ЗАМКНУТЫЕ ВЫПУКЛЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ С ЗАДАННОЙ УСЛОВНОЙ КРИВИЗНОЙ

А. В. ПОГОРЕЛОВ

Обычной *кривизной выпуклой гиперповерхности на множестве* M называется площадь (мера) сферического изображения гиперповерхности на множестве M. *Обобщенной* или *условной кривизной гиперповерхности на множестве* M называется величина

$$\Omega(M) = \int\limits_{M^*} \theta(n, x(n))\, d\omega,$$

где n — единичный вектор, $x(n)$ — точка гиперповерхности с внешней нормалью n, θ — положительная непрерывная функция, а интегрирование выполняется по мере сферического изображения множества M. Обычная кривизна гиперповерхности получается при $\theta \equiv 1$. Возможная неоднозначность в определении $x(n)$, как функции n, не имеет значения, так как множество таких n имеет меру, равную нулю.

Пусть начало координат O находится внутри замкнутой выпуклой гиперповерхности F, т. е. O является внутренней точкой выпуклого тела, ограниченного гиперповерхностью F. Определим на единичной сфере S с центром в точке O функцию множеств μ, полагая для произвольного борелевского множества $m \subset S$ значение $\mu(m)$ равным условной кривизне гиперповерхности на множестве точек, которое из центра сферы проектируется на множество m. Мы будем рассматривать следующую задачу: при каких условиях для заданной на сфере S вполне аддитивной функции μ существует замкнутая выпуклая гиперповерхность F, которая на произвольном борелевском множестве точек гиперповерхности имеет условную кривизну, равную значению функции μ на проекции этого множества? Кроме того, мы рассмотрим такой вопрос: в какой мере эта замкнутая гиперповерхность определяется условной кривизной? Для двумерных поверхностей и обычной кривизны ($\theta \equiv 1$) эта задача решена А. Д. Александровым [1], а для обобщенной кривизны ($\theta = \theta(n, x)$) — автором [2].

§ 1. Замкнутая многогранная выпуклая гиперповерхность с заданной условной кривизной в вершинах

Теорема 1. *Пусть для функции* $\theta(n, x)$, *определяющей условную кривизну, выполняется условие* $\theta(n, x) \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$. *Пусть* $A_1, \ldots, A_r$ — *конечное множество точек на единичной сфере* S *с центром* O, *не лежащее на одной полусфере. Пусть, наконец,* $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — *положительные числа такие, что*

1) $\sum\limits_{(i)} \mu_i > \int\limits_S \theta(n, o)\, dS$;

2) *для любого многогранного угла с вершиной* O, *может быть вырождающегося,*

$$\sum_{A_i \subset S \setminus V} \mu_i > \int\limits_{V^*} \theta(n, o)\, dS,$$

где суммирование выполняется по тем номерам i, *для которых точки* A_i *лежат вне угла* V, *а интегрирование — по площади сферического изображения конуса* V.

Тогда существует замкнутая выпуклая многогранная гиперповерхность F, *содержащая точку* O *внутри, такая, что ее вершины проектируются на единичную сферу* S *в точки* A_i *и условные кривизны в этих вершинах равны заданным числам* μ_i.

Доказательство. Построим выпуклую оболочку множества точек A_i. Это будет выпуклый многогранник с вершинами A_i. Подвергнем его преобразованию подобия с коэффициентом подобия k. Получим подобный многогранник. Так как $\theta(n, x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$, то при достаточно большом k у этого многогранника условные кривизны будут больше заданных чисел μ_i. Пусть F_0 — поверхность этого многогранника.

Обозначим через Ω множество многогранных замкнутых выпуклых гиперповерхностей, содержащихся внутри гиперповерхности F_0, и таких, что их вершины проектируются на единичную сферу S в заданные точки A_i и условные кривизны в этих вершинах не меньше заданных чисел μ_i. Множество Ω непусто: ему принадлежит гиперповерхность F_0. Утверждается, что при достаточно малом $1/k$ вершины любой гиперповерхности из Ω лежат вне шара радиуса $1/k$ с центром в точке O.

