|$ — оператор Магарам. Более того, существует изоморфизм h из $\mathfrak{Pr}(F_\Phi)$ на правильную подалгебру булевой алгебры $\mathfrak{Pr}(E_\Phi)$ такой, что $\pi\Phi = \Phi h(\pi)$ для всех $\pi \in \mathfrak{Pr}(F_\Phi)$. Той же буквой h обозначим изоморфизм из $\mathfrak{Pr}(W_T)$ на правильную подалгебру $\mathfrak{Pr}(V_T)$, который существует благодаря соотношениям $\mathfrak{Pr}(E_\Phi) \simeq \mathfrak{Pr}(V_T)$ и $\mathfrak{Pr}(F_\Phi) \simeq \mathfrak{Pr}(W_T)$. Теорема будет доказана, если установить, что каждое из утверждений (а), (б), (в) равносильно соответствующему утверждению из 1.В для операторов Φ и $\Psi := |S|$.

(а) 1.5 (а) $\Leftrightarrow$ 1.В (а). Очевидно.

(б) 1.5 (б) $\Leftrightarrow$ 1.В (б). Допустим, что $Sv \in T[B_V(|v|)]^{dd}$. Если $v_1, \ldots, v_n, v \in V$ таковы, что $|v| = \sum_{i=1}^n |v_i|$, то $\sum_{i=1}^n T[B_V|v_i|)] \subset \subset T[B_V(|v|)]^{dd}$. С другой стороны, $\sum_{i=1}^n |Sv_i| \in \sum T[B_V(|v_i|)]^{dd}$, поэтому $\sum_{i=1}^n |Sv_i| \in \{\Phi(|v|)\}^{dd}$. Отсюда заключаем, что $\Psi(|v|) = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |Sv_i|\right\} \in \{\Phi(|v|)\}^{dd}$.

Наоборот, пусть $\Psi e \in \{\Phi e\}^{dd}$ для всех $e \in E$. Тогда $|Sv| \in \in \{\Psi e\}^{dd} \subset \{\Phi e\}^{dd}$ и остается

$$\{\Phi e\}^{dd} = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |Tv_i| : \sum_{i=1}^n |v_i| = |v|, n \in N\right\}^{dd} =$$

$$= \bigvee \{\{|Tu|\}^{dd} : |u| \leqslant |v|\} = (T[B_V(|v|)])^{dd}.$$

(в) 1.5 (в) $\Rightarrow$ 1.В (в). Если выполняется 1.5 (в), то справедливы следующие выкладки:

$$\pi\Psi e = \sup\left\{\sum_{i=1}^n \pi|Sv_i| : \sum_{i=1}^n |v_i| = e, n \in N\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^n |\pi S v_i| : \sum_{i=1}^n |v_i| = e, n \in N\right\} = \sup\left\{\sum_{i=1}^n |Sh(\pi)v_i| : \sum_{i=1}^n |v_i| = e, n \in N\right\} =$$

$$= \sup\left\{\sum_{i=1}^n |Su_i| : \sum_{i=1}^n |u_i| = h(\pi)e, n \in N\right\} = \Psi h(\pi)e.$$

Наоборот, предположим, что $\pi\Psi = \Psi h(\pi)$, $\pi \in \mathfrak{Pr}(W_\Phi)$. Тогда $|Sh(\pi)v| \leqslant \pi\Psi(|v|)$, следовательно, $|\pi^d Sh(\pi)v| = \pi^d |Sh(\pi)v| = 0$. Тем самым, $\pi^d Sh(\pi) = 0$ или $\pi Sh(\pi) = Sh(\pi)$. Заменив в этом равенстве π на π^d, получим также $\pi S = \pi Sh(\pi)$. Окончательно будем иметь $\pi S = = Sh(\pi)$. $\triangleright$

1.6. Теорема. *Пусть оператор $T \in M(V, W)$ коразложим. Тогда существует булев гомоморфизм из $\mathfrak{Pr}(V)$ в $\mathfrak{Pr}(W_T)$ такой, что для каждого $S \in M(V, W)$ равносильны утверждения:*

(а) $S \in \{T\}^{dd}$;

(б) $Sv \in \{Tv\}^{dd}$ *для всех* $v \in V$;

(в) $S\pi = h(\pi)S$ *для всех* $\pi \in \mathfrak{Pr}(V)$.

◁ Доказательство проводится по схеме 1.5, но с использованием теоремы 1.Г вместо 1.Б. ▷

§ 2. Аналитическое представление разложимых и коразложимых операторов

Одной из традиционных задач функционального анализа является отыскание специфического аналитического выражения для линейных операторов из того или иного класса. Много глубоких результатов такого типа накоплено для ограниченных операторов в банаховых пространствах и порядково ограниченных операторов в векторных решетках (см. [7—9]). Довольно часто в подобных вопросах существенную роль играет отношение векторного порядка. Сформулируем, например, несколько результатов для операторов Магарам и решеточных гомоморфизмов, полученных в недавнее время.

2.А. Теорема (Luxemburg W. A. J., Schep A. R. [5]). *Пусть E и F — K-пространства, а Φ: $E \to F$ — оператор Магарам. Тогда для любого оператора $\Psi \in L_r(E, F)$ равносильны утверждения*

(а) Ψ *содержится в компоненте* $\{\Phi\}^{dd}$;

(б) *существует ортоморфизм* $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)$, *такой, что* $\Psi e = \Phi\alpha e$ *для всех* $e \in \mathscr{D}(\alpha)$.

Предположим теперь, что Φ существенно положителен и обозначим через $\mathscr{D}_m(\Phi)$ наибольший фундамент в mE, на который распространяется Φ по o-непрерывности. Будем считать Φ заданным на $\mathscr{D}_m(\Phi)$. Пусть $\Phi_0 := \Phi|_{E_0}$, где $E_0 := E \cap \mathscr{D}_m(\Phi)$. Обозначим символом $\mathscr{L}_\Phi(E, F)$ множество всех регулярных o-непрерывных операторов Ψ: $E \to F$ таких, что $\Psi|_{E_0} \in \{\Phi_0\}^{dd}$. Нетрудно понять, что $\mathscr{L}_\Phi(E, F)$ — компонента в $L_r(E, F)$. Рассмотрим множество $E' := \{e' \in mE$: $e'E \subset \mathscr{D}_m(\Phi)\}$.

2.Б. Теорема (Кусраев А. Г. [10]). *Множество E' является фундаментом в mE, линейно и решеточно изоморфным K-пространству $\mathscr{L}_\Phi(E, F)$. Изоморфизм осуществляется сопоставлением элементу $e' \in E'$ оператора $\Psi_{e'} \in \mathscr{L}_\Phi(E, F)$ по формуле $\Psi_{e'}(e) = \Phi(ee')(e \in E)$.*

Пусть P и Q — стоуновские компакты E и F соответственно. Допустим, что задано непрерывное отображение α: $A \to P$, где A — замкнутое подмножество Q. Тогда с α можно связать решеточный гомоморфизм α^*: $C_\infty(P) \to C_\infty(Q)$ следующим образом. Для каждого $e \in C_\infty(P)$ полагаем $(\alpha^* e)(t) = e(\alpha(t))$, если $t \in A$, и $(\alpha^* e)(t) = 0$, если $t \in Q \setminus A$. Разумеется, $\alpha^* e \in C_\infty(Q)$, если $\alpha^{-1}[\mathrm{dom}(e)]$ плотно в A, где $\mathrm{dom}(e) := \{s \in P$: $|e(s)| < +\infty\}$.

2.В. Теорема (Abramovich Yu. A. [11]). *Пусть E и F — архимедовы векторные решетки* (не обязательно порядково полные), а Φ: $E \to F$ — *линейный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда равносильны утверждения*:

(а) *для любых двух последовательностей* (e_n') *и* (e_n'') *в* E *из* $r\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} e_n' = r\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} e_n'' = 0$ *следует, что* $\inf\{|\Phi e_n'| + |\Phi e_n''|\} = 0$;

(б) *оператор Φ регулярен*;

(в) *для любого* $0 \leqslant e_0 \in E$ *существуют непрерывное отображение* α *из замкнутого подмножества* Q *в* P *и элемент* $\varphi \in C_\infty(Q)$ *такие, что* $\Phi e = \varphi\alpha^* e$ $(e \in E(e_0))$. *Если оператор Φ порядково непрерывен, то мультипликативное представление из* (в) *имеет место на всем E для подходящих α и φ.*

Отправляясь от перечисленных результатов 2.А, 2.Б и 2.В, можно получить аналогичные реализационные теоремы для разложимых и коразложимых мажорированных операторов. Этому и посвящается текущий параграф.

2.1. В дальнейшем потребуется один класс операторнозначных функций. Пусть, как и раньше, X и Y — банаховы пространства, P — экстремальный компакт и E — фундамент в $C_\infty(P)$. Обозначим символом $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_P(X, Y')$ множество всех отображений K, действующих из котощих подмножеств $\mathrm{dom}(K)\subset P$ в $\mathscr{L}(X, Y')$ и удовлетворяющих следующим двум требованиям: (1) функция $s\to\langle y, K(s)x\rangle$, $s\in\mathrm{dom}(K)$, непрерывна для всех $x\in X$ и $y\in Y$; (2) существует $\varphi\in C_\infty(P)$ такой, что $\|K(s)\|\leqslant\varphi(s)$ для всех $s\in\mathrm{dom}(K)$. Из условия (1) вытекает, что для фиксированных $x\in X$ и $y\in Y$ существует единственный элемент $z\in\in C_\infty(P)$ такой, что $z(s)=\langle y, K(s)x\rangle$, $s\in\mathrm{dom}(K)$. Положим по определению $\langle y, Kx\rangle:=z$. Условие же (2) влечет, что в K-пространстве $C_\infty(P)$ существует $|K|:=\sup\{\langle y, Kx\rangle: \|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1\}$, причем $|K|\leqslant\varphi$ Из смысла точных границ в $C_\infty(P)$ видно, что $|K|(s)=\|K(s)\|$ для всех $s\in\mathrm{dom}(K)$, за исключением, быть может, точек некоторого тощего множества. Если $u\in E(X)$ (см. [1, 2]), то функция $t\to\langle y, K(t)u(t)\rangle\rangle$, $t\in\mathrm{dom}(K)\cap\mathrm{dom}(u)$, непрерывна. Это видно из неравенства

$$|\langle y, K(s)u(s)\rangle-\langle y, K(s_0)u(s_0)\rangle|\leqslant$$
$$\leqslant|K|(s)\|u(s)-u(s_0)\|+|\langle y, (K(s)-K(s_0))u(s_0)\rangle|.$$

Следовательно, существует продолжение по непрерывности этой функции на все P со значениями в $\bar{\mathbf{R}}$. Соответствующий элемент $C_\infty(P)$ обозначим $\langle y, Ku\rangle$.

Отображения K_1 и $K_2\in\mathfrak{M}_P(X, Y')$ назовем *эквивалентными* и напишем $K_1\sim K_2$, если $K_1(t)=K_2(t)$ для всех $t\in\mathrm{dom}(K_1)\cap\mathrm{dom}(K_2)$. Если $K_1\sim K_2$, то для любых $x\in X$, $y\in Y$ и $u\in E(X)$ будет $\langle y, K_1x\rangle=$ $=\langle y, K_2x\rangle$, $\langle y, K_1u\rangle=\langle y, K_2u\rangle$. Поэтому для класса эквивалентности L отображения $K\in\mathfrak{M}_P(X, Y')$ корректны определения $|L|:=|K|$, $\langle y, Lx\rangle:=$ $:=\langle y, \mathrm{K}x\rangle$ и $\langle y, Lu\rangle:=\langle y, Ku\rangle$. Положим по определению $E_s(\mathscr{L}(X, Y')):=\{K\in\mathfrak{M}/\sim:|K|\in E\}$.

2.2. Теорема. *Пара* $(E_s(\mathscr{L}(X, Y'), |\cdot|)$ *есть пространство Банаха — Канторовича.*

$\lhd$ Пространство $\mathscr{L}(X, Y')$ линейно изометрично сопряженному банахову пространству $(X\widehat{\otimes} Y)'$, где $X\widehat{\otimes} Y$ — проективное тензорное произведение пространств X и Y. Следовательно, решеточно нормированное пространство $E_s(\mathscr{L}(X, Y'))$ линейно изометрично $E_s(Z, \Gamma)$, где $Z:=$ $:=(X\widehat{\otimes} Y)'$ и $\Gamma:=X\otimes Y$ — нормирующее подпространство в Z'. В соответствии с [1, 2] $E_s(Z, \Gamma)$ — это ПБК, значит таковым является и $E_s(\mathscr{L}(X, Y'))$. $\rhd$

Напомним, что вместо $E_s(X', X)$ пишем $E_s(X')$.

2.3. Для дальнейших нужд потребуются еще два вспомогательных факта. Скажем, что b: $X\times Y\to E$ — *билинейный оператор с абстрактной нормой*, если b билинеен и в E существует

$$|b|:=\sup\{b(x, y): \|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1\}.$$

Обозначим через $\mathscr{B}_A(X, Y; E)$ пространство всех билинейных операторов с абстрактной нормой, действующих из $X\times Y$ в E. Можно показать, что $(\mathscr{B}_A(X, Y; E), |\cdot|)$ — это ПБК. С каждым элементом $w\in E_s((X\widehat{\otimes} Y)')$ можно связать оператор $b_w\in\mathscr{B}_A(X, Y; E)$ по формуле

$$b_w(x, y):=\langle x\otimes y, w\rangle\quad(x\in X, y\in Y).$$

При этом $|b|=|w|$. Оказывается, что верно и обратное. Точнее, имеет место следующее утверждение, установленное в [12].

(а) **Теорема.** *Для любого билинейного оператора с абстрактной нормой* b: $X\times Y\to E$ *существует единственный элемент* $w_b\in E_s((X\widehat{\otimes} Y)')$ *такой, что* $b(x, y)=\langle x\otimes y, w_b\rangle$ *при всех* $x\in X$ *и* $y\in Y$. *Сопоставление* $b\to w_b$ *осуществляет линейную изометрию* ПБК $\mathscr{B}_A(X, Y; E)$ *и* $E_s((X\widehat{\otimes} Y)')$.

(б) *Если* T — *bo-непрерывный мажорированный оператор из* $E(X)$ *в* W, *то*

$$|T|e=\sup\left\{\sum_{i=1}^n|T(x_i\otimes e_i)|: \|x_i\|\leqslant 1, e_i\wedge e_j=0, i\neq j, \sum_{i=1}^n e_i=e\right\}$$

для любого $0\leqslant e\in E$.

$\lhd$ Обозначим через Pe правую часть требуемого равенства. Очевидно, что $Pe \leqslant |T| e$ для всех $0 \leqslant e \in E$. Так же, как и в [1], доказываются субаддитивность, положительная однородность P, а также аддитивность $P(e'+e'') = Pe' + Pe''$ для дизъюнктных $0 \leqslant e', e'' \in E$. Отсюда вытекает аддитивность P для произвольных положительных e' и e'' (подробности см. в [1]). Распространение P до положительного оператора из E в F обозначим той же буквой. Так как $P \leqslant |T|$, то P порядково непрерывен. Пусть V_0 — множество элементов из $E(X)$ вида $v = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes e_i$, где $x_1, \ldots, x_n \in X$ произвольны, а $e_1, \ldots, e_n \in E$ попарно дизъюнктны. Ясно, что $|v| = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| |e_i| = \sum_{i=1}^{n} \|y_i\| e_i'$, где $y_i := x_i/\|x_i\|$ и $e_i' := \|x_i\| |e_i|$ Далее,

$$|Tv| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |T(x_i \otimes e_i)| = \sum_{i=1}^{n} |T(y_i \otimes e_i')| = P(|v|).$$

В силу порядковой непрерывности P и T неравенство $|Tv| \leqslant P(|v|$ сохраняется и для пределов $v := bo\text{-}\lim(v_\alpha)$, если оно имеет место для всех v_α. Заметим еще, что элементы $E(X)$ приближаются элементами V_0. Теперь ясно, что P — мажоранта для T, следовательно, $P = |T|$. $\rhd$

Возьмем оператор Магарам Φ: $\mathscr{D}_m(\Phi) \to F$. Пусть $\mathscr{L}_\Phi(E, F)$ и E' — те же, что и в теореме 2.Б. Положим

$$M_\Phi(E(X), F_s(Y')) := \{T: |T| \in \mathscr{L}_\Phi(E, F)\}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathrm{M}_\Phi(E(\mathrm{X}), F_s(Y'))$ — разложимое замкнутое подпространство в $M(E(X), F_s(Y'))$.

2.4. Теорема. *Для любого мажорированного оператора $T \in M_\Phi(E(X), F_s(Y'))$ существует единственная с точностью до эквивалентности операторнозначная функция $K \in \mathfrak{M}_P(X, Y')$ такая, что $|K| \in E'$ и имеет место представление*

$$\langle y, Tu\rangle = \Phi(\langle y, Ku\rangle) \quad (u \in E(X),\ y \in Y).$$

Сопоставление $T \to K$ определяет линейную изометрию ПБК $M_\Phi(E(X), F_s(Y'))$ *и* $E_s'(\mathscr{L}(X, Y'))$.

$\lhd$ Зафиксируем элементы $x \in X$ и $y \in Y$. Определим отображение $\Psi := \Psi_{x,y}$: $E \to F$ соотношением $\Psi e := \langle y, T(x \otimes e)\rangle$, где элемент $x \otimes e \in E(X)$ задается формулой $x \otimes e$: $t \to xe(t)$, $|e(t)| < +\infty$. Заметим, что

$$|\Psi e| \leqslant |T(x \otimes e)| \|y\| \leqslant |T|(|e|) \|x\| \|y\|.$$

Так как $|T| \in \mathscr{L}_\Phi(E, F)$, то верно также, что $\Psi \in \mathscr{L}_\Phi(E, F)$. Обозначим буквой λ изоморфизм из $\mathscr{L}_\Phi(E, F)$ на E', о котором идет речь в теореме 2.В. Положим $b(x, y) := \lambda(\Psi_{x,y})$. Тогда $\Phi(eb(x, y)) = \langle y, T(x \otimes e)\rangle$ для всех $x \in X$, $y \in Y$ и $e \in E$. Как видно, отображение $(x, y) \to b(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$, есть билинейный оператор из $X \times Y$ в E'. Кроме того,

$$|b(x, y)| \leqslant \lambda(|\Psi_{x,y}|) \leqslant \lambda(|T|) \|x\| \|y\|,$$

значит, $|b| \leqslant \lambda(|T|)$. С другой стороны, в силу 2.3 (б)

$$\begin{aligned}|T| e &= \sup\{\textstyle\sum |T(x(i) \otimes c(i))|: (x, c) \in \mathscr{U}\} = \\ &= \sup\Big\{\sup_{\|y\| \leqslant 1}\{\textstyle\sum \langle y, T(x(i) \otimes c(i))\rangle\}: (x, c) \in \mathscr{U}\Big\} = \\ &= \sup\Big\{\sup_{\|y\| \leqslant 1}\{\textstyle\sum \Phi(c(i)\, b(x(i), y)): (x, c) \in \mathscr{U}\} \leqslant\end{aligned}$$

$$\leqslant \sup_{\|y\| \leqslant 1}\{\sup\{\textstyle\sum \Phi(c(i)|b|)\, \|x(i)\| \|y\|: (x, c) \in \mathscr{U}\}\} \leqslant \Phi\left(\textstyle\sum c(i)|b|\right) = \Phi(e|b|),$$

где множество $\mathcal{U}$ состоит из всех пар (x, c) вида $x\colon \{1, \ldots, n\} \to X$, $c\colon \{1, \ldots, n\} \to E$, $n \in N$, причем $\|x(i)\| \leqslant 1$, $n \in N$, $\sum c(i) = e$, $c(i) d c(j)$ при $i \neq j$.

