

меньше модуля расстояния между точками C' и D' на поверхности F . Степень близости точек к поверхности не равномерна и зависит от выбора самих точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соколов Д. Д. Поверхности в псевдоевклидовом пространстве // Проблемы геометрии.— М.: ВИНТИ, 1980.— Т. 11.— С. 177—201.
2. Совертков П. И. О гауссовой кривизне поверхности в псевдоевклидовом пространстве $E_{n-1,1}$ // Вопросы дифференциальной геометрии «в целом».— 1983.— С. 104.— 108.
3. Соколов Д. Д. О регулярности выпуклых поверхностей с дефинитной метрикой в трехмерном псевдоевклидовом пространстве // Проблемы геометрии.— М.: ВИНТИ, 1977.— Т. 8.— С. 200—221.
4. Галеева Р. Ф., Пелипенко В. В., Соколов Д. Д. О бесконечно малых изгибаниях поверхностей в псевдоевклидовом пространстве.— Успехи мат. наук.— 1982.— Т. 37, № 5.— С. 175—176.
5. Ильхамов У. О чечевицеобразных многогранниках в псевдоевклидовом пространстве // Сборник научных трудов.— Ташкент, 1986.— С. 27—31.
6. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей.— М.; Л.: ОГИЗ, 1948.
7. Гайдалович В. Г., Соколов Д. Д. О выпуклых многогранниках с индефинитной метрикой // Вестник МГУ. Сер. мех., мат.— 1986.— № 3.— С. 41—54.
8. Гайдалович В. Г., Соколов Д. Д. О понятии угла между векторами в псевдоевклидовом пространстве // Сборник научных трудов ТашПИ.— Ташкент, 1986.— С. 24—26.
9. Галеева Р. Ф., Соколов Д. Д. О геометрической интерпретации решений некоторых нелинейных уравнений математической физики // Исследования по теории поверхностей в римановых пространствах.— Л., 1984.— С. 8—22.
10. Соколов Д. Д., Гайдалович В. Г. О замкнутых выпуклых поверхностях в псевдоевклидовом пространстве // Докл. АН УзССР.— 1985.— № 5.— С. 9—10.

РАВНОМЕРНО СУММИРУЕМЫЕ ПОЛУГРУППЫ ОПЕРАТОРОВ II. ВОЗМУЩЕНИЕ ПОЛУГРУПП

В. В. ИВАНОВ

Важным разделом теории однопараметрических полугрупп линейных операторов, существенно расширяющим сферу ее приложений, является теория возмущений полугрупп. Основы этой теории были заложены Р. Филлипсом [1, 2]. Им выделен и изучен достаточно широкий класс возмущающих операторов, предложен метод построения возмущенной полугруппы с помощью специальных «усредняющих» рядов и получены ответы на некоторые качественные вопросы теории возмущений для полугрупп абелевского типа в банаховых пространствах. Исследования, начатые Р. Филлипсом, были продолжены в различных направлениях многими авторами (библиография имеется, например, в обзоре [3]).

В этой работе предлагается некоторая модификация подхода Р. Филлипса к решению задач теории возмущений. Вместо традиционного для теории полугрупп в банаховых пространствах метода преобразования Лапласа применяется локальный его вариант и связанное с ним понятие квазирезольвенты линейного оператора [4—6]. Это позволяет, в частности, изучать возмущения полугрупп, действующих в произвольных локально выпуклых пространствах. Другая характерная черта предлагаемого способа построения возмущенной полугруппы состоит в том, что он опирается лишь на слабую сходимость усредняющих рядов (точнее, сходимость их в смысле теории распределений). Поскольку такая сходимость — явление, более частое, чем сходимость поточечная, то расширяются и возможности построения, по крайней мере, обобщенных решений задач Коши, отвечающих возмущенным операторам. Отмеченное обстоятельство может быть полезным при изучении полугрупп с худшими свойствами, чем те,

что рассмотрены в настоящей работе. Такие полугруппы нередко порождаются, например, дифференциальными операторами, в том числе с постоянными коэффициентами. Так, многие из указанных операторов являются генераторами полугрупп с несуммируемыми (и любыми степенными) особенностями в нуле [7], другие же приводят к полугруппам-распределениям, впервые введенным и изученным Ж. Лионсом [8]. Впрочем, при исследовании устойчивости столь общих классов полугрупп возникает ряд дополнительных вопросов, требующих специального изучения. Здесь мы не будем касаться этих вопросов и ограничимся классом равномерно суммируемых полугрупп, особенно удобным для иллюстрации излагаемых ниже соображений и содержащим, насколько мне известно, все типы полугрупп, рассматривавшиеся в классической теории возмущений.

В § 1 приводится формулировка основной теоремы о возмущении равномерно суммируемых полугрупп и обсуждается схема ее доказательства. Необходимые для построения возмущенной полугруппы вспомогательные результаты собраны в § 2. Доказательству основной теоремы посвящен § 3. В § 4 изучается устойчивость некоторых эргодических свойств полугрупп, связанных с поведением абелевских и чезаровских средних. Наконец, в § 5 отдельно исследуется устойчивость непрерывных в нуле полугрупп, для которых рассматривается более широкий класс возмущений, чем для общих равномерно суммируемых полугрупп.

Основные результаты этой работы были сформулированы автором в заметке [9]. Часть утверждений в [9] посвящена вопросам порождения полугрупп. Обоснование их приведено в [10]. Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [10] и содержит подробное изложение результатов второй части заметки [9], относящихся к возмущениям полугрупп.

§ 1. Основная теорема о возмущении равномерно суммируемых полугрупп

В этом параграфе приводится формулировка основной теоремы о возмущении равномерно суммируемых полугрупп линейных операторов в общих локально выпуклых пространствах и излагается схема ее доказательства.

1.1. Терминология и обозначения. Всюду в дальнейшем используются терминология и обозначения работы [10]. В частности, X означает топологическое векторное пространство (вещественное или комплексное — все равно), которое предполагается отделимым, секвенциально полным и локально выпуклым, а $\mathfrak{B}$ — совокупность всех непрерывных на X полунорм. Две мультиномы считаются эквивалентными, если они порождают одну и ту же топологию.

Для любого $\alpha \in [1, \infty]$ класс $\mathcal{L}_\Delta^\alpha$ состоит из всех измеримых на промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$ функций φ , для которых $\|\varphi\|_{\alpha, \Delta} < \infty$, где $\|\varphi\|_{\alpha, \Delta}$ — соответствующая лебеговская норма φ на Δ . Следует считать, что все функции принимают значения в том поле, над которым определено пространство X .

Как и в [10], для линейного оператора C и полунорм p и q полагаем

$$\|C\|_p^q = \sup \{p(Cx) \mid x \in \text{dom } C, q(x) \leq 1\}.$$

Если C действует в $\mathcal{L}_\Delta^\alpha$, а $p = q = \|\cdot\|_{\alpha, \Delta}$, вместо указанного обозначения используется более короткое: $\|C\|_{\alpha, \Delta}$. Для отображения $\mathcal{C}$, имеющего своими значениями операторы, вместо $\|\cdot\|_p^q \circ \mathcal{C}$ удобнее писать $\|\mathcal{C}\|_p^q$. Аналогичным образом мы будем поступать и в других случаях, применяя для операторно-значных отображений обозначения, принятые для операторов.

