

ЗАМКНУТЫЕ ВЫПУКЛЫЕ ПОВЕРХНОСТИ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В. Г. ГАЙДАЛОВИЧ, У. ИЛЬХАМОВ,
Д. Д. СОКОЛОВ

Геометрия «в целом» поверхностей в псевдоевклидовом пространстве располагает гораздо большим разнообразием объектов, чем геометрия в евклидовом пространстве: седловые поверхности положительной кривизны, неполные замкнутые поверхности, нерегулярные поверхности, заданные сколь угодно гладкими функциями, и т. д.

Поиск естественных классов поверхностей, сопоставимых с естественным классом выпуклых поверхностей в евклидовом пространстве, и составляет основное содержание геометрии «в целом» поверхностей в псевдоевклидовом пространстве. До сих пор рассматривались такие естественные классы, которые в качестве типичных представителей имеют гладкие поверхности (хотя могут содержать и нерегулярные). Обзор результатов в этой области см., например, в [1].

Кажется тривиальным, что ни один разумный естественный класс поверхностей в псевдоевклидовом пространстве не может содержать замкнутых поверхностей. В самом деле, гладкая замкнутая поверхность обязательно имеет точки вырождения, в которых касательная плоскость становится параллельной изотропному конусу. В точках вырождения кривизна обычно обращается в бесконечность, возникают и другие осложнения. Однако уже «легкой» нерегулярности поверхности достаточно, чтобы снять проблемы с вырождением. Известны два класса замкнутых поверхностей в псевдоевклидовом пространстве, которые, по-видимому, являются естественными. Цель настоящей статьи — дать обзор результатов о поверхностях этих классов.

§ 1. Чечевицеобразные поверхности

Первый из рассматриваемых классов составляют поверхности, похожие на двояковыпуклую линзу или чечевицу. Они состоят из двух выпуклых частей, несущих положительно определенную метрику (не ограничивая общности, считаем, что в псевдоевклидовом пространстве есть два линейно независимых вектора с положительным квадратом длины и один — с отрицательным). Эти части соединяются в выпуклую поверхность по ребру, на котором опорные плоскости могут вырождаться (рис. 1). Из-за этого вырождения метрик опорных плоскостей наши поверхности не являются с точки зрения их внешней геометрии положительно определенными. Однако с точки зрения своей внутренней метрики чечевицеобразная поверхность Φ представляет собой самое обычное многообразие ограниченной кривизны, гомеоморфное сфере. Вне особого ребра Γ , на котором происходит вырождение опорных плоскостей, поверхность имеет метрику отрицательной кривизны. В точках особого ребра

сосредоточена положительная кривизна, так что полная кривизна поверхности равна 4π . Необычная для псевдоевклидова пространства положительность кривизны выпуклого ребра Γ связана с тем, что его внешняя геометрия необычна — имеется вырождение метрик опорных плоскостей.

Развитие геометрии в целом некоторого класса поверхностей в псевдоевклидовом пространстве логично начинать с задачи Минковского и

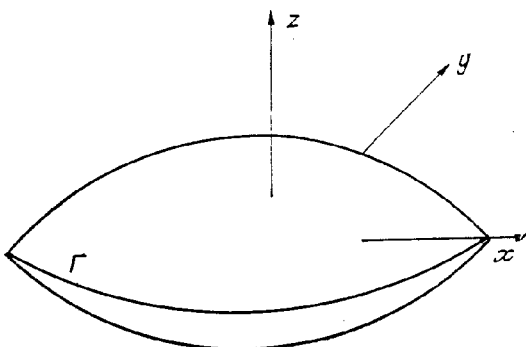


Рис. 1.

задачи о бесконечно малых изгибаниях. Дело в том, что обе эти задачи можно свести к соответствующим задачам для поверхностей в евклидовом пространстве [2—4]. Чечевицеобразная поверхность Φ оказывается жесткой в том смысле, что все ее изгибающие поля являются полями твердотельных движений. Она может быть столь же хорошо восстановлена по внешней кривизне, как и выпуклая поверхность в евклидовом пространстве (точные формулировки см. в [5]).