Допустим, утверждение неверно. Тогда при любом $k = 1, 2, \ldots$ среди многогранных гиперповерхностей из Ω найдется такая гиперповерхность F_k, у которой некоторые вершины лежат в шаре радиуса $1/k$. Прежде всего заметим, что при достаточно большом k все вершины гиперповерхности F_k не могут быть в шаре радиуса $1/k$. Действительно, так как условные кривизны в вершинах гиперповерхности F_k не меньше заданных чисел μ_i, то полная кривизна этой гиперповерхности не меньше суммы этих чисел:

$$\int\limits_{F_k^*} \theta(n, x)\, d\omega > \sum_i \mu_i.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\int\limits_S \theta(n, o)\, dS > \sum_i \mu_i.$$

что противоречит условию теоремы.

Обозначим через A_i^k — вершины гиперповерхности F_k. Не ограничивая общности, можно считать, что точки A_i^k при $k \to \infty$ сходятся к некоторым точкам B_i. По крайней мере одной из них является точка O. Выпуклая оболочка точек B_i представляет собой выпуклый многогранник с вершинами B_i, может быть вырождающийся (по размерности). Пусть V — многогранный угол этого многогранника с вершиной O (рис. 1). Имеем

$$\sum_i{}' \int\limits_{A_i^{k*}} \theta(n, x)\, d\omega > \sum_i{}' \mu_i.$$

где суммирование выполняется по тем номерам i, для которых точки A_i лежат вне угла V. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\int\limits_{V*} \theta(n, o)\, dS > \sum_{A_i \subset S \setminus V}{}' \mu_i,$$

что противоречит условию теоремы. Итак, все вершины гиперповерхностей из Ω лежат вне шара радиуса ε с центром в точке O, если ε достаточно мало.

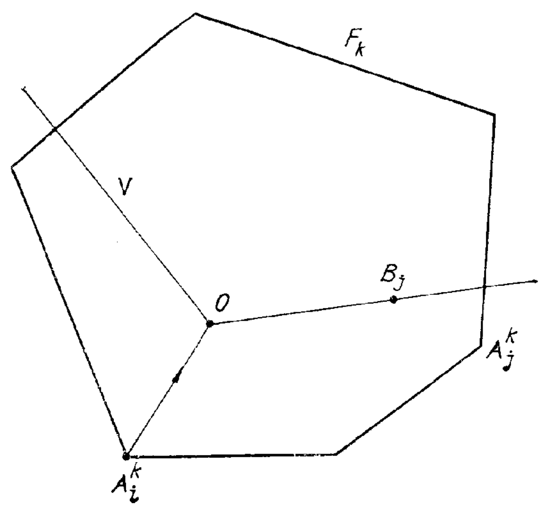

Рис. 1.

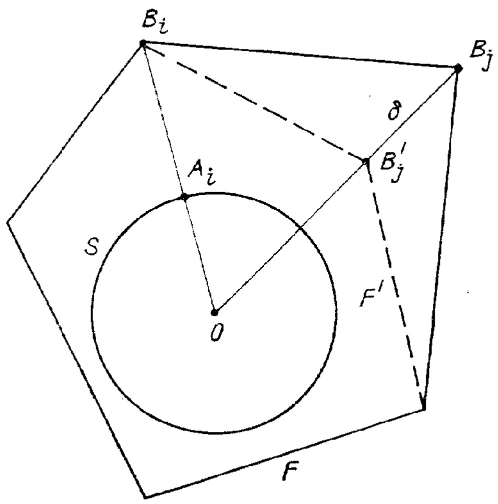

Рис. 2.

Определим на множестве многогранных гиперповерхностей из Ω функцию h, полагая $h(F)$ равным сумме расстояний от точки O до вершин гиперповерхности F. Пусть m — точная нижняя грань значений функции h на гиперповерхностях из Ω. Тогда существует последовательность гиперповерхностей $F_k \subset \Omega$ таких, что $h(F_k) \to m$ при $k \to \infty$. Не ограничивая общности, можно считать, что последовательность гиперповерхностей F_k сходится к некоторой гиперповерхности F. Очевидно, F принадлежит Ω и $h(F) = m$. Пусть B_i — вершина гиперповерхности F, которая проектируется в точку A_i на единичной сфере S. Утверждается, что условные кривизны гиперповерхности F в вершине B_i равны μ_i, $i = 1, \ldots, r$.