1.2. Относительно непрерывные операторы. Формулировка основной теоремы. Пусть A и B — линейные операторы, действующие в пространстве X . Оператор B назовем *непрерывным относительно оператора A* или, короче, *A -непрерывным*, если $\text{dom } A \subset \text{dom } B$ и для каждой полунормы

$p \in \mathfrak{P}$ можно указать такую полунорму $q \in \mathfrak{P}$, что $p(Bx) \leq q(x) + q(Ax)$ для всех $x \in \text{dom } A$. Важность для нас этого понятия характеризуется следующим утверждением.

Предложение 1.1. *Предположим, что в пространстве X справедлива теорема о замкнутом графике, оператор A порождает равномерно суммируемую полугруппу в X , а линейный оператор B определен, по крайней мере, на $\text{dom } A$. Если оператор $A + B$ допускает замыкание, то B непрерывен относительно A .*

Доказательство. Пусть T — полугруппа, порожденная оператором A . Для всякого числа λ определим линейный и непрерывный на X оператор

$$R(\lambda) = \int_0^1 e^{-\lambda t} T(t) dt.$$

Согласно предложению 4.2 из [10] справедливы соотношения

$$R(\lambda)A \subset AR(\lambda) = \lambda R(\lambda) - \text{id} + e^{-\lambda} T(1).$$

Таким образом, оператор $(A + B)R(\lambda)$, как и $AR(\lambda)$, определен на X . Кроме того, он, очевидно, замкнут, а потому и непрерывен. Так как при этом $AR(\lambda) \in L(X)$, то и $BR(\lambda) \in L(X)$. Остается лишь заметить, что если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и

$$\alpha_1 = \frac{e^{\lambda_1}}{e^{\lambda_1} - e^{\lambda_2}}, \quad \alpha_2 = \frac{e^{\lambda_2}}{e^{\lambda_2} - e^{\lambda_1}},$$

то для всякого элемента $x \in \text{dom } A$, как вытекает из предыдущих соотношений,

$$Bx = \alpha_1 BR(\lambda_1)(\lambda_1 x - Ax) + \alpha_2 BR(\lambda_2)(\lambda_2 x - Ax).$$

Предложение доказано.

Поскольку в дальнейшем рассматриваются лишь такие возмущения B оператора A , для которых $\text{dom } A \subset \text{dom } B$, то доказанное утверждение оправдывает включение в условия соответствующих теорем требования относительной непрерывности возмущения.

Теорема 1.2. *Пусть A — производящий оператор равномерно суммируемой полугруппы T , оператор B непрерывен относительно A и для некоторых числа $a > 0$ и мультиномы Ω , эквивалентной $\mathfrak{P}$, выполнено условие*

$$\|BT| \text{dom } A\|_q^q \in \mathcal{L}_{(0,a)}^1, \quad q \in \Omega.$$

Тогда оператор $A + B$ также порождает некоторую равномерно суммируемую полугруппу.

1.3. Классический метод построения возмущенной полугруппы. В основе его лежит следующее наблюдение. Если забыть о некоторых деталях, то исходная полугруппа T — это решение уравнения $T' = AT$, и $T(0) = \text{id}$. Так как искомая полугруппа S определяется (неоднородным относительно A) уравнением $S' = AS + f$, где $f = BS$, причем $S(0) = \text{id}$, то $S = T + T * f$, где $*$ означает свертку. Итак, мы приходим к соотношению $S = T + T * BS$, итерируя которое последовательно получаем

$$S = T + T * BT + T * BT * BS,$$

$$S = T + T * BT + T * BT * BT + T * BT * BT * BS$$

и т. д. Таким образом, естественно попытаться найти S в виде ряда

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S_n,$$

где $S_0 = T$ и $S_n = T * BS_{n-1}$ для всех $n \geq 1$. В банаховом пространстве действительно удастся доказать, что при выполнении, например, условий сформулированной выше теоремы ряд, определяющий отображение S ,

сходится, причем семейство (ограниченных) операторов $S(t)$ равномерно суммируемо по t в нуле, а на бесконечности растет не быстрее некоторой экспоненты. Тем самым, S допускает преобразование Лапласа, которое, как и следовало ожидать, оказывается резольвентой оператора $A + B$. Это, как известно, и означает, что S — полугруппа, а $A + B$ — ее производящий оператор.

Для более широких классов полугрупп и возмущений или же в случае ненормируемого пространства при построении возмущенной полугруппы по указанной схеме определенные проблемы возникают уже на первом этапе — при составлении операторов $S_n(t)$. Более существенные трудности связаны с доказательством сходимости ряда $\sum S_n(t)$. Наконец, если все же удастся построить таким путем отображение S , в ненормируемом пространстве оно может иметь сколь угодно сильный рост на бесконечности и преобразование Лапласа посчитать нельзя. Поэтому даже при тех условиях (локального характера), при которых в случае банахова пространства возмущенная полугруппа может быть построена стандартным способом, для решения этой задачи в локально выпуклом пространстве необходимы иные методы.

1.4. Схема доказательства основной теоремы. Предлагаемый здесь способ построения возмущенной полугруппы представляет собой некоторую модификацию изложенного выше метода Р. Филлипса и заключается в следующем.

Прежде всего, вместо «точечных» отображений S_n рассматриваются соответствующие обобщенные операторно-значные функции. А именно, если φ — пробная функция (с носителем, лежащим слева от точки a , указанной в теореме), то полагаем

$$S_0(\varphi) = \int_0^a \varphi(t) T(t) dt.$$

Чтобы понять, как следует определить дальнейшие слагаемые $S_n(\varphi)$ интересующего нас ряда, предположим временно, что у нас есть точечные отображения S_{n-1} и S_n . Тогда, пользуясь вместо формулы $S_n = T * BS_{n-1}$ эквивалентным, но более удобным в дальнейшем соотношением $S_n = S_{n-1} * BT$, придем к следующим равенствам:

$$\begin{aligned} S_n(\varphi) &= \int_0^a \varphi(t) S_n(t) dt = \int_0^a \varphi(t) \int_0^t S_{n-1}(t-s) BT(s) ds dt = \\ &= \int_0^a \int_0^{a-s} \varphi(t+s) S_{n-1}(t) dt BT(s) ds = \int_0^a S_{n-1}(\varphi_s) BT(s) ds, \end{aligned}$$

где φ_s означает левый сдвиг функции φ на s . Итак, мы выразили обобщенную функцию S_n через обобщенную же функцию S_{n-1} , минуя соответствующие точечные отображения.

Теперь составляется ряд

$$\bar{S}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\varphi),$$

сходимость которого может быть установлена при довольно общих условиях (менее жестких, чем в обсуждаемой теореме). В силу сказанного в предыдущем разделе, нет ничего удивительного в том, что обобщенная функция $\bar{S}$ оказывается фундаментальным решением задачи Коши, отвечающей оператору $A + B$. Точнее, если φ — гладкая функция, для которой $\varphi(a) = \varphi'(a) = 0$, то

$$\bar{S}(\varphi) (A + B) \subset (A + B) \bar{S}(\varphi) = -\varphi(0) - \bar{S}(\varphi').$$

Эти соотношения, в частности, означают, что преобразование Лапласа гладкой срезки распределения $\bar{S}$ есть квазирезольвента оператора

$A + B$. Подробнее, пусть b — точка из $(0, a)$, а h — гладкая функция, равная единице слева от b и нулю — справа от a . Если $\bar{P}$ — преобразование Лапласа функции $h\bar{S}$, т. е. $\bar{P}(\lambda) = \bar{S}(he^{-\lambda(\cdot)})$, то

$$\bar{P}(\lambda)(\lambda - A - B) = (\lambda - A - B)\bar{P}(\lambda) = \text{id} + \bar{\mu}(\lambda),$$

где $\bar{\mu}$ — преобразование Лапласа обобщенной функции $h'\bar{S}$, носитель которой содержится в $[b, a]$. Таким образом, $\bar{P}$ — квазирезольвента оператора $A + B$ (причем, того общего вида, что был рассмотрен в [10]).