Отсюда видно, что $\lambda(|T|) \leqslant |b|$, что вместе с уже установленным дает $|b| = \lambda(|T|)$. Применим теперь теорему 2.3(а). Существует элемент $K' \in E'_s(\mathcal{L}(X, Y'))$ такой, что $b(x, y) = \langle x \otimes y, K' \rangle$ для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Поскольку $\mathcal{B}(X, Y) \simeq \mathcal{L}(X, Y')$, существует $K \in E'_s(\mathcal{L}(X\ Y'))$, для которого $b(x, y) = \langle y, Kx \rangle$, $x \in X$, $y \in Y$. Следовательно,

$$\langle y, T(x \otimes e) \rangle = \Phi(eb(x, y)) = \Phi(\langle y, Kx \rangle e) = \Phi(\langle y, Kx \otimes e \rangle).$$

Отсюда видно, что $\langle y, Tu \rangle = \Phi(\langle y, Ku \rangle)$ для всех $u \in X \otimes E$. Операторы $S_1\colon u \to \langle y, Tu \rangle$ и $S_2\colon u \to \Phi(\langle y, Ku \rangle)$, действующие из $E(X)$ в F, имеют o-непрерывные мажоранты. В самом деле, $|S_1(u)| \leqslant |T|(|u|)\|y\|$ и $|S_2(u)| \leqslant \Phi(|K||u|)\|y\|$ для всех $u \in E(X)$. Как было показано, S_1 и S_2 совпадают на $X \otimes E$, значит, $S_1 = S_2$. Заметим также, что $\lambda(|T|) = |K|$ ибо по теореме 2.3 (а) $|b| = |K|$.

Предположим, что еще какой-нибудь элемент $L \in E'_s(\mathcal{L}(X, Y'))$ представляет оператор T в указанном виде. Тогда $\Phi(\langle y, (K-L)u \rangle) = 0$ для всех $u \in E(X)$. Полагая $u = x \otimes e$, приходим к заключению, что $\Phi(\langle y, (K-L)x \rangle e) = 0$ для всех $e \in E$. В силу 1.В отсюда вытекает, что $\langle y, (K-L)x \rangle = 0$. Поскольку в последнем соотношении $x \in X$ и $y \in Y$ произвольны, то $K = L$.

Наконец, возьмем произвольные элементы $K \in E'_s(\mathcal{L}(X, Y'))$ и $u \in E(X)$. Тогда $|\langle y, Ku \rangle| \leqslant \|y\| |K| |u| \in \mathcal{D}_m(\Phi)$, поэтому $\langle y, Ku \rangle \in \mathcal{D}_m(\Phi)$, каков бы ни был элемент $y \in Y$. Легко видеть, что оператор $S_u\colon y \to \Phi(\langle y, Ku \rangle)$ линеен и

$$|S_u(y)| \leqslant \Phi(|K||u|)\|y\| \quad (y \in Y).$$

Это означает, что S_u — оператор с абстрактной нормой. По теореме 2.3 (а) существует единственный элемент $w \in F_s(Y')$ такой, что $S_u(y) = \langle y, w \rangle$ для всех $y \in Y$, причем $|S_u| = |w|$. Положим $Tu := w$. Тогда $\langle y, Tu \rangle = \Phi(\langle y, Ku \rangle)$. Легко заметить, что тем самым определен линейный оператор $T\colon E(X) \to F_s(Y')$. При этом справедливы соотношения

$$|Tu| = |S_u| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \Phi(\langle y, Ku \rangle) \leqslant \Phi(|K||u|).$$

Стало быть, оператор T имеет o-непрерывную мажоранту $e \to \Phi(e|K|)$, $e \in E$, которая входит в $\mathcal{L}_\Phi(E, F)$ согласно 2.В. Тем самым, $T \in M_\Phi(E(X), F_s(Y'))$. ▷

Сформулируем вариант теоремы Радона — Никодима для мажорированных операторов (ср. [5]).

2.5. Теорема. *Пусть Φ — оператор Магарам из E в F. Если мажорированный оператор $T\colon E(X) \to F_s(Y, Z)$ удовлетворяет соотношению $|T| \in \{\Phi\}^{dd}$, то существует операторнозначная функция $K \in \mathfrak{M}_P(X, Z')$ такая, что справедливы представления*

$$\langle Tu, z \rangle = \Phi(\langle z, Ku \rangle) \quad (u \in \mathcal{D}(K),\ z \in Z),$$

$$|T| e = \Phi(|K| e) \quad (e \in \mathcal{D}(|K|)),$$

где Z — нормирующее подпространство Y', и $\mathcal{D}(|K|) := \{e \in E\colon e|K| \in E\}$, $\mathcal{D}(K) := \{u \in E(X)\colon |u| \in \mathcal{D}(|K|)\}$.

◁ Рассмотрим двойственность $\langle Y, Z \rangle$. Понятно, что каноническое вложение Y в Z' является изометрией. На этом основании можем отождествить Y с замкнутым подпространством в Z'. Тогда $F_s(Y, Z)$ есть bo-замкнутое подпространство в $F_s(Z')$. Далее, из включения $|T| \in \{\Phi\}^{dd}$ видно, что $T \in \mathcal{L}_\Phi(E(X), F_s(Z'))$. По теореме 2.4 существует

$K \in \mathfrak{M}_P(X, Z')$, для которой

$$\langle Tu, z\rangle = \widetilde{\Phi}(\langle z, Ku\rangle) \quad (u \in E(X),\ z \in Z),$$

$$|T|e = \widetilde{\Phi}(e|K|) \quad (e \in E),$$

где $\widetilde{\Phi}$ — распространение Φ по o-непрерывности на наибольший фундамент в mE. В полученных представлениях можно написать Φ вместо $\widetilde{\Phi}$, если $u \in \mathscr{D}(K)$ и $e \in \mathscr{D}(|K|)$. $\triangleright$

2.6. Переходим теперь к изложению двойственных результатов. Пусть Φ: $E \to mF$ — решеточный гомоморфизм. Обозначим через $\mathscr{R}(\Phi)$ идеал в $mF := C_\infty(Q)$, порожденный множеством $\Phi[E]$, причем будем считать, что $\mathscr{R}(\Phi)$ — фундамент в mF. Положим $F' := \{f' \in mF\colon f' \cdot \mathscr{R}(\Phi) \subset F\}$. Пусть $\mathscr{L}^\Phi(E, F)$ — множество всех регулярных операторов Ψ из E в F таких, что $|\Psi| \in \{\Phi\}^{dd}$, если Ψ рассматривать как оператор из E в mF. Из 1.В без труда выводится такой факт.

(а) **Теорема.** *Множество F' является порядковым идеалом в mF, линейно и решеточно изоморфным K-пространству $\mathscr{L}^\Phi(E, F)$. Изоморфизм устанавливается сопоставлением элементу $f \in F'$ оператора Ψ_f по формуле*

$$\Psi_f(e) = f \cdot \Phi(e) \quad (e \in E).$$

Пусть α: $A \to P$ — то же, что и в 2.В. Допустим, что оператор α^* определен на некотором фундаменте $E \subset C_\infty(P)$. Это означает, что $\alpha^{-1}[\mathrm{dom}(e)]$ плотно в A для всех $e \in E$. Предположим также, что $\alpha^* e \in F$, $e \in E$. Из [1, предложение 6.3] вытекает следующее утверждение.

(б) *Существует единственный мажорированный оператор $\overset{*}{\alpha}_X$: $E(X) \to F(X)$ такой, что $|\overset{*}{\alpha}_X| = \alpha^*$ и*

$$\overset{*}{\alpha}_X\left(\sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \otimes \alpha^* e_i$$

для любых $x_1, \ldots, x_n \in X$ и $e_1, \ldots, e_n \in E$.

Допуская некоторую вольность, можно сказать, что $\overset{*}{\alpha}_X$ однозначно определяется условиями $\overset{*}{\alpha}_X(x \otimes e)(t) = xe(\alpha(t))$ при $t \in \alpha^{-1}[\mathrm{dom}(e)]$ и $\overset{*}{\alpha}_X(x \otimes e)(t) = 0$ для прочих $t \in Q$. Введем обозначение

$$M^\Phi(E(X), F_s(Y')) := \{T\colon |T| \in \mathscr{L}^\Phi(E, F)\}.$$

Наконец, допустим, что $\varphi \in C_\infty(Q)$ и непрерывное отображение α из замкнутого подмножества Q в P задают мультипликативное представление решеточного гомоморфизма Φ (см. теорему 2.В).

2.8. Теорема. *Предположим, что оператор Φ порядково непрерывен. Тогда для каждого $T \in M^\Phi(E(X), F_s(Y'))$ существует единственная с точностью до эквивалентности операторнозначная функция $K \in \mathfrak{M}_Q(X, Y')$ такая, что $|K| \in F'$ и верно представление*

$$Tu = K\left(\varphi\overset{*}{\alpha}_X(u)\right) \quad (u \in E(X)).$$

Сопоставление $T \to K$ определяет линейную изометрию между ПБК $M^\Phi(E(X), F_s(Y'))$ *и* $F'_s(\mathscr{L}(X, Y'))$.

$\triangleleft$ В силу теоремы 2.В оператор Φ допускает мультипликативное представление $\Phi e = \varphi\alpha^* e$, $e \in E$. Возьмем $T \in M^\Phi(E(X), F_s(Y'))$. Так же, как и при доказательстве теоремы 2.4, положим $\Psi_{x,y}(e) := \langle y, T(x \otimes e)\rangle$, где $x \in X$, $y \in Y$ и $e \in E$. Легко усмотреть, что $\Psi_{x,y} \in \mathscr{L}^\Phi(E, F)$. Если λ: $\mathscr{L}^\Phi(E, F) \to F'$ — изоморфизм из 2.6 (а), то можно определить $b(x, y) := \lambda(\Psi_{x,y})$. Вновь окажется, что b: $X \times Y \to F'$ — билинейный оператор, причем $\lambda(|T|) = |b|$. Здесь опять следует привлечь теорему 2.3 (а). Таким образом, найдется $K \in \mathfrak{M}_Q(X, Y')$, для которой

$$\langle y, T(x \otimes e)\rangle = b(x, y)\Phi(e) = \langle y, Kx\rangle\, \varphi\alpha^* e = \left\langle y, K\left(\varphi\overset{*}{\alpha}_X(x \otimes e)\right)\right\rangle.$$

Пользуясь произвольностью $y \in Y$, получаем отсюда $T(x \otimes y) = K\left(\varphi\overset{*}{\alpha}_X(x \otimes y)\right)$. Так как $E(X)$ есть пополнение $X \otimes E$, то из сказанного вытекает, что $Tu = K(\varphi\alpha_X^* u)$ для всех $u \in E(X)$. Единственность K с точностью до эквивалентности видна из следующих рассуждений. Если $L \in \mathfrak{M}_Q(X, Y')$ также представляет T, то $L(\varphi\alpha_X^* u) = K(\varphi\alpha_X^* u)$ для всех $u \in E(X)$. В частности, $L(x\varphi\alpha^* e) = K(x\varphi\alpha^* e)$ или, что то же, $(L(t)x - K(t)x)\varphi(t)e(\alpha(t)) = 0$ для всех $x \in X$ и $e \in E$. Так как $\mathscr{R}(\Phi)$ — фундамент в $C_\infty(Q)$, то φ — порядковая единица в $C_\infty(Q)$, значит, $L(t)x = K(t)x$ для всех $t \in Q$, за исключением, быть может, точек некоторого котощего множества. Наконец, легко заметить, что оператор $Su \| = K(\varphi\alpha_X^* u)$ удовлетворяет оценкам

$$|Su| \leqslant |K| |\varphi\alpha_X^* u| = \varphi |K| \alpha^*(|u|) = |K| \Phi(|u|) \quad (u \in E(X)).$$

Следовательно, если $|K| \in F'$, то $S \in M^\Phi(E(X), F_s(Y'))$. $\triangleright$

2.9. Теорема. *Пусть Φ: $E \to F$ — порядково непрерывный решеточный гомоморфизм, а оператор $T \in M(E(X), F_s(Y, Z))$ удовлетворяет условию $|T| \in \{\Phi\}^{dd}$. Тогда существуют операторнозначная функция $K \in \mathfrak{M}_Q(X, Z')$, непрерывное отображение α из замкнутого подмножества Q в P и функция $\varphi \in C_\infty(Q)$ такие, что справедливы представления*

$$Tu = K(\varphi\alpha_X^* u) \quad (u \in E(X)),$$
$$|T| e = |K| \varphi\alpha^* e \quad (e \in E),$$
$$\Phi e = \varphi\alpha^* e \quad (e \in E).$$

$\triangleleft$ Доказательство проводится по схеме 2.5 с привлечением реализационной теоремы 2.8. $\triangleright$

§ 3. Интегральные представления мажорированных операторов

В пределах данного параграфа E и F — идеальные пространства на $(A, \mathscr{A}, \mu)$ и $(B, \mathscr{B}, \nu)$ соответственно, где $(A, \mathscr{A}, \mu)$ и $(B, \mathscr{B}, \nu)$ — это пространства с полными σ-конечными мерами (определения см. в [8]). Оператор Φ: $E \to F$ называется *интегральным*, если существует $\mu \times \nu$-измеримая функция двух переменных K: $A \times B \to \mathbb{R}$ такая, что для любого класса эквивалентности $\bar{e} \in E$ значение $\bar{y} = \Phi\bar{e}$ определяется функцией

$$y(s) = \int_A K(s, t)\, e(t)\, d\mu(t) \quad (s \in B).$$

Функция K называется *ядром интегрального оператора* Φ. Говорят, что *оператор Φ допускает интегральное представление с ядром K* и, допуская определенную вольность, пишут

$$(\Phi e)^{\dot{}}(s) = \int K(s, t)\, e(t)\, d\mu(t) \quad (e \in E).$$

Имеет место следующий критерий интегральной представимости линейного оператора:

3А. Теорема (Бухвалов А. В. [13, 14]). *Для линейного оператора Φ: $E \to F$ равносильны следующие утверждения*:

(а) *Φ — интегральный оператор*;

(б) *если $e_n \to 0$ по мере и $|e_n| \leqslant e \in E$ для всех $n \in N$, то $\Phi e_n \to 0$ почти всюду*;

(в) *если $e_n \to 0$ почти всюду, $\mu(A_n) \to 0$ и $|e_n|, \chi_{A_n} \leqslant e \in E$ для всех $n \in N$, то последовательности Φe_n и $\Phi(\chi_{A_n})$ сходятся к нулю почти всюду.*

Доказательство теоремы 3.А существенно опирается на исчисление порядково ограниченных операторов. Одним из основных вспомогательных фактов является следующая

3.Б. Теорема. *Множество всех регулярных интегральных операторов из E в F совпадает с компонентой $J(E, F)$ в $L_r(E, F)$, порожденной множеством* $E'_n \otimes F$ (здесь $E'_n \otimes F$ отождествляется с пространством регулярных o-непрерывных конечномерных операторов; см. [14, 15]).

Другой важный момент заключается в следующей характеризации пространства $J(E, F)$: регулярный оператор T входит в $J(E, F)$ тогда и только тогда, если из $0 \leqslant e_n \leqslant e \in E$, $e_n \xrightarrow{*} 0$ следует, что $Te_n \xrightarrow{\circ} 0$. Этот факт имеет место в более общей ситуации. В рассматриваемом же случае идеальных пространств $*$-сходимость совпадает со сходимостью по мере, а o-сходимость — со сходимостью почти всюду (см. [7, 8]).

Пусть $E_s(X')$ — пространство (классов эквивалентности) X-скалярно измеримых вектор-функций w: $A \to X'$ таких, что в E ограничено множество $M := \{\langle x, w\rangle$: $\|x\| \leqslant 1\}$, где $\langle x, w\rangle$ — класс эквивалентности измеримой функции $t \to \langle x, w(t)\rangle$, $t \in A$ (см. 3.1). Положим $|w| := \sup(M$ Напомним, что пространство мажорированных операторов $M(V, W)$ в случае, когда $V = X$ — нормированное пространство, а $W = F$ — K-пространство, обозначается через $H_A(X, F)$. Элементы $H_A(X, F)$ называют *операторами с абстрактной нормой.*

3.В. Теорема (Бухвалов А. В. [16]). *Для всякого оператора с абстрактной нормой T: $X \to E$ существует $w \in E_s(X')$ такой, что $Tx = \langle x, w\rangle$ для всех $x \in X$. Сопоставление $T \to w$ является алгебраическим изоморфизмом пространств $H_A(X, F)$ и $E_s(X')$, сохраняющим абстрактную норму.*

Используя технику мажорированных операторов, аналогичные результаты можно получить и для операторов в пространствах измеримых вектор-функций. В соответствии с концепциями сильной и слабой интегрируемости вектор-функций здесь возникают два различных подхода к изучению интегральной представимости линейных операторов. В целом эти вопросы мало исследованы, однако имеется ряд интересных результатов, один из которых потребуется в дальнейшем. Обозначим через $E(X)$ пространство (классов эквивалентности) сильно измеримых вектор-функций v: $A \to X$ таких, что $|v| \in E$, где $|v|$ — класс эквивалентности измеримой функции $t \to \|v(t)\|$, $t \in A$ (см. 3.1). Оператор T: $E(X) \to Y$ называется *сильно интегральным*, если существует оператор-функция K: $A \to \mathscr{L}(X, Y)$ такая, что $Ku \in L_1(\mu, X)$ для каждого $u \in E(X)$ и

$$Tu = \int_A K(t)\, u(t)\, d\mu(t) \quad (u \in E(X)).$$

(Интеграл понимается в смысле Бохнера; см. 3.2.)

3.Г. Теорема (Наводнов В. Г. [17]). *Пусть E — банахово функциональное пространство, а пространство Y обладает свойством Радона — Никодима. Для того чтобы линейный оператор T: $E(X) \to Y$ был сильно интегральным, необходимо и достаточно, чтобы он был мажорированным и bo-непрерывным.*

В [17] приводится внешне несколько иная формулировка этого факта.

3.1. Введем некоторые классы измеримых вектор-функций. Пусть $S(\mu) := S(A, \mathscr{A}, \mu)$ — это K-пространство (классов эквивалентности) μ-измеримых почти всюду конечных функций. Фиксируем нормирующее подпространство $Z \subset Y'$. Следует помнить, что вводимые ниже понятия зависят от Z, хотя это не отражено в обозначениях во избежание громоздкой символики. Оператор-функция K: $A \to \mathscr{L}(X, Z')$ называется *(Z-) слабо измеримой*, если измерима функция $\langle z, Kx\rangle$: $t \to \langle z, K(t)x\rangle$, каковы бы ни были $x \in X$ и $z \in Z$ (см. [18]). Обозначим через $\mathfrak{M}_\mu(X, Z')$ множество всех оператор-функций K: $A \to \mathscr{L}(X, Z')$, удовлетворяющих условиям: (а) K является Z-слабо измеримой, (б) существует $\alpha \in S(\mu)$ такой, что $\|K(t)\| \leqslant \alpha(t)$ для почти всех $t \in A$. Введем в $\mathfrak{M}_\mu(X, Z')$ отношение эквивалентности $\equiv$, полагая $K \equiv L$ в том и только том случае, если для любых $x \in X$ и $z \in Z$ функции $\langle z, Kx \rangle$ и $\langle z, Lx \rangle$ совпадают почти всюду. Эквивалентные оператор-функции в дальнейшем часто отождествляются. Для $K \in \mathfrak{M}_\mu(X, Z')$ (а также для соответствующего класса эквивалентности, обозначаемого той же буквой) положим

$$|K| := \sup\{\langle z, Kx \rangle : \|x\| \leqslant 1, \quad \|z\| \leqslant 1\},$$

где супремум берется в K-пространстве $S(\mu)$. Определим теперь первое из требуемых пространств формулой

$$E_w(\mathscr{L}(X, Z')) := \{K \in \mathfrak{M}_\mu(X, Z')/\equiv : |K| \in E\}.$$

Оператор-функция $K: A \to \mathscr{L}(X, Z')$ называется *просто измеримой*, если для каждого $x \in X$ измерима вектор-функция $Kx: t \to K(t)x$, $t \in A$ (см. [18]). Понятно, что просто измеримая оператор-функция будет Z-слабо измеримой. Обозначим через $\mathfrak{M}'_\mu(X, Y)$ часть $\mathfrak{M}_\mu(X, Z')$, состоящую из просто измеримых оператор-функций, принимающих свои значения в $\mathscr{L}(X, Y)$ (как и раньше считаем Y подпространством Z'). Положим

$$E_s(\mathscr{L}(X, Y)) := \{K \in \mathfrak{M}'_\mu(X, Y)/\equiv : |K| \in E\}.$$

Заметим, что для $K \in \mathfrak{M}'_\mu(X, Y)$ (или $K \in E_s(\mathscr{L}(X, Y))$) выполняется $|K| = \sup\{\|Kx\| : \|x\| \leqslant 1\}$. Обозначим $E_s(X') := E_w(\mathscr{L}(X, \mathbf{R}))$ и $E(Y) := E_s(\mathscr{L}(\mathbf{R}, Y))$. Часть $E_s(Z')$, состоящую из вектор-функций со значениями в Y, обозначают через $E_s(Y, Z)$. В частности, $E_s(X') = E_s(X', X)$. Отметим также, что если $E := L_p(\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то пишут $L_p(\mu, X) := L_p(A, \mathscr{A}, \mu, X)$ вместо $E(X)$. Если $K \in \mathfrak{M}_\mu(X, Z')$, $L \in \mathfrak{M}'_\mu(X, Y)$, то для $u \in E(X)$ и $z \in Z$ измерима функция $\langle z, Ku \rangle$: $t \to \langle z, K(t)u(t) \rangle$, $t \in A$, и измерима вектор-функция Lu: $t \to L(t)u(t)$. Соответствующие классы эквивалентности также будем обозначать через $\langle z, Ku \rangle$ и Lu. Эти символы естественно осмыслены и для $K \in E_w(\mathscr{L}(X, Z'))$ и $L \in E_s(\mathscr{L}(X, Y))$.

