ПОЧТИ ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

А. Д. МИЛКА

В работе рассматриваются замкнутые выпуклые многогранники с равноугольными гранями и выпуклые многогранники с равноугольными вершинами в трехмерном сферическом пространстве. Мы называем их *почти правильными*, так как они являются естественным обобщением правильных многогранников. Классы этих многогранников двойственны и переводятся один в другой с помощью полярного преобразования. Под *сферическим пространством* понимается сфера единичного радиуса в четырехмерном евклидовом пространстве. Главная цель работы — доказательство теорем о конечности (с точностью до комбинаторной эквивалентности) числа многогранников в каждом из введенных классов. Эти теоремы обосновывают постановку новой задачи — о нахождении полного перечня почти правильных выпуклых многогранников в сферическом пространстве.

Подобные многогранники в трехмерном евклидовом пространстве уже изучались. Джонсон в [1] анонсировал теорему о конечности числа многогранников с правильными гранями. Частные свойства таких многогранников исследовались им совместно с Грюнбаумом в [2]; в [3] Джонсоном приведен без доказательства предположительно полный перечень этих многогранников. Законченные результаты здесь были получены В. А. Залгаллером и учениками — были доказаны теоремы о конечности числа многогранников, об их общих свойствах, о полноте перечня Джонсона для правильногранных многогранников [4—7]. Эти результаты дополнялись Б. А. Ивановым [8] и Ю. А. Пряхиным [9], которые рассмотрели многогранники с условными ребрами; Ю. А. Пряхиным также была установлена теорема о конечности для выпуклых многогранников с равноугольными и паркетными гранями, обобщающими правильногранные [10]. В 1975 г. автором был выделен новый класс выпуклых многогранников — с равноугольными вершинами, двойственный многогранникам с равноугольными гранями, и была сформулирована теорема о конечности числа многогранников в этом классе. Изучение этих многогранников — доказательство теоремы о конечности, нахождение полного перечня — было проведено в ряде работ, опубликованных в «Украинском геометрическом сборнике» аспирантом автора А. М. Гуриным (см. [11], первую в серии соответствующих публикаций за 1980—1986 гг.).

Предлагаемые нами доказательства теорем о конечности — они содержатся в § 1, 2 — полностью применимы и к многогранникам в евклидовом пространстве; для этого случая они являются новыми и более простыми. В § 3 в сферическом пространстве рассматриваются вырожденные почти правильные многогранники, представляющие замещения двумерной сферы, и устанавливается их связь с почти правильными евклидовскими многогранниками. Эта связь показывает, что задача об исследовании таких многогранников в евклидовом пространстве включается в общую задачу об изучении почти правильных многогранников в сферическом пространстве.

§ 1. Равноугольные грани

Мы рассматриваем в трехмерном евклидовом пространстве замкнутый выпуклый многогранник, у которого все плоские углы у каждой грани равные, а плоские углы у разных граней не предполагаются одинаковыми. Такой многогранник будем называть *многогранником с равноугольными гранями*. Будем считать различными те многогранники, у которых комбинаторно не эквивалентные сети ребер.

Лемма 1. *Вершина выпуклого многогранника с равноугольными гранями по составу сходящихся в этой вершине граней может относить-*

ся только к одному из типов, перечисленных в табл. 1.

В этой таблице, например, символ 3.3.4.n означает, что в вершине последовательно сходятся две треугольные, четырехугольная и n-угольная грани, врешина t четырехгранная, а выражение 4—11 справа от этого символа — что n может принимать любые значения от 4 до 11 включительно.

Доказательство. Пусть P — рассматриваемый многогранник, Q — любая вершина P, μ — какая-нибудь грань этого многогранника с вершиной Q. Будем обозначать ω кривизну P в вершине Q; если вершина q-гранная, будем применять также обозначения ω_q. Для кривизны (или площади) грани μ будем использовать обозначение Ω (или Ω_m), если грань m-угольная.