В условиях теоремы 1.2 доказывается, что оператор $A + B$ замкнут, а его квазирезольвента $\bar{P}$ удовлетворяет оценкам, позволяющим (на основании теоремы 4.3 из [10]) заключить, что $A + B$ — производящий оператор некоторой равномерно суммируемой полугруппы.

И последнее замечание. Если S — полугруппа, порожденная оператором $A + B$, полагая

$$S(\varphi) = \int_0^a \varphi(t) S(t) dt,$$

мы получим еще одно (кроме $\bar{S}$) фундаментальное решение задачи Коши, соответствующей оператору $A + B$. Это позволяет установить равенство $S(\varphi) = \bar{S}(\varphi)$ и, тем самым, выразить возмущенную полугруппу через исходную и возмущающий оператор. Кстати, в рассматриваемом случае, как будет показано, распределения S и $\bar{S}$ определены и совпадают на классе $\mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$. Этими обстоятельствами мы воспользуемся при исследовании устойчивости некоторых дополнительных свойств равномерно суммируемых полугрупп.

§ 2. Предварительные замечания и вспомогательные результаты

Чтобы разгрузить доказательство основной теоремы, рассмотрим предварительно ряд вспомогательных понятий и отметим несколько простых, но полезных в дальнейшем фактов. Не исключено, что некоторые из них окажутся новыми.

2.1. Операторы сдвига в лебеговских пространствах. Пусть Δ — промежуток в $\mathbb{R}$, а φ — функция на нем. Если $t \in \mathbb{R}$, то $\sigma_\Delta(t)\varphi$ будет означать функцию на Δ , принимающую в точке $s \in \Delta$ значение $\varphi(t+s)$, если $t+s \in \Delta$, и значение 0 — в противном случае. Условимся индекс Δ (в этом и подобных случаях) заменять буквой a , если Δ — промежуток с концами 0 и a , и опускать совсем, если $\Delta = \mathbb{R}$.

Подчеркнем, что лишь для $\Delta = \mathbb{R}$ семейство $\sigma = \sigma_\Delta$ представляет собой однопараметрическую группу. Если же $\Delta \neq \mathbb{R}$, то равенство $\sigma_\Delta(t+s) = \sigma_\Delta(t)\sigma_\Delta(s)$ справедливо только для чисел t и s одного знака. Далее, если рассматривать σ_Δ как семейство операторов в $\mathcal{L}_\Delta^1$, оно равномерно непрерывно (нормы не больше единицы) и сильно непрерывно: для любых $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{L}_\Delta^1$, как хорошо известно,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|\sigma_\Delta(t)\varphi - \sigma_\Delta(t_0)\varphi\|_{1,\Delta} = 0.$$

Полезно отметить также следующий факт.

Предложение 2.1. Если $t_0 \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in \mathcal{L}_\Delta^\infty$, то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|\psi(\sigma_\Delta(t)\varphi - \sigma_\Delta(t_0)\varphi)\|_{1,\Delta} = 0$$

для всякой функции $\psi \in \mathcal{L}_\Delta^1$.

Доказательство достаточно провести для $\Delta = \mathbb{R}$, но в таком случае утверждение немедленно вытекает из предыдущих замечаний и

неравенства

$$\|\psi(\sigma(t)\varphi - \sigma(t_0)\varphi)\|_1 \leq \|\sigma(t)\varphi\|_\infty \|\sigma(t - t_0)\psi - \psi\|_1 + \|\sigma(t - t_0)(\psi\sigma(t_0)\varphi) - \psi\sigma(t_0)\varphi\|_1.$$

Предложение доказано.

Приведем, наконец, одно следствие предложения 2.1, которое неоднократно потребуется нам в дальнейшем.

Предложение 2.2. Для всякой функции $\varphi \in \mathcal{L}_\Delta^\infty$ можно построить такую последовательность $\{\varphi_n\}$ непрерывных на Δ функций, что $\|\varphi_n\|_{\infty, \Delta} \leq \|\varphi\|_{\infty, \Delta}$ и $\|\psi(\varphi_n - \varphi)\|_{1, \Delta} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $\psi \in \mathcal{L}_\Delta^1$.

Доказательство. Можно считать, что $\Delta = \mathbb{R}$. Выберем функцию $h_n \geq 0$ из $\mathcal{L}^1$, для которой $\text{supp}(h_n) \subset (0, 1/n)$ и $\|h_n\|_1 = 1$, и положим $\varphi_n = \varphi * h_n$. Ясно, что последовательность $\{\varphi_n\}$ требуемая. Предложение доказано.

2.2. Распределения на пространстве ограниченных функций. Нас будут особенно интересовать X -значные распределения F , определенные на классе $\mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$, которые удовлетворяют следующему условию:

для любой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ можно указать такую

$$(*) \text{ функцию } \xi_p \in \mathcal{L}_{(0,a)}^1, \text{ что } p(F(\varphi)) \leq \|\xi_p \varphi\|_{1,a} \text{ для всех } \varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty.$$

Из предложения 2.1 непосредственно вытекает

Предложение 2.3. Если распределение $F: \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty \rightarrow X$ удовлетворяет условию (*), то для всякой функции $\varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$ отображение $F \circ (\delta_\Delta \varphi): \mathbb{R} \rightarrow X$ непрерывно.

Предположим, что f — линейный непрерывный функционал на $C[0, a]$ и для некоторых $b \in [0, a]$ и $M \geq 0$ при всех $\lambda > 0$ выполняется оценка $|f(e^{-\lambda(\cdot)})| \leq M e^{-\lambda b}$. Тогда $\text{supp } f \subset [b, a]$, т. е. $f(\varphi) = 0$ для всякой функции $\varphi \in C_{[0,a]}$, равной нулю на отрезке $[b, a]$. Аналогичное утверждение для функционалов на $\mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$, разумеется, неверно. Однако справедливо

Предложение 2.4. Пусть линейное отображение $F: \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty \rightarrow X$ удовлетворяет условию (*), а $b \in (0, a)$. Если для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ можно указать $M_p \geq 0$ так, что $p(F(e^{-\lambda(\cdot)})) \leq M_p e^{-\lambda b}$ для всех $\lambda > 0$, то $\text{supp } F \subset [b, a]$, т. е. $F(\varphi) = 0$ для любой функции $\varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$, равной нулю почти всюду на $[b, a]$.