Допустим, в некоторой вершине B_j условная кривизна больше μ_j (меньше она быть не может, так как $F \in \Omega$). Сместим вершину B_j на малое расстояние δ в направлении к точке O и в этом положении обозначим ее B_j' (рис. 2). Построим выпуклую оболочку точек B_i, $i \neq j$, и точки B_j'. При достаточно малом δ это будет выпуклый многогранник с вершинами B_i, $i \neq j$ и B_j'. Пусть F' — гиперповерхность, ограничивающая этот многогранник. Условные кривизны гиперповерхности F' в вершинах B_i, $i \neq j$, не меньше, чем условные кривизны в тех же вершинах гиперповерхности F, а условная кривизна в вершине B_j' гиперповерхности F' мало отличается от условной кривизны в вершине B_j гиперповерхности F, если δ достаточно мало. Отсюда следует, что гиперповерхность F' принадлежит Ω. Однако $h(F') = h(F) - \delta < m$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть функция $\theta(n, x)$, определяющая условную кривизну, является возрастающей функцией любого луча, исходящего из начала координат O. Тогда замкнутая многогранная выпуклая гиперповерхность, содержащая внутри точку O, определяется однозначно проекциями вершин на единичную сферу с центром O и условными кривизнами в вершинах.*

Доказательство. Допустим утверждение теоремы неверно. Тогда существуют две замкнутые выпуклые многогранные гиперповерхности F' и F'' с вершинами A_i' и A_i'', причем вершины A_i' и A_i'' имеют одну и ту же проекцию на единичную сферу с центром O, и условные кривизны в этих вершинах равны. Не ограничивая общности, можно считать, что для некоторой пары соответствующих вершин A_j' и A_j'' справедливо неравенство $OA_j'' < OA_j'$. Обозначим $\max\limits_i OA_i'/OA_i'' = k$. Подвергнем гиперповерхность F'' преобразованию подобия относительно центра O с коэффициентом подобия k. При этом получится гиперповерхность F''', которая содержит гиперповерхность F' и контактирует с ней по крайней мере в одной точке, например A_j (рис. 3). Ввиду возрастания функции $\theta(n, x)$ по лучу OA_j' условная кривизна гиперповерхности F''' в вершине A_j' больше, чем условная кривизна гиперповерхности F'' в вершине A_j''. Условная кривизна гиперповерхности F' в вершине A_j' не меньше, чем условная кривизна гиперповерхности F''' в этой вершине. Отсюда следует, что условная кривизна гиперповерхности F' в вершине A_j' больше, чем условная кривизна гиперповерхности F'' в вершине A_j''. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Замечание. Если в теореме 2 условие возрастания функции по лучу заменить условием неубывания, то гиперповерхность будет определяться однозначно с точностью до преобразования подобия относительно точки O.

§ 2. Общая замкнутая выпуклая гиперповерхность с заданной условной кривизной

Теорема 3. *Пусть функция $\theta(n, x)$, задающая условную кривизну, удовлетворяет условию $\theta(n, x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Пусть μ — неотрицательная вполне аддитивная функция, заданная на единичной сфере S*

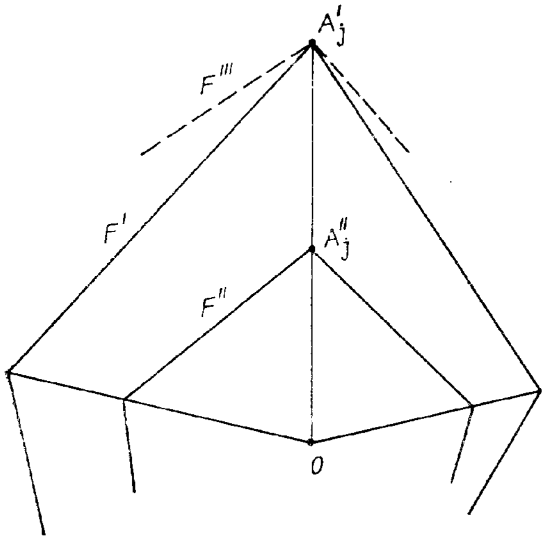

Рис. 3.