Гораздо менее простым технически оказывается вопрос о реализации метрик в классе чечевицеобразных поверхностей. В настоящее время он изучен лишь для случая многогранных метрик. Такая метрика C задается как гомеоморфное сфере многообразие, на котором отмечено конечное число точек $A_1, \dots, A_p, B_1, \dots, B_q$. Вне этих точек многообразие плоское. В неособых точках A_i сосредоточена отрицательная кривизна, в особых точках B_j — положительная. Мы предполагаем, что в тривиальном случае $p=0$ многогранная метрика C представляет собой дважды покрытый многоугольник. Если же $p \neq 0$, то предполагается, что в метрике C существует геодезическая ломаная Γ , отрезки которой соединяют все особые ребра B_i так, что Γ разбивает C на две выпуклые (в смысле метрики C) области. Вершины A_i не лежат на Γ . При построении развертки метрики C включим в нее ребра особой линии Γ . В оставшихся неразрезанными частях метрики C развертка строится так же, как это делается для бесконечных выпуклых многогранников с положительно определенной метрикой [1].

Задача о реализации многогранной метрики решается классическим методом Александрова [6], который применялся ранее для задач реализации других классов многогранников в псевдоевклидовом пространстве [1, 7]. Напомним схему этого метода: сначала доказывается жесткость многогранников данного класса, затем строится деформация многогранника при заданной малой деформации метрики и доказывается реализуемость метрик, близких к реализованным. Доказательство завершается построением непрерывного ряда метрик, соединяющих заведомо реализуемую метрику с данной. В этом контексте жесткость понимается не как тривиальность всех изгибающих полей, а как стационарность положения вершин при такой деформации, когда ребра стационарны, а три фиксированные вершины закреплены так, чтобы исключить твердотельное движение. Доказательство жесткости в таком понимании по схеме Александрова [6] не вызывает затруднений, если воспользоваться теми необходимыми ее модификациями, которые связаны с псевдоевклидовостью объемлющего пространства [1, 7]. Следует обратить внимание на то, что лемма о деформации многогранного угла [6, гл. IV, § 4, лемма 1] возникает в двух вариантах — для многогранных углов с особыми и неособыми вершинами. Как и в евклидовом пространстве, многогранники, вырождающиеся в плоские дважды покрытые области, оказываются нежесткими.

Второй этап доказательства также использует многие результаты А. Д. Александрова и работ [1, 7], однако содержит специфическую для псевдоевклидова пространства трудность. Речь идет о доказательстве равномерной ограниченности семейства многогранников, реализующих последовательность сходящихся многогранных метрик. В евклидовом пространстве такая ограниченность (после закрепления у всех многогранников одной точки) тривиальна. Здесь же простыми поворотами можно вывести некоторые точки многогранника за пределы любой наперед заданной конечной области. Это следует из некомпактности группы поворотов псевдоевклидова пространства (группа Лоренца). Напомним, что ограниченность области псевдоевклидова пространства понимается не в том смысле, что ограничены все псевдоевклидовы расстояния между точками области $((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2)$, а в смысле ограниченности соответствующих евклидовых расстояний в так называемом наложенном пространстве $((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2)$. Для того чтобы добиться равномерной ограниченности (и далее — компактности), нужно исключить враще-

ние с помощью стандартного трехточечного закрепления. Справедлива следующая

Лемма 1. Пусть Φ — чечевицеобразный многогранник, три особые вершины B_1 , B_2 и B_3 которого лежат в плоскости $(x; y)$ псевдоевклидова пространства $E_{(2;1)}^3$ ($ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$) так, что B_1 совпадает с началом координат, а B_2 лежит на оси x . Тогда весь многогранник Φ лежит в области, соответствующей шару наложенного пространства, радиус которого допускает априорную оценку сверху через внутреннюю метрику многогранника Φ .

Доказательство. Пусть Γ — особое ребро поверхности Φ , а γ — сечение поверхности Φ плоскостью $(x; y)$. Поверхность Φ представляет собой объединение двух поверхностей Φ_1 и Φ_2 с положительно определенной (во внешнегеометрическом смысле) метрикой. Пусть γ_1 и γ_2 — части ломаной γ , лежащие соответственно в Φ_1 и Φ_2 . Нетрудно проверить, что ломаная γ_1 является выпуклой на поверхности Φ_1 (это следует из ее выпуклости на плоскости $(x; y)$). Поэтому ломаная γ_1 (быть может, состоящая из нескольких связных компонент) не длиннее части ломаной Γ , стягиваемой ломаной γ_1 . Тот же вывод справедлив и для ломаной γ_2 . Поэтому длина ломаной γ не превосходит длину ломаной Γ , а она в свою очередь оценивается суммой L длин кратчайших, соединяющих все особые вершины B_i . Ломаная γ лежит на плоскости $(x; y)$ и поэтому не выходит за пределы круга радиуса L . Поскольку все опорные плоскости поверхности Φ в неособых точках составляют с плоскостью $(x; y)$ угол не более 45° (в смысле наложенного пространства), то z — координата на поверхности Φ изменяется не более чем на $4L$. Отсюда и следует утверждение леммы.