Доказательство. Так как отображение F , очевидно, непрерывно относительно стандартной топологии в $\mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$, то в силу предыдущего замечания $F(\varphi) = 0$ для всякой непрерывной на $[0, a]$ функции φ с носителем вне $[b, a]$. Пусть теперь $\varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$. Построим последовательность $\{\varphi_n\}$ непрерывных на $[0, a]$ функций, удовлетворяющую условиям, сформулированным в предложении 2.2. Если $\varphi = 0$ почти всюду на $[b, a]$, то можно, конечно, считать, что и $\text{supp}(\varphi_n) \subset [0, b]$ для всех n . Итак, если $p \in \mathfrak{P}$, то

$$p(F(\varphi)) = p(F(\varphi) - F(\varphi_n)) \leq \|\xi_p(\varphi - \varphi_n)\|_{1,a},$$

откуда $p(F(\varphi)) = 0$. Предложение доказано.

2.3. Свертка. Для любых функций φ и ψ из $\mathcal{L}_{(0,a)}^1$ свертка $\varphi * \psi$ представляет собой также функцию из $\mathcal{L}_{(0,a)}^1$, определяемую равенством

$$(\varphi * \psi)(t) = \int_0^t \varphi(t-s) \psi(s) ds.$$

Для $n \geq 2$ положим $\psi^{*n} = \psi * \psi^{*(n-1)}$, где $\psi^{*1} = \psi$. Условимся также считать, что $\varphi * \psi^{*0}$ — это φ .

Предложение 2.5. Для всякой функции $\psi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^1$, где $0 < a < \infty$, ряд $\sum_{n=1}^\infty \psi^{*n}$ абсолютно сходится в пространстве $\mathcal{L}_{(0,a)}^1$.

Доказательство. Найдем такое число $\lambda > 0$, что $\|\tilde{\psi}\|_{1,\alpha} < 1$, где $\tilde{\psi} = e^{-\lambda(\cdot)}\psi$. Так как очевидно, $\tilde{\psi}^{*n} = e^{-\lambda(\cdot)}\psi^{*n}$, то

$$\|\psi^{*n}\|_{1,\alpha} = \|e^{\lambda(\cdot)}\tilde{\psi}^{*n}\|_{1,\alpha} \leq e^{\lambda\alpha} (\|\tilde{\psi}\|_{1,\alpha})^n,$$

откуда и вытекает высказанное утверждение. Предложение доказано.

Замечание. Из этого предложения (и теоремы Леви) следует, что для любой функции φ , локально интегрируемой на $(0, \infty)$, ряд $\sum \varphi^{*n}$ *почти* *точечно* сходится почти всюду на $(0, \infty)$ к некоторой локально интегрируемой функции.

2.4. Векторное интегрирование. Поскольку в данной работе рассматриваются локально выпуклые пространства, удовлетворяющие лишь условию секвенциальной полноты, а интегрирование отображений в пределах таких пространств — занятие довольно деликатное, представляется необходимым уточнить, в каком смысле понимаются здесь интегралы, а также отметить некоторые условия, при которых интегрирование возможно.

Для наших целей достаточно «слабых» лебеговских интегралов. Точнее, отображение f промежутка Δ в пространство X будем считать интегрируемым, если $x' \circ f \in \mathcal{L}_\Delta^1$ для любого функционала $x' \in X'$ и существует такой элемент $\int_\Delta f \in X$, называемый *интегралом f на Δ* , что

$$x' \left(\int_\Delta f \right) = \int_\Delta x' \circ f, \quad x' \in X'.$$

Отображение $f: \Delta \rightarrow X$ назовем *абсолютно интегрируемым* на Δ , если f имеет интеграл на каждом промежутке, лежащем в Δ , и $p \circ f \in \mathcal{L}_\Delta^1$ для всякой полунормы $p \in \mathfrak{P}$.

В секвенциально полном пространстве X найдется место интегралу любого непрерывного на компактном промежутке X -значного отображения (в этом случае проходит конструкция римановского интеграла, который будет, очевидно, и слабым интегралом). Далее, если Δ можно представить в виде объединения последовательности таких промежутков, что на каждом из них отображение f абсолютно интегрируемо, и $p \circ f \in \mathcal{L}_\Delta^1$ для всех $p \in \mathfrak{P}$, то f абсолютно интегрируемо и на Δ . Наконец, предложение 2.2 позволяет расширить запас интегрируемых отображений настолько, что этого уже вполне достаточно для наших целей. А именно, если отображение $f: \Delta \rightarrow X$ абсолютно интегрируемо, а $\varphi \in \mathcal{L}_\Delta^1$, то и отображение φf абсолютно интегрируемо на Δ . Для доказательства нужно построить такую последовательность $\{\varphi_n\}$ простых функций на Δ , что $\|\varphi(\varphi_n - \varphi)\|_{1,\Delta} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $\varphi \in \mathcal{L}_\Delta^1$.

2.5. Регуляризаторы. Пусть C — линейный оператор в X . Оператор $Q \in L(X)$ будем называть *регуляризатором* оператора C , если

$$QC \subset CQ \in L(X) \text{ и } C(CQ + \text{id}) \in L(X).$$

Например, если C имеет регулярную точку λ , то резольвента $R(\lambda, C)$ — регуляризатор оператора C . Еще один пример, особенно важный для дальнейшего. Пусть C — производящий оператор некоторой, скажем, равномерно суммируемой полугруппы U в пространстве X . Тогда для любой достаточно гладкой функции χ , равной единице в точке 0 и имеющей ограниченный справа носитель, оператор Q , определяемый равенством

$$Qx = \int_0^\infty \chi(t) U(t) x dt, \quad x \in X,$$

является регуляризатором оператора C (это вытекает, например, из предложения 3.8 работы [10]).

Нам будут полезны следующие два утверждения об операторах, обладающих регуляризаторами.

Предложение 2.6. Пусть C — линейный оператор в X , обладающий регуляризатором, Δ — промежуток в $\mathbb{R}$, а $f: \Delta \rightarrow X$ — такое отображение, что $\text{im } f \subset \text{dom } C$, причем f и Cf — интегрируемые на Δ отображения. Тогда интеграл отображения f принадлежит $\text{dom } C$, а для всякого C -непрерывного оператора D (в частности, для $D = C$) отображение Df также интегрируемо на Δ и справедливо равенство

$$D \int_{\Delta} f = \int_{\Delta} Df.$$

Доказательство. Пусть прежде $L \in L(X)$. Для интегрируемого на Δ отображения g и функционала $x' \in X'$ имеем

$$\left\langle L \int_{\Delta} g, x' \right\rangle = \left\langle \int_{\Delta} g, L' x' \right\rangle = \int_{\Delta} \langle g, L' x' \rangle = \int_{\Delta} \langle Lg, x' \rangle,$$

т. е. отображение Lg в этом случае автоматически оказывается интегрируемым на Δ и

$$\int_{\Delta} Lg = L \int_{\Delta} g.$$

Пусть теперь C — произвольный оператор, Q — его регуляризатор, а f удовлетворяет условиям предложения. Так как $f = (CQ + \text{id})f - QCf$, то, по доказанному,

$$\int_{\Delta} f = (CQ + \text{id}) \int_{\Delta} f - Q \int_{\Delta} Cf \in \text{dom } C.$$

Если оператор D непрерывен относительно C , то, очевидно, $DQ \in L(X)$ и $D(CQ + \text{id}) \in L(X)$. Учитывая, что $Df = D(CQ + \text{id})f - DQCf$ и

$$Q \int_{\Delta} Cf = \int_{\Delta} QCf = \int_{\Delta} CQf = CQ \int_{\Delta} f,$$

приходим к требуемым выводам: отображение Df интегрируемо на Δ и

$$\int_{\Delta} Df = D(CQ + \text{id}) \int_{\Delta} f - DQ \int_{\Delta} Cf = D(CQ + \text{id}) \int_{\Delta} f - DCQ \int_{\Delta} f = D \int_{\Delta} f.$$

Предложение доказано.