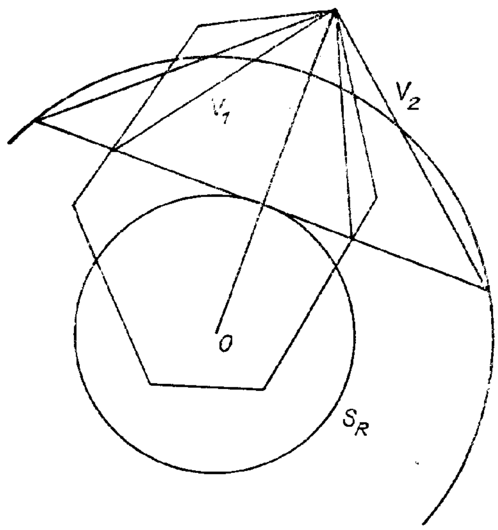

Рис. 4.

с центром в начале координат O, такая, что

1) $\mu(S) > \int\limits_S \theta(n, o)\,dS$;

2) *для любого конуса V (в том числе вырождающегося) с вершиной в точке O*

$$\mu(S \setminus V) > \int\limits_{V^*} \theta(n, o)\,dS,$$

где $S \setminus V$ — множество точек сферы S, лежащих вне конуса V, а V^* — сферическое изображение конуса V.

Тогда существует замкнутая выпуклая гиперповерхность, содержащая внутри точку O, такая, что ее кривизна на любом борелевском множестве равна значению функции μ на проекции этого множества.

Доказательство. Разобьем сферу S на попарно непересекающиеся борелевские множества m_k диаметра меньше δ и отметим в каждом из них одну точку A_k. Обозначим $\mu_k = \mu(m_k)$. При достаточно малом δ для функции $\theta(n, x)$, чисел μ_k и точек A_k выполнены условия теоремы 1. Поэтому существует замкнутая выпуклая многогранная гиперповерхность F, содержащая внутри точку O, такая, что ее вершины проектируются на сферу S в точки A_k, и условные кривизны в этих вершинах равны μ_k.

Многогранные гиперповерхности ограничены в совокупности. Действительно, опишем сферу S_R большого радиуса R с центром в точке O. При достаточно большом R вся гиперповерхность F не может быть вне сферы S_R, так как ее условная кривизна была бы сколь угодно велика ($\theta(n, x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$), а она равна $\mu(S)$. Обозначим через B наиболее удаленную от точки O вершину гиперповерхности F. Проведем касательную гиперплоскость к сфере S_R, перпендикулярную отрезку OB (рис. 4). Обозначим через F_B, отсекаемую ею часть гиперповерхности F, содержащую точку B. Эта часть гиперповерхности лежит вне сферы S_R. Ее сферическое изображение покрывает изображение конуса V_1, а сферическое изображение конуса V_1 покрывает сферическое изображение конуса V_2 (см. рис. 4). Для площади сферического изображения конуса V_2 получается положительная оценка снизу при $OB > 2R$. А так как $\theta(n, x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$, то условная кривизна гиперповерхности F_B, равная

$$\int\limits_{F_B^*} \theta(n, x)\,d\omega$$

при достаточно большом R и $OB > 2R$, сколь угодно велика. Но это невозможно, так как условная кривизна всей гиперповерхности F равна $\mu(S)$.

Так как при $\delta \to 0$ многогранные гиперповерхности F ограничены в совокупности, то из них можно выделить сходящуюся последовательность. Предельная выпуклая гиперповерхность Φ для этой последовательности содержит точку O внутри, и ее условная кривизна на любом борелевском множестве равна значению функции μ на проекции этого множества.