Теорема. *При указанных предположениях* $E_w(\mathscr{L}(X, Z'))$ *и* $E_s(\mathscr{L}(X, Y))$ *являются пространствами Банаха — Канторовича.*

3.2. Предположим, что (Q, Σ, λ) — произведение пространств с мерой $(A, \mathscr{A}, \mu)$ и $(B, \mathscr{B}, \nu)$. Возьмем Z-слабо измеримую оператор-функцию $K: Q \to \mathscr{L}(X, Z')$ и сильно измеримую вектор-функцию $u: A \to X$. Допустим, что для всех $z \in Z$ и для почти всех $s \in B$ определен интеграл

$$w(s, z) := \int_A \langle z, K(s, t)u(t) \rangle \, d\mu(t),$$

причем линейный функционал $z \to w(s, z)$ непрерывен при почти всех $s \in B$. Тогда вектор-функция $s \to w(s, \cdot) \in Z'$ слабо измерима. Для класса эквивалентности $\bar{u}$ вектор-функции u обозначим через $T\bar{u}$ класс эквивалентности вектор-функции $s \to w(s, \cdot)$. Если Tv существует и $|Tv| \in F$ для каждого $v \in E(X)$, то возникает линейный оператор $T: E(X) \to F_s(Z')$. При этом говорят, что T — *слабый интегральный оператор с ядром* K и, допуская вольность, пишут

$$\langle z, Tu \rangle (s) = \int_A \langle z, K(s, t)u(t) \rangle \, d\mu(t).$$

Оператор-функция $K: Q \to \mathscr{L}(X, Y)$ называется *просто измеримой*, если для каждого $x \in X$ сильно измерима вектор-функция $t \to K(t)x$, $t \in Q$. Пусть $\bar{u}$ — класс эквивалентности из $E(X)$, определяемый вектор-функцией u. Если для каждого $\bar{u} \in E(X)$ при почти всех $s \in B$ выполнено $K(s, \cdot)u \in L_1(\mu, Y)$, причем $\bar{v} \in F(Y)$, где

$$v(s) := \int_A K(s, t)u(t) \, d\mu(t),$$

то соотношение $\bar{v} = T\bar{u}$, $\bar{u} \in E(X)$, определяет линейный оператор $T: E(X) \to F(Y)$, который называется *сильно интегральным оператором* с ядром K. Вновь, допуская вольность, можно написать

$$(Tu)(s)=\int_A K(s,t)\,u(t)\,d\mu(t)\quad (u\in E(X)).$$

Ясно, что приведенные определения согласуются с классическим понятием интегрального оператора. Рассмотрим некоторые свойства интегральных операторов.

3.3. Слабо интегральный оператор $T\colon E(X)\to F_s(Z')$ с ядром K назовем *регулярным*, если $K\in\mathfrak{M}_\lambda(X,Z')$ и измеримая функция $|K|$ является ядром интегрального оператора из E в F.

Теорема. *Слабо интегральный оператор $T\colon E(X)\to F_s(Z')$ с ядром K является мажорированным в том и только том случае, если он регулярен. При этом $|T|$ — интегральный оператор с ядром $|K|$.*

$\lhd$ Если $K\in\mathfrak{M}_\lambda(X,Z')$, то $|\langle z,K(s,t)x\rangle|\leqslant|K|(s,t)\|x\|\|z\|$, следовательно,

$$|\langle z,Tu\rangle(s)|\leqslant\int_A|\langle z,K(s,t)u(t)\rangle|\,d\mu(t)\leqslant$$
$$\leqslant\|z\|\int_A|K|(s,t)|u|(t)\,d\mu(t)=\|z\|V_K(|u|)(s),$$

где V_K — интегральный оператор с ядром $|K|$. Отсюда немедленно вытекает, что T — мажорированный оператор и $|T|\leqslant V_K$. Наоборот, предположим, что T — мажорированный оператор. Возьмем произвольно $x\in\in X$, $z\in Z$, $\varphi\in E$ и запишем

$$\left|\int_A\langle z,K(s,t)\varphi(t)x\rangle\,d\mu(t)\right|\leqslant|T|(|\varphi|)\|x\|\|z\|.$$

Тем самым для интегрального оператора $V_{x,z}$ с ядром $\langle z,K(s,t)x\rangle$, $\|x\|\leqslant1$, $\|z\|\leqslant1$, имеем $|V_{x,z}|\leqslant|T|$. Если $V:=\sup\{|V_{x,z}|\colon \|x\|\leqslant1,\ \|z\|\leqslant\leqslant1\}$, то по теореме 3.В V — интегральный оператор из E в F и $V\leqslant|T|$ Остается заметить, что $V=V_K$. $\rhd$

3.4. Пусть T — мажорированный слабый интегральный оператор из $E(X)$ в $F_s(Y,Z)$. Тогда для любой ограниченной последовательности $(u_n)\subset E(X)$, такой, что $|u_n|$ сходится к нулю по мере, последовательность $|Tu_n|$ сходится к нулю почти всюду. В частности, оператор T bo-непрерывен. Если же E и F — банаховы идеальные пространства, то T — ограниченный оператор в смысле теории банаховых пространств.

$\lhd$ В силу 3.3 мажорантная норма $|T|$ является интегральным оператором из E в F. Отсюда вытекает первая часть требуемого утверждения, благодаря нормативному неравенству $|Tu|\leqslant|T|(|u|)$. Пусть теперь E и F — банаховы идеальные пространства. Тогда интегральный оператор $|T|$ является ограниченным (см. [8]). Пользуясь вновь указанным нормативным неравенством, а также соотношениями $\|\cdot\|_{E(X)}=\||\cdot|\|_E$ и $\|\cdot\|_{F_s(Y,Z)}=\||\cdot|\|_F$, выводим

$$\|Tu\|_{F_s(Y,Z)}=\||Tu|\|_F\leqslant\||T|(|u|)\|_F\leqslant\||T|\|\cdot\||u|\|_E=\||T|\|\cdot\|u\|_{E(X)}.$$

Это и требовалось установить. $\rhd$

3.5. Теорема. *Всякий мажорированный оператор из $L_1(\mu,X)$ в $W:=L_\infty(\nu)_s(Y,Z)$ допускает слабое интегральное представление. Если же Y обладает свойством Радона — Никодима, то всякий мажорированный оператор из $L_1(\mu,X)$ в $L_\infty(\nu,Y)$ допускает сильное интегральное представление.*

$\lhd$ Возьмем мажорированный оператор $T\colon L_1(\mu,X)\to W$. Для $x\in X$, $z\in Z$ и $e\in E$ положим $\Phi_{x,z}(e):=\langle z,T(x\otimes e)\rangle$. Легко видеть, что $\Phi_{x,z}$ — регулярный оператор, причем $|\Phi_{x,z}|\leqslant|T|$. Так как пространства $\mathscr{L}(L_1(\mu),L_\infty(\nu))$ и $L_\infty(\lambda)$, $\lambda=\mu\times\nu$, линейно изометричны, то существует $w_{x,z}\in L_\infty(\lambda)$ такой, что

$$\Phi_{x,z}(e)(s)=\int_A w_{x,z}(s,t)\,e(t)\,d\mu(t)\quad (e\in E).$$

Положим $b(x, z) := w_{x,z}$. Так же, как и в 2.4, доказывается, что b — билинейный оператор из $X \times Z$ в $L_\infty(\lambda)$, причем $|b| := \sup\{b(x, z) : \|x\| \leqslant 1, \|z\| \leqslant 1\}$ — ядро интегрального оператора $|T|$. Существует оператор с абстрактной нормой $\widehat{b}$: $X \widehat{\otimes} Z \to L_\infty(\lambda)$ такой, что $\widehat{b}\otimes = b$ и $|b| = |\widehat{b}|$ (здесь $X \widehat{\otimes} Z$ — проективное тензорное произведение). В силу теоремы 3.Б существует слабо измеримая вектор-функция w: $A \times B \to (X \widehat{\otimes} Z)'$ такая, что

$$\langle z, T(x \otimes e)\rangle = \int_A \langle x \otimes z, w(s, t)\rangle e(t)\, d\mu(t).$$

Пусть оператор-функция K: $A \times B \to \mathscr{L}(X, Z')$ определена так, что $\langle z, K(s, t)x\rangle = \langle x \otimes z, w(s, t)\rangle$ для всех x, z и почти всех (s, t). Тогда K слабо измерима и

$$\langle z, T(x \otimes e)\rangle = \int_A \langle z, K(s, t)(x \otimes e)(t)\rangle\, d\mu(t).$$

Более того, $|K| = |w| = |b|$. Пользуясь теперь плотностью в $L_1(\mu, X)$ множества $X \otimes L_1(\mu)$, можно получить искомое интегральное представление T.

Предположим, что Y обладает свойством Радона — Никодима и $T \in M(L_1(\mu, X), L_\infty(\nu, Y))$. Рассмотрим множество вектор-функций

$$\mathscr{M} := \left\{u\colon Q \to X\colon u = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\varphi_i \otimes \psi_i)\right\},$$

где $x_i \in X$, $\varphi_i \in L_1(\mu)$, $\psi_i \in L_1(\nu)$ и $(\varphi_i \otimes \psi_i)$: $(s, t) \to \varphi(s) \cdot \psi(t)$, $(s, t) \in Q$. Зададим линейный оператор $\widetilde{T}$: $\mathscr{M} \to Y$ в соответствии с формулой

$$\widetilde{T}u = \sum_{i=1}^{n} \int_A \psi_i(t)\, T(x_i \otimes \varphi_i)(t)\, d\nu(t).$$

Воспользовавшись тем, что всякий положительный оператор из $L_1(\mu)$ в $L_\infty(\nu)$ является интегральным, можно заключить, что оператор $|T|$: $L_1(\mu) \to L_\infty(\nu)$ задается некоторым ядром $w \in L_\infty(\lambda)$ (см. [8]). Обозначим через l_w положительный функционал на $L_1(\lambda)$, соответствующий w. Теперь можно написать следующие оценки:

$$\|\widetilde{T}u\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_B |\psi_i(s)|\, |T(x \otimes \varphi_i)|(s)\, d\nu(s) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \int_B |\psi_i|(s)\, |T|(|\varphi_i|)(s)\, \|x_i\|\, d\nu(s) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_B |\psi_i|(s) \int_A w(s, t)\, |\varphi_i|(t)\, \|x_i\|\, d\mu(t)\, d\nu(s) =$$

$$= \int_Q w(s, t) \sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \cdot |\varphi_i \otimes \psi_i|(s, t)\, d\lambda(s, t) = l_w(|u|).$$

Это означает, что оператор $\widetilde{T}$ имеет порядково непрерывную мажоранту l_w. По теореме 4.9 из [1] $\widetilde{T}$ можно распространить до мажорированного оператора на $L_1(\lambda, X)$, для которого сохраним то же обозначение $\widetilde{T}$. В частности, оператор $\widetilde{T}$ ограничен в смысле теории банаховых пространств ввиду 3.4. Воспользуемся теперь теоремой 3.В. В соответствии с этим результатом существует просто измеримая вектор-функция K: $Q \to \mathscr{L}(X, Y)$ такая, что имеет место представление

$$Tu = \int_Q K(s, t)\, u(s, t)\, d\lambda(s, t) \quad (u \in L_1(\lambda, X)),$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера. Полагая в этом соотношении $u = x\varphi \otimes \psi$, где $x \in X$, $\varphi \in L_1(\mu)$ и $\psi \in L_1(\nu)$, получим

$$\int\limits_B \psi(s)\, T(x \otimes \varphi)\, d\nu = \int\limits_B \psi(s) \left(\int\limits_A K(s,\ t)\, x\, \varphi(t)\, d\mu(t) \right) d\nu(s).$$

Отсюда благодаря произвольности ψ вытекает

$$T(x \otimes \quad {}'(s) = \int\limits_B K(s,\ t)\, x\varphi(t)\, d\mu(t).$$

Наконец, учитывая произвольный выбор $x \in X$, $\varphi \in L_1(\mu)$ и плотность в $L_1(\mu,\ X)$ по решеточной норме подпространства $X \otimes L_1(\mu)$, получим требуемое представление

$$(Tu)(s) = \int\limits_A K(s,\ t)\, u(t)\, d\mu(t) \quad (u \in L_1(\mu,\ X)). \ \triangleright$$

3.6. В следующих двух пунктах будем считать, что E и F — произвольные K-пространства. Мажорированный оператор T из $(V,\ |\cdot|,\ E)$ в $(W,\ |\cdot|,\ F)$ назовем *$*$-о-непрерывным*, если он bo-непрерывен (см. 1.1) и для всякой ограниченной последовательности $(v_n) \subset V$ из $|v_n| \xrightarrow{*} 0$ следует $o\text{-}\lim |Tv_n| = 0$. Как было показано в 3.4, мажорированные интегральные операторы являются $*$-o-непрерывными, ибо в пространствах $S(\mu)$ $*$-сходимость ограниченной последовательности совпадает со сходимостью по мере. Более того, в случае идеальных пространств в приведенном определении предположение о bo-непрерывности излишне — оно вытекает из секвенциальной $*$-o-непрерывности. Ниже будет показано, что так же, как и в случае идеальных пространств, решающая роль в вопросах интегральной представимости в пространствах $E(X)$ принадлежит $*$-o-непрерывности. Сначала покажем, что для $*$-o-непрерывных мажорированных операторов имеет место аналог утверждения 4.3 из [1].

3.7. Теорема. *Пусть V и W — ПБК, причем нормирующее пространство F имеет регулярную базу $\mathfrak{P}\mathfrak{r}(F)$. Мажорированный оператор T: $V \to W$ будет $*$-о-непрерывным в том и только том случае, если мажорантная норма $|T|$ есть $*$-о-непрерывный оператор из E в F.*

$\triangleleft$ Допустим, что оператор $T \in M(V,\ W)$ $*$-o-непрерывен. В силу разложимости мажорантной нормы (см. [1]) и теоремы 3.Б существует оператор $S \in M(V,\ W)$ такой, что $|S|\, dJ(E,\ F)$, $|T - S| \in J(E,\ F)$ и $|T| = |S| + |T - S|$. Если докажем, что $S = 0$, то тем самым будет установлена $*$-o-непрерывность оператора T. Прежде всего заметим, что ввиду включения $|T - S| \in J(E,\ F)$ оператор S будет $*$-o-непрерывным, ибо таковыми являются T и $T - S$. Теперь предположим, не ограничивая общности, что имеются существенно положительный функционал $f \in E_n'$ и слабая порядковая единица $\mathbf{1} \in F$. Возьмем произвольно $v \in V$ и положим $e := |v|$. Учитывая дизъюнктность $|S|$ компоненте $J(E,\ F)$, можно написать

$$0 = (|S| \wedge f \otimes \mathbf{1})\, e = \inf_{0 \leqslant e' \leqslant e} \{|S|(e - e') + f(e') \cdot \mathbf{1}\}.$$

Пусть $A_n := \{|S|(e - e') + f(e') \cdot \mathbf{1} \colon 0 \leqslant e' \leqslant e,\ f(e') \leqslant 1/n\}$. Тогда $A_{n+1} \subset A_n$ и $\inf(A_n) = 0$ для каждого натурального числа n. Благодаря предположению о регулярности базы $\mathfrak{P}\mathfrak{r}(F)$ существуют конечные множества $A_n' \subset A_n$ такие, что $\underset{n\to\infty}{o\text{-}\lim} \inf(A_n') = 0$ (см. [7]).

Построим последовательность (e_n), перенумеровав сначала элементы A_1', затем A_2' и т. д. Ясно, что (e_n) $*$-сходится к нулю, так как по определению A_n будет $f(e_n) \to 0$, а функционал f существенно положителен и o-непрерывен. Рассмотрим последовательность $(v_n) \subset V$, для которой $|v_n| = e_n$ и $|v - v_n| = e - e_n$ при всех n. Такая последовательность строится без труда; нужно лишь положить $v_n := \alpha_n v$, где α_n — мультипликатор в E такой, что $e_n = \alpha_n e$. Как видно, последовательность (v_n)

$*$-o-сходится к нулю. Поскольку оператор S $*$-o-непрерывен, то последовательность (Sv_n) bo-сходится к нулю. Далее, пусть F реализовано в виде фундамента в $C_\infty(Q)$ для подходящего экстремального компакта. Воспользовавшись вновь предположением о регулярности базы F, подберем открытое всюду плотное множество $Q_0 \subset Q$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} |Sv_n|(t) = 0,$$

$$\inf\{(|S|(e-e_n) + f(e_n)\cdot 1)(t)\} = 0$$

для всех $t \in Q_0$. Переходя, если необходимо, к последовательности $(e_{n(k)})$, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} |S|(e-e_{n(k)})(t) = -\lim_{n\to\infty} f(e_{n(k)})\cdot 1(t) = 0.$$

В силу этого

$$|Sv|(t) \leqslant |S(v-v_{n(k)})|(t) + |Sv_{n(k)}|(t) \leqslant$$
$$\leqslant |S|(e-e_{n(k)})(t) + |Sv_{n(k)}|(t).$$

Теперь видно, что $|Sv|(t) = 0$ для всех $t \in Q_0$, значит, $|Sv| = 0$. Ввиду произвольного выбора $v \in V$ будет $S = 0$. ▷

3.8. Отметим два следствия.

(1) *Пусть V и W — те же, что и в теореме 3.7, а T: $V \to W$ — оператор с порядково непрерывной мажорантой. Тогда T единственным способом представляется в виде $T = T_i + T_s$, где T_i $*$-о-непрерывен, а T_s — мажорированный оператор, не имеющий дизъюнктного $*$-о-непрерывного составляющего, т. е. если для какого-нибудь мажорированного $*$-о-непрерывного оператора S разность $T - S$ дизъюнктна T_s, то $S = 0$.*

(2) *Предположим, что V и W такие же, как и в теореме 3.7. Если F — непрерывное K-пространство и мажорантная норма оператора $T \in M(V, W)$ есть оператор Магарам, то T дизъюнктен каждому $*$-о-непрерывному мажорированному оператору.*

◁ Нужно лишь заметить, что при соблюдении перечисленных условий оператор $|T|$ дизъюнктен компоненте $J(E, F)$ (см. [1]). ▷

3.9. Теорема. *Пусть E и F — идеальные пространства, X и Y — банаховы пространства, а Z — произвольное нормирующее подпространство в Y'. Для мажорированного оператора T: $E(X) \to F_s(Y, Z)$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *T допускает слабое интегральное представление;*

(2) *какая-нибудь мажоранта оператора T допускает интегральное представление;*

(3) *если (u_n) — ограниченная последовательность в $E(X)$ и $|u_n| \to 0$ по мере, то $|Tu_n| \to 0$ почти всюду;*

(4) *оператор T секвенциально bo-непрерывен, и если $\mu(A_n) \to 0$ для некоторой последовательности (A_n) измеримых множеств, то при любом $u \in E(X)$ почти всюду $|T(u\cdot\chi_{A_n})| \to 0$.*

◁ Импликация (1) ⇒ (2) вытекает из 3.3. В (2) ⇒ (3) используются лишь простейшие свойства интегральных операторов и нормативное неравенство из 4.1.1. Далее, очевидно, что (3) ⇒ (4) (см. [13, 14]). Остается установить справедливость (4) ⇒ (1). Принимая в расчет, что $*$-сходимость o-ограниченной последовательности в $S(\mu)$ совпадает со сходимостью по мере, из (4) легко выводится, что T — это $*$-o-непрерывный оператор. По теореме 3.7 $|T|$ — также $*$-o-непрерывный оператор, а в силу 3.А $|T|$ — интегральный оператор из E в F. Пусть $w \in S(\lambda)$ — ядро этого оператора. Существует счетное разбиение (Q_n) множества Q на непересекающиеся λ-измеримые подмножества, такое, что $w_n := w\chi_{A_n} \in L_\infty(\lambda)$ для всех n. Обозначим через S_n интегральный оператор с ядром w_n. Ясно, что (S_n) — последовательность положительных попарно дизъюнктных операторов из E в F. Понятно также, что S_n одновременно можно рассматривать как ограниченный оператор из $L_1(\mu)$ в $L_\infty(\nu)$. Благодаря разложимости мажорантной нормы (см. [1]) существует последовательность попарно дизъюнктных операторов T_n: $E(X)\to F_s(Y, Z)$ такая, что $|T_n| = S_n$ при всех $n\in N$ и $Tv = \sum_{i=1}^{\infty} T_n v$, $v\in E(X)$. Согласно [1] оператор $T_n \restriction [L_1(\mu, X) \cap E(X)]$ можно распространить до мажорированного оператора из $L_1(\mu, X)$ в $L_\infty(\nu)_s(Y, Z)$ с сохранением мажорантной нормы S_n. Этот оператор обозначим тем же символом T_n. По первой части теоремы 3.5 T_n допускает слабое интегральное представление с ядром K_n: $Q\to \mathscr{L}(X, Z')$, для которого $|K_n| = w_n$. Определим теперь вектор-функцию K: $Q\to\mathscr{L}(X, Z')$ так, чтобы ограничение K на $Q_n\subset Q$ совпадало с K_n. Тогда K — это $(X\otimes Z)$-слабо измеримая функция, $|k| = w$ и, как нетрудно видеть, для любых $z\in Z$ и $u\in E(X)\cap L_1(\mu, X)$ почти всюду выполняется

$$\langle z, Tu\rangle(s) = \int_A \langle z, K(s, t)\, u(t)\rangle\, d\mu(t).$$

Такое представление по bo-непрерывности распространяется на все $u\in E(X)$. $\triangleright$

3.10. Теорема. *Пусть банахово пространство Y обладает свойством Радона — Никодима. Мажорированный оператор T: $E(X)\to F(Y)$ допускает сильное интегральное представление в том и только том случае, если выполнено любое из условий* (2) — (4) *теоремы* 3.9.