Предложение 2.7. Если линейный оператор, обладающий регуляризатором, допускает замыкание, он замкнут.

Доказательство. Пусть C — оператор в X , а Q — его регуляризатор. Так как образы операторов Q и $CQ + \text{id}$ лежат в $\text{dom } C$, а с другой стороны, $x = (CQ + \text{id})x + Q(-Cx)$ для всех $x \in \text{dom } C$, то

$$\text{dom } C = \text{im}(CQ + \text{id}) + \text{im } Q.$$

Если C допускает замыкание, то оператор Q является регуляризатором и для $\text{cl } C$. Это вытекает из соотношений

$$Q \text{cl } C \subset \text{cl}(QC) \subset \text{cl}(CQ) = CQ = (\text{cl } C)Q.$$

Таким образом, $\text{dom}(\text{cl } C) = \text{im}((\text{cl } C)Q + \text{id}) + \text{im } Q = \text{im}(CQ + \text{id}) + \text{im } Q = \text{dom } C$, т. е. $C = \text{cl } C$. Предложение доказано.

§ 3. Построение возмущенной полугруппы

Теперь можно приступить к доказательству основной теоремы о возмущении равномерно суммируемых полугрупп, сформулированной в § 1.

3.1. Развернутая формулировка основной теоремы. Приведем прежде более подробную формулировку теоремы 1.2, указав, каким образом возмущенная полугруппа выражается через исходную, и оценив ее рост в нуле.

Теорема 3.1. Рассмотрим равномерно суммируемую полугруппу T в пространстве X , ее производящий оператор A и линейный оператор B , непрерывный относительно A . Предположим, что существуют число $a > 0$ и мультинорма $\mathfrak{Q}$, эквивалентная $\mathfrak{P}$, такие, что для каждой полунормы $q \in \mathfrak{Q}$ функция $\psi_q = \|BT| \operatorname{dom} A\|_q^q$ интегрируема на $(0, a)$. Тогда оператор $A+B$ также порождает в X некоторую равномерно суммируемую полугруппу S . При этом для любых $x \in X$ и $\varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$ справедливо представление

$$\int_0^a \varphi(t) S(t) x dt = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\varphi) x,$$

где $S_n(\varphi)$ — операторы из $L(X)$, однозначно определяемые соотношениями

$$S_0(\varphi) x = \int_0^a \varphi(t) T(t) x dt, \quad x \in X,$$

$$S_n(\varphi) x = \int_0^a S_{n-1}(\sigma_a(t) \varphi) BT(t) x dt, \quad x \in \operatorname{dom} A, \quad n \geq 1.$$

Кроме того, если для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ выбрана такая полунорма $p_1 \in \mathfrak{Q}$, что функция $\varphi_p = \|T\|_{p_1}^{p_1}$ интегрируема на $(0, a)$, то (почти всюду) на $(0, a)$ справедлива оценка $\|S\|_p^{p_1} \leq \Phi_p$, где $\Phi_p = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_p * \psi_{p_1}^{*n}$ — сумма в $\mathcal{L}_{(0,a)}^1$.

Замечание 1. Сходимость ряда, определяющего функцию Φ_p , следует из предложения 2.5. Если для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ упомянутую выше полунорму $p_1 \in \mathfrak{Q}$ можно выбрать так, что $\|T\|_{p_1}^{p_1} \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\alpha$, где $1 \leq \alpha \leq \infty$, то, очевидно, $\Phi_p \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\alpha$ и, следовательно, $\|S\|_p^{p_1} \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\alpha$. Более того, в этом случае указанное в теореме представление оператора $S(\varphi)$ справедливо не только для существенно ограниченных функций φ , но и для всех φ из класса $\mathcal{L}_{(0,a)}^{\alpha'}$ где $1/\alpha + 1/\alpha' = 1$.

Замечание 2. Для дальнейшего полезно отметить, что при необходимости всегда, как легко понять, можно расширить $\mathfrak{Q}$ настолько, что каждая полунорма из $\mathfrak{P}$ будет мажорироваться некоторой полунормой из $\mathfrak{Q}$.

3.2. Построение возмущенной полугруппы как распределения. Равномерная суммируемость и сильная непрерывность полугруппы T , а также замечания из п. 2.4 позволяют корректно определить отображение $S_0: \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty \rightarrow L(X)$ формулой

$$S_0(\varphi)x = \int_0^a \varphi(t) T(t) x dt, \quad \varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty, \quad x \in X.$$

Вытекающая из условий теоремы оценка

$$p(S_0(\varphi)x) \leq \|\varphi\varphi_p\|_{1,a} p_1(x), \quad p \in \mathfrak{P},$$

показывает, что, во-первых, оператор $S_0(\varphi)$ действительно непрерывен, а во-вторых, семейство $\{S_0(\sigma_a(t)\varphi)\}$ ($t \in \mathbb{R}$) равномерно непрерывно и, согласно предложению 2.3, сильно непрерывно.

Пусть теперь $x \in \operatorname{dom} A$. Отображения Tx и $ATx = TAx$ непрерывны на $(0, \infty)$. Но тогда, в силу A -непрерывности оператора B , и отображение BTx непрерывно, а значит, то же касается и отображения $\mapsto S_0(\sigma_a(t)\varphi)BT(t)x$, $t > 0$. Если заметить еще, что

$$p(S_0(\sigma_a(t)\varphi)BT(t)x) \leq \|\varphi\|_{\infty,a} \|\varphi_p\|_{1,a} \psi_{p_1}(t) p_1(x)$$

для всех $p \in \mathfrak{P}$ и $t \in (0, a)$, то станет очевидным существование в X интеграла

$$S_1(\varphi)x = \int_0^a S_0(\sigma_a(t)\varphi)BT(t)xdt.$$

При этом, если $p \in \mathfrak{P}$, то

$$\begin{aligned} p(S_1(\varphi)x) &\leq \int_0^a \int_0^{a-t} |\varphi(s+t)| \varphi_p(s) ds \psi_{p_1}(t) dt p_1(x) = \\ &= \int_0^a \int_t^a |\varphi(s)| \varphi_p(s-t) ds \psi_{p_1}(t) dt p_1(x) = \int_0^a |\varphi(s)| (\varphi_p * \psi_{p_1})(s) ds p_1(x). \end{aligned}$$

Полученная оценка доказывает непрерывность оператора $S_1(\varphi)$, определенного на секвенциально плотном в X подпространстве $\text{dom } A$ (см. предложение 3.4 из [10]), так что он допускает непрерывное продолжение на X . Если сохранить для этого продолжения обозначение $S_1(\varphi)$, то последняя оценка, разумеется, тоже распространяется на все пространство:

$$p(S_1(\varphi)x) \leq \|\varphi(\varphi_p * \psi_{p_1})\|_{1,a} p_1(x), \quad x \in X, \quad p \in \mathfrak{P}.$$

Итак, мы пришли к такой же ситуации, что и для S_0 , с той лишь разницей, что вместо функции φ_p появилась функция $\varphi_p * \psi_{p_1}$, которая, как и φ_p , интегрируема на $(0, a)$. Если предположить, что обобщенная функция S_{n-1} уже построена, то функция S_n получается из S_{n-1} ровно так же, как функция S_1 получилась из S_0 . Таким образом, доказана

Лемма 3.2. Для всякой функции $\varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$ определены указанные в теореме 3.1 линейные операторы $S_n(\varphi)$, $n \geq 0$. При этом для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ справедлива оценка

$$\|S_n(\varphi)\|_p^{p_1} \leq \|\varphi(\varphi_p * \psi_{p_1}^{*n})\|_{1,a}$$

и, следовательно, семейство операторов $\{S_n(\sigma_a(t)\varphi)\} (t \in \mathbf{R})$ эквинепрерывно и сильно непрерывно.