Действительно, допустим, точка O находится на гиперповерхности Φ (вне гиперповерхности Φ она быть не может, так как содержится внутри каждой гиперповерхности F). Проведем опорную гиперплоскость гиперповерхности Φ в точке O. Она рассекает гиперповерхность F на две части, одна из которых лежит в одном полупространстве с гиперповерхностью Φ, а другая (обозначим ее F') — в другом полупространстве. При достаточно малом δ условная кривизна гиперповерхности F' больше некоторого $c_0 > 0$, так как значения функции μ на полусферах ограничены снизу положительным числом в силу условия 2) теоремы. Отсюда следует, что точка O на гиперповерхности Φ должна быть конической.

Пусть V — касательный конус гиперповерхности Φ в точке O. При достаточной близости гиперповерхности F и Φ общая условная кривизна в тех вершинах, которые расположены вне конуса V, сколь угодно близка к условной кривизне конуса V и в то же время к $\mu(S \backslash V)$, что невозможно, так как по условию теоремы

$$\int\limits_{V^*} \theta(n, o)\, d\omega < \mu(S \diagdown V).$$

Мы пришли к противоречию. Итак, точка O расположена внутри гиперповерхности Φ.

То, что условная кривизна гиперповерхности Φ на любом борелевском множестве равна значению функции μ на проекции этого множества, следует из свойства слабой сходимости условных кривизн гиперповерхностей F к условной кривизне гиперповерхности Φ. Теорема доказана.

Теорема 4. *Теорема 3 имеет место, если вместо условия (2) потребовать симметрию функций θ и μ относительно O, т. е.*

$$\theta(n, x) = \theta(-n, -x), \quad \mu(m^+) = \mu(m^-),$$

где m^+ и m^- — борелевские множества на сфере S, симметричные относительно ее центра O.

Доказательство. При условии симметрии функций θ и μ относительно центра сферы условие 2) теоремы 3 является следствием условия 1). Действительно, сферическое изображение V^* конуса V содержится в полусфере, а множество $S \backslash V$ содержит полусферу. Поэтому

$$\int\limits_{V^*} \theta(n, o)\, dS \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{S} \theta(n, o)\, dS < \frac{1}{2}\, \mu(S) \leqslant \mu(S \diagdown V).$$

Отсюда

$$\int\limits_{V^*} \theta(n, o)\, dS \leqslant \mu(S \diagdown V)$$

для любого конуса V.

§ 3. Теорема единственности для замкнутых выпуклых гиперповерхностей

Теорема 5. *Пусть функция $\theta(n, x)$, определяющая условную кривизну, является строго возрастающей по любому лучу, исходящему из начала координат O. Тогда замкнутая выпуклая гиперповерхность, содержащая точку O внутри, определяется однозначно заданием условной кривизны как функции множеств на единичной сфере S с центром O при проектировании гиперповерхности на сферу S. Это значит, что если две замкнутые выпуклые гиперповерхности, содержащие точку O внутри, на множествах точек, имеющих одну и ту же проекцию на сферу S, имеют одинаковые условные кривизны, то гиперповерхности совпадают.*

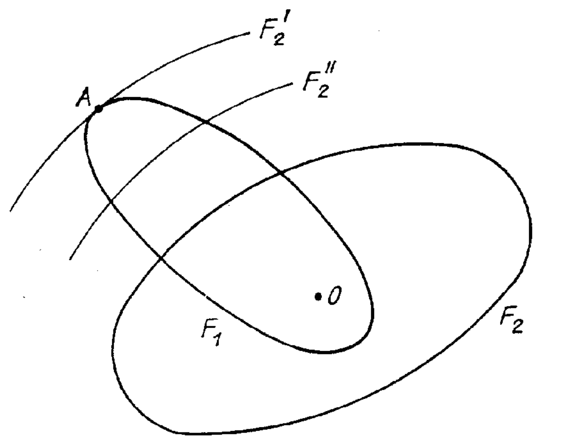

Рис. 5.

