Применим последнее неравенство и теорему о замене переменной [3, с. 209] для продолжения оценки (2):

$$|\varphi^*\omega|_{K,p} \leqslant \mathrm{const}\cdot|\omega|_{K,p}.$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $\eta = d\omega$. Заменяя в рассуждениях леммы 2 ω на η, получаем, что $\varphi^*\eta \in \mathscr{L}_q^{k+1}(U)$. Доказательство было бы закончено, если бы удалось показать перестановочность обобщенного дифференциала d и оператора φ^*. В случае гладких форм этот факт был установлен в [3, лемма 4.7]. Определим класс форм степени k

$$C^* = \{\omega : \omega = \psi^*\tilde{\omega},\ \psi \text{ квазиконформно},\ \tilde{\omega} \in C^\infty\},$$

плотный в $\mathscr{W}^k_{p,q}$. Цепочка равенств

$$d\varphi^*\omega = d\varphi^*(\psi^*\tilde{\omega}) = d(\psi\varphi)^*\tilde{\omega} =$$
$$= (\psi\varphi)^*d\tilde{\omega} = \varphi^*\psi^*d\tilde{\omega} = \varphi^*d(\psi^*\tilde{\omega}) = \varphi^*d\omega$$

завершает доказательство теоремы.

В книге [4] было дано полное описание замен независимых переменных, сохраняющих классы функций W^1_p. В частности, квазиконформные гомеоморфизмы (и только они) сохраняют класс W^1_n. Приняв во внимание этот факт в качестве дополнения к утверждению теоремы 1 в случае $k=0$, мы сможем сформулировать аналог теоремы де Рама для квазиконформных многообразий.

Теорема 2. *Для любого квазиконформного многообразия M группы когомологий коцепного комплекса*

$$\mathscr{W}^0_{n,n} \xrightarrow{d} \mathscr{W}^1_{n,n/2} \xrightarrow{d} \mathscr{W}^2_{n/2,n/3} \xrightarrow{d} \ldots$$

каноническим образом изоморфны группам когомологий $H^*(M;\ \mathbf{R})$ многообразия M с коэффициентами в группе $\mathbf{R}$ вещественных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдштейн В. М., Кузьминов В. И., Шведов И. А.** Дифференциальные формы на липшицевом многообразии // Сиб. мат. журн.— 1982.— Т. 23, № 2.— С. 16—30.
2. **Беккенбах Э., Беллман Р.** Неравенства.— М.: Мир, 1965.
3. **Решетняк Ю. Г.** Пространственные отображения с ограниченным искажением.— Новосибирск: Наука, 1982.
4. **Гольдштейн В. М., Решетняк Ю. Г.** Введение в теорию функций с обобщенными производными и квазиконформные отображения.— М.: Наука, 1983.

ОТОБРАЖЕНИЯ, «ПОЧТИ» СОХРАНЯЮЩИЕ КОНУСЫ

А. В. ШАЙДЕНКО

Известные результаты А. Д. Александрова [1] об отображениях, сохраняющих конусы, в частности, утверждают аффинность биективного отображения, преобразующего параллельные строго выпуклые конусы также в параллельные строго выпуклые конусы. А. К. Гуц поставил вопрос о том, что можно сказать об отображении, сохраняющем конусы лишь с точностью до множества меры нуль, т. е. если образы конусов могут не быть конусами, а отличаться от конусов на множества меры нуль. Ответ на этот вопрос дается в настоящей работе.

Рассматривается n-мерное евклидово пространство E^n, где $n \geqslant 3$. Далее через $m(M)$ будем обозначать n-мерную меру Лебега множества $M \subset E^n$. *Конусом* (ординарным) называется объединение лучей (*образующих* конуса), исходящих из одной точки (*вершины* конуса) и содержащих ее; *двойным конусом* называется объединение прямых, проходящих через одну точку. Если $K \subset E^n$ — конус, то через K^- обозначается конус, симметричный конусу K относительно его вершины, через $O(K)$ — вершина конуса K, а через K_X — конус, полученный из K параллельным переносом, переводящим $O(K)$ в точку X. Мы будем рассматривать *строго выпуклые* конусы, а именно, такие конусы C, что существует замкнутый выпуклый конус $K \neq E^n$, состоящий более чем из одной образующей, и

1) каждая опорная к K гиперплоскость пересекает K либо по его вершине, либо по одной образующей;

2) Конус C равен одному из следующих конусов:

I. K (в этом случае C называется *ординарным замкнутым*),

II. $\operatorname{int} K \cup \{O(K)\}$ — *ординарный открытый*,

III. $K \cup K^-$ — *двойной замкнутый*.

IV. $\operatorname{int} K \cup \operatorname{int} K^- \cup \{O(K)\}$ — *двойной открытый*.

Если C — конус типа III или IV, то соответственно конусы K и K^-, $\operatorname{int} K \cup \{O(K)\}$ и $\operatorname{int} K^- \cup \{O(K)\}$ называются *половинами* конуса C и обозначаются через C^+ и C^-.