Из этого утверждения немедленно вытекает

Лемма 3.3. Для любых $x \in X$ и $\varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$ определена сумма

$$\bar{S}(\varphi)x = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\varphi)x.$$

При этом

$$\|\bar{S}(\varphi)\|_p^{p_1} \leq \|\varphi\Phi_p\|_{1,a}$$

для всякой полунормы $p \in \mathfrak{P}$.

Теперь нам предстоит изучить свойства построенного распределения $\bar{S}: \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty \rightarrow L(X)$ и, в частности, доказать, что $\bar{S}$ — обобщенное решение уравнения $\bar{S}' = (A+B)\bar{S}$.

3.3. Свойства построенного распределения. Пусть $\mathcal{D}_a$ означает совокупность всех непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, a]$ функций φ , для которых $\varphi(a) = \varphi'(a) = 0$.

Лемма 3.4. Для любых $\varphi \in \mathcal{D}_a$ и $n \geq 0$ справедливы включения $AS_n(\varphi), BS_n(\varphi) \in L(X)$ и неравенства

$$\|BS_n(\varphi)\|_q^q \leq \|\varphi\psi_q^{*(n+1)}\|_{1,a}, \quad q \in \mathfrak{Q}.$$

Кроме того, имеют место соотношения

$$S_0(\varphi)A \subset AS_0(\varphi) = -\varphi(0) - S_0(\varphi'),$$

$$S_n(\varphi)A + S_{n-1}(\varphi)B \subset AS_n(\varphi) + BS_{n-1}(\varphi) = -S_n(\varphi'), \quad n \geq 1.$$

Доказательство. Из предложения 3.8 работы [10] следует, что $\text{im } S_0(\varphi) \subset \text{dom } A$ и

$$S_0(\varphi)A \subset AS_0(\varphi) = -\varphi(0) - S_0(\varphi').$$

Пользуясь уже знакомыми нам аргументами, а также предложением 2.6, для всякой точки x из $\text{dom } A$ получаем равенство

$$BS_0(\varphi)x = \int_0^a \varphi(t) BT(t)x dt.$$

Таким образом,

$$q(BS_0(\varphi)x) \leq \| \varphi \psi_q \|_{1,a} q(x), \quad q \in \Omega.$$

Из непрерывности операторов $S_0(\varphi)$ и $AS_0(\varphi)$ вытекает непрерывность и оператора $BS_0(\varphi)$, так что последняя оценка справедлива для всех $x \in X$. Итак, для $n=0$ лемма доказана.

Предположим теперь, что все утверждения леммы установлены для $n \leq k-1$, где $k \geq 1$. Можно также считать, что для каждого такого n семейство операторов $\{AS_n(\sigma_a(t)\varphi)\}$ ($t \geq 0$) равномерно непрерывно и сильно непрерывно, поскольку, в силу соотношения

$$AS_0(\sigma_a(t)\varphi) = -\varphi(t) - S_0(\sigma_a(t)\varphi')$$

и леммы 3.2, это верно при $n=0$.

Пусть $x \in \text{dom } A$. Благодаря отмеченному только что обстоятельству, отображение $AS_n(\sigma_a\varphi)BTx$ непрерывно на $(0, \infty)$ и, ввиду имеющих оценок, абсолютно интегрируемо на $(0, a)$. Таким образом, из утверждений леммы для $n=0$ вытекают равенства

$$\begin{aligned} AS_1(\varphi)x &= \int_0^a AS_0(\sigma_a(t)\varphi)BT(t)x dt = \\ &= - \int_0^a (\varphi(t)BT(t)x + S_0(\sigma_a(t)\varphi')BT(t)x) dt = -BS_0(\varphi)x - S_1(\varphi')x. \end{aligned}$$

Если же $k \geq 2$, то, аналогично,

$$\begin{aligned} AS_k(\varphi)x &= \int_0^a AS_{k-1}(\sigma_a(t)\varphi)BT(t)x dt = \\ &= - \int_0^a (BS_{k-2}(\sigma_a(t)\varphi) + S_{k-1}(\sigma_a(t)\varphi'))BT(t)x dt = -BS_{k-1}(\varphi)x - S_k(\varphi')x. \end{aligned}$$

Так как оператор A замкнут, а $BS_{k-1}(\varphi)$ и $S_k(\varphi')$ непрерывны, то равенство

$$AS_k(\varphi)x = -BS_{k-1}(\varphi)x - S_k(\varphi')x,$$

установленное для $x \in \text{dom } A$, распространяется на все элементы $x \in X$.

Для обеспечения индукционного шага необходимо подчеркнуть, что семейство $\{AS_k(\sigma_a(t)\varphi)\}$ ($t \geq 0$) равномерно непрерывно и сильно непрерывно, так как этими качествами обладают семейства $\{BS_{k-1}(\sigma_a(t)\varphi)\}$ ($t \geq 0$) и $\{S_k(\sigma_a(t)\varphi')\}$ ($t \geq 0$).

Теперь установим требуемые оценки на оператор $BS_k(\varphi)$. Для $x \in \text{dom } A$ из формулы

$$BS_k(\varphi)x = \int_0^a BS_{k-1}(\sigma_a(t)\varphi)BT(t)x dt$$

легко получаем неравенства

$$\begin{aligned} q(BS_k(\varphi)x) &\leq \int_0^a \int_0^{a-t} |\varphi(t+s)| \psi_q^{*k}(s) ds \psi_q(t) dt q(x) = \\ &= \int_0^a \int_t^a |\varphi(s)| \psi_q^{*k}(s-t) ds \psi_q(t) dt q(x) = \| \varphi \psi_q^{*(k+1)} \|_{1,a} q(x). \end{aligned}$$

Так как операторы $AS_k(\varphi)$ и $S_k(\varphi)$ определены и непрерывны на X , то и $BS_k(\varphi) \in L(X)$, поэтому полученная оценка справедлива для всех $x \in X$.