$\triangleleft$ Доказательство проводится по той же схеме, что и 3.9, но нужно привлечь вторую часть теоремы 3.5. $\triangleright$

3.11. Отправляясь от теорем 3.9, 3.10 и привлекая, по сути дела, те же приемы, что и в § 2, можно получить результаты об общем виде некоторых классов мажорированных операторов. Приведем несколько формулировок. Предположим, что E и F — фундаменты в $S(\mu)$ и $S(\nu)$ соответственно. Обозначим через EF идеал в $S(\lambda)$, состоящий из ядер регулярных интегральных операторов из E в F. Пусть $M_J(V, W)$ — множество мажорированных операторов из V в W, имеющих интегральные мажоранты. Так как множество интегральных операторов из E в F есть компонента в $L_r(E, F)$, то и $M_J(V, W)$ будет компонентой в ПБК $M(V, W)$ всех мажорированных операторов.

(а) **Теорема.** *Соответствие, относящее слабо измеримой оператор-функции слабо интегральный оператор, осуществляет линейную изометрию* ПБК $EF_w(\mathscr{L}(X, Y'))$ *и* $M_J(E(X), F_s(Y'))$.

(б) **Теорема.** *Пусть Y обладает свойством Радона — Никодима. Соответствие, относящее просто измеримой оператор-функции сильно интегральный оператор, осуществляет линейную изометрию* ПБК $EF_s(\mathscr{L}(X, Y))$ *и* $M_J(E(X), F(Y))$.

(в) **Следствие.** *Пусть* $1 < p < \infty$ *и* $G := L_{p,\infty}(\mu\times\nu)$. *Если Y обладает свойством Радона — Никодима, то* ПБК $G_s(\mathscr{L}(X, Y))$ *и* $M(L_1(\mu, X), L_p(\nu, Y))$ *линейно изометричны в смысле теоремы* 3.11 (б).

§ 4. Банаховы пространства со смешанной нормой

Напомним несколько известных результатов из структурной теории нормированных решеток. Говорят, что в *нормированной решетке E выполнено условие* (A), или что *норма в E порядково непрерывна*, если из $0\leqslant e_\alpha\downarrow$ следует, что $\|e_\alpha\|\to 0$.

4.A. Теорема (Ando T. [19]). *В нормированной решетке выполняется условие* (A) *в том и только том случае, если в ней всякий замкнутый (по норме) идеал является компонентой.*

Если E — порядково полная нормированная решетка, то порядковая непрерывность нормы равносильна также и тому, что образ E при каноническом вложении во второе сопряженное является идеалом в E'' (см. [8, 20]).

Возьмем число $1\leqslant p\leqslant\infty$. При $p:=\infty$ положим по определению $(t^p + s^p)^{1/p} := \max\{t, s\}$, $0\leqslant s$, $t\in\mathbf{R}$. Банахова решетка E называется

AL_p-пространством, если для любых дизъюнктных $0 \leqslant u$, $v \in E$ выполняется
$$\|u+v\| = (\|u\|^p + \|v\|^p)^{1/p}.$$
Вместо AL_∞-пространства чаще говорят AM-пространство (см. [20]).

4.Б. Теорема (Bohnenblust F. [21]). *Пусть E — AL_p-пространство для некоторого $1 \leqslant p < \infty$. Тогда E линейно изометрично и решеточно изоморфно лебегову пространству $L_p(\mu)$ при подходящей мере μ.*

Булеву алгебру коммутирующих проекторов $\mathscr{B}$ в банаховом пространстве X называют *σ-полной по Бейду*, если для любой возрастающей последовательности $(\pi_n) \subset \mathscr{B}$ существует $\pi := \sup(\pi_n)$ и $\lim \langle \pi_n x, x' \rangle = \langle \pi x, x' \rangle$ при всех $x \in X$ и $x' \in X'$. Говорят, что X — *циклическое банахово пространство*, если существует элемент $x_0 \in X$ такой, что линейная оболочка множества $\{\pi x_0, \pi \in \mathscr{B}\}$ плотна в X. Булева алгебра $\mathscr{B}$ называется *приведенной относительно* x_0, если из $\pi x_0 = 0$, $\pi \in \mathscr{B}$, следует, что $\pi = 0$. Циклическое банахово пространство, порожденное $\mathscr{B}$ и x_0, обозначается через $(X, \mathscr{B}, x_0)$.

4.В. Теорема (Bade W. G. [22], Векслер А. И. [23]). *Циклическое банахово пространство $(X, \mathscr{B}, x_0)$ линейно изоморфно банаховой решетке с порядково непрерывной нормой. При этом изоморфизме x_0 переходит в порядковую единицу, а $\mathscr{B}$ — в булеву алгебру проекторов на компоненты.*

Изоморфизм из теоремы 4.В будет изометрией, если потребовать дополнительно, чтобы $\|T\| \leqslant 1$ для любого оператора $T = \lambda_1\pi_1 + \ldots + \lambda_n\pi_n$, где $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ — разбиение единицы в $\mathscr{B}$ и $\max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\} \leqslant 1$.

В текущем параграфе мы собираемся продемонстрировать, что решеточно нормированные пространства составляют хорошую основу для построения изометрической и изоморфной классификации банаховых пространств со смешанной нормой. Для этой цели мы выбрали небольшой круг естественных вопросов, группирующихся вокруг теорем 4.А, 4.Б и 4.В.

4.1. *Пространством со смешанной нормой* будем называть пару (V, E) (или просто V, если ясно, о каком E идет речь), удовлетворяющую условиям: (а) E — это порядково полная нормированная решетка; (б) V — решеточно нормированное пространство с разложимой E-значной нормой $|\cdot|$. Разумеется, в этом определении можно опустить предположение о порядковой полноте пространства E и расширить тем самым понятие пространства со смешанной нормой. Однако мы располагаем удовлетворительной теорией РНП и мажорированных операторов лишь в случае порядковой полноты. Итак, всегда, если не оговорено противное, будем считать E порядково полной решеткой.

Обозначим символом E_V порядковый идеал в E, порожденный множеством $\{|v|: v \in V\}$. Рассматривая произвольное пространство со смешанной нормой, будем предполагать, что $E = (E_V)^{dd}$. Смешанная норма на пространстве V определяется формулой $|||v||| := \||v|\|$, $v \in V$. В дальнейшем, рассматривая V как нормированное пространство, будем иметь в виду указанную смешанную норму. Из определений вытекает, что $v \to |v|$ — это непрерывный сублинейный оператор из $(V, |||\cdot|||)$ в $(E, \|\cdot\|)$. Ясно также, что всякий проектор $\pi \in \mathfrak{Pr}(V)$ имеет единичную норму. Пространство со смешанной нормой называется: (а) *bo-полным*, если bo-полно РНП V; (б) *банаховым*, если замыкание E_V есть банахова решетка, а РНП V br-полно. Таким образом, если E — банахова решетка, то для bo-полноты (V, E) необходимо и достаточно, чтобы РНП V было дизъюнктно полным (см. [2]).

Если (V, E) — br-полное пространство со смешанной нормой, то $(E_V)^+ = \{|v|: v \in V\}$. Если же (V, E) bo-полно, то $E^+ = \{|v|: v \in V\}$.

◁ В силу br-полноты пространство V является унитарным модулем над кольцом $Z(E)$ (см. [2]). Если $0 \leqslant e \leqslant |v|$, то для подходящего $\alpha \in \mathscr{Z}(E)^+$ будет $e = \alpha|v| = |\alpha v|$. С другой стороны, для $u, v \in V$ существует $\pi \in \mathfrak{Pr}(E)$ такой, что $|u| \vee |v| = \pi|u| + \pi^d|v| = |\pi u + \pi^d v|$. Отсюда вытекает первое утверждение. Второе утверждение есть следствие дизъюнктной полноты V и предположения $E=(E_V)^{dd}$. ▷

Из определений видно, что, рассматривая банахово пространство со смешанной нормой (V, E), естественно предполагать, что E — банахова решетка. Само понятие банахова пространства со смешанной нормой оправдано следующим предложением.

4.2. *Если E — банахова решетка, то нормированное пространство $(V, |||\cdot|||)$ банахово в том и только том случае, если* РНП $(V, |\cdot|)$ *br-полно.*

◁ ⇒ Допустим, что последовательность $(v_n)\subset V$ удовлетворяет неравенству $|v_n - v_m| \leqslant \lambda_k e$ при всех $n, m \geqslant k$, где $0\leqslant e\in E$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_k = 0$. Тогда эта последовательность фундаментальна и по условию имеет предел $v\in V$. В силу непрерывности векторной нормы имеем $|v-v_n|\leqslant\lambda_k e$ при $k\leqslant n$, значит, $v = br\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

⇐ Пусть (v_n) — фундаментальная последовательность. Не ограничивая общности, можно считать, что $|||v_{n+1}-v_n||| \leqslant 1/n^3$, $n\in N$. Положим

$$e_n := |v_1| + \sum_{k=1}^{n} k|v_{k+1}-v_k| \quad (n\in N).$$

Тогда

$$\|e_{n+l}-e_n\| = \left\|\sum_{k=n+1}^{n+l} k|v_{k+1}-v_k|\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{n+l} k|||v_{k+1}-v_k||| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+l}(1/k^2) \xrightarrow[n,l\to 0]{} 0.$$

Следовательно, последовательность $(e_n)\subset E$ фундаментальна, а потому имеет предел $e=\lim\limits_{n\to\infty} e_n$. При этом $e=\sup(e_n)$, так как (e_n) возрастает. Если $n\geqslant m$, то

$$m|v_{n+l}-v_n| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+l} k|v_{n+1}-v_n| \leqslant e_{n+l}-e_n\leqslant e,$$

стало быть, $|v_{n+l}-v_n|\leqslant(1/m)e$. Это означает br-фундаментальность (v_n). По условию существует $v := br\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} v_n$, который и является пределом последовательности (v_n). ▷

4.3. Теорема. *Если (V, E) — пространство со смешанной нормой, то (V', E') — банахово пространство со смешанной нормой. При этом векторной нормой функционала $v'\in V'$ служит наименьшая его мажоранта $|v'|\in E'$ и, в частности, справедливо соотношение*

$$\langle v, v'\rangle \leqslant \langle |v|, |v'|\rangle \quad (v\in V,\ v'\in V').$$

◁ Если $v'\in V'$, то v' ограничен на любом множестве вида $B_V(e)$, $0\leqslant e\in E$. Отсюда в силу [1; 4.2] вытекает, что v' — мажорированный функционал, причем $\langle e, |v'|\rangle := \sup\{\langle v, v'\rangle\colon v\in B_V(e)\}$. При этом

$$|||v'||| = \sup\{\langle e, |v'|\rangle\colon \|e\|\leqslant 1\} =$$

$$= \sup\{\sup\{\langle v, v'\rangle\colon v\in B_V(e)\}\colon \|e\|\leqslant 1,\ e\geqslant 0\} =$$

$$= \sup\{\langle v, v'\rangle\colon |||v|||\leqslant 1\} = \|v'\|.$$

Как видно, норма сопряженного пространства V' является смешанной нормой. Разложимость векторной нормы пространства $V'\subset M(V, \mathbf{R})$ следует из [1; 4.7], если учесть, что $V' = \{v^*\in M(V, \mathbf{R})\colon |v^*|\in E'\}$, а банахова решетка E' является порядковым идеалом в $L_r(E, \mathbf{R})$. ▷

Как было указано выше, предполагается всегда, что $E=(E_V)^{dd}$. Однако уже соотношение $E' = (E'_{V'})^{dd}$, вообще говоря, не имеет места. Для этого необходимы дополнительные предположения.

4.4. Каноническое вложение пространства со смешанной нормой V во второе сопряженное пространство V'' сохраняет векторную норму.

Точнее, для каждого $v \in V$ выполняется $|\varkappa_V(v)| = \varkappa_E(|v|)$, где $\varkappa_X$ — каноническое вложение нормированного пространства X во второе сопряженное X''.

$\lhd$ Прежде всего заметим, что если $v \in V$ и $v' \in V'$, то $\langle v', \varkappa_V(v)\rangle = \langle v, v'\rangle \leqslant \langle |v|, |v'|\rangle = \langle |v'|, \varkappa_E(|v'|)\rangle$, следовательно, $|\varkappa_V(v)| \leqslant \varkappa_E(|v|)$. Докажем теперь противоположное неравенство. По теореме Хана — Банаха — Канторовича существует линейный оператор A: $V \to E$ такой, что $Av = |v|$ и $Au \leqslant |u|$ для всех $u \in V$. Ясно, что оператор A ограничен и $\|A\| \leqslant 1$. Более того, $|A'e'| \leqslant e'$ для любого $0 \leqslant e' \in E'$. В самом деле,

$$\langle u, A'e'\rangle = \langle Au, e'\rangle \leqslant \langle |u|, e'\rangle \quad (u \in V),$$

стало быть, e' — мажоранта для $A'e'$. Учитывая сказанное, можно написать оценки

$$\langle |v|, e'\rangle = \langle Av, e'\rangle = \langle v, A'e'\rangle =$$
$$= \langle A'v', \varkappa_V(v)\rangle \leqslant \langle |A'e'|, |\varkappa_V(v)|\rangle \leqslant \langle e', |\varkappa_V(v)|\rangle.$$

Ввиду произвольности $0 \leqslant e' \in E'$ отсюда вытекает $\varkappa_E(|v|) \leqslant |\varkappa_V(v)|$. $\rhd$

4.5. Будем говорить, что *в пространстве со смешанной нормой* (V, E) *выполнено условие* (A) или что смешанная норма порядково непрерывна, если из $\pi_\alpha \downarrow$ следует, что $|||\pi_\alpha v||| \to 0$, каковы бы ни были элемент $v \in V$ и сеть проекторов $(\pi_\alpha) \subset \mathfrak{Pr}(V)$. Если $V = E$, то данное определение равносильно тому, которое дано в начале параграфа.

(1) *Смешанная норма br-полного пространства V порядково непрерывна в том и только том случае, если в E_V выполняется условие* (A).

$\lhd$ *Пусть* $\pi_\alpha \downarrow 0$, $v \in V$ и $e := |v|$. Тогда $\pi_\alpha e = |\pi_\alpha v|$. Следовательно, $\|\pi_\alpha e\| \to 0$ в том и только том случае, если $|||\pi_\alpha v||| \to 0$. $\rhd$

(2) *Пусть в E выполнено условие* (A). *Тогда пространство со смешанной нормой (V, E) банахово в том и только том случае, если оно bo-полно как решеточно нормированное пространство.*

$\lhd$ Ввиду 4.2 нужно лишь показать, что банахово пространство со смешанной нормой будет bo-полным. Возьмем bo-фундаментальную сеть (v_α) в V. Пусть сеть $(e_\alpha) \subset E$ такова, что $e_\alpha \downarrow 0$ и $|v_\alpha - v_\beta| \leqslant e_\gamma$ для всех $\alpha, \beta \geqslant \gamma$. Поскольку норма в E порядково непрерывна, то $\|e_\gamma\| \to 0$. Значит, (v_α) фундаментальна в смысле смешанной нормы, ибо $|||v_\alpha - v_\beta||| \leqslant \|e_\gamma\|$ при $\alpha, \beta \geqslant \gamma$. Положим $v := \lim v_\alpha$. Привлекая непрерывность векторной нормы, можно осуществить предельный переход по β, стало быть, $|v_\alpha - v| \leqslant e_\gamma$ при $\alpha \geqslant \gamma$. Следовательно, $v = bo\text{-}\lim v_\alpha$. $\rhd$

Подпространство V_0 пространства со смешанной нормой V называется *разложимым*, если разложимо ограничение векторной нормы на V_0. Легко видеть, что разложимость $V_0 \subset V$ равносильна инвариантности V_0 относительно каждого проектора из $\mathfrak{Pr}(V)$.

(3) *Пусть (V, E) — bo-полное пространство со смешанной нормой. Если $\varkappa$: $V \to V''$ и λ: $E \to E''$ — канонические вложения, то $\varkappa[V]$ — разложимое подпространство V'' в том и только том случае, если $\lambda[E]$ — порядковый идеал в E''.*

$\lhd$ Если $\lambda[E]$ — идеал в E'', то для $v \in V$ из представления $\lambda|v| = e_1 + e_2$, $0 \leqslant e_1$, $e_2 \in E'$ вытекает e_1, $e_2 \in \lambda[E]$. Ввиду разложимости нормы $|v|$ найдутся v_1 и $v_2 \in V$, для которых $v = v_1 + v_2$ и $|v_i| = e_i$, $i = 1, 2$.

Предположим, что $\varkappa[V]$ — разложимое подпространство V''. Возьмем $e \in E$ и $a \in E''$, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant a \leqslant e$. Из bo-полноты V следует, что $a = |v|$ для некоторого $v \in V$. Поскольку подпространство $\varkappa[V]$ разложимо и замкнуто, то оно является подмодулем модуля V'' над кольцом $\mathscr{Z}(E'')$. Итак, найдется ортоморфизм $0 \leqslant \alpha \in \mathscr{Z}(E'')$ такой, что $a = \alpha e = |\alpha v|$. Тем самым, $a \in \lambda[E]$, ибо $\alpha v \in \varkappa[V]$. $\rhd$

4.6. Теорема. *Пусть V — bo-полное пространство со смешанной нормой. Следующие утверждения равносильны*:

(а) *смешанная норма порядково непрерывна*;

(б) *всякое замкнутое по норме разложимое подпространство V является компонентой, т. е. имеет вид $\pi[V]$ для некоторого проектора $\pi \in \mathfrak{Pr}(V)$*;

(в) *образ V при каноническом вложении во второе сопряженное является разложимым подпространством в* (V'', E'').

$\lhd$ Доказательство по существу содержится в 4.4 и 4.5. $\rhd$

4.7. Зададимся теперь следующим вопросом: какие банаховы пространства линейно изометричны банаховым пространствам со смешанной нормой? При этом ограничимся случаем, когда нормирующей решеткой служит AM- или AL-пространство. Понятно, что ответы на подобные вопросы и, вообще, геометрия пространства со смешанной нормой должны существенно зависеть от структуры нормирующей банаховой решетки. Приведем несколько результатов в этом направлении. Сначала — необходимые определения.