Возьмем в пространстве E^n строго выпуклые конусы C и C' одного из определенных выше четырех типов. Тогда справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Если $f: E^n \to E^n$ — такое биективное отображение, что для каждой точки $X \in E^n$ верно $m\left(f(C_X) \Delta C'_{f(X)}\right) = 0$, то f аффинно.*

Теорема 2. *Если $f: E^n \to E^n$ — такое биективное отображение, что для каждой точки $X \in E^n$ множество $f(C_X) \Delta C'_{f(X)}$ есть множество первой категории (по Бэру), то f аффинно.*

Доказательство теоремы 1. Пусть конусы C и C' принадлежат типу I. Покажем, что если $Y \in C_X$, то $f(Y) \in C'_{f(X)}$. Предположим противное. Так как $Y \in C_X$, то $f(C_Y) \subset f(C_X)$. По условию существуют такие множества M_1 и M_2, что $m(M_1) = m(M_2) = 0$ и $f(C_X) \subset C'_{f(X)} \cup M_1$, $f(C_Y) \supset C'_{f(Y)} \setminus M_2$. Следовательно, $C'_{f(Y)} \subset C'_{f(X)} \cup M_1 \cup M_2$. Но по предположению $m\left(C'_{f(Y)} \setminus C'_{f(X)}\right) \neq 0$ — противоречие. Итак, $f(C_X) \subset C'_{f(X)}$.

Докажем теперь, что отображение f непрерывно. Предположим, что для некоторой последовательности точек $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ из E^n выполняется $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = X_0$, но $f(X_0) \neq \lim\limits_{k\to\infty} f(X_k)$. Поскольку найдутся такие точки Z_1 и Z_2, что для всех k имеем $Z_1 \in C_{X_k} \subset C_{Z_2}$, то легко видеть, что существуют такие подпоследовательность $\{Y_k\}_{k=1}^{\infty}$ последовательности $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ и точка $Y \neq f(X_0)$, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(Y_k) = Y$. Покажем, что тогда $Y \in C'_{f(X_0)}$. Предположим противное и возьмем точку $G \in \operatorname{int} C'_Y$, $G \notin C'_{f(X_0)}$. Существует такое натуральное k_0, что для каждого $k \geqslant k_0$ верно $C'_{f(Y_k)} \supset C'_G$. По условию для каждого такого k существует множество M_k меры нуль такое, что $f\left(C_{Y_k}\right) \supset C'_G \setminus M_k$. Поскольку $m\left(\bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty} M_k\right) = 0$, а $m\left(C'_G \setminus C'_{f(X_0)}\right) > 0$, найдется точка $H \in \left(C'_G \setminus C'_{f(X_0)}\right) \Big\backslash \bigcup\limits_{k=k_0}^{\infty} M_k$. Очевидно, что $H \in \bigcap\limits_{k=k_0}^{\infty} f\left(C_{Y_k}\right)$, т. е. $f^{-1}(H) \in \bigcap\limits_{k=k_0}^{\infty} C_{Y_k} \subset C_{X_0}$, но это противоречит тому, что $f\left(C_{X_0}\right) \subset$ $\subset C'_{f(X_0)}$.

Для всякой точки $X \in \operatorname{int} C_{X_0}$ существует такое натуральное k_1, что для каждого $k \geqslant k_1$ имеем $X \in C_{Y_k}$ и, следовательно, $f(X) \in$ $\in \bigcap\limits_{k=k_1}^{\infty} C'_{f(Y_k)} \subset C'_Y$. Значит, $f\left(\operatorname{int} C_{X_0}\right) \subset C'_Y$. Обозначим через M такое множество меры нуль, что $f(C_{X_0})=C'_{f(X_0)}\setminus M$. Тогда получаем $C'_{f(X_0)}\setminus C'_Y\subset \subset f(\partial C_{X_0})\cup M$.