Таблица 1

3.3.n	3—∞	3.11.n	11—13	3.3.4.n	4—11
3.4.n	4—∞	4.4.n	4—∞	3.3.5.n	5—7
3.5.n	5—∞	4.5.n	5—19	3.4.3.n	4—11
3.6.n	6—∞	4.6.n	6—11	3.4.4.4	—
3.7.n	7—41	4.7.n	7—9	3.4.4.5	—
3.8.n	8—23	5.5.n	5—9	3.4.5.4	—
3.9.n	9—17	5.6.n	6—7	3.5.3.n	5—7
3.10.n	10—14	3.3.3.n	3—∞	3.3.3.3.n	3—5

Если α — плоский угол грани μ, то по формуле Гаусса — Бонне $m(\pi-\alpha)+\Omega_m=2\pi$. Поэтому если вершина Q трехгранная и в ней сходятся последовательно m-, s- и n-угольная грани, то

$$\frac{2\pi}{m}+\frac{2\pi}{s}+\frac{2\pi}{n}-\pi=\frac{\Omega_m}{m}+\frac{\Omega_s}{s}+\frac{\Omega_n}{n}+\omega,$$

а для q-гранной вершины Q соответственно

$$\underbrace{\frac{2\pi}{m}+\frac{2\pi}{s}+\ldots+\frac{2\pi}{n}}_{q\ \text{слагаемых}}-(q-2)\pi=\omega_q+\underbrace{\frac{\Omega_m}{m}+\frac{\Omega_s}{s}+\ldots+\frac{\Omega_n}{n}}_{q\ \text{слагаемых}}. \quad (*)$$

Правую часть в равенстве (*) назовем *приведенной кривизной многогранника P в вершине Q*. Приведенная кривизна вершины положительна. Поэтому так как в левой части (*) числа m, s, ..., n не меньше, чем 3, получаем $q<6$. Таким образом, многогранник P имеет только 3-, 4- или 5-гранные вершины. Определяя теперь все целочисленные наборы m, s, ..., n и q, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{2}{m}+\frac{2}{s}+\ldots+\frac{2}{n}-(q-2)>0,$$

находим возможные типы вершин выпуклого многогранника с равноугольными гранями. Все эти типы и представлены в табл. 1. Лемма доказана.

На основании теоремы Гаусса — Александрова (обобщенной теоремы Гаусса [12]) сумма приведенных кривизн вершин конкретного многогранника равна 4π.

Многогранник с равноугольными гранями назовем *неособым*, если у него нет вершин типов, представленных в табл. 2. Приведенная кривизна в каждой вершине любого такого многогранника, как вытекает из формулы (*) и табл. 1, отделена от нуля некоторой постоянной $c>0$, не зависящей от выбора многогранника. Поэтому всего у неособого многогранника не более чем $4\pi/c$ вершины. Известно, что существует лишь ограниченный набор топологически различных сетей ребер замкнутых выпуклых многогранников, число верщин у которых не превосходит фиксированной константы. Отсюда вытекает, что в сферическом пространстве имеется только конечное число различных (т. е. комбинаторно различных) неособых выпуклых многогранников с равноугольными гранями. Можно заметить, что этот же результат справедлив и для более широкого подкласса многогранников — не содержащих вершин типов из второго столбца табл. 2. Оказывается, справедливо следующее общее утверждение.

Теорема 1. *В трехмерном сферическом пространстве существует (кроме двух бесконечных серий — призм и скошенных призм) только конечное число различных выпуклых многогранников с равноугольными гранями.*

Таблица 2

3.3.n 3.4.n 3.5.n	3—∞ 4—∞ 5—∞	3.6.n 4.4.n 3.3.3.n	6—∞ 4—∞ 3—∞

Доказательство. Пусть P — один из рассматриваемых многогранников. Предположим, что у него имеются грани с более чем 41 вершиной. Выясним, сколько у многогранника P может существовать таких, будем говорить, особых граней.

В соответствии с табл. 1, вершина любой особой грани может относиться лишь к одному из типов, перечисленных в табл. 2. Приведенная кривизна такой вершины, если грань n-угольная, равна $\tilde{\omega} = 2\pi/n + \delta$ ($\delta \geqslant 0$). Важно, что здесь $\delta > 0$ для вершины типа из первого столбца и $\delta = 0$ для вершины типа из второго столбца табл. 2.

Пусть μ — особая n-угольная грань P. Сумма приведенных кривизн всех вершин многогранника, принадлежащих грани μ, равна $\sum \tilde{\omega} = 2\pi + \sum \delta$. Из табл. 1 получаем, что две особые грани многогранника, если они вообще имеются, не содержат общей вершины, а сумма приведенных кривизн всех вершин P равна 4π. Значит, так как $\sum \delta \geqslant 0$, у многогранника P не более двух особых граней.