Пусть X — банахово пространство, а $\mathscr{B}$ — полная булева алгебра проекторов единичной нормы, действующих в X. Напомним, что при этом подразумеваются следующие булевы операции:

$$\pi \vee \rho := \pi + \rho - \pi \circ \rho,\ \pi \wedge \rho := \pi \circ \rho,\ \pi^* := I_X - \pi \quad (\pi,\ \rho \in \mathscr{B}).$$

Будем предполагать, что если $\pi x = 0$ для каждого $\pi \in \mathscr{B}$, то $x = 0$. Булеву алгебру проекторов $\mathscr{B}$ назовем *полной по Бейду*, если она порядково полна и для любой возрастающей сети (π_α) в $\mathscr{B}$ из $\pi = \sup(\pi_\alpha)$ следует, что $\lim \langle \pi_\alpha x, x' \rangle = \langle \pi x, x' \rangle$, каковы бы ни были элементы $x \in X$ и $x' \in X'$. Говорят, что множество $C \subset X$ *$\mathscr{B}$-ограничено*, если

$$\sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i \right\| \right\} < +\infty,$$

где супремум берется по всем конечным разбиениям единицы $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\} \subset \mathscr{B}$ и конечным наборам $x_1, \ldots, x_n \in C$. Возьмем число $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Банахово пространство называется *$\mathscr{B}_p$-циклическим*, если выполняются следующие условия: (а) в X существует полная булева алгебра проекторов $\mathscr{B}$; (б) для каждого $\mathscr{B}$-ограниченного семейства $(x_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset X$ и произвольного разбиения единицы $(\pi_\xi)_{\xi \in \Xi} \subset \mathscr{B}$ существует такой элемент $x \in X$, что $\pi_\xi x_\xi = \pi_\xi x$ для всех ξ; (в) $\|x + y\| = (\|x\|^p + \|y\|^p)^{1/p}$ для любых дизъюнктных $x, y \in X$. Легко видеть, что $\mathscr{B}_\infty$-цикличность пространства X равносильна тому, что единичный шар B_X является $\mathscr{B}$-цикличным множеством, т. е. для любого семейства $(x_\xi) \subset B_X$ и для любого разбиения единицы $(\pi_\xi) \subset \mathscr{B}$ существует элемент $x \in B_X$ такой, что $\pi_\xi x_\xi = \pi_\xi x$ для всех ξ. Отметим также, что если X — $\mathscr{B}_p$-циклическое пространство, то

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \pi_i x_i \right\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|\pi_i x_i\|^p \right)^{1/p}$$

для любых конечных наборов $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ и попарно дизъюнктных $\pi_1, \ldots, \pi_n \in \mathscr{B}$. Правая часть указанного равенства при $p = \infty$ есть по определению $\max\{\|\pi_1 x_1\|, \|\pi_2 x_2\|, \ldots, \|\pi_n x_n\|\}$.

4.8. Теорема. *Для того чтобы банахово пространство X было линейно изометрично bo-полному пространству со смешанной нормой, нормирующая решетка которого есть порядково полное AM-пространство с единицей, необходимо и достаточно, чтобы оно было $\mathscr{B}_\infty$-циклично относительно некоторой полной булевой алгебры проекторов $\mathscr{B}$.*

$\lhd$ Необходимость проверяется непосредственно из определений. Проверим достаточность. Предположим, что X — банахово пространство с $\mathscr{B}$-циклическим единичным шаром B_X. Пусть E — порядковый идеал, порожденный единицей в K-пространстве всех $\mathscr{B}$-значных разложений единицы (см. [7]). Возьмем конечнозначный элемент $\alpha \in E$, принимающий значение π_i в точке λ_i, где $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ — разбиение единицы в $\mathscr{B}$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{R}$. Положим $j(\alpha) := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \pi_i$ и заметим, что $j(\alpha)$ — линейный ограниченный оператор в X. Вычислим норму этого оператора:

$$\|j(\alpha)\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\pi_i x\right\|\right\} = \sup_{\|x\|\leqslant 1}\sup_{i=1,\ldots,n}\{\|\lambda_i\pi_i x\|\} =$$
$$= \sup_{i=1,\ldots,n}\sup_{\|x\|\leqslant 1}\{|\lambda_i|\cdot\|\pi_i x\|\} = \max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}.$$

Норма элемента α в K-пространстве ограниченных элементов E также совпадает с $\max\{|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|\}$. Следовательно, j — линейная изометрия подпространства конечнозначных элементов $E_0 \subset E$ в алгебру ограниченных операторов $\mathscr{L}(X)$. Более того, $j(\alpha\beta) = j(\alpha)j(\beta)$ для всех $\alpha, \beta \in E_0$. Так как E_0 плотно в E, то j допускаем продолжение до изометрического изоморфизма банаховой алгебры E на замкнутую подалгебру алгебры $\mathscr{L}(X)$. Полагая $x\alpha := \alpha x := j(\alpha)x$, получим на пространстве X структуру унитарного модуля над кольцом E, причем

$$\|\alpha x\| \leqslant \|\alpha\|\|x\| \qquad (x \in X,\ \alpha \in E).$$

Кроме того, будет $\alpha B_X + \beta B_X \subset B_X$ при $|\alpha| + |\beta| \leqslant 1$.

Введем теперь векторную норму $|\cdot|\colon X \to E$ по формуле

$$|x| := \inf\{0 \leqslant \alpha \in E\colon\ x \in \alpha B_X\},$$

где инфимум берется в K-пространстве E. Если $|x| = 0$, то для $\varepsilon > 0$ найдутся разбиение единицы $(\pi_\xi) \subset \mathscr{B}$ и семейство $(\alpha_\xi) \subset E^+$ такие, что $x \in \alpha_\xi B_X$ и $\pi_\xi\alpha_\xi \leqslant \varepsilon\mathbf{1}$ для всех ξ. Но тогда $\pi_\xi x \in \pi_\xi\alpha_\xi B_X \subset \varepsilon B_X$. В силу $\mathscr{B}$-цикличности шара B_X будет $x \in \varepsilon B_X$. Произвол в выборе $\varepsilon > 0$ дает $x = 0$.

Пусть $x \in \alpha B_X$ и $y \in \beta B_Y$ для некоторых $0 \leqslant \alpha, \beta \in E$. Обозначив $\gamma := \alpha + \beta + \varepsilon\mathbf{1}$, $\varepsilon > 0$, можно написать

$$x + y = \gamma(\gamma^{-1}x + \gamma^{-1}y) \in \gamma(\gamma^{-1}\alpha B_X + \gamma^{-1}\beta B_X) \subset \gamma B_X.$$

Следовательно, $|x + y| \leqslant \alpha + \beta + \varepsilon\mathbf{1}$ и переход к инфимуму по указанным α, β и ε приводит к неравенству $|x + y| \leqslant |x| + |y|$. Далее, для разбиения единицы $\pi_1, \ldots, \pi_n \in \mathscr{B}$ и $x_1, \ldots, x_n \in X$ имеют место равенства

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\pi_i x_i\right| = \inf\{0 \leqslant \alpha \in E\colon\ x_i \in \pi_i\alpha B_X,\ i = 1, \ldots, n\} =$$
$$= \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\pi_i\alpha\colon\ 0 \leqslant \alpha \in E,\ x_i \in \pi_i\alpha B_X,\ i = 1, \ldots, n\right\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\pi_i\inf\{\pi_i\alpha\colon\ x_i \in \pi_i\alpha B_X\} = \sum_{i=1}^{n}\pi_i|x_i|.$$

Но тогда для $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\pi_i$ и $x \in X$ будет

$$|\alpha x| = \sum_{i=1}^{n}\pi_i|\lambda_i x| = \sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\pi_i|x| = |\alpha||x|.$$

Таким образом, $x \to |x|$ — разложимая E-значная норма на X. Дизъюнктная полнота пространства $(X, |\cdot|)$ вытекает из $\mathscr{B}$-цикличности шара B_X. Нетрудно показать, что $B_X = \{x \in X\colon\ |x| \leqslant \mathbf{1}\}$. Это, в свою очередь, влечет, что $\|x\| = \||x|\|$, $x \in X$, т. е. (X, E) — пространство со смешанной нормой. Из теоремы 4.2 следует, что $(X, |\cdot|)$ br-полно, что вместе с дизъюнктной полнотой дает требуемую bo-полноту. $\triangleright$

4.9. Теорема. *Для того чтобы банахово пространство X было линейно изометрично bo-полному пространству со смешанной нормой, нормирующая решетка которого есть AL_p-пространство, $1 \leqslant p < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы оно было $\mathscr{B}_p$-циклическим относительно некоторой полной по Бейду булевой алгебры проекторов $\mathscr{B}$.*

$\triangleleft$ Ограничимся вновь доказательством достаточности. Пусть X — это $\mathscr{B}_p$-циклическое банахово пространство, где $1 \leqslant p < +\infty$, а $\mathscr{B}$ — полная по Бейду булева алгебра проекторов в X. Если $0 \neq \pi \in \mathscr{B}$, то $\langle \pi x, x' \rangle \neq \neq 0$ для подходящих $x \in X$ и $x' \in X'$. С другой стороны, функция $\pi \to \to \langle \pi x, x' \rangle$, $\pi \in \mathscr{B}$, аддитивна и o-непрерывна благодаря полноте по Бейду алгебры $\mathscr{B}$. Пусть Z — расширенное K-пространство, база которого изоморфна $\mathscr{B}$. Так как $\mathscr{B}$ — мультинормированная булева алгебра (см. [2, 20]), то в Z существует фундамент $\mathscr{D}(\Phi)$, на котором определен существенно положительный o-непрерывный функционал Φ. Напомним, что через $L_1(\Phi)$ обозначается наибольший фундамент, на который распространяется Φ по o-непрерывности. Пусть $L_\infty(\Phi)$ — это K-пространство ограниченных элементов, определяемое единицей $\mathbf{1} \in Z$. Тогда сопоставление элементу $z \in L_1(\Phi)$ функционала $\alpha \to \Phi(\alpha \cdot z)$, $\alpha \in L_\infty(\Phi)$, осуществляет линейный и решеточный изоморфизм $L_1(\Phi)$ на $L_\infty(\Phi)'_n$. Так же, как и в 4.8, устанавливается, что на X можно определить структуру унитарного модуля над кольцом $L_\infty(\Phi)$. При этом имеет место оценка $\|\alpha x\| \leqslant \|\alpha\| \cdot \|x\|$, $x \in X$, $\alpha \in L_\infty(\Phi)$.

Возьмем теперь произвольный элемент $x \in X$ и определим функцию φ_x: $\pi \to \|\pi x\|^p$, $\pi \in \mathscr{B}$. Из условия $\mathscr{B}_p$-цикличности X следует, что φ_x аддитивна, положительна и o-непрерывна. Для каждого $\alpha \in L_\infty(\Phi)$ положим

$$\Phi_x(\alpha) := \int_{-\|\alpha\|}^{\|\alpha\|} \lambda d\varphi_x(e_\lambda^\alpha),$$

где (e_λ^α) — характеристика α относительно единицы $\mathbf{1}$, а интеграл понимается как r-предел интегральных сумм

$$\sum_{n=-k}^{k-1} l_n \varphi_x\left(e_{\lambda_{n+1}}^\alpha - e_{\lambda_n}^\alpha\right), \quad l_n \in [\lambda_n, \lambda_{n+1}],$$

по измельчающимся разбиениям отрезка $[-\|\alpha\|, \|\alpha\|]$ числовой прямой

$$-\|\alpha\| =: \lambda_{-k} < \lambda_{-k+1} < \ldots < \lambda_{k-1} < \lambda_k := \|\alpha\|.$$

В силу [7; 1.17] $0 \leqslant \Phi_x \in L_\infty(\Phi)'_n$, следовательно, существует единственный положительный элемент $z \in L_1(\Phi)$ такой, что $\Phi_x(\alpha) = \Phi(\alpha z)$ для всех $\alpha \in L_\infty(\Phi)$. Положим $|x| := \sqrt[p]{z}$. Тем самым определяется отображение $x \to |x|$ из X в $L_p(\Phi)$ такое, что

$$\|\pi x\|^p = \Phi(\pi |x|^p) \; (\pi \in \mathscr{B}, \; x \in X).$$

Используя это соотношение, можно показать, что $|\cdot|$ — разложимая норма. Действительно, если $|x| = 0$, то $\|\pi x\| = [\Phi(\pi |x|^p)]^{1/p} = 0$ для всех $\pi \in \mathscr{B}$, значит, $x = 0$. С другой стороны, для разбиения единицы $\{\pi_1, \ldots \ldots, \pi_n\} \subset \mathscr{B}$ и набора $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X$ будет

$$\Phi\left(\pi \left| \sum_{i=1}^n \pi_i x_i \right|^p\right) = \left\| \sum_{i=1}^n \pi \pi_i x_i \right\|^p =$$

$$= \sum_{i=1}^n \|\pi \pi_i x_i\|^p = \Phi\left(\pi \sum_{i=1}^n \pi_i |x_i|^p\right).$$

Так как проектор $\pi \in \mathscr{B}$ произволен, а элементы $\pi_i x_i$ попарно дизъюнктны, то должно быть

$$\left| \sum_{i=1}^n \pi_i x_i \right| = \left(\sum_{i=1}^n \pi_i |x_i|^p \right)^{1/p} = \sum_{i=1}^n \pi_i |x_i|.$$

Возьмем теперь $x, y \in X$ и такие числа $0 \leqslant \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, что $\alpha + \beta = 1$. Привлекая неравенство треугольника для нормы $\|\cdot\|$ и неравенство Гельдера для конечных сумм, получим

$$\Phi(\pi|\alpha x+\beta y|^p)\leqslant\left[\Phi(\pi|\alpha x|^p)^{\frac{1}{p}}+\Phi(\pi|\beta y|^p)^{\frac{1}{p}}\right]^p=$$
$$=\left\{\alpha^{1-\frac{1}{p}}[\alpha\Phi(\pi|x|^p)]^{\frac{1}{p}}+\beta^{1-\frac{1}{p}}[\beta\Phi(\pi|y|^p)]^{\frac{1}{p}}\right\}^p\leqslant$$
$$\leqslant[\alpha\Phi(\pi|x|^p)+\beta\Phi(\pi|y|^p)]\left[\alpha^{\left(1-\frac{1}{p}\right)p'}+\beta^{\left(1-\frac{1}{p}\right)p'}\right]=$$
$$=\Phi(\pi(\alpha|x|^p+\beta|y|^p)).$$

Вновь пользуясь произволом в выборе $\pi\in\mathscr{B}$, выводим $|\alpha x+\beta y|^p\leqslant\leqslant\alpha|x|^p+\beta|y|^p$. Множество конечнозначных элементов $\lambda_1\pi_1\mathbf{1}+\ldots\ldots+\lambda_n\pi_n\mathbf{1}$ плотно в $L_\infty(\Phi)$. Поэтому в силу установленных свойств отображения $|\cdot|$ можно заключить, что если $0\leqslant\alpha$, $\beta\in L_\infty(\Phi)$ и $\alpha+\beta=\mathbf{1}$, то $|\alpha x+\beta y|^p\leqslant\alpha|x|^p+\beta|y|^p$. Пусть $\gamma:=|x|+|y|+2\varepsilon\mathbf{1}$, $\alpha:=(|x|+\varepsilon\mathbf{1})\gamma^{-1}$, $\beta:=(|y|+\varepsilon\mathbf{1})\gamma^{-1}$, где $\varepsilon>0$. Как видно, $0\leqslant\alpha$, $\beta\in L_\infty(\Phi)$ и $\alpha+\beta=\mathbf{1}$. Далее, если $x_1:=(|x|+\varepsilon\mathbf{1})^{-1}x$ и $y_1:=(|y|+\varepsilon\mathbf{1})^{-1}y$, то $|x_1|\leqslant\mathbf{1}$, $|y_1|\leqslant\mathbf{1}$, следовательно,

$$|\gamma^{-1}(x+y)|=|\alpha x_1+\beta y_1|\leqslant(\alpha|x_1|^p+\beta|y|^p)^{1/p}\leqslant\mathbf{1}.$$

Тем самым, $\gamma^{-1}|x+y|=|\gamma^{-1}(x+y)|\leqslant\mathbf{1}$ или $|x+y|\leqslant\gamma$. Устремив ε к нулю, получим неравенство треугольника для $|\cdot|$. Используемое в последних рассуждениях соотношение $|\alpha x|=\alpha|x|$, $0\leqslant\alpha\in L_\infty(\Phi)$, вытекает из установленных свойств $|\cdot|$ и очевидного равенства $|\lambda||x|=|\lambda x|$, $\lambda\in\mathbf{R}$, благодаря плотности в $L_\infty(\Phi)$ элементов вида $\lambda_1\pi_1\mathbf{1}+\ldots+\lambda_n\pi_n\mathbf{1}$. Итак, $(X,\ |\cdot|)$ — решеточно нормированное пространство с $L_p(\Phi)$-значной разложимой нормой, причем $\|x\|=[\Phi(|x|^p)]^{1/p}$ для всех $x\in X$. Отсюда в силу 4.2 вытекает br-полнота X. Для доказательства дизъюнктной полноты возьмем семейство $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в X, ограниченное в смысле векторной нормы, и разбиение единицы $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}\subset\mathscr{B}$. Положим $e:=\sup\{|x_\xi|:\ \xi\in\Xi\}$. Для произвольного конечного множества $\theta\subset\Xi$ и разбиения единицы $(\rho_\nu)_{\nu\in\theta}$ будет

$$\Big\|\sum_{\nu\in\theta}\rho_\nu x_\nu\Big\|^p=\sum_{\nu\in\theta}\|\rho_\nu x_\nu\|^p=\sum_{\nu\in\theta}\Phi(\rho_\nu|x_\nu|^p)\leqslant\Phi(e^p).$$

Следовательно, семейство (x_ξ) $\mathscr{B}$-ограничено и благодаря $\mathscr{B}_p$-цикличности пространства X существует перемешивание $\mathrm{mix}(\pi_\xi x_\xi)$. Окончательно, $(X,\ |\cdot|)$ — это пространство Банаха — Канторовича, а исходная норма на X есть смешанная норма. ▷

4.10. Теорема. *Банахово пространство Y линейно изометрично пространству $L_p(\mu,\ X)$, $1\leqslant p<+\infty$, для некоторой конечной меры μ и банахова пространства X в том и только том случае, если в Y существует замкнутое подпространство Z и полная по Бейду булева алгебра проекторов $\mathscr{B}$, для которых выполняются следующие условия:*

(1) *пространство Y является $\mathscr{B}_p$-циклическим;*

(2) *X и Z линейно изометричны;*

(3) *множество всех сумм вида $\sum\limits_{i=1}^{n}\pi_k z_i$, где $\pi_1,\ \ldots,\ \pi_n\in\mathscr{B}$, $z_1,\ \ldots\ \ldots,\ z_n\in Z$ и $n\in N$, плотно в Y;*

(4) *для любого $0\neq\pi\in\mathscr{B}$ функция $z\to\|\pi z\|$ есть положительная константа на сфере $\{z\in Z:\ \|z\|=1\}$.*

◁ Необходимость приведенных условий проверяется непосредственно. Докажем их достаточность. Для этого предположим, что Y, Z и $\mathscr{B}$ удовлетворяют всем указанным в формулировке требованиям. В силу теоремы 4.9 можем считать, что Y — пространство со смешанной нормой, причем нормирующая решетка есть $L_p(\mu)$ для некоторой меры μ, и выполняется соотношение

$$\|\pi y\| = \left(\int \pi |y|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \quad (y \in Y,\ \pi \in \mathscr{B}).$$

Положим $e := |z|/\|z\|$, $z \in Z$. По условию e не зависит от z, так как

$$\int \pi e^p d\mu = \int \pi (|z|/\|z\|)^p d\mu = (\|\pi z\|/\|z\|)^p = \mathrm{const}$$

для каждого $0 \neq \pi \in \mathscr{B}$. Отсюда видно также, что $\pi e \neq 0$ для любого ненулевого π, значит, e^p — порядковая единица K-пространства $L_1(\mu)$. Положим $\nu := e^p\mu$ и $|y|_0 := |y|/e$, $y \in Y$. Ясно, что ν — конечная мера, а $(Y,\ L_p(\nu))$ — bo-полное пространство со смешанной нормой, так как $y \to |y|_0$ — это $L_p(\nu)$-значная разложимая норма на Y. При этом

$$\|\pi y\|^p = \int \pi |y|_0^p d\nu \quad (y \in Y,\ \pi \in \mathscr{B})$$

и, в частности,

$$\left(\frac{\|\pi z\|}{\|z\|}\right)^p = \frac{1}{\|z\|}\int \pi |z|_0^p d\nu = \nu(\pi).$$

Обозначим буквой J линейную изометрию Z на X. Для $y = \sum_{i=1}^{n} \pi_i z_i$, где $z_1, \ldots, z_n \in Z$, а $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — попарно дизъюнктные проекторы из $\mathscr{B}$, положим

$$J(y) := \sum_{i=1}^{n} \pi_i J(z_i) \in L_p(\nu),$$

где $\pi_i x$ — вектор-функция, равная постоянной x на π и нуле вне π. Тогда, привлекая $\mathscr{B}_p$-цикличность Y, можно написать

$$\|J(y)\| = \left[\int |J(y)|_0^p d\nu\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \nu(\pi_i)\|z_i\|^p\right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \|\pi_i z_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|\sum_{i=1}^{n} \pi_i z_i\right\| = \|y\|.$$

Следовательно, J осуществляет линейную изометрию плотных подпространств. Эта изометрия по непрерывности распространяется до изометрии пространств Y и $L_p(\nu, X)$. Понятно также, что J сохраняет векторную норму. ▷

4.11. Отметим одно следствие из теоремы 4.10. Пусть μ и ν — конечные меры. Через $L_{p,q}(\mu \times \nu)$ обозначим пространство измеримых функций u двух переменных, имеющих конечную смешанную норму

$$\|u\|_{pq} := \left[\int \left(\int |u(s, t)|^q d\mu(s)\right)^{\frac{p}{q}} d\nu(t)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Эквивалентные функции, как обычно, отождествляются.

