

из сферического изображения гиперповерхности $F'_{2\varepsilon}$ также проективным преобразованием, близким к тождественному. Поэтому

$$\int_{F'_{2\varepsilon}} \theta d\omega = \int_{F''_{2\varepsilon}} \theta d\omega + \xi\sigma,$$

где $|\xi|$ сколь угодно мало, если достаточно малы ε , $|\delta_1|$ и $|\delta_2|$.

Сравнивая условные кривизны гиперповерхностей $F'_{2\varepsilon}$ и $F_{1\varepsilon}$, заметим, что сферическое изображение гиперповерхности $F''_{2\varepsilon}$ содержится в сферическом изображении гиперповерхности $F_{1\varepsilon}$. Поэтому

$$\int_{F''_{2\varepsilon}} \theta d\omega < \int_{F_{1\varepsilon}} \theta d\omega + \eta\sigma,$$

где η сколь угодно мало по абсолютной величине, если достаточно малы ε , $|\delta_1|$, $|\delta_2|$.

Из полученных соотношений для условных кривизн поверхностей $F_{1\varepsilon}$, $F_{2\varepsilon}$, $F'_{2\varepsilon}$ и $F''_{2\varepsilon}$, как следствие, получаем

$$\int_{F_{1\varepsilon}} \theta d\omega > \int_{F_{2\varepsilon}} \theta d\omega + a\sigma - \eta\sigma - \xi\sigma,$$

что невозможно, так как

$$\int_{F_{1\varepsilon}} \theta d\omega = \int_{F_{2\varepsilon}} \theta d\omega,$$

a — положительное число, а $|\xi|$ и $|\eta|$ сколь угодно малы при достаточно малых ε , $|\delta_1|$, $|\delta_2|$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д. Существование и единственность выпуклой поверхности с заданной интегральной кривизной // Докл. АН СССР.— 1942.— Т. 35, № 5.— С. 143—147.
2. Погорелов А. В. Об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического типа.— Харьков: Изд-во ХГУ, 1960.

КЛАССЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ, ИНВАРИАНТНЫЕ ПРИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

М. В. ТАЛАЛАЕВ

Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$. В работе [1] были рассмотрены классы дифференциальных форм $\mathcal{L}_p^h(U)$, $1 \leq p < \infty$, имеющие координатное представление с локально суммируемыми в степени p коэффициентами $a_{i_1 \dots i_k}$. Для каждого компакта $K \subset U$ определяется полунорма в $\mathcal{L}_p^h(U)$:

$$|\omega|_{K,p} = \left\{ \int_K \sum_{i_1 < \dots < i_k} |a_{i_1 \dots i_k}|^p dx^{i_1} \dots dx^{i_k} \right\}^{1/p}.$$

В [1] были введены также классы $\mathcal{W}_{p,q}^h(U)$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$. $\omega \in \mathcal{W}_{p,q}^h(U)$, если $\omega \in \mathcal{L}_p^h(U)$ и $d\omega \in \mathcal{L}_q^{h+1}$. Полунорма в $\mathcal{W}_{p,q}^h(U)$

$$|\omega|_{K,p,q} = |\omega|_{K,p} + |d\omega|_{K,q}.$$

Результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. Если $\varphi: U \rightarrow V$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$ — квазиконформное отображение, то

$$\varphi^*(\mathcal{W}_{p,q}^k(V)) \subset \mathcal{W}_{p,q}^k(U),$$

где $k \geq 1$, $p = n/k$, $q = n/(k+1)$. Линейный оператор $\varphi^*: \mathcal{W}_{p,q}^k(V) \rightarrow \mathcal{W}_{p,q}^k(U)$, индуцированный отображением φ , непрерывен.

Многообразие M назовем квазиконформным, если на нем может быть построен атлас, любые две карты которого квазиконформно согласованы (т. е. определяемые обычным образом преобразования координат являются квазиконформными отображениями).

Теорема 1, по существу, означает возможность определить классы дифференциальных форм $\mathcal{W}_{p,q}^k(M)$ на квазиконформном многообразии M . Как следствие этого факта, аналог известной теоремы де Рама справедлив для квазиконформных многообразий. В отличие от [1], где эта теорема доказана для коцепных комплексов $\{\mathcal{W}_{p,p}^*(M); d\}$, $1 \leq p \leq \infty$, липшицева многообразия M , в нашем случае приходится ограничиться рассмотрением комплексов более специального вида.

Лемма 1. Пусть A — квадратная $(n \times n)$ -матрица с неотрицательными элементами a_{ij} , $1 \leq k \leq n$. Справедливо неравенство

$$\left(\sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n} a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ki_k} \right)^{1/k} \leq C(n, k) \|A\|, \quad (1)$$

где $\|A\| = [\sum a_{ij}^2]^{1/2}$ — евклидова норма матрицы A , а $C(n, k)$ — константа, зависящая только от n и k .