После доказательства леммы 1 остальные утверждения второго этапа доказательства теоремы реализуемости не вызывают затруднений. Что касается третьего этапа, то, хотя построение непрерывного ряда метрик, соединяющих данную метрику с заведомо реализуемой метрикой простейшего невырожденного многогранника рассматриваемого класса и следует за конструкцией Александрова, оно оказывается громоздким и мы не будем приводить его в этой работе.

§ 2. Сигарообразные поверхности

Другой естественный класс составляют замкнутые выпуклые поверхности, которые вне особых точек B_1 и B_2 имеют в качестве опорных плоскости с индефинитной метрикой. В точках B_1 и B_2 поверхность имеет конические особенности, в которых опорные плоскости могут вырождаться (а также, конечно, иметь метрику положительно определенную или индефинитную); рис. 2.

Опишем метрику на рассматриваемой поверхности. Среди всех кривых, соединяющих две точки C и D на поверхности F , выделим те, малые хорды которых имеют одинаковый знак квадрата длины, и назовем такие кривые *допустимыми*. За *длину допустимой кривой* примем величину, модуль которой равен точной нижней грани сумм модулей длин отрезков аппроксимирующих ее ломаных. Замечательно, что все допустимые кривые оказываются спрямляемыми — существование длины обеспечено невозрастанием (в силу обратного неравенства треугольника) сумм модулей длин при измельчении ломаной и их ограниченности снизу нулем. Вопрос о том, как по модулю длины ввести понятие самой длины, решается с обычным для псевдоевклидова пространства произволом. Среди всех допустимых линий, соединяющих точки C и D , выберем ту, модуль длины которой является наибольшим. Эту линию назовем *длиннейшей*, ее длина будет служить расстоянием между точками C и D на поверхности F (существование длиннейшей доказывается примерно так же, как существование кратчайшей в [6]). Если поверхность F является гладкой в неособых точках, то в этих точках она имеет индефинитную метрику.

Для поверхностей общего типа метрика в неособых точках также является идефинитной в том смысле, что через каждую точку проходит по две кривых с нулевой длиной, которые понимаются как пределы допустимых кривых с мало меняющимися концами, но стремящейся к нулю длиной.

Изучение сигарообразных или, как еще их можно назвать, веретенообразных поверхностей требует некоторого развития тригонометрии псевдоевклидова пространства. Именно, вводится понятие комплексного угла, мнимая часть которого равна $-\pi/2$, умноженному на число изотропных направлений, которые необходимо пересечь, если совмещать вращением векторы, между которыми подсчитывается угол. Угол между достаточно близкими векторами является действительным и совпадает с обычным углом между векторами в псевдоевклидовом пространстве. Более подробно комплексный угол изучен в [1, 8], свойства действительной части угла для неближких векторов рассмотрены в [9].

Для веретенообразных поверхностей, так же как и для чечевицеобразных, удастся решить задачи Минковского и бесконечно малых изгибаний. Рассматриваемые поверхности жесткие и могут быть восстановлены по внешней кривизне при выполнении известного необходимого условия

$$\iint \frac{n d\sigma}{K(n)} = 0$$

(точные формулировки и доказательство см. в [10]).

Обратимся теперь к задаче реализуемости многогранной метрики в классе веретенообразных поверхностей. Понятие многогранной метрики для этих поверхностей формулируется аналогично понятию многогранной метрики для чечевицеобразных поверхностей с тем отличием, что теперь имеются лишь две особые вершины, а в гладких точках метрика идефинитна. В неособых вершинах многогранная метрика должна иметь отрицательную кривизну.

Теорема. *Всякая сигарообразная многогранная метрика отрицательной кривизны реализуема в псевдоевклидовом пространстве в виде сигарообразного многогранника.*