Теорема. *Банахово пространство Y линейно изометрично пространству $L_{p,q}(\mu \times \nu)$, $1 \leqslant p,\ q < \infty$, для некоторых конечных мер μ и ν в том и только том случае, если в нем существуют полные по Бейду булевы алгебры проекторов $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ и элемент $e \in Y$, удовлетворяющие условиям:*

(1) *пространство Y является $\mathscr{B}_p$-циклическим;*

(2) *для любых $\pi \in \mathscr{B}$, дизъюнктных проекторов $\rho, \sigma \in \mathscr{A}$ и чисел α, β выполняется $\|\alpha\pi\rho e + \beta\pi\sigma e\|^q = \|\alpha\pi\rho e\|^q + \|\beta\pi\sigma e\|^q$;*

(3) *линейная оболочка множества $\{\pi\rho e\colon \pi \in \mathscr{B},\ \rho \in \mathscr{A}\}$ плотна в Y;*

(4) *для любого $0 \neq \pi \in \mathscr{B}$ функция $\rho \to \|\pi\rho e\|/\|\rho e\|$, $0 \neq \rho \in \mathscr{A}$, есть положительная константа.*

$\triangleleft$ Обозначим через Z замыкание линейной оболочки множества $\{\rho e\colon \rho\in\mathscr{A}\}$. Из условия (3) вытекает, что в Y плотно множество

$$\left\{\sum_{i=1}^{n}\pi_i z_i\colon \pi_1,\ \ldots,\ \pi_n\in\mathscr{B},\ z_1,\ \ldots,\ z_n\in Z,\ n\in N\right\}.$$

Пусть $0\neq\pi\in\mathscr{B}$ и $z=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\rho_i e$, где $\rho_1, \ldots, \rho_n\in\mathscr{A}$ попарно дизъюнктны и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n\in\mathbf{R}$. Привлекая условия (2) и (4), можно написать

$$\frac{\|\alpha_1\pi\rho_1 e\|^q}{\|\alpha_1\rho_1 e\|^q}=\ldots=\frac{\|\alpha_n\pi\rho_n e\|^q}{\|\alpha_n\rho_n e\|^q}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\|\alpha_i\pi\rho_i e\|^q}{\sum\limits_{i=1}^{n}\|\alpha_i\rho_i e\|^q}=\frac{\|\pi z\|^q}{\|z\|^q}.$$

Отсюда видно, что функция $z\to\|\pi z\|$ является положительной константой на единичной сфере пространства Z для любого $0\neq\pi\in\mathscr{B}$. Пусть Z^+ — замыкание конической оболочки множества $\{\rho e\colon \rho\in\mathscr{A}\}$. Тогда пространство Z, упорядоченное посредством конуса Z^+, является банаховой решеткой. Более того, Z есть AL_p-пространство с единицей e. В самом деле, если $z_1=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\rho_i e$ и $z_2=\sum\limits_{j=1}^{m}\beta_j\sigma_j e$, где $0\leqslant\alpha_1, \ldots, \beta_m\in\mathbf{R}$, а $\rho_1, \ldots, \rho_n, \sigma_1, \ldots, \sigma_m$ — попарно дизъюнктные проекторы из $\mathscr{A}$, то благодаря условию (2)

$$\|z_1+z_2\|^q=\sum_{i=1}^{n}\|\alpha_i\rho_i e\|^q+\sum_{j=1}^{m}\|\beta_j\sigma_j e\|^q=\|z_1\|^q+\|z_2\|^q.$$

Нужно еще заметить, что элементы вида z_1 и z_2 плотны в конусе Z^+, а для дизъюнктности произвольных z_1 и $z_2\in Z$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторого $\rho\in\mathscr{A}$ было $\rho z_1=z_1$ и $\rho z_2=0$. Ввиду теоремы 4.Б Z изометрически изоморфно банаховой решетке $L_q(\mu)$ для подходящей конечной меры μ. Остается применить теорему 4.10, полагая $X:=L_q(\mu)$, и заметить, что банаховы решетки $L_p(\nu, L_q(\mu))$ и $L_{p,q}(\mu\times\nu)$ изометрически изоморфны. $\triangleright$

§ 5. Мажорированные операторы в пространствах со смешанной нормой

В последние годы значительное внимание уделяется изучению различных классов операторов в банаховых решетках в духе общей теории операторных идеалов (см. [24, 25]). Укажем несколько примеров. Следующие ниже пункты 5.А—5.Д взяты из книги [25].

5.А. Регулярные операторы. Пусть E и F — банаховы решетки. Обозначим через $\mathscr{R}(E, F)$ множество всех линейных операторов $T\colon E\to F$ таких, что для некоторого $S\in\mathscr{L}^+(E, F)$ выполняется $|Te|\leqslant S|e|$, $e\in E$. Последнее обстоятельство запишем в виде $S\in\mathrm{maj}(T)$. Положим $\rho(T):=\inf\{\|S\|\colon S\in\mathrm{maj}(T)\}$. Пара $(\mathscr{R}(E, F), \rho)$ есть банахово пространство, а если F порядково полна, то она — порядково полная банахова решетка. Из прочих результатов о регулярных операторах приведем лишь один факт.

5.Б. Теорема. *Если в F'' существует положительный проектор единичной нормы на образ F при каноническом вложении $\varkappa_F\colon F\to F''$, то для линейного оператора $T\colon E\to F$ равносильны следующие условия:*

(а) *оператор T регулярен;*

(б) *существует число $k>0$ такое, что для любого конечного набора $e_1, \ldots, e_n\in E$ выполняется*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}|Te_i|\right\|\leqslant k\left\|\sum_{i=1}^{n}|e_i|\right\|.$$

При этом $\rho(T)$ *совпадает с инфимумом множества всех* k *с указанным свойством.*

5.В. (p, q)-выпуклые операторы. Пусть $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$ и X — нормированное пространство. Линейный оператор $T\colon X \to F$ называется (p, q)-*выпуклым*, если существует число $k > 0$ такое, что для любых конечных наборов $x_1, \ldots, x_n \in X$ выполняется

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |Tx_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \leqslant k \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

(Смысл выражений вида $\left(\sum |e_i|^p\right)^{1/p}$ объясняется ниже в 5.4.) Инфимум всех таких k обозначим через $\gamma_{pq}(T)$. Пусть $\mathscr{C}_{p,q}(X, F)$ множество всех (p, q)-выпуклых операторов из X в F. Тогда $(\mathscr{C}_{p,q}(X, F), \gamma_{pq})$ — банахово пространство. Отметим, что $(p, 1)$-выпуклые операторы называют также p-*супераддитивными*, а (∞, ∞)-выпуклые операторы — *мажорированными.*

5.Г. (p, q)-вогнутые операторы. Вновь полагаем $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \leqslant +\infty$ и фиксируем нормированное пространство Y. Линейный оператор $T\colon E \to Y$ называется (p, q)-*вогнутым*, если существует такое число $0 < k < +\infty$, что для любого конечного набора $e_1, \ldots, e_n \in E$ выполняется

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|Te_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant k \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |e_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|.$$

Инфимум всех указанных k обозначается через $\sigma_{pq}(T)$. Если $\mathscr{S}_{p,q}(E, Y)$ — множество всех (p, q)-вогнутых операторов, то $(\mathscr{S}_{p,q}(E, Y), \sigma_{pq})$ — банахово пространство. Отметим, что (∞, q)-вогнутые операторы называют также q-*субаддитивными*, а $(1, 1)$-вогнутые операторы — *суммирующими.*

5.Д. Теорема. *Пусть* $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, *а* S *и* T — *ограниченные операторы из* E *в* F. *Справедливы эквивалентности*

$$T \in \mathscr{S}_{p,q}(E, F) \Leftrightarrow T' \in \mathscr{C}_{q',p'}(F', E'),$$
$$S \in \mathscr{C}_{p,q}(E, F) \Leftrightarrow S' \in \mathscr{S}_{q',p'}(F', E').$$

При этом $\sigma_{pq}(T) = \gamma_{q'p'}(T')$ *и* $\gamma_{pq}(T) = \sigma_{q'p'}(T')$.

Все перечисленные результаты можно найти в [25].

Скромная цель настоящего параграфа — показать, что указанные классы операторов и соответствующая проблематика естественно вписываются в рамки теории решеточно нормированных пространств. При этом возникают новые связи и новые возможности.

5.1. Пусть (V, E) и (W, F) — банаховы пространства со смешанной нормой. Обозначим через $\mathscr{M}(V, W)$ множество всех мажорированных операторов, имеющих непрерывные мажоранты. Понятно, что $\mathscr{M}(V, W) = \{T \in M(V, W)\colon |T| \in \mathscr{R}(E, F)\}$, где $\mathscr{R}(E, F)$ — пространство регулярных ограниченных операторов из E в F. Мажорантную норму $\mu(T)$ оператора $T \in \mathscr{M}(V, W)$ определим по формуле $\mu(T) := \||T|\|$. Поскольку $\mathscr{R}(E, F)$ — порядково полная банахова решетка относительно нормы ρ (см. 5.А), а $\mathscr{M}(V, W)$ — пространство Банаха — Канторовича (см. [1; 4.7]), то $(\mathscr{M}(V, W), \mathscr{R}(E, F))$ — bo-полное пространство со смешанной нормой. В частности, нормированное пространство $(\mathscr{M}(V, W), \mu)$ банахово.

Мажорантная норма μ удовлетворяет условиям

(а) тождественное вложение $\mathscr{M}(V, W)$ в $\mathscr{L}(V, W)$ непрерывно, т. е. $\|T\| \leqslant \mu(T)$ для всех $T \in \mathscr{M}(V, W)$;

(б) если $S \in \mathscr{M}(U, V)$ и $T \in \mathscr{M}(V, W)$, то $T \circ S \in \mathscr{M}(U, W)$ и $\mu(T \circ S) \leqslant \mu(T)\mu(S)$.

Оператор $T\colon V \to W$ называется *предмажорированным*, если существует $S \in \mathscr{L}^+(E, F'')$ такой, что $|Tv|$ $S(|v|)$ для всех $v \in V$. Положим $\mu^p(T) := \inf\{\|S\|\}$, где инфимум берется по всем указанным S. Пространство всех предмажорированных операторов обозначим через $\mathscr{M}^p(V, W)$. В рассматриваемом случае, когда E и F банаховы, будет $M(V, W)=\mathscr{M}(V, W)$. Однако для большей выразительности употребляем все же обозначение $\mathscr{M}$.

5.2. Для *мажорированного оператора T имеют место формулы*

$$\mu(T):=\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}|Tv_i|\right\|: v_i\in V,\ n\in N,\ \left\|\sum_{i=1}^{n}|v_i|\right\|\leqslant 1\right\}=$$

$$=\sup\left\{\frac{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}|Tv_i|\right\|}{\left\|\sum\limits_{i=1}^{n}|v_i|\right\|}: v_i\in V,\ n\in N,\ \sum_{i=1}^{n}|v_i|\neq 0\right\}.$$

◁ Для доказательства нужно лишь привлечь формулу для вычисления наименьшей мажоранты из [1]:

$$\mu(T)=\sup\{\||T|e\|: 0\leqslant e\in E,\ \|e\|\leqslant 1\}=$$

$$=\sup_{\|e\|\leqslant 1, e\geqslant 0}\ \sup_{\|f'\|\leqslant 1, f'\geqslant 0}\left\{\left\langle\sum_{i=1}^{n}|Tv_i|, f'\right\rangle: \sum_{i=1}^{n}|v_i|\leqslant e\right\}=$$

$$=\sup_{\|e\|\leqslant 1, e\geqslant 0}\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}|Tv_i|\right\|: \sum_{i=1}^{n}|v_i|\leqslant e\right\}=$$

$$=\sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^{n}|Tv_i|\right\|: \left\|\sum_{i=1}^{n}|v_i|\right\|\leqslant 1\right\}.$$

Вторая формула вытекает непосредственно из установленного. ▷

5.3. Справедливы следующие утверждения.

(а) *Если $T\in\mathscr{M}(V, W)$, то $T'\in\mathscr{M}(W', V')$ и при этом $\mu(T')\leqslant\mu(T)$.*

(б) *Для оператора $T\in\mathscr{L}(V, W)$ выполняется $T'\in\mathscr{M}(W', V')$ в том и только том случае, если $T\in\mathscr{M}^p(V, W)$; в этом случае $\mu^p(T)=\mu(T')$.*

(в) *Если в F'' существует положительный проектор единичной нормы на образ F при каноническом вложении $\varkappa_F$: $F\to F''$, то $\mathscr{M}(V, W)=\mathscr{M}^p(V, W)$ и $\mu=\mu^p$. В частности, для ограниченного оператора $T\in\mathscr{L}(V, W)$ равносильны включения $T\in\mathscr{M}(V, W)$ и $T'\in\mathscr{M}(W', V')$.*

◁ (а) Пусть $T\in\mathscr{M}(V, W)$ и $S:=|T|$. Тогда для произвольных $w'\in W'$ и $0\leqslant e\leqslant E$ можно написать

$$|T'w'|e=|w'\circ T|e\leqslant\langle Se, |w'|\rangle=\langle e, S'|w'|\rangle.$$

Следовательно, $|T'w'|\leqslant S'(|w'|)$ для всех $w'\in W'$ и, тем самым, $\mu(T')\leqslant\|S'\|=\|S\|=\mu(T)$.

(б) Допустим, что ограниченный оператор T: $V\to W$ удовлетворяет условию $T'\in\mathscr{M}(W', V')$, и положим $R:=|T'|$. Тогда в силу (а) R' является мажорантой оператора T''. Обозначим через S ограничение R' на E. Тогда $S\in\mathscr{L}^+(E, F'')$ и $|Tv|\leqslant S(|v|)$ при всех $v\in V$. Значит $T\in\mathscr{M}^p(V, W)$, причем $\mu^p(T)\leqslant\|S\|\leqslant\|R'\|=\|R\|=\mu(T)$. Наоборот, пусть $T\in\mathscr{M}^p(V, W)$, а оператор $S\in\mathscr{L}^+(E, F'')$ служит мажорантой для T. Так же, как и в (а), показывается, что ограничение S' на F' будет мажорантой для T'. Поэтому $T'\in\mathscr{M}(W', V')$ и $\mu(T')=\mu^p(T)$.

(в) Пусть π: $F''\to F$ — положительный проектор и $\|\pi\|=1$. Возьмем ограниченный линейный оператор T: $V\to W$. Если оператор $S\in\mathscr{L}^+(E, F'')$ является мажорантой для T, то $\pi\circ S$ — также мажоранты T. При этом $\pi\circ S\in\mathscr{L}^+(E, F)$ и $\|\pi S\|\leqslant\|S\|$. Таким образом, из $T\in\mathscr{M}^p(V, W)$ следует, что $T\in\mathscr{M}(V, W)$ и $\mu(T)=\mu^p(T)$. ▷

5.4. Пусть E — это r-полная векторная решетка. Для $0\leqslant e\in E$ обозначим через $E(e)$ идеал в E, порожденный элементом e. Тогда $(E(e), \|\cdot\|_e)$ — банахова решетка с единичным шаром $[-e, e]$. По теореме Крейнов — Какутани существует компакт K такой, что $C(K)$ решеточно изоморфно и линейно изометрично банаховой решетке $E(e)$. Этот изоморфизм обозначим через $u \to \widehat{u}$. Возьмем произвольные $e_1, \ldots, e_n \in E(e)$ и непрерывную функцию $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Тогда существует единственный элемент $\varphi(f) \in E(e)$, определяемый условием

$$\varphi(f)^{\wedge}(t) = f(\widehat{e}_1(t), \ldots, \widehat{e}_n(t)) \quad (t \in K).$$

Пусть $d\xi_i\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — координатное отображение $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \to \xi_i$. Из сказанного вытекает следующее.

(а) *Для любого конечного набора $e_1, \ldots, e_n \in E$ элементов r-полной векторной решетки E существует решеточный гомоморфизм $\varphi\colon C(\mathbf{R}^n) \to E$ такой, что*

(1) $\varphi(d\xi_i) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$;

(2) *если последовательность $(f_n) \subset C(\mathbf{R}^n)$ сходится к $f \in C(\mathbf{R}^n)$ равномерно в кубе $\prod\limits_{i=1}^{n} [-\|e_i\|_e, \|e_i\|_e]$, то последовательность $(\varphi(f_n))$ сходится к $\varphi(f)$ с регулятором e.*

Положим по определению $f(e_1, \ldots, e_n) := \varphi(f)$. Тем самым получаем (непрерывное для равномерно непрерывного $f \in C(\mathbf{R}^n)$) отображение $f\colon E^n \to E$, причем $f(e_1, \ldots, e_n)$ содержится в идеале $E(e)$, где $e = |e_1| \vee \ldots \vee |e_n|$. Рассмотрим теперь функцию $f_p\colon (\xi_1, \ldots, \xi)_n \to \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\xi_i|^p\right)^{1/p}$, где $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Напомним, что при $p = +\infty$ полагаем $f_p(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{|\xi_i|\}$. Для $e_1, \ldots, e_n \in E$ положим $f_p(e_1, \ldots, e_n) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |e_i|^p\right)^{1/p}$. Все сказанное верно для банаховой решетки, ибо она является r-полной. Потребуются следующие свойства оператора $(e_1, \ldots, e_n) \to (\sum |e_i|^p)^{1/p}$.

(б) *Пусть E — банахова решетка, $e_1, \ldots, e_n \in E$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ и $1/p + 1/q = 1$. Тогда справедливы соотношения*

(1) $$\left(\sum_{i=1}^{n} |e_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\colon \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant 1\right\};$$

(2) $$\left(\sum_{i=1}^{n} |Te_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant T\left(\sum_{i=1}^{n} |e_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} 0 \leqslant T \in \mathscr{L}(E, F);$$

(3) $$\sum_{i=1}^{n} |\langle e_i, e_i'\rangle| \leqslant \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} |e_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\sum_{i=1}^{n} |e_i'|^q\right)^{\frac{1}{q}} \right\rangle;$$

(4) $$\left\|\left(\sum_{i=1}^{n} |e_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\| = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, e_i'\rangle\colon \left\|\left(\sum_{i=1}^{n} |e_i'|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\| \leqslant 1\right\}.$$

5.5. Пусть $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant +\infty$. Оператор $T \in L(V, W)$ назовем (p, q)-*суммирующим*, если существует число $k > 0$ такое, что для любых конечных наборов $v_1, \ldots, v_n \in V$ выполняется

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^{n} |Tv_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\| \leqslant k \left\|\left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|.$$

Точную нижнюю границу множества всех k, удовлетворяющих указанному неравенству, обозначим через $\sigma_{pq}(T)$. Пусть $\mathscr{S}_{p,q}(V, W)$ — пространство всех (p, q)-суммирующих операторов из V в W. Непосредственно из определений видно, что (p, q)-суммирующий оператор T ограничен, причем $\|T\| \leqslant \sigma_{pq}(T)$. Ясно также, что σ_{pq} — норма на $\mathscr{S}_{p,q}(V, W)$, и для вычисления этой нормы справедливы формулы

$$\sigma_{pq}(T)=\sup\left\{\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}|Tv_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\|: v_i\in V,\ \left\|\left(\sum_{i=1}^{n}|v_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|\leqslant 1\right\},$$

$$\sigma_{pq}(T)=\left\{\frac{\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}|Tv_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\|}{\left\|\left(\sum_{i=1}^{n}|v_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|}: v_i\in V,\ \sum_{i=1}^{n}|v_i|\neq 0\right\}.$$

Данное определение (p, q)-суммирующего оператора включает в себя понятия, введенные в 5.А ($V:=E$, $W:=F$), 5.Б ($E:=\mathbf{R}$, $W:=F$) и 5.В ($V:=E$, $F:=\mathbf{R}$). Кроме того, при $E=F=\mathbf{R}$ $\mathscr{S}_{p,q}(V, W)$ совпадает с пространством линейных ограниченных операторов $\mathscr{L}(V, W)$. При $p=q=1$ будем писать $\sigma:=\sigma_{11}$ и говорить просто о суммирующих операторах.