Доказательство. При $k=1$ неравенство (1) принимает вид

$$a_{11} + a_{12} + \dots + a_{1n} \leq C \|A\|.$$

Элементарный подсчет показывает, что значение постоянной C можно положить здесь равным $\sqrt{n}$. Пусть теперь $k > 1$. Применим неравенство Иенсена [2, с. 32]:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i_1, \dots, i_k} a_{1i_1} \cdot \dots \cdot a_{ki_k} \right]^{1/k} &\leq \left[\sum_{i_1, \dots, i_k} (\max(a_{1i_1}, \dots, a_{ki_k}))^k \right]^{1/k} \leq \\ &\leq \left[\sum_{i_1, \dots, i_k} (\max(a_{1i_1}, \dots, a_{ki_k}))^2 \right]^{1/2} \leq C \|A\|. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Лемма 2. Если $\varphi: U \rightarrow V$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^n$ — квазиконформное отображение, то

$$\varphi^*(\mathcal{L}_p^k(V)) \subset \mathcal{L}_p^k(U),$$

где числа n , p , k связаны соотношением $k \cdot p = n$. Линейный оператор $\varphi^*: \mathcal{L}_p^k(V) \rightarrow \mathcal{L}_p^k(U)$, индуцированный отображением φ , непрерывен.

Доказательство. Пусть b_I , $I = (i_1, \dots, i_k)$ коэффициенты формы $\varphi^*\omega$. Имеем

$$\begin{aligned} |\varphi^*\omega|_{K,p} &= \left[\sum_{i_1 < \dots < i_k} \int |b_I|^p dy_1 \dots dy_n \right]^{1/p} = \\ &= \left[\sum_{i_1 < \dots < i_k} \int \left| a_I \circ \varphi \sum_{P(I)} \sigma(P) \frac{\partial \varphi^{P(i_1)}}{\partial y_1} \dots \frac{\partial \varphi^{P(i_k)}}{\partial y_k} \right|^p dx_1 \dots dx_n \right]^{1/p}, \quad (2) \end{aligned}$$

где суммирование производится по всем перестановкам индексов, $\sigma(P)$ — сигнатура перестановки P . Внутреннюю сумму в (2) оценим, воспользовавшись леммой 1:

$$\sum_{P(I)} \left| \frac{\partial \varphi^{P(i_1)}}{\partial y_1} \dots \frac{\partial \varphi^{P(i_k)}}{\partial y_k} \right|^p \leq \|\varphi'\|^{pk} \leq K |\mathcal{I}|.$$

Применим последнее неравенство и теорему о замене переменной [3, с. 209] для продолжения оценки (2):

$$|\varphi^* \omega|_{k,p} \leq \text{const} \cdot |\omega|_{k,p}.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $\eta = d\omega$. Заменяя в рассуждениях леммы 2 ω на η , получаем, что $\varphi^* \eta \in \mathcal{L}_q^{k+1}(U)$. Доказательство было бы закончено, если бы удалось показать перестановочность обобщенного дифференциала d и оператора φ^* . В случае гладких форм этот факт был установлен в [3, лемма 4.7]. Определим класс форм степени k

$$C^* = \{\omega : \omega = \psi^* \tilde{\omega}, \psi \text{ квазиконформно}, \tilde{\omega} \in C^\infty\},$$

плотный в $\mathcal{W}_{p,q}^k$. Цепочка равенств

$$\begin{aligned} d\varphi^* \omega &= d\varphi^*(\psi^* \tilde{\omega}) = d(\psi\varphi)^* \tilde{\omega} = \\ &= (\psi\varphi)^* d\tilde{\omega} = \varphi^* \psi^* d\tilde{\omega} = \varphi^* d(\psi^* \tilde{\omega}) = \varphi^* d\omega \end{aligned}$$

завершает доказательство теоремы.

В книге [4] было дано полное описание замен независимых переменных, сохраняющих классы функций W_p^1 . В частности, квазиконформные гомеоморфизмы (и только они) сохраняют класс W_n^1 . Приняв во внимание этот факт в качестве дополнения к утверждению теоремы 1 в случае $k=0$, мы сможем сформулировать аналог теоремы де Рама для квазиконформных многообразий.

Теорема 2. Для любого квазиконформного многообразия M группы когомологий коцепного комплекса

$$\mathcal{W}_{n,n}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{W}_{n,n/2}^1 \xrightarrow{d} \mathcal{W}_{n/2,n/2}^2 \xrightarrow{d} \dots$$

каноническим образом изоморфны группам когомологий $H^*(M; \mathbb{R})$ многообразия M с коэффициентами в группе $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А. Дифференциальные формы на липшицевом многообразии // Сиб. мат. журн.— 1982.— Т. 23, № 2.— С. 16—30.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства.— М.: Мир, 1965.
3. Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением.— Новосибирск: Наука, 1982.
4. Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г. Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.— М.: Наука, 1983.

ОТОБРАЖЕНИЯ, «ПОЧТИ» СОХРАНЯЮЩИЕ КОНУСЫ

А. В. ШАЙДЕНКО

Известные результаты А. Д. Александрова [1] об отображениях, сохраняющих конусы, в частности, утверждают аффинность биективного отображения, преобразующего параллельные строго выпуклые конусы также в параллельные строго выпуклые конусы. А. К. Гуц поставил вопрос о том, что можно сказать об отображении, сохраняющем конусы лишь с точностью до множества меры нуль, т. е. если образы конусов могут не быть конусами, а отличаться от конусов на множества меры нуль. Ответ на этот вопрос дается в настоящей работе.

Рассматривается n -мерное евклидово пространство E^n , где $n \geq 3$. Далее через $m(M)$ будем обозначать n -мерную меру Лебега множества $M \subset E^n$. Конусом (ординарным) называется объединение лучей (образующих конуса), исходящих из одной точки (вершины конуса) и содержа-