Доказательство проводится по плану, аналогичному плану доказательства теоремы А. Д. Александрова о реализуемости выпуклой многогранной метрики в евклидовом пространстве. В предыдущем параграфе мы описывали первые два этапа этого доказательства. Для рассматриваемого случая они проведены в работе [7]. Укажем только на некоторые тонкости, которые встречаются при их проведении. При расстановке знаков на ребрах деформирующегося многогранного угла в лемме 3 [6, гл. VI, § 4] следует иметь в виду, что в момент перелома плоской грани возникающий двугранный угол имеет бесконечную действительную часть, а его мнимая часть меняется скачком. Следует принимать во внимание при расстановке знаков знак приращения мнимой части угла. Другое обстоятельство связано с самим понятием жесткости для многогранников, ребра которых могут быть изотропны. Оно оказывается более сложным, чем обычное, и при последовательном развитии требует в процессе деформации использования не только теории гладких неявных функций, но и неявных функций, имеющих ровно $1/2$ производной по Гельдеру. Для того чтобы избежать построения специальной теории для решения частного вопроса, проще изучать процесс деформации лишь для многогранников, не имеющих изотропные ребра и диагонали. Далее мы поступаем следующим образом. Пусть при деформации нам необходимо сменить знак квадрата длины одного из ребер развертки. Доведем деформацию до того момента, когда интересующее нас ребро станет изотроп-

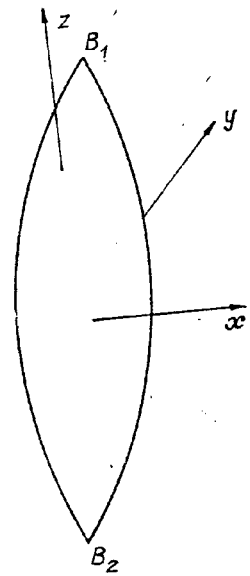


Рис. 2.

ным, и реализуем соответствующий многогранник (возможность этого обеспечивается результатами [7]). Деформируем многогранник с изотропным ребром, не обращая внимания на малое изменение метрики, так, чтобы добиться желательного нам знака квадрата длины данного ребра. Далее мы будем применять процесс деформации к полученному таким образом многограннику (это рассуждение аналогично тому месту леммы 2 [6, гл. VI, § 7], где рассматривается возникновение вершины на плоскости деформирующегося многогранника). Теперь для доказательства сформулированной теоремы нам осталось построить непрерывный ряд метрик, соединяющий данную метрику с заведомо реализуемой метрикой, которая имеет лишь три неособые вершины (простейший невырожденный многогранник рассматриваемого класса). Процесс соединения метрик строится, конечно, индукцией по числу вершин. Возникающие при этом проблемы с вырожденными многогранниками и с деформацией многогранного угла, близкого к плоскости, решаются аналогично рассуждениям лемм 2 и 3 в [6, гл. VI, § 7]. Однако при выкладках типа тех, которые приведены на с. 212 в [6], необходимо, разумеется, воспользоваться формулами псевдоевклидовой тригонометрии. Это заставляет рассмотреть случаи различных знаков квадратов длин сторон треугольника, но никак не меняет сам результат.

Итак, нам осталось описать процесс, посредством которого из развертки можно удалить одну вершину. Для построения этого процесса заметим, что наша метрика имеет отрицательную кривизну и в силу свойств индефинитных метрик она, в некотором смысле, является антиподом выпуклой метрики. Поэтому теперь нам нужно не подклеивать недостающий угол вокруг избранной вершины, а наоборот — отрезать лишний. Зафиксируем вершину нашей многогранной метрики, которая является неособой и имеет минимальную по абсолютной величине кривизну. Обозначим эту вершину A_1 . Пусть A_2 — ближайшая к A_1 неособая вершина. Соединим вершины A_1 и A_2 разрезом и построим в точке A_2 угол, симметричный разрезу и достаточный для того, чтобы после вырезания такого угла точка A_2 стала плоской. Возьмем на сторонах этого угла переменные точки X' и X'' , равноудаленные от точки A_2 . Будем постепенно увеличивать расстояние между точками X' и X'' и точкой A_2 , выбрасывая из метрики треугольники A_1A_2X' и A_1A_2X'' . Заметим, что в силу обратного неравенства треугольника при этом точка X , представляющая собой отождествленные точки X' и X'' и заменяющая на деформированной метрике вершину A_2 , не удаляется от вершины A_1 . Поэтому она продолжает оставаться ближайшей к A_1 вершиной, так что мы всегда сможем построить на нашей метрике достаточно большие плоские треугольники, чтобы в точке A_1 оказалась сосредоточенной нулевая кривизна. Доказательство теоремы реализуемости закончено.

Класс веретенообразных поверхностей интересен и тем, что в нем можно надеяться на достаточно простое и детальное изучение свойств негладких (в неособых точках) поверхностей. Для других классов такое изучение в настоящее время затруднено отсутствием аналогов известной леммы Буземанна — Феллера (см. [6]). В данном случае обобщение возможно, хотя оно и не столь сильно, как лемма Буземанна — Феллера. Тем не менее его, по-видимому, достаточно для доказательства сходимости метрик сходящихся поверхностей.