5.6. Теорема. *Для любых банаховых пространств со смешанными нормами V и W справедливы утверждения*

(а) $\mathscr{S}_{p,q}(V, W)\subset\mathscr{L}(V, W)$ *и* $\|T\|\leqslant\sigma_{pq}(T)$ *для каждого* $T\in\mathscr{L}_{p,q}(V, W)$;

(б) $(\mathscr{S}_{p,q}(V, W), \sigma_{pq})$ — *банахово пространство*;

(в) *если* $T\in\mathscr{S}_{p,q}(V, W)$, $S\in\mathscr{M}(V_1, V)$ *и* $R\in\mathscr{M}(W, W_1)$, то $RTS\in\mathscr{S}_{p,q}(V_1, W_1)$ *и* $\sigma_{pq}(RTS)\leqslant\mu(R)\sigma_{pq}(T)\mu(S)$.

$\triangleleft$ (а) Это вытекает из очевидных оценок:

$$\sigma_{pq}(T)\geqslant\sup\{\||Tv|\|: \||v|\|\leqslant 1\}=\|T\|.$$

(б) Пусть (T_n) — фундаментальная последовательность в $\mathscr{S}_{p,q}(V, W)$. Тогда (T_n) фундаментальна также в более слабой норме пространства $\mathscr{L}(V, W)$, значит существует оператор $T\in\mathscr{L}(V, W)$ такой, что $\lim\limits_{\to\infty}\|T-T_n\|=0$. Для произвольного $\varepsilon>0$ подберем номер k так, чтобы $\sigma_{pq}(T_n-T_m)\leqslant\varepsilon$ при всех $n, m\geqslant k$. Тогда для каждого конечного набора $v_1, \ldots, v_l\in V$ можно написать

$$\alpha_{nm}:=\left\|\left(\sum_{i=1}^{l}|T_nv_i-T_mv_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\|\leqslant\varepsilon,$$

как только $\left\|\left(\sum_{i=1}^{l}|v_i|^q\right)^{1/q}\right\|\leqslant 1$. Заметим, что если $f_1', \ldots, f_l', f_1'', \ldots, f_l''\in F$, то

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{l}|f_i'|^p\right)^{\frac{1}{p}}-\left(\sum_{i=1}^{l}|f_i''|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{l}|f_i'-f_i''|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Кроме того, $w\to|w|$ — непрерывный оператор из W в F, по определению смешанной нормы. Таким образом,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{l}|T_nv_i-T_mv_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\sum_{i=1}^{l}|T_nv_i-Tv_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}\alpha_{nm}=\left\|\left(\sum_{i=1}^{l}|T_nv_i-Tv_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\|\leqslant\varepsilon.$$

Так как элементы $v_1, \ldots, v_n\in V$ произвольны, то верно также неравенство $\sigma_{pq}(T_n-T)\leqslant\varepsilon$ при $n\geqslant k$. Отсюда видно, что $T\in\mathscr{S}_{p,q}(V, W)$ и $\sigma_{pq}(T_n-T)\to 0$.

(в) Пусть операторы R, S и T таковы, как указано в условии, а $R_1 \in \mathscr{L}(F, F_1)$ и $S_1 \in \mathscr{L}(E_1, E)$ — произвольные мажоранты R и S соответственно. Тогда для произвольных $v_1, \ldots, v_n \in V_i$

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |RTSv_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \leqslant \left\| [\sum (R_1 \,|\, TSv_i|)^p]^{\frac{1}{p}} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|R_1\| \sigma_{pq}(T) \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |Sv_i|^q \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \|R_1\| \sigma_{pq}(T) \|S_1\| \cdot \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|.$$

Тем самым $\sigma_{pq}(RTS) \leqslant \|R_1\| \sigma_{pq}(T) \|S\|$ и переход к инфимуму по всем $R_1 \in \mathrm{maj}(R)$ и $S_1 \in \mathrm{maj}(S)$ приводит к требуемому неравенству. ▷

5.7. Теорема. *Ограниченный оператор $T \in \mathscr{L}(V, W)$ будет (p, q)-суммирующим в том и только том случае, если сопряженный оператор T' является (q', p')-суммирующим. При этом $\sigma_{pq}(T) = \sigma_{q'p'}(T')$.*

◁ Пусть $T \in \mathscr{S}_{p,q}(V, W)$ и возьмем произвольный конечный набор $w_1', \ldots, w_n'$ из W'. Учитывая свойства оператора $(a_1, \ldots, a_n) \to \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ в банаховых решетках, можно написать цепочку неравенств:

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |T'w_i'|^q \right)^{\frac{1}{q'}} \right\| =$$

$$= \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, \, |w_i' \circ T| \rangle : 0 \leqslant e_i \in E, \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |e_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\| \leqslant 1 \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sup \{ |w_i' \circ Tv_i| : |v_i| \leqslant e_i \} : 0 \leqslant e_i \in E, \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |e_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\| \leqslant 1 \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \langle |Tv_i|, |w_i'| \rangle : v_i \in V, \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant 1 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup \left\{ \left\langle \left(\sum_{i=1}^{n} |Tv_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i'|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\rangle : \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\| \leqslant 1 \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup \left\{ \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |Tv_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right\| \cdot \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i'|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\| : \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |v_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\| \leqslant 1 \right\} =$$

$$= \sigma_{pq}(T) \cdot \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i'|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} \right\|.$$

Таким образом, $T' \in \mathscr{S}_{q',p'}(W', V')$ и $\sigma_{q'p'}(T') \leqslant \sigma_{pq}(T)$. Наоборот, предположим, что T' является (q', p')-суммирующим оператором. Тогда в силу доказанного T'' будет (p, q)-суммирующим и $\sigma_{pq}(T'') \leqslant \sigma_{q'p'}(T')$. Поскольку канонические вложения $\varkappa_V: V \to V''$ и $\varkappa_W: W \to W''$ сохраняют векторные нормы (см. 4.4), то $T \in \mathscr{S}_{pq}(V, W)$, а из определения σ_{pq} видно, что $\sigma_{pq}(T) \leqslant \sigma_{pq}(T'')$. Тем самым $\sigma_{pq}(T) = \varphi_{q'p'}(T')$. ▷

5.8. Теорема. *Пусть F — порядково полное AM-пространство. Тогда для линейного оператора $T: V \to W$ равносильны утверждения:*

(а) *T — мажорированный оператор;*

(б) T — *суммирующий оператор*;

(в) *для любой последовательности* $(v_n) \subset V$ *из сходимости ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ *по норме в* E *вытекает сходимость ряда* $\sum_{n=1}^{\infty} Tv_n|$ *по норме пространства* F.

$\lhd$ (а) $\Rightarrow$ (б). Эта импликация следует из 5.2 и справедлива без дополнительного предположения относительно банаховой решетки F.

(б) $\Rightarrow$ (в). Очевидно. Здесь также F — произвольная банахова решетка.

(в) $\Rightarrow$ (а). Нужно только установить, что множество

$$A_e := \left\{ \sum_{i=1}^{n} |Tv_i| : v_i \in V,\ n \in N,\ \sum_{i=1}^{n} |v_i| \leqslant e \right\}$$

порядково ограничено, каков бы ни был элемент $0 \leqslant e \in E$. Предположим, что это не так, т. е. A_e не ограничено для некоторого $0 \leqslant e \in E$. Тогда для некоторого $0 < f \in F$ выполняется следующее: для любого $n \in N$ существует конечный набор $\{a_{n1}, \ldots, a_{nk(n)}\} \subset A_e$ такой, что $a_{n1} \vee \ldots \vee a_{nk(n)} \geqslant 2^n f$. Отсюда, учитывая, что F есть AM-пространство, получаем $\max\{\|a_{n1}\|, \ldots, \|a_{nk(n)}\|\} \geqslant 2^n\|f\|$. Следовательно, $\|a_{nj}\| \geqslant 2^n\|f\|$ для некоторого $1 \leqslant j \leqslant k(n)$. Итак, для каждого $n \in N$ существует конечный набор $\{v_{n1}, \ldots, v_{nl(n)}\} \subset V$ такой, что

$$\left\| \sum_{j=1}^{l(n)} |Tv_{nj}| \right\| \geqslant 2^n \|f\|, \quad \sum_{j=1}^{l(n)} |v_{nj}| \leqslant e.$$

Построим новую последовательность $(u_i) \subset V$ таким образом: если $i = l(0) + l(1) + \ldots + l(n-1) + j$, то полагаем $u_i := (1/2^n) v_{nj}$, $j = 1, \ldots, l(n)$, где $l(0) = 0$. Итак, (u_i) получается последовательным перечислением групп элементов $\left\{\frac{1}{2} v_{11}, \ldots, \frac{1}{2} v_{1l(1)}\right\}$, $\left\{\frac{1}{4} v_{21}, \ldots, \frac{1}{4} v_{2l(2)}\right\}$ и т. д.

Ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|$ сходится по норме, так как

$$\sum_{i=1}^{l(1)+\ldots+l(k)} |u_i| = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{l(n)} |v_{nj}| \leqslant \sum_{n=1}^{k} \frac{e}{2^n}.$$

По условию ряд $\sum |Tu_i|$ также должен быть сходящимся, значит,

$$s_k := \sum_{i=l(1)+\ldots+l(k-1)}^{l(1)+\ldots+l(k)} |Tu_i| = \sum_{j=1}^{l(k)} \left| T\left(\frac{1}{2^k} v_{kj}\right) \right| \to 0$$

при $k \to \infty$. Но с другой стороны,

$$\|s_k\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} \left| T\left(\frac{1}{2^k} v_{kj}\right) \right| \right\| \geqslant \|f\| > 0 \quad (k \in N).$$

Полученное противоречие указывает на ограниченность множества A_e. $\rhd$

§ 6. Нерешенные задачи

В текущем параграфе укажем возможные направления дальнейших исследований и некоторые конкретные задачи, решение которых было бы, по нашему мнению, существенным продвижением в понимании структуры решеточно нормированных пространств.

6.1. Линейный оператор $T\colon V \to W$ назовем *субмажорированным*, если существует возрастающий сублинейный оператор $P\colon E \to F$, называемый *субмажорантой* T, такой, что $P(e) = P(e^+)$, $e \in E$, и $|Tv| \leqslant P(|v|)$ для всех $v \in V$. Пусть $SM(V, W)$ — совокупность всех субмажорированных операторов из V в W. Легко видеть, что $T \in SM(V, W)$ в том и только том случае, если для любого $0 \leqslant e \in E$ множество $T[B_V(e)]$ ограничено, т. е. для подходящего $f \in F$ будет $|Tv| \leqslant f$, каков бы ни был элемент $v \in V$, $|v| \leqslant e$. При этом наименьшая субмажоранта $[T]$ оператора T имеет вид

$$[T]\,e = \sup\{|Tv|\colon |v| \leqslant e^+\} \quad (e \in E).$$

Простейшие субмажорированные операторы можно построить из мажорированных операторов. Пусть (T_ξ) — дизъюнктное семейство в $M(V, W)$ такое, что множество $\mathcal{U} := \{|T_\xi|\}$ поточечно ограничено и существует $Tv = \sum\limits_\xi T_\xi v$ для каждого $v \in V$. Тогда $T \in SM(V, W)$, причем формула $P(e) = \sup\{|T_\xi| e^+\}$, $e \in E$, определяет субмажоранту P оператора T. Оператор T будет мажорированным тогда и только тогда, если $\mathcal{U}$ ограничено в K-пространстве $L_r(E, F)$; при этом $|T| = \sum\limits_\xi |T_\xi|$. Операторы указанного вида естественно назвать *кусочно мажорированными*. Далее, если (T_α) — семейство кусочно мажорированных операторов, причем $Tv := bo\text{-}\lim T_\alpha(v)$, а семейство $[T_\alpha]$ поточечно ограничено, то $T \in SM(V, W)$ и $[T]e \leqslant \sup\{[T_\alpha]e\}$, $e \in E$.

Проблема 1. *Изучить индивидуальные свойства субмажорированных операторов, а также структуру пространства $SM(V, W)$.*

Здесь возникает множество конкретных подзадач, формулировки которых подсказываются теорией мажорированных операторов (см. [1, 2] и настоящую статью), а также аналогией между субмажорированными операторами и векторными мерами ограниченной полувариации (см. [9, 18, 26]). От подобной детализации воздерживаемся, однако отметим еще следующие вопросы.

Проблема 2. *В какой степени и каким образом зависят свойства линейного оператора от свойств его наименьшей субмажоранты?*

Проблема 3. *Какие субмажорированные операторы аппроксимируются* (например, в указанном выше смысле) *кусочно мажорированными операторами? Какая часть $SM(V, W)$ допускает разложимую норму со значениями в максимальном расширении K-пространства $L_r(E, F)$?*

6.2. Линейный оператор $T\colon V \to W$ называется *(p, q)-мажорированным*, $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant \infty$, если существует субмажоранта $P\colon E \to F$ такая, что

$$\left(\sum_{i=1}^n |Tv_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant P\left[\left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right]$$

для любого конечного набора $v_1, \ldots, v_n \in V$. Наименьшую субмажоранту с указанным свойством обозначим через $[T]_{pq}$. Тогда

$$[T]_{pq}\colon\ e \to \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^n |Tv_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\colon\ v_i \in V,\ \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant e\right\}.$$

Пусть $M_{p,q}(V, W)$ — пространство всех (p, q)-мажорированных операторов. Ясно, что $M_{p,q}(V, W) \subset SM(V, W)$, причем $[T] \leqslant [T]_{pq}$. Если E и F — нормированные решетки, то через $\mathcal{M}_{p,q}(V, W)$ и $\mathcal{SM}(V, W)$ обозначим множества элементов из $M_{p,q}(V, W)$ и $SM(V, W)$ соответственно, имеющих непрерывные субмажоранты. Положим

$$\mu^s(T) := \sup\{\|[T]e\|\colon \|e\| \leqslant 1\},$$
$$\mu_{pq}(T) := \sup\{\|[T]_{pq}(e)\|\colon \|e\| \leqslant 1\}.$$

Нетрудно видеть, что $\mathcal{M}_{p,q}(V, W) \subset \mathcal{S}_{p,q}(V, W)$ и $\mu_{pq}(T) = \sigma_{pq}(T)$ при $T \in \mathcal{M}_{p,q}(V, W)$.

Проблема 4. *Найти необходимые и достаточные условия, при которых $\mathcal{M}_{p,q}(V, W) = \mathcal{S}_{p,q}(V, W)$.*

6.3. Введем понятие операторного модуля, аналогичное [25]. Пусть $\mathscr{L}$ и $\mathscr{F}$ — соответственно классы всех ограниченных и всех конечномерных операторов, действующих между банаховыми пространствами. Класс $\mathscr{B}$ операторов, действующих между банаховыми пространствами со смешанной нормой (см. § 4) вместе с отображением β: $\mathscr{B} \to \mathbf{R}^+$, называется *нормированным операторным модулем*, если выполняются условия:

(1) $\mathscr{F} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{L}$, $\|T\| \leqslant \beta(T)$ при $T \in \mathscr{B}$ и $\beta(T) \leqslant \nu_0(T)$ при $T \in \mathscr{F}$ (здесь $\nu_0(T)$ — проективная норма T (см. [25]));

(2) $\mathscr{B}(V, W) := \mathscr{B} \cap \mathscr{L}(V, W)$ — нормированное пространство с нормой β;

(3) $\mathscr{M} \circ \mathscr{B} \circ \mathscr{M} \subset \mathscr{B}$ и $\beta(RTS) \leqslant \mu(R)\beta(T) \cdot \mu(S)$ для всех $R, S \in \mathscr{M}$ и $T \in \mathscr{B}$ (здесь $\mathscr{M}$ — класс всех мажорированных операторов, действующих между банаховыми пространствами со смешанной нормой).

Пусть V^* — сопряженное к V в смысле теории векторной двойственности относительно диализирующей пары (E, E^*), $E^* := \mathrm{Orth}(E)$ (см. [2]). Обозначим через $\mathscr{F}_m(V, W)$ операторы T: $V \to W$ вида

$$Tv = \sum_{i=1}^{n} [l_i \circ v_i^*(v)]\, w_i \quad (v \in V),$$

где $v_1^*, \ldots, v_n^* \in V^*$; $w_1, \ldots, w_n \in W$; $l_1, \ldots, l_n \in L_r(E, F^*)$, $F^* := \mathrm{Orth}(F)$. (Напомним, что W — модуль над F^*.) Возможно, что иногда вместо (1) в определении нормированного операторного модуля более естественно требовать условие

(1′) $\mathscr{F}_m \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{L}$, $\|T\| \leqslant \beta(T)$ при $T \in \mathscr{B}$ и $\beta(T) \leqslant \nu_m(T)$ при $T \in \mathscr{F}_m$, где

$$\nu_m(T) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \| l_i \circ v_i^* \| \cdot |\!|\!| w_i |\!|\!| \right\}.$$

Проблема 5. *Изучить введенное понятие операторного модуля. В частности, дать определение сопряженного модуля и развить соответствующую двойственность* (см. [25, 24]).

6.4. *Пусть $W := F$ — K^+-пространство. Предположим, что линейный оператор T: $V \to W$ удовлетворяет условиям:*

(а) *существует булев гомоморфизм h из $\mathfrak{Pr}(W)$ в $\mathfrak{Pr}(V)$ такой, что $\pi T = Th(\pi)$ для всех $\pi \in \mathfrak{Pr}(W)$;*

(б) *для любой последовательности $(v_n) \subset V$ из $r\text{-}\lim_{n\to\infty} |v_n| = 0$ следует, что $o\text{-}\lim_{n\to\infty} Tv_n = 0$. Тогда T — мажорированный оператор.*

◁ Из условия (б) видно, что если $(w_n) \subset T[B_V(e)]$, $0 \leqslant e \in E$, а числовая последовательность (λ_n) сходится к нулю, то $o\text{-}\lim_{n\to\infty} \lambda_n w_n = 0$. Это означает o-ограниченность множества $T[B_V(e)]$, поэтому $T \in SM(V, W)$. Однако в силу (а) будет $SM(V, W) = M(V, W)$. Действительно, если $v_1, \ldots, v_n \in V$ и $\sum_{i=1}^{n} |v_i| \leqslant e$, а π_i — проектор на компоненту $\{(Tv_i)^+\}^{dd}$, то для $u := \sum_{i=1}^{n} h(\pi_i) v_i - \sum_{i=1}^{n} (I - h(\pi_i)) v_i$ будет

$$\sum_{i=1}^{n} |Tv_i| = \sum_{i=1}^{n} \pi_i T v_i - \sum_{i=1}^{n} (I - \pi_i) Tv_i = Tu.$$

С другой стороны,

$$|u| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |h(\pi_i) v_i - (I - h(\pi_i)) v_i| \leqslant e,$$

следовательно, $|T| \leqslant [T]$. Ясно, что на самом деле $|T| = [T]$. ▷

Заметим, что всем условиям доказанного предложения удовлетворяет, например, разложимый o-непрерывный оператор (см. 1.1). Более общими, и в то же время легко проверяемыми, достаточными условиями мажорированности линейного оператора мы не располагаем.

Проблема 6. *Найти легко проверяемые на практике общие критерии мажорированности широких классов линейных операторов.*

6.5. Известно, что линейный оператор в векторных решетках, сохраняющий дизъюнктность, будет автоматически регулярным при некотором дополнительном требовании, близком к r-непрерывности (см. 2.В). С другой стороны, непрерывность, d-гомоморфизма часто является следствием предположений типа r-полноты или нормируемости рассматриваемых векторных решеток (см. [11, 27, 28]). В связи с этим возникает

Проблема 7. *Найти достаточные условия непрерывности и мажорированности для коразложимых операторов* (см. 1.1), *действующих в* РНП *или в пространствах со смешанной нормой.*

Проблема 8. *Решить аналогичные вопросы для разложимых операторов* (см. 1.1). *Здесь ситуация не изучена даже для операторов, действующих в векторных решетках.*

6.6. Пусть P: $E \to F$ — возрастающий сублинейный оператор. Положим

$$B_P(M(V, W)) := \{T \in M(V, W): |T| \in \partial P\},$$

$$B_P(SM(V, W)) := \{T \in SM(V, W): [T] \leqslant P\}.$$

Пусть C обозначает одно из указанных двух множеств. Тогда C операторно выпукло в том смысле, что если S, $T \in C$ и $0 \leqslant \alpha$, $\beta \in \mathrm{Orth}(F)$, $\alpha + \beta = I_F$, то $\alpha S + \beta T \in C$. Кроме того, для любой сети $(T_\alpha) \subset C$ из $bo\text{-}\lim T_\alpha v = Tv$, $v \in V$, вытекает, что $T \in C$. Множество C является аналогом операторного шара. В формировании C участвуют векторные нормы пространств V и W, а также оператор P. Поэтому строение C должно существенно зависеть от этих трех сублинейных операторов.