Если особых граней две, то каждое из соответствующих их вершинам чисел δ, входящих в выражения для приведенных кривизн, равно нулю, а каждая из всех вершин P принадлежит обязательно одной из этих особых граней. Следовательно, у многогранника P вершины одного и того же типа — 4.4.n или 3.3.3.n. В первом случае P — призма, во втором — скошенная призма.

Пусть у многогранника P только одна грань особая. Вершины многогранника, не принадлежащие этой грани (назовем их *неособыми*), относятся только к одному из типов, не входящих в табл. 2. Приведенные кривизны в неособых вершинах не меньше, чем c. Значит, у многогранника P не более чем $2\pi/c$ неособых вершин. Из каждой неособой вершины исходит, максимум, пять ребер многогранника, каждая из вершин особой грани соединена ребром хотя бы с одной неособой вершиной; значит, число вершин особой грани — не более $10\pi/c$. Следовательно, общее число вершин P не превышает $12\pi/c$, и в трехмерном сферическом пространстве имеется только конечное число различных выпуклых многогранников с равноугольными гранями с одной особой гранью.

Ранее уже была установлена конечность числа рассматриваемого класса многогранников, не содержащих особых граней — неособых многогранников. Это замечание и завершает доказательство теоремы.

§ 2. Равноугольные вершины

Замкнутый выпуклый многогранник в трехмерном сферическом пространстве будем называть *многогранником с равноугольными вершинами*, если для каждой его вершины все плоские углы сходящихся в этой вершине граней равные; плоские углы у разных вершин многогранника при этом не предполагаются одинаковыми. Многогранники считаем различными, если у них комбинаторно неэквивалентные сети ребер. Стоит подчеркнуть, что введенное определение равноугольности вершины — внутренне геометрическое.

С помощью полярного преобразования в сферическом пространстве выпуклый многогранник с равноугольными вершинами переводится в выпуклый многогранник с равноугольными гранями, и обратно. Таким образом, задачи изучения каждого из рассматриваемых класссов многогранников эквивалентны. В частности, теорема о конечности числа комбинаторно различных выпуклых многогранников с равноугольными вершинами в трехмерном сферическом пространстве является простым следствием теоремы 1.

Теорема 2. *В трехмерном сферическом пространстве существует (кроме двух бесконечных серий — бипирамид и скошенных бипирамид) только конечное число различных выпуклых многогранников с равноугольными вершинами.*

Можно дать и независимое доказательство этой теоремы. Оно повторяет в двойственном плане рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы 1, и имеет значение при исследовании предельных случаев — вырожденных многогранников и многогранников в евклидовом пространстве, когда нет места реальной двойственности. Целесообразно изложить принципиальную часть этого независимого доказательства.

Нам понадобится снова табл. 1, рассматриваемая теперь как таблица возможных типов граней. В этой, читаемой по-иному таблице, например, символ «$3.3.4.n$» означает, что к данной грани последовательно примыкают две трехгранные, четырехгранная и n-гранная вершины, грань — четырехугольная, а n, как и прежде, может принимать любые значения от 4 до 11 включительно.

Лемма 2. *Грань выпуклого многогранника с равноугольными вершинами по составу примыкающих к этой грани вершин может относиться только к одному из типов, перечисленных в табл.* 1.

Доказательство. Пусть P — рассматриваемый многогранник, μ — любая грань P, Q — какая-нибудь вершина этой грани. Если α — плоский угол в вершине Q, а вершина Q — m-гранная, то для кривизны многогранника в этой вершине имеем $\omega_m = 2\pi - m\alpha$. Отсюда, из формулы Гаусса — Бонне, если грань μ треугольная и к ней последовательно примыкают m-, s- и n-гранная вершины, для кривизны грани получаем

$$\frac{3\pi}{m} + \frac{2\pi}{s} + \frac{2\pi}{n} - \pi = \frac{\omega_m}{m} + \frac{\omega_s}{s} + \frac{\omega_n}{n} + \Omega,$$

а для q-угольной грани —

$$\frac{2\pi}{m} + \frac{2\pi}{s} + \ldots + \frac{2\pi}{n} - (q-2)\pi = \Omega_q + \frac{\omega_m}{m} + \frac{\omega_s}{s} + \ldots + \frac{\omega_n}{n}. \quad (*)$$