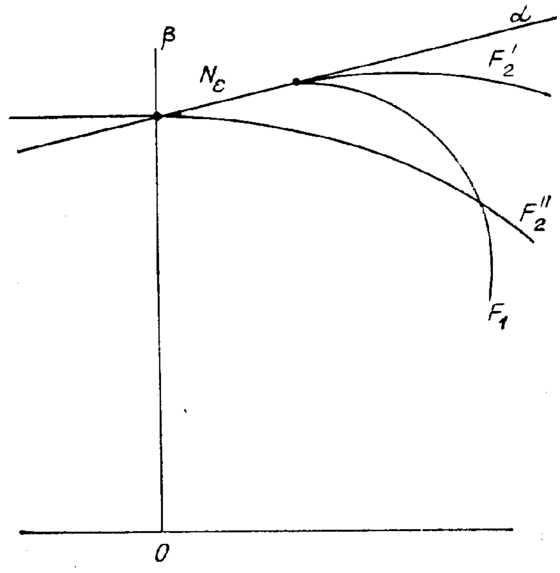

Рис. 6.

Доказательство. Допустим, существуют две различные замкнутые выпуклые гиперповерхности F_1 и F_2, содержащие точку O внутри, с равными условными кривизнами на множествах точек этих гиперповерхностей, имеющих общую проекцию на сфере S. Не ограничивая общности, будем считать, что у гиперповерхности F_2 есть точки, лежащие внутри гиперповерхности F_1 (рис. 5). Пусть A_1 и A_2 — две точки гиперповерхностей F_1 и F_2, которые имеют одну и ту же проекцию на сферу S. Обозначим $k = \max OA_1/OA_2$. Подвергнем гиперповерхность F_2 преобразованию подобия относительно точки O с коэффициентом подобия k. При этом получим гиперповерхность F_2', содержащую внутри гиперповерхность F_1 и контактирующую с ней по некоторому замкнутому множеству M. Рассмотрим сначала тот случай, когда множество M состоит только из одной точки A.

Подвергнем гиперповерхность F_2' преобразованию подобия относительно точки O с коэффициентом подобия $1-\varepsilon$, где ε — малое положительное число. Полученную при этом гиперповерхность обозначим F_2''. Введем также обозначения: $F_{1\varepsilon}$ — область на гиперповерхности F_1, которая находится вне тела, ограниченного гиперповерхностью F_2''; $F_{2\varepsilon}$, $F_{2\varepsilon}''$ — соответствующие при проектировании из точки O области на гиперповерхностях F_2 и F_2''. При достаточно малом ε все эти области будут иметь диаметры меньше δ, причем $\delta \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Сравним условные кривизны гиперповерхностей $F_{2\varepsilon}$ и $F_{2\varepsilon}''$, $F_{2\varepsilon}''$ и $F_{1\varepsilon}$. Гиперповерхности $F_{2\varepsilon}$ и $F_{2\varepsilon}''$ имеют одно и то же сферическое изображение. Так как функция θ строго возрастающая по любому лучу, исходящему из точки O, то при достаточно малом ε (а значит, и δ)

$$\int\limits_{F_{2\varepsilon}''^{*}} \theta d\omega > \int\limits_{F_{2\varepsilon}^{*}} \theta d\omega + a\sigma,$$

где a — положительное число, а σ — площадь сферического изображения гиперповерхностей $F_{2\varepsilon}$ и $F_{2\varepsilon}''$. Заметим, что σ отлично от нуля, так как на гиперповерхности F_2' точка A является точкой строгой выпуклости, а значит, любая ее окрестность имеет сферическое изображение с положительной площадью.

Сравним условные кривизны гиперповерхностей $F_{1\varepsilon}$ и $F_{2\varepsilon}''$. Сферическое изображение гиперповерхности $F_{2\varepsilon}''$ содержится в сферическом изображении гиперповерхности $F_{1\varepsilon}$. Поэтому при достаточно малом ε (а значит, и δ) их условные кривизны удовлетворяют неравенству

$$\int\limits_{F_{2\varepsilon}''^{*}} \theta d\omega < \int\limits_{F_{1\varepsilon}^{*}} \theta d\omega + \eta\sigma,$$

где η сколь угодно мало, если достаточно мало δ.