Пусть точка $A\in\partial C_{X_0}$ такова, что $f(A)\in \operatorname{int}(C'_{f(X_0)}\setminus C'_Y)$, и пусть $D\subset\operatorname{int}(C'_{f(X_0)}\setminus C'_Y)$ — некоторый открытый шар с центром $f(A)$. Обозначим через M_1 множество, для которого $f(C_A)=C'_{f(A)}\setminus M_1$, $m(M_1)=0$. Тогда $(D\cap C'_{f(A)})\setminus(M\cup M_1)\subset f(\partial C_{X_0}\cap C_A)$. Возьмем точку $A_1\in \in f^{-1}((D\cap\operatorname{int}C'_{f(A)})\setminus(M\cup M_1))$ и такой открытый шар D_1, что $D_1\subset \subset D\cap\operatorname{int}C'_{f(A)}$ и $D_1\cap(C'_{f(A_1)}\cup C'^{-}_{f(A_1)})=\varnothing$. Так как $m(D_1)>0$, найдется такая точка $A_2\in\partial C_{X_0}\cap C_A$, что $f(A_2)\in D_1$. Отсюда следует, что $C'_{f(A_1)}\not\ni \not\ni f(A_2)$ и $C'_{f(A_2)}\not\ni f(A_1)$. Но либо $C_{A_1}\ni A_2$ либо $C_{A_2}\ni A_1$. Противоречие.

Итак, отображение f непрерывно, откуда непосредственно получается, что для каждой точки $X\in E^n$ выполнено $f(C_X)=C'_{f(X)}$, т. е. по теореме 1 работы [1] отображение f аффинно.

Пусть конусы C и C' принадлежат типу II. Аналогично предыдущему получаем, что для каждой точки $X\in E^n$ и каждой точки $Y\in\overline{C}_X$ верно $f(Y)\in\overline{C'_{f(X)}}$, т. е. $f(\overline{C_X})\subset\overline{C'_{f(X)}}$.

По условию существует такое множество M меры нуль, что $f(C_X)\supset C'_{f(X)}\setminus M$. Отсюда $f(\overline{C_X})\supset\overline{C'_{f(X)}}\setminus(M\cup\partial C'_{f(X)})$. Следовательно, $m(f(\overline{C_X})\triangle\overline{C'_{f(X)}})=0$. Таким образом, пришли к случаю конусов типа I, и отображение f аффинно.

Пусть конусы C и C' принадлежат типу III.

Возьмем произвольно точки $O\in E^n$, $X\in C_O^+\setminus\{O\}$, $Y\in C_O^-\setminus\{O\}$. По условию существуют такие множества M_1, M_2, M_3 меры нуль, для которых, поскольку $C_O\subset C_X\cup C_Y$, выполняется $C'_{f(O)}\setminus M_3\subset(C'_{f(X)}\cup M_1)\cup \cup(C'_{f(Y)}\cup M_2)$. Следовательно, $C'_{f(O)}\setminus(C'_{f(X)}\cup C'_{f(Y)})\subset M_1\cup M_2\cup M_3$, т. е. множество $C'_{f(O)}\setminus(C'_{f(X)}\cup C'_{f(Y)})$ имеет меру нуль. Но это возможно лишь в случае, если $f(X), f(Y)\in C'_{f(O)}$, причем точки $f(X)$, и $f(Y)$ лежат в разных половинах конуса $C'_{f(O)}$. Итак, $f(C_O)\subset C'_{f(O)}$, и разные половины конуса C_O переходят в разные половины конуса $C'_{f(O)}$.

Отсюда сразу следует, что либо $m(f(C_O^+)\triangle C'^{+}_{f(O)})=0$, либо $m(f(C_O^+)\triangle C'^{-}_{f(O)})=0$. Без ограничения общности можно считать, что верно первое из этих равенств. Тогда легко видеть, что и для любой точки $X\in E^n$ верно именно $m(f(C_X^+)\triangle C'^{+}_{f(X)})=0$, а не $m(f(C_X^+)\triangle C'^{-}_{f(X)})=0$. Значит, снова пришли к случаю конусов типа I, и отображение f аффинно.

Пусть конусы C и C' принадлежат типу IV. Аналогично случаю конусов типа III получается, что для всякой точки $X\in E^n$ выполняется $f(\overline{C_X})\subset\overline{C'_{f(X)}}$. Далее, аналогично случаю конусов типа II можно показать, что для каждой точки $X\in E^n$ имеем $m(f(\overline{C_X})\triangle\overline{C'_{f(X)}})=0$. Следовательно, приходим к случаю конусов типа III, и отображение f аффинно. Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Александров А. Д.** Отображение аффинных пространств с системами конусов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1972.— Т. 27.— С. 7—16.