Правую часть в равенстве (*) назовем *приведенной кривизной многогранника в грани* μ. Приведенная кривизна грани положительная. Отсюда, и так как в левой части (*) каждое из чисел $m, s, \ldots, n$ не менее 3, получаем $q < 6$. Таким образом, многогранник P имеет только 3-, 4- или 5-угольные грани. Определяя теперь все целочисленные наборы $m, s, \ldots, n$ и q, удовлетворяющие неравенству

$$\frac{2}{m} + \frac{2}{s} + \ldots + \frac{2}{n} - (q-2) > 0,$$

находим возможные типы граней выпуклого многогранника с равноугольными вершинами. Все эти типы и представлены в табл. 1. Лемма доказана.

На основании теоремы Гаусса — Александрова сумма приведенных кривизн граней конкретного многогранника равна 4π. С помощью этого факта и леммы 2 и дается независимое доказательство теоремы 2. В процессе доказательства, в частности, устанавливается, что у рассматриваемого класса многогранника максимум две особые, т. е. с более чем 41 гранью, вершины. Если особых вершин две, то многогранник — бипирамида или скошенная бипирамида. Все остальные многогранники с равноугольными вершинами имеют ограниченное, не превосходящее некоторой асболютной постоянной, число граней: $\leqslant 12\pi/c$.

Замечание. Очевидно, теоремы 1 и 2 вместе с их изложенными двойственными доказательствами распространяются и на классы замкнутых выпуклых многогранников с равноугольными гранями и с равноугольными вершинами в трехмерном евклидовом пространстве. Здесь представляют интерес собственно новые, и более простые, доказательства теорем, поскольку, как уже отмечалось, сами результаты хорошо известны. Небезынтересна и формальная двойственность между этими доказательствами, дополняющая двойственность определений классов. Можно принять, что рассматриваемые классы многогранников — и для сферического, и для евклидова пространства — включают также многогранники с условными ребрами; для так расширенных классов многогранников теоремы 1 и 2 вместе с их двойственными доказательствами остаются справедливыми.

§ 3. Сети на двумерной сфере

В этом параграфе мы рассматриваем замощения двумерной единичной сферы выпуклыми многоугольниками, примыкающими по целым сторонам, сходные с замощениями евклидовой плоскости. Считаем, в частности, что для конкретного замощения среди многоугольников нет двуугольников и что в каждой вершине замощения любой плоский угол меньше суммы остальных плоских углов. *Сетью на сфере* будем называть сеть из вершин и ребер какого-нибудь ее замощения. Сетью на сфере является, например, объединение сферических изображений открытых граней и открытых ребер замкнутого выпуклого многогранника (без условных ребер) в евклидовом пространстве — ее мы назовем *полярной сетью* данного многогранника. Замощение думерной сферы можно интерпретировать в трехмерном сферическом пространстве как выпуклый вырожденный многогранник, в связи с чем нет необходимости в специальном определении почти правильных сетей на сфере — с равноугольными вершинами или с равноугольными гранями. Ясно, что выпуклые многогранники с равноугольными гранями или с равноугольными вершинами имеют своими полярными образами соответственно эти сети. Естественна постановка задачи об изучении почти правильных сетей на двумерной сфере.

Теорема 3. *На двумерной сфере существует (кроме двух бесконечных серий — типа призм и скошенных призм) только конечное число различных сетей с равноугольными гранями; существует (кроме двух бесконечных серий — типа бипирамид и скошенных бипирамид) только конечное число различных сетей с равноугольными вершинами.*

Этот результат на самом деле уже получен при доказательстве теорем 1 и 2. Он представляет еще одно подтверждение теорем о конечности числа выпуклых многогранников с равноугольными гранями или с равноугольными вершинами в евклидовом пространстве.

Таким образом, вопрос об исследовании почти правильных выпуклых многогранников в трехмерном евклидовом пространстве тесно увязывается с вопросом об исследовании почти правильных сетей на двумерной сфере. Приведем в заключение результаты для сетей с равноугольными вершинами. В этом случае задача об изучении сетей решается особенно просто; для сетей с равноугольными гранями требуются еще дополнительные исследования.