Сопоставляя полученные неравенства для условных кривизн гиперповерхностей $F_{1\varepsilon}$, $F''_{2\varepsilon}$ и $F_{2\varepsilon}$, как следствие, получаем

$$\int\limits_{F^*_{1\varepsilon}} \theta d\omega > \int\limits_{F^*_{2\varepsilon}} \theta d\omega + a\sigma - \eta\sigma,$$

что невозможно, так как

$$\int\limits_{F^*_{1\varepsilon}} \theta d\omega = \int\limits_{F^*_{2\varepsilon}} \theta d\omega,$$

a — положительное число, а η сколь угодно мало при достаточно малом δ. Таким образом, при $M = A$ мы приходим к противоречию.

Рассмотрим теперь общий случай, когда M — любое замкнутое множество. Проведем опорную плоскость α к гиперповерхности F'_2 в какой-нибудь точке множества M. Она будет опорной и для гиперповерхности F_1. Множество точек контакта ее с гиперповерхностью F_1 есть замкнутое выпуклое множество N. Отсечем от множества N гиперплоскостью β, проходящей через точку O, малую часть N_ε диаметром меньше ε (рис. 6).

Пусть $\lambda z + \sum c_i x_i + c = 0$ — уравнение гиперплоскости α, а $\mu z + \sum d_i x_i = 0$ — уравнение гиперплоскости β. Подвергнем гиперповерхность F'_2 следующим двум проективным преобразованиям:

$$H_1\colon\ x'_i = \frac{x_i}{1 + \delta_1\left(\lambda z + \sum c_i x_i + c\right)},\quad z' = \frac{z}{1 + \delta_1\left(\lambda z + \sum c_i x_i + c\right)},$$

$$H_2\colon\ x'_i = \frac{x_i}{1 + \delta_2\left(\mu z + \sum d_i x_i\right)},\quad z' = \frac{z}{1 + \delta_2\left(\mu z + \sum d_i x_i\right)},$$

где δ_1 и δ_2 — числа, малые по абсолютной величине, а их знаки определяются следующим образом. Пусть X — произвольная точка гиперповерхности F'_2, близкая к N_ε, лежащая по одну сторону с N_ε относительно гиперплоскости β и по одну сторону с точкой O относительно гиперплоскости α. Тогда знаки δ_1 и δ_2 определяются тем условием, что преобразование H_1 смещает точку X в направлении от точки O, а преобразование H_2 смещает ее к точке O. Пусть F''_2 — гиперповерхность, полученная в результате этих двух проективных преобразований. Обозначим через $F_{1\varepsilon}$ область на гиперповерхности F_1, которая находится вне тела, ограниченного гиперповерхностью F''_2. Соответствующие при проектировании из точки O области на гиперповерхностях F_2, F'_2 и F''_2 обозначим соответственно $F_{2\varepsilon}$, $F'_{2\varepsilon}$ и $F''_{2\varepsilon}$. При достаточно малых $|\delta_1|$ и $|\delta_2|$ все эти области будут иметь диаметры меньше ε. Сравним условные кривизны гиперповерхностей $F_{2\varepsilon}$ и $F'_{2\varepsilon}$, $F'_{2\varepsilon}$ и $F''_{2\varepsilon}$, $F''_{2\varepsilon}$ и $F_{1\varepsilon}$.

Гиперповерхности $F_{2\varepsilon}$ и $F'_{2\varepsilon}$ имеют одно и то же сферическое изображение. Так как функция θ строго возрастающая по любому лучу, исходящему из точки O, то при достаточно малых ε, $|\delta_1|$ и $|\delta_2|$

$$\int\limits_{F'^*_{2\varepsilon}} \theta d\omega > \int\limits_{F^*_{2\varepsilon}} \theta d\omega + a\sigma,$$

где a — положительное число, а σ — площадь сферического изображения гиперповерхностей $F_{2\varepsilon}$ и $F'_{2\varepsilon}$. Заметим, что σ отлична от нуля, так как на гиперповерхности F'_2 заведомо есть точки строгой выпуклости.