Перейдем к точным формулировкам. Рассмотрим веретенообразную поверхность F и две точки C и D на ней и такие, что их можно соединить допустимой кривой с отрицательным квадратом длин малых хорд. Тогда в силу большего выбора модуль расстояния между точками C и D в пространстве не меньше модуля расстояния между этими точками на поверхности F . Отсюда вытекает

Лемма 2. *Если точки C и D достаточно близки к поверхности F в смысле наложенного пространства, а их проекции C' и D' на F можно соединить допустимой кривой с отрицательным квадратом длин малых хорд, то модуль расстояния между точками C и D в пространстве не*

меньше модуля расстояния между точками C' и D' на поверхности F .

Степень близости точек к поверхности не равномерна и зависит от выбора самих точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов Д. Д. Поверхности в псевдоевклидовом пространстве // Проблемы геометрии.— М.: ВИНТИ, 1980.— Т. 11.— С. 177—201.
2. Совертков П. И. О гауссовой кривизне поверхности в псевдоевклидовом пространстве $E_{n-1,1}$ // Вопросы дифференциальной геометрии «в целом».— 1983.— С. 104.— 108.
3. Соколов Д. Д. О регулярности выпуклых поверхностей с дефинитной метрикой в трехмерном псевдоевклидовом пространстве // Проблемы геометрии.— М.: ВИНТИ, 1977.— Т. 8.— С. 200—221.
4. Галеева Р. Ф., Пелипенко В. В., Соколов Д. Д. О бесконечно малых изгибаниях поверхностей в псевдоевклидовом пространстве.— Успехи мат. наук.— 1982.— Т. 37, № 5.— С. 175—176.
5. Ильхамов У. О чечевицеобразных многогранниках в псевдоевклидовом пространстве // Сборник научных трудов.— Ташкент, 1986.— С. 27—31.
6. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.; Л.: ОГИЗ, 1948.
7. Гайдалович В. Г., Соколов Д. Д. О выпуклых многогранниках с индефинитной метрикой // Вестник МГУ. Сер. мех., мат.— 1986.— № 3.— С. 41—54.
8. Гайдалович В. Г., Соколов Д. Д. О понятии угла между векторами в псевдоевклидовом пространстве // Сборник научных трудов ТашПИ.— Ташкент, 1986.— С. 24—26.
9. Галеева Р. Ф., Соколов Д. Д. О геометрической интерпретации решений некоторых нелинейных уравнений математической физики // Исследования по теории поверхностей в римановых пространствах.— Л., 1984.— С. 8—22.
10. Соколов Д. Д., Гайдалович В. Г. О замкнутых выпуклых поверхностях в псевдоевклидовом пространстве // Докл. АН УзССР.— 1985.— № 5.— С. 9—10.

РАВНОМЕРНО СУММИРУЕМЫЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ II. ВОЗМУЩЕНИЕ ПОЛУГРУПП

В. В. ИВАНОВ

Важным разделом теории однопараметрических полугрупп линейных операторов, существенно расширяющим сферу ее приложений, является теория возмущений полугрупп. Основы этой теории были заложены Р. Филлипсом [1, 2]. Им выделен и изучен достаточно широкий класс возмущающих операторов, предложен метод построения возмущенной полугруппы с помощью специальных «усредняющих» рядов и получены ответы на некоторые качественные вопросы теории возмущений для полугрупп абелевского типа в банаховых пространствах. Исследования, начатые Р. Филлипсом, были продолжены в различных направлениях многими авторами (библиография имеется, например, в обзоре [3]).

В этой работе предлагается некоторая модификация подхода Р. Филлипса к решению задач теории возмущений. Вместо традиционного для теории полугрупп в банаховых пространствах метода преобразования Лапласа применяется локальный его вариант и связанное с ним понятие квазирезольвенты линейного оператора [4—6]. Это позволяет, в частности, изучать возмущения полугрупп, действующих в произвольных локально выпуклых пространствах. Другая характерная черта предлагаемого способа построения возмущенной полугруппы состоит в том, что он опирается лишь на слабую сходимость усредняющих рядов (точнее, сходимость их в смысле теории распределений). Поскольку такая сходимость — явление, более частое, чем сходимость поточечная, то расширяются и возможности построения, по крайней мере, обобщенных решений задач Коши, отвечающих возмущенным операторам. Отмеченное обстоятельство может быть полезным при изучении полугрупп с худшими свойствами, чем те,