Проблема 9. *Дать внутреннюю характеризацию и изучить экстремальную структуру выпуклых множеств* $B_P(M(V, W))$ *и* $B_P(SM(V, W))$.

Понятно, что поставленная задача является чересчур общей, поэтому неизбежны определенные ограничения и уточнения. К наиболее изученным относятся случаи $W = F$ и $E = W = \mathbf{R}$ (см. [2, 8, 29, 30]). В ходе решения этой задачи естественно возникают следующие более конкретные вопросы.

Проблема 10. *Каким необходимым и достаточным условиям должен быть подчинен оператор* $T \in M(V, W)$, *чтобы его наименьшая мажоранта* $|T|$ *была крайней или о-крайней точкой множества* ∂P? *Аналогичный вопрос для* $T \in SM(V, W)$: *когда* $\partial[T]$ *есть крайнее подмножество в* ∂P?

Проблема 11. *Установить вариант теоремы Крейна — Мильмана для множества вида* B_P.

6.7. Сочетание разложимости векторной нормы с порядковой полнотой нормирующего пространства приводит к существенному прогрессу в теории РНП. Существуют, однако, важные примеры РНП, в которых нет ни разложимости, ни порядковой полноты: произвольные архимедовы векторные решетки, пространства непрерывных вектор-функций на компакте со значениями в банаховом пространстве и пространство глобальных сечений банахова расслоения (см. [1, 8, 20, 31—34]). В связи с этим возникает следующая

Проблема 12. *Развить теорию* РНП *без дополнительных предположений о разложимости решеточной нормы или порядковой полноты нормирующего пространства.*

Ситуация здесь не столь безнадежна, как может показаться с первого взгляда. Пусть E — архимедова векторная решетка, а V — векторное пространство с E-значной нормой $|\cdot|$. Скажем, что норма $|\cdot|$ насыщена, если для любого $0 < e \in E$ существует ненулевой элемент $v \in V$ такой, что $|v| \leqslant e$. Далее, будем говорить, что $\mathscr{B}$ — *полная булева алгебра подпространств* V, если $\mathscr{B}$ — это замкнутая относительно произвольных пересечений система подпространств V и эта система, упорядоченная по включению, образует булеву алгебру с нулем $\{0\}$ и единицей V.

Если (V, E) — решеточно нормированное пространство с насыщенной E-значной нормой, то существуют полная булева алгебра подпространств $\mathscr{B}$ пространства V и булев изоморфизм h базы $\mathfrak{B}(E)$ векторной решетки E на $\mathscr{B}$ такие, что

$$v \in h(K) \Leftrightarrow |v| \in K \quad (K \in \mathfrak{B}(E),\ v \in V).$$

Далее, пусть $\widehat{E}$ — это K-пополнение E, причем считаем $E \subset \widehat{E}$. Обозначим через $\widehat{V}$ bo-пополнение в смысле [1, 2] K-нормированного пространства $(V, |\cdot|, \widehat{E})$. Тогда $\widehat{V}$ — это ПБК, и существует линейное изометрическое вложение i: $V \to \widehat{V}$, удовлетворяющее условиям

(а) если W — разложимое bo-замкнутое подпространство в $\widehat{V}$ и $i[V] \subset W$, то $W = \widehat{V}$;

(б) отображение $K \to i[K]^{dd}$, $K \in \mathscr{B}$, является изоморфизмом булевой алгебры $\mathscr{B}$ на базу компонент ПБК $\widehat{V}$.

Аналогичный вопрос возникает и в связи с пространствами со смешанной нормой (см. 4.1).

Проблема 13. *Изучить структурные свойства пространств со смешанной нормой без предположения о порядковой полноте или разложимости.*

6.8. К числу наиболее интересных результатов в теории операторов, полученных методами теории порядково ограниченных операторов в векторных решетках наряду с 3.А, относятся следующие утверждения (см. [14, 32]).

(а) **Теорема** (Dodds P. G., Fremlin D. H. [35]). *Пусть E и F — банаховы решетки такие, что нормы в E' и F порядково непрерывны. Предположим, что операторы S, T: $E \to F$ удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant S \leqslant T$, причем T компактен. Тогда S также компактен.*

(б) **Теорема** (Aliprantis C. D., Burkinshaw O. [36]). *Пусть E — порядково полная банахова решетка и регулярный оператор T: $E \to E$ имеет компактный модуль $|T|$. Тогда оператор T^3 компактен. Если же норма в E или в E' порядково непрерывна, то оператор T^2 также компактен.*

Проблема 14. *Распространить теоремы Доддса — Фремлина* (6.8 (а)) *и Алипрантиса — Буркиншоу* (6.8 (б)) *на мажорированные операторы в пространствах со смешанной нормой. Верно ли, что если оператор $T \in M(V, W)$ циклически компактен* (см. [2]), *а оператор $|T|$ компактен, то T также компактен? Верно ли, что если циклически компактный оператор $T \in \mathscr{M}(V, W)$ имеет компактную мажоранту S: $E \to F$, то T компактен* (при соответствующих предположениях о порядковой непрерывности норм и т. п.)?

Как хорошо известно, полугруппы положительных операторов в банаховой решетке обладают целым рядом интересных дополнительных свойств, связанных с порядком (см. [20, 32]). Это относится прежде всего к спектральным свойствам и эргодичности.

Проблема 15. *Изучить полугруппы мажорированных операторов в банаховых пространствах со смешанной нормой. Имеют ли место, например, варианты эргодической теоремы Халмоша — фон Неймана* ([32, теорема 10.5]), *теоремы Нагеля — Вольфа* ([32, теорема 10.4]) *и т. п.?*

6.9. Область исследований, в которой изучаются спектральные свойства положительных операторов, действующих в банаховых решетках, иногда называют теорией Перрона — Фробениуса. Это название происходит из-за классических результатов О. Перрона и Г. Фробениуса о спектре положительных матриц (см. [20]). Обобщение этих результатов на положительные операторы в банаховых решетках, а также другие результаты в этом направлении можно найти в [20, 32].

Проблема 16. *Распространить основные факты теории Перрона — Фробениуса на мажорированные операторы. Как связаны спектральные свойства мажорированного оператора со спектральными свойствами его мажоранты? Наименьшей мажоранты?*

Линейный оператор T, действующий в ПБК V, называется *неприводимым*, если никакая компонента в V, кроме $\{0\}$ и V, не является инвариантным подпространством для T. Мажорированный оператор T неприводим в том и только том случае, если неприводим оператор $|T|$.

Проблема 17. *Найти условия мажорированности неприводимого оператора в* РНП. *Каким образом неприводимость мажорированного оператора в банаховом пространстве со смешанной нормой влияет на его спектральные свойства?*

Указанные задачи изучались лишь в простейших ситуациях. Так, в [7] для конечномерного мажорированного оператора T доказано, что если $|T|\leqslant S$, λ и Λ — наибольшие по модулю собственные значения операторов T и S, то $\lambda\leqslant\Lambda$. В [2] установлен вариант альтернативы Фредгольма для мажорированных операторов в том случае, когда мажоранта есть ортоморфизм. Эти операторы представляют собой другую крайность (оставляют всякую компоненту инвариантной) по сравнению с неприводимыми операторами.

6.10. Теоремы 3.9 и 3.10 обобщают критерий Бухвалова З. А. в его самой существенной части, но все же не полностью. Дело в том, что $*$-o-непрерывность линейного оператора в идеальных пространствах влечет его порядковую ограниченность. Однако в РНП из $*$-o-непрерывности мажорированность не вытекает, вообще говоря (см. 6.4). Ввиду этого в этих теоремах заранее предполагается мажорированность.

Проблема 18. *Распространить критерии интегральной предсставимости* 3.9 *и* 3.10 *на классы операторов, более широкие, чем мажорированные, так, чтобы теорема* 3.А *получалась как частный случай* $X=Y\neq\mathbf{R}$.

Проблема 19. *Каким необходимым и достаточным условиям должна удовлетворять оператор-функция, чтобы соответствующий интегральный оператор в пространствах измеримых вектор-функций был компактным? Циклически компактным? Слабо компактным?*

Некоторые частные результаты в этом направлении приводятся в [37].

6.11. В книге [38], посвященной классическим банаховым пространствам, Линденштраус и Цафрири пишут: «В анализе встречается много классов специальных банаховых пространств, которые все еще не изучались детально с точки зрения геометрической теории банаховых пространств. Мы уверены, что такие исследования, будучи проведены, дадут новое проникновение в специальные области анализа, в которых эти пространства появляются, а также задачи в тех разделах, которые не кажутся a priori тесно связанными с теорией банаховых пространств».

В качестве одного из таких мало изученных классов можно назвать классс классических банаховых пространств со смешанной нормой ($L_p(\mu, X)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, X — банахово; $L_{p,q}(\mu\times\nu)$, $1\leqslant p$, $q\leqslant\infty$, $p\neq q$, и т. д.). В § 4 намечен подход к указанной проблематике, основанный на теории решеточно нормированных пространств, и установлено несколько структурных теорем. Понятно, что это лишь самое начало.

Проблема 20. *Развить изометрическую теорию классических банаховых пространств со смешанной нормой.* (*Дать изометрическую характеризацию в классе банаховых пространств, банаховых решеток, банаховых алгебр; изучить геометрию шаров и т. д.*; см. [38—41].)

Проблема 21. *То же для изоморфной теории.*

6.12. Возьмем локально компактное пространство Q и положительную меру Радона μ на нем [42]. Пусть $\mathscr{X}:=(X_q)_{q\in Q}$ — банахово расслоение над Q (см. [1, 38, 43]). Через $\Gamma_K(\mathscr{X})$ обозначим множество всех непрерывных селекторов точечно множественного отображения $q\to X_q$, $q\in K\subset Q$. Тогда $\Gamma(\mathscr{X}):=\Gamma_Q(\mathscr{X})$ — пространство всех глобальных сечений расслоения $\mathscr{X}$. Элементы произведения $\prod\limits_{q\in Q}X_q$ будем называть *векторными полями*. Векторное поле f называется μ-*измеримым*, если для любого $\varepsilon>0$ и компакта $K\subset Q$ существует компакт $K_\varepsilon\subset K$ такой, что $\mu(K-K_\varepsilon)<\varepsilon$ и $f|_{K_\varepsilon}$ входит в множество $\Gamma_{K_\varepsilon}(\mathscr{X})$. Измеримые векторные поля, совпадающие почти всюду, считаем эквивалентными. Пусть $S(\mu, \mathscr{X})$,— пространство всех классов эквивалентности измеримых векторных полей. Для $f \in S(\mu, \mathscr{X})$ обозначим через $|f|$ элемент из $S(\mu)$, определяемый измеримой функцией $t \to \|f(t)\|_q$, $t \in Q$. Пусть E — идеал в $S(\mu)$, и положим

$$E(\mathscr{X}) := \{f \in S(\mu, \mathscr{X}): |f| \in E\}.$$

Тем самым получаем ПБК $(E(\mathscr{X}), |\cdot|)$. Если E — банахова решетка, то $(E(\mathscr{X}), E)$ — банахово пространство со смешанной нормой.

Если $X_q = X$ для всех $q \in Q$, то $E(\mathscr{X})$ совпадает с $E(X)$ из § 4. Известно, что для многих свойств $\mathscr{P}$ банаховых пространств верно утверждение (см. [44])

$$E(X) \in (\mathscr{P}) \Leftrightarrow E \in (\mathscr{P}) \,\&\, X \in (\mathscr{P}).$$

А что можно сказать о пространстве $E(\mathscr{X})$?

Проблема 22. *Изучить структуру пространства $E(\mathscr{X})$, где $\mathscr{X}$ — банахово расслоение. В частности, что означает $E(\mathscr{X}) \in (\mathscr{P})$, если $\mathscr{P}$ — это свойство рефлексивности, или Радона — Никодима, или Крейна — Мильмана и т. д.?*

В [45] рассматривается понятие интегрального оператора в лебеговых пространствах измеримых векторных полей. Эти определения без труда переносятся на случай пространств $E(\mathscr{X})$.

Проблема 23. *Выяснить условия интегральной представимости линейных операторов в пространствах измеримых векторных полей. Исследовать свойства таких операторов* (в духе [32, 46—48]).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Кусраев А. Г., Стрижевский В. З.** Решеточно нормированные пространства и мажорированные операторы // Исследования по геометрии и анализу.— Новосибирск: Наука, 1987.— С. 132—158.
2. **Кусраев А. Г.** Векторная двойственность и ее приложения.— Новосибирск: Наука, 1985.
3. **Luxemburg W. J. A.** // Math. Reviews.— 1979.— V. 57, N 6.— P. 2302.— (MR ≠ 17378).
4. **Aliprantis C. D., Burkinshaw O.** On positive order continuous operators // Indag. Math.— 1983.— V. 45, N 1.— P. 1—6.
5. **Luxemburg W. A. J., Schep A. R.** A Radon — Nikodym type theorem for positive operators and a dual // Indag. Math.— 1978.— V. 40, N 3.— P. 357—375.
6. **Кутателадзе С. С.** Опорные множества сублинейных операторов // Докл. АН СССР.— 1976.— Т. 230, № 5.— С. 1029—1032.
7. **Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.** Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
8. **Канторович Л. В., Акилов Г. П.** Функциональный анализ.— М.: Наука, 1978.
9. **Данфорд Н., Шварц Дж.** Линейные операторы. Общая теория.— М.: Изд-во иностр. лит, 1962.
10. **Кусраев А. Г.** Общие формулы дезинтегрирования // Докл. АН СССР.— 1982.— Т. 265, № 6.— С. 1312—1316.
11. **Abramovich Yu. A.** Multiplicative representstion of disjointness preserving operators // Indag. Math.— 1983.— V. 45, N 3.— P. 265—279.
12. **Шотаев Г. Н.** О билинейных операторах в решеточно нормированных пространствах // Оптимизация.— 1986.— Вып. 37.— С. 38—50.
13. **Бухвалов А. В.** Об интегральном представлении линейных операторов // Зап. науч. семинар. ЛОМИ.— 1974.— Т. 17.— С. 5—14.
14. **Бухвалов А. В.** Приложения методов теории порядково ограниченных операторов к теории операторов в пространствах L^p // Успехи мат. наук.— 1983.— Т. 38, вып. 6.— С. 37—83.
15. **Лозановский Г. Я.** О почти интегральных операторах в KB-пространствах // Вестн. ЛГУ. Сер. математика, механика и астрономия.— 1966.— № 7.— С. 35—44.
16. **Бухвалов А. В.** Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой // Изв. вузов. Математика.— 1975.— № 11.— С. 21—32.
17. **Наводнов В. Г.** Об интегральном представлении операторов, действующих из банахова пространства измеримых вектор-функций в банахово пространство // Изв. вузов. Математика.— 1983.— № 3.— С. 82—84.
18. **Dinculeanu N.** Vector measures.— Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1966.
19. **Ando T.** Banachverbände und positive Projektionen // Math. Z.— 1969.— Bd 109.— S. 121—130.
20. **Schaefer H. H.** Banach lattice and positive operators.— Berlin a. o.: Springer, 1974.

21. **Bohnenblust H. F.** An axiomatic characterization of L_p-spaces // Duke Math. J.— 1940.— V. 6.— P. 627—640.
22. **Badé W. G.** A multiplicity theory for Boolean algebras of projections in Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc.— 1958.— V. 92.— P. 508—530.
23. **Векслер А. И.** Банаховы циклические пространства и банаховы структуры // Докл. АН СССР.— 1973.— Т. 213, № 4.— С. 770—773.
24. **Пич А.** Операторные идеалы.— М.: Мир, 1982.
25. **Schwarz H.— U.** Banach lattices and operators.— Leipzig: Teubner, 1982.
26. **Diestel J., Uhl J. J.** Vector measures.— Providence: Amer. Math. Soc., 1977.— 322 p.— (Mathematical survays; V. 15).
27. **Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.** Об операторах, сохраняющих дизъюнктивность // Докл. АН СССР.— 1979.— Т. 248, № 5.— С. 1033—1036.
28. **Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.** Операторы, сохраняющие дизъюнктивность, их непрерывность и мультипликативное представление // Линейные операторы и их приложения.— Л., 1981.— С. 13—34.
29. **Акилов Г. П., Кутателадзе С. С.** Упорядоченные векторные пространства.— Новосибирск: Наука, 1978.
30. **Кутателадзе С. С.** Теорема Крейна — Мильмана и ее обращение // Сиб. мат. журн.— 1980.— Т. 21, № 1.— С. 130—138.
31. **Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.** Riesz spaces. V. I.— Amsterdam — London: North Holland, 1971.
32. **Zaanen A. C.** Riesz spaces. V. II.— Amsterdam a. o.: North Holland, 1983.
33. **Hofman K. H., Keimel K.** Sheaf theoretical concepts in analysis: bundles and sheaves of Banach spaces, Banach C(X)-modules // Applications of sheaves: Proc./Res. Symp. Durham, July, 1977.— Berlin a. o., 1979.— P. 415—441.
34. **Semadeni Zb.** Banach spaces of continuous functions.— Warszawa: Polish Scientific Publishers, 1971.
35. **Dodds P. G., Fremlin D. H.** Compact operators in Banach lattices // Isr. J. Math.— 1979.— V. 34, N 4.— P. 287—320.
36. **Aliprantis C. D., Burkinshaw O.** Positive compact operators on Banach lattices // Math. Z.— 1980.— Bd 194, N 3.— S. 289—298.
37. **Kevin T. A.** Representation of compact and weakly compact operators on the space of Bochner integrable functions // Pacif. J. Math.— 1981.— V. 92, N 2.— P. 257—267.
38. **Linidenstrauss J., Tzafriri L.** Classical Banach spaces.— Berlin a. o.: Springer, 1973.— 243 p.— (Lecture Notes in Mathematics; V. 338).
39. **Lindenstrauss J., Tzafriri L.** Classical Banach spaces. V. I. Sequence spaces.— Berlin a. o.: Springer, 1977.
40. **Lindenstrauss J., Tzafriri L.** Classical Banach spaces. V. II. Function spaces.— Berlin a. o.: Springer, 1979.
41. **Lacey E. H.** The isometric theory of classical Banach spaces.— Berlin a. o.: Springer, 1974.
42. **Бурбаки Н.** Интегрирование. Меры, интегрирование мер.— М.: Наука, 1967.
43. **Gierz G.** Bundles of topological vector spaces and their duality.— Berlin a. o.: Springer, 1982.— 296 p.— (Lecture Notes in Mathematics; V. 955).
44. **Бухвалов А. В.** Интегральные операторы и пространства измеримых векторнозначных функций: Автореф. дис... док. физ.-мат. наук: 01.01.01.— Л., 1984.— 26 с.
45. **Schochetman I. E.** Kernels and integral operators for continuous sums of Banach spaces.— Providence: Amer. Math. Soc., 1978.— 120 p.— (Mem. Amer. Math. Soc.; N 202).
46. **Коротков В. Б.** Интегральные операторы.— Новосибирск: Наука, 1983.
47. **Интегральные** операторы в пространствах суммируемых функций/М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустыльник, П. Е. Соболевский.— М.: Наука, 1966.
48. **Halmos P. R., Sunder V. S.** Bounded integral operators on on L^2-spaces.— Berlin a. o.: Springer, 1978.

ИНФИНИТЕЗИМАЛИ И ИСЧИСЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ

В современных вопросах негладкого анализа, мотивированных теорией экстремальных задач, ведущие роли играют геометрические соображения о конструировании удобных приближений к произвольному множеству. Контингенция, гиперкасательные направления, конусы Адамара, Кларка и Булигана — вот далеко не полный перечень используемых аппроксимаций. Аппарат оперирования с названными конусами в течение последнего десятилетия существенно развит работами Ш. Долецкого, А. Д. Иоффе, Ф. Кларка, А. Г. Кусраева, Р. Т. Рокафеллара, Ж.-Б. Хириарт-Уррути, Ж.-П. Обэна, Ж.-П. Пено, Л. Тибольта и др. (см. [1—5] и приведенную там библиографию). Стоит подчеркнуть, что возникаю-