Нам осталось убедиться в том, что

$$S_k(\varphi)Ax = -S_{k-1}(\varphi)Bx - S_k(\varphi')x$$

для любого элемента $x \in \text{dom } A$. Пусть прежде $x \in \text{dom}(A^2)$. Для такого x отображения Tx и $ATx = TAx$, а вместе с ними и BTx , непрерывны на $[0, \infty)$ и непрерывно дифференцируемы на $(0, \infty)$. При этом, как легко понять, $(BTx)' = B(Tx)' = BTAx$ на $(0, \infty)$. Отсюда

$$\begin{aligned} S_k(\varphi)Ax &= \int_0^a S_{k-1}(\sigma_a(t)\varphi)(BTx)'(t)dt = S_{k-1}(\sigma_a(a)\varphi)BT(a)x - \\ &- S_{k-1}(\sigma_a(0)\varphi)BT(0)x - \int_0^a \left\{ \frac{d}{dt} S_{k-1}(\sigma_a(t)\varphi) \right\} BT(t)x dt = \\ &= -S_{k-1}(\varphi)Bx - S_k(\varphi')x. \end{aligned}$$

Если же x — произвольный элемент из $\text{dom } A$, то, согласно предложениям 4.2 и 2.6 из [10], можно указать такое семейство $\{x_\alpha\} \subset \text{dom}(A^2)$, что $x_\alpha \rightarrow x$ и $Ax_\alpha \rightarrow Ax$. Следовательно, и $Bx_\alpha \rightarrow Bx$, откуда вытекает справедливость нужного равенства для данного элемента x . Лемма доказана.

Лемма 3.5. Если $\varphi \in \mathcal{D}_a$, то

$$\bar{S}(\varphi)(A+B) \subset (A+B)\bar{S}(\varphi) = -\varphi(0) - \bar{S}(\varphi').$$

Доказательство. Для $x \in \text{dom } A$ из предыдущей леммы непосредственно получаем равенство $\bar{S}(\varphi)(Ax+Bx) = -\varphi(0)x - \bar{S}(\varphi')x$. Пусть теперь $x \in X$. Из оценок, указанных в лемме 3.4, и предложения 2.5 следует сходимость ряда $\sum_{n \geq 0} BS_n(\varphi)x$. Тогда в силу тождества

$$AS_n(\varphi) = -BS_{n-1}(\varphi') - S_n(\varphi'), \quad n \geq 1,$$

сходится и ряд $\sum_{n \geq 0} AS_n(\varphi)$. Но A — замкнутый оператор, так что $\bar{S}(\varphi)x \in \text{dom } A$ и

$$A\bar{S}(\varphi)x = \sum_{n=0}^{\infty} AS_n(\varphi)x.$$

Ввиду A -непрерывности оператора B имеем $\bar{S}(\varphi)x \in \text{dom } B$ и

$$B\bar{S}(\varphi)x = \sum_{n=0}^{\infty} BS_n(\varphi)x.$$

Пользуясь еще раз леммой 3.4, получаем равенство $(A+B)\bar{S}(\varphi)x = -\varphi(0)x - \bar{S}(\varphi')x$. Лемма доказана.

3.4. Порождение полугруппы возмущенным оператором. Начнем с того, что построим квазирезольвенту оператора $A+B$, обладающую нужными свойствами.

Лемма 3.6. Пусть $b \in (0, a)$, h — функция из класса $\mathcal{D}_a$, для которой $\text{im } h \subset [0, 1]$ и $h(t) = 1$, если $t \in [0, b]$. Для $\lambda > 0$ положим

$$\bar{P}(\lambda) = \bar{S}(e^{-\lambda(\cdot)}h), \quad \bar{\mu}(\lambda) = \bar{S}(e^{-\lambda(\cdot)}h').$$

Тогда $\bar{P}$ — квазирезольвента оператора $A+B$ на интервале $(0, \infty)$, отображение $\bar{\mu}$ — остаток $\bar{P}$, а пара (a, b) — показатель убывания $\bar{\mu}$. Кроме того,

$$\|\bar{P}^{(n)}(\lambda)\|_p^p \leq \int_0^a e^{-\lambda t} t^n \Phi_p(t) dt$$

для всех $n \geq 0$, $p \in \mathfrak{P}$ и $\lambda > 0$.

Доказательство. Из леммы 3.5 непосредственно вытекают соотношения

$$\bar{P}(\lambda)(A+B) \subset (A+B)\bar{P}(\lambda) = -\text{id} + \lambda\bar{P}(\lambda) - \bar{\mu}(\lambda).$$

При этом отображения $\bar{P}$ и $\bar{\mu}$, очевидно, бесконечно дифференцируемы и

$$\bar{P}^{(n)}(\lambda) = \bar{S} \left(\frac{d^n}{d\lambda^n} (e^{-\lambda(\cdot)}) h \right),$$

$$\bar{\mu}^{(n)}(\lambda) = \bar{S} \left(\frac{d^n}{d\lambda^n} (e^{-\lambda(\cdot)}) h' \right)$$

для всех $n \geq 0$ и $\lambda > 0$. Таким образом, если $p \in \mathfrak{P}$, то в силу леммы 3.3

$$\|\bar{\mu}^{(n)}(\lambda)\|_p^{p_1} \leq \int_0^a e^{-\lambda t} t^n |h'(t)| \Phi_p(t) dt \leq e^{-\lambda b} a^n \|h'\|_{\infty, a} \|\Phi_p\|_{1, a},$$

т. е. пара (a, b) — показатель убывания остатка $\bar{\mu}$, и, аналогично,

$$\|\bar{P}^{(n)}(\lambda)\|_p^{p_1} \leq \int_0^a e^{-\lambda t} t^n h(t) \Phi_p(t) dt.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.7. Оператор $A+B$ замкнут.

Доказательство. Так как оператор $A+B$ имеет квазирезольвенту, то согласно предложению 2.5(а) из [10] он допускает замыкание. Кроме того, $A+B$ обладает и регуляризатором. В самом деле, если функция $\chi \in \mathcal{D}_a$ такова, что $\chi(0) = 1$ и $\chi' \in \mathcal{D}_a$, то в силу леммы 3.5

$$\bar{S}(\chi)(A+B) \subset (A+B)\bar{S}(\chi) = -\text{id} - \bar{S}(\chi') \in L(X)$$

и, аналогично,

$$(A+B)((A+B)\bar{S}(\chi) + \text{id}) = -(A+B)\bar{S}(\chi') \in L(X),$$

т. е. $\bar{S}(\chi)$ — регуляризатор оператора $A+B$. Остается сослаться на предложение 2.7. Лемма доказана.

Лемма 3.8. Оператор $A+B$ является генератором некоторой равномерно суммируемой полугруппы S . При этом для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ почти для всех $t \in (0, a)$ выполняется оценка $\|S(t)\|_p^{p_1} \leq \Phi_p(t)$.

Доказательство. Существование равномерно суммируемой полугруппы S с производящим оператором $A+B$ вытекает из лемм 3.6 и 3.7, а также теоремы 4.3 из [10]. Из той же теоремы следует, что для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ оценка $\|S\|_p^{p_1} \leq \Phi_p$ выполняется почти всюду на промежутке $(0, (\sqrt{a-b})^2)$, где b — точка из леммы 3.6, в качестве которой может быть взята произвольная точка интервала $(0, a)$. Лемма доказана.

3.5. Связь между построенными распределением и полугруппой. Для завершения доказательства теоремы 3.1 нам остается убедиться в справедливости равенства $S(\varphi) = \bar{S}(\varphi)$, где

$$S(\varphi) = \int_0^a \varphi(t) S(t) dt, \quad \varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty.$$

Лемма 3.9. Если $b \in (0, a)$, а h — функция из леммы 3.6, то семейство операторов

$$\{e^{\lambda b}(\bar{S}(e^{-\lambda(\cdot)}h) - S(e^{-\lambda(\cdot)}h))\} \quad (\lambda > 0)$$

равностепенно непрерывно.