Сравним условные кривизны гиперповерхностей $F'_{2\varepsilon}$ и $F''_{2\varepsilon}$. При достаточно малых $|\delta_1|$ и $|\delta_2|$ гиперповерхность $F''_{2\varepsilon}$ получается из гиперповерхности $F'_{2\varepsilon}$ проективным преобразованием, близким к тождественному. Сферическое изображение гиперповерхности $F''_{2\varepsilon}$ получается из сферического изображения гиперповерхности $F'_{2\varepsilon}$ также проективным преобразованием, близким к тождественному. Поэтому

$$\int\limits_{F'^*_{2\varepsilon}} \theta d\omega = \int\limits_{F''^*_{2\varepsilon}} \theta d\omega + \xi\sigma,$$

где $|\xi|$ сколь угодно мало, если достаточно малы ε, $|\delta_1|$ и $|\delta_2|$.

Сравнивая условные кривизны гиперповерхностей $F''_{2\varepsilon}$ и $F_{1\varepsilon}$, заметим, что сферическое изображение гиперповерхности $F''_{2\varepsilon}$ содержится в сферическом изображении гиперповерхности $F_{1\varepsilon}$. Поэтому

$$\int\limits_{F''^*_{2\varepsilon}} \theta d\omega < \int\limits_{F^*_{1\varepsilon}} \theta d\omega + \eta\sigma,$$

где η сколь угодно мало по абсолютной величине, если достаточно малы ε, $|\delta_1|$, $|\delta_2|$.

Из полученных соотношений для условных кривизн поверхностей $F_{1\varepsilon}$, $F_{2\varepsilon}$, $F'_{2\varepsilon}$ и $F''_{2\varepsilon}$, как следствие, получаем

$$\int\limits_{F^*_{1\varepsilon}} \theta d\omega > \int\limits_{F^*_{2\varepsilon}} \theta d\omega + a\sigma - \eta\sigma - \xi\sigma,$$

что невозможно, так как

$$\int\limits_{F^*_{1\varepsilon}} \theta d\omega = \int\limits_{F^*_{2\varepsilon}} \theta d\omega,$$

a — положительное число, а $|\xi|$ и $|\eta|$ сколь угодно малы при достаточно малых ε, $|\delta_1|$, $|\delta_2|$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров А. Д.** Существование и единственность выпуклой поверхности с заданной интегральной кривизной // Докл. АН СССР.— 1942.— Т. 35, № 5.— С. 143—147.
2. **Погорелов А. В.** Об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического типа.— Харьков: Изд-во ХГУ, 1960.

КЛАССЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ, ИНВАРИАНТНЫЕ ПРИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

М. В. ТАЛАЛАЕВ

Пусть U — область в $\mathbf{R}^n$. В работе [1] были рассмотрены классы дифференциальных форм $\mathscr{L}_p^k(U)$, $1 \leqslant p < \infty$, имеющие координатное представление с локально суммируемыми в степени p коэффициентами $a_{i_1 \ldots i_k}$. Для каждого компакта $K \subset U$ определяется полунорма в $\mathscr{L}_p^k(U)$:

$$|\omega|_{K,p} = \left\{\int\limits_K \sum_{i_1 < \ldots < i_k} |a_{i_1 \ldots i_k}|^p dx^{i_1} \ldots dx^{i_k}\right\}^{1/p}.$$

В [1] были введены также классы $\mathscr{W}_{p,q}^k(U)$, $1 \leqslant p < \infty$, $1 \leqslant q < \infty$. $\omega \in \mathscr{W}_{p,q}^k(U)$, если $\omega \in \mathscr{L}_p^k(U)$ и $d\omega \in \mathscr{L}_q^{k+1}$. Полунорма в $\mathscr{W}_{p,q}^k(U)$

$$|\omega|_{K,p,q} = |\omega|_{K,p} + |d\omega|_{K,q}.$$