Теорема 4. *Каждая сеть на сфере с равноугольными вершинами является полярной для некоторого правильногранного многогранника. Каждый выпуклый многогранник с равноугольными гранями или правильногранный, или получается из правильногранного с сохранением комбинаторного строения параллельными сдвигами граней.*

Первое утверждение здесь очевидно, второе — следствие первого.

Теорема 5. *Сеть на сфере с равноугольными вершинами определяется комбинаторным строением однозначно с точностью до движения. На сфере существует (кроме бесконечных серий типа бипирамид или скошенных бипирамид) в точности* 108 *таких сетей, причем с известными численными параметрами и комбинаторным строением.*

Первое утверждение этой теоремы устанавливается с помощью результата Коши о расстановках знаков в сетях на сфере [13]. Второе вытекает из теоремы 4 и теоремы В. А. Залгаллера о полноте перечня правильногранных многогранников [7].

В связи с последними двумя теоремами представляет (по крайней мере методический) интерес обратная задача: найти независимо все сети на сфере с равноугольными вершинами и по ним определить все замкнутые выпуклые многогранники в евклидовом пространстве с равноугольными гранями. Самостоятельное изучение таких сетей облегчается их некоторыми характерными локальными свойствами, аналогичными свойствам правильногранных многогранников, которые устанавливались В. А. Залгаллером [7]. Приведем соответствующие результаты без доказательства.

Возможные типы граней сети на сфере с равноугольными вершинами уточняются в табл. 3. Сеть с равноугольными вершинами не может иметь грани типа 3.6.n ($n \geqslant 12$). Сеть, содержащая грань типа 4.4.n ($n \geqslant 30$), имеет комбинаторное строение бипирамиды; сеть, содержащая грань типа 3.3.3.n ($n \geqslant 42$), имеет комбинаторное строение скошенной бипирамиды.

Таблица 3

3.3.n	3—5
3.4.n	4—11
3.5.n	5—23

Напомним, что в рассматриваемом случае возможные типы граней сети даются табл. 1. Оказывается, что в части этой таблицы, первом столбце табл. 2, можно определить границы n. Действительно, углы любой треугольной грани сети на сфере удовлетворяют неравенству треугольника $\pi-\alpha+\pi-\beta>\pi-\gamma$. Отсюда, если у этой грани последовательно — m-, s- и n-гранная вершины, то

$$\frac{2\pi}{m}+\frac{2\pi}{s}-\frac{2\pi}{n}-\pi<0.$$

С помощью этого неравенства и составляется табл. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Johnson N. W.** Convex polyhedra with regular faces // Mimeographed notes, Carleton College, January 1961 (abstract 576—157), Notices Amer. Math. Soc., 1960, 7, 952.
2. **Grünbaum B., Johnson N. W.** The faces of a regular-faced polyhedron // J. London Math. Soc.— 1965.— V. 40, N 4.— P. 577—586.
3. **Johnson N. W.** Convex polyhedra with regular faces // Canad. J. Math.— 1966.— V. 18, N 1.— P. 169—200.
4. **Залгаллер В. А.** Правильные многогранники // Вестн. Ленингр. ун-та, 1963.— № 7.— С. 5—8.
5. **Залгаллер В. А. и др.** О правильных многогранниках // Вестн. Ленингр. ун-та.— 1965.— № 1.— С. 150—152.
6. **Залгаллер В. А.** Перечень всех выпуклых многогранников с правильными гранями // Междунар. конгр. математиков.— М., 1966.— С. 28—29.— (Тезисы).
7. **Залгаллер В. А.** Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.— 1966.— № 2.— 220 с.
8. **Иванов Б. А.** Многогранники с гранями, сложенными из правильных многоугольников // Укр. геометр. сб.— 1971.— Т. 10— С. 20—34.
9. **Пряхин Ю. А.** О выпуклых многогранниках с правильными гранями // Укр. геометр. сб.— 1973.— Т. 14.— С. 83—88.
10. **Пряхин Ю. А.** Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных // Зап. науч. семинаров ЛОМИ.— 1974.— Т. 45.— С. 111—112.
11. **Гурин А. М.** О выпуклых многогранниках с равноугольными вершинами // Укр. геометр. сб.— 1980.— Т. 23.— С. 34—41.
12. **Александров А. Д.** Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
13. **Александров А. Д.** Выпуклые многогранники.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.