Доказательство. Наряду с операторами $P(\lambda)$ и $\bar{\mu}(\lambda)$ из леммы 3.6 рассмотрим операторы

$$P(\lambda) = S(e^{-\lambda(\cdot)}h), \quad \mu(\lambda) = S(e^{-\lambda(\cdot)}h'),$$

где $\lambda > 0$. Как вытекает из предложения 3.8 работы [10], справедливы соотношения

$$P(\lambda)(A+B) = (A+B)P(\lambda) = \lambda P(\lambda) - \text{id} - \mu(\lambda).$$

Поэтому, как легко видеть,

$$\bar{P}(\lambda) - P(\lambda) = P(\lambda)\bar{\mu}(\lambda) - \mu(\lambda)\bar{P}(\lambda).$$

Если воспользоваться оценками, которые нам доставляют леммы 3.3 и 3.8, то для любых $x \in X$ и $p \in \mathfrak{P}$ мы получим

$$p(\bar{P}(\lambda)x - P(\lambda)x) \leq 2\|\Phi_p\|_{1,a}\|\Phi_{p_1}\|_{1,a}\|h'\|_{\infty,a}e^{-\lambda b}(p_1)_1(x).$$

Лемма доказана.

Лемма 3.10. Для любой функции $\varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$ операторы $S(\varphi)$ и $\bar{S}(\varphi)$ совпадают.

Доказательство. Фиксируем $x \in X$, $b \in (0, a)$ и функцию h , как в лемме 3.6. Полагая

$$F(\varphi) = \bar{S}(h\varphi)x - S(h\varphi)x, \quad \varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty,$$

мы получим распределение $F: \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty \rightarrow X$, которое, в силу лемм 3.3 и 3.8, удовлетворяет условию (*) из п. 2.2, а именно: если $p \in \mathfrak{P}$ и $\xi_p = 2p_1(x)\Phi_p$, то

$$p(F(\varphi)) \leq \|\xi_p\varphi\|_{1,a}, \quad \varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty.$$

Лемма 3.9 позволяет воспользоваться предложением 2.4, согласно которому $\text{supp } F \subset [b, a]$. Таким образом, если функция $\varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$ такова, что $\varphi(t) = 0$ почти для всех точек $t \in [b, a]$, то $h\varphi = \varphi$ почти всюду на $[0, a]$ и, следовательно, $\bar{S}(\varphi)x - S(\varphi)x = F(\varphi) = 0$. Пользуясь еще раз неравенством (*), заключаем, наконец, что $\bar{S}(\varphi)x = S(\varphi)x$ для всех $\varphi \in \mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$. Лемма доказана.

Итак, теорема 3.1 полностью доказана.

§ 4. Возмущение абелевских и чезаровских полугрупп. Сильно ограниченные операторы

Представление возмущенной полугруппы, полученное в основной теореме, позволяет доказать устойчивость некоторых дополнительных свойств равномерно суммируемых полугрупп. В качестве примера мы рассмотрим два важных класса полугрупп, обстоятельно исследовавшихся в классической теории [2]. Речь идет о полугруппах, обладающих определенными эргодическими свойствами, связанными с поведением абелевских и чезаровских средних.

Здесь же будет указан один просто описываемый класс возмущений, удовлетворяющих рассматриваемым в этой работе условиям.

4.1. Абелевские полугруппы. Пусть T — равномерно суммируемая полугруппа. Положим

$$\mathcal{A}_T(\lambda, t) = \lambda \int_0^t e^{-\lambda s} T(s) ds.$$

Полугруппа T называется *абелевской*, если для некоторого (а тогда, очевидно, и для любого) числа $\alpha > 0$ семейство операторов $\{\mathcal{A}_T(\lambda, \alpha)\}$ ($\lambda > 0$) равномерно непрерывно. Легко показать, что из этого условия вытекает (сильная) сходимости $\mathcal{A}_T(\lambda, \alpha)$ к оператору id при $\lambda \rightarrow \infty$. Обратное утверждение также верно, если, например, пространство банахово.

Теорема 4.1. Если операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы 1.2, причем полугруппа, порожденная оператором A , — абелевская, то и оператор $A + B$ порождает абелевскую полугруппу.

Замечание 1. Если T — равномерно суммируемая полугруппа в банаховом пространстве, то для любого достаточно большого λ определен оператор $\lambda^{-1}\mathcal{A}_T(\lambda, \infty)$, являющийся резольвентой $R(\lambda, A)$ производящего оператора A в точке λ . Принадлежность полугруппы T абелевскому типу, очевидно, равносильна соотношению

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A) = \text{id}.$$

Что касается условий теоремы 4.1, то в данном случае они означают, что для A -непрерывного оператора B функция $t \rightarrow \|BT(t) \mid \text{dom } A\|$ интегрируема в нуле. Таким образом, для банахова пространства теорема 4.1 — это основная теорема Р. Филлипса о возмущении абелевских полугрупп (в его терминологии — полугрупп класса $(1, A)$, см. [2, с. 419]).

Замечание 2. Возвращаясь к условиям теоремы 4.1, заметим, что если S — полугруппа, порожденная оператором $A+B$, то для любых $\lambda > 0$ и $t \in [0, a]$ справедливо равенство

$$\mathcal{A}_S(\lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda, t),$$

где $A_0(\lambda, t) = \mathcal{A}_T(\lambda, t)$, а операторы $A_n(\lambda, t) \in L(X)$, $n \geq 1$, однозначно определяются по формуле

$$A_n(\lambda, t)x = \int_0^t e^{-\lambda s} A_{n-1}(\lambda, t-s) BT(s) x ds, \quad x \in \text{dom } A.$$

Здесь и далее используются обозначения, введенные в формулировке теоремы 3.1.

Доказательство теоремы. (1) Докажем прежде последнее утверждение о разложении абелевских «средних», которое, кстати, справедливо для произвольных равномерно суммируемых полугрупп. Фиксируем $\lambda > 0$, $t \in [0, a]$ и определим функцию φ , полагая $\varphi(s) = \lambda e^{-\lambda s}$, если $0 \leq s \leq t$, и $\varphi(s) = 0$, если $t < s \leq a$. Согласно теореме 3.1

$$\mathcal{A}_S(\lambda, t) = S(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\varphi),$$

и нам достаточно для всякого $n \geq 0$ проверить равенство $S_n(\varphi) = A_n(\lambda, t)$. С этой целью возьмем $h \in [0, t]$ и заметим, что

$$S_0(\sigma_a(h)\varphi) = \int_0^{t-h} \lambda e^{-\lambda(s+h)} T(s) ds = e^{-\lambda h} A_0(\lambda, t-h).$$

Если для всех таких h уже установлено равенство $S_{n-1}(\sigma_a(h)\varphi) = e^{-\lambda h} A_{n-1}(\lambda, t-h)$, то

$$\begin{aligned} S_n(\sigma_a(h)\varphi) &= \text{cl} \int_0^{t-h} e^{-\lambda(s+h)} A_{n-1}(\lambda, t-h-s) BT(s) \mid \text{dom } A ds = \\ &= e^{-\lambda h} A_n(\lambda, t-h). \end{aligned}$$

При $h=0$ получаем требуемое утверждение.

(2) Теперь изучим поведение семейства $\mathcal{A}_T(\lambda, t)$ как функции от t . Пусть $0 < a_1 \leq t_1 \leq t_2 \leq a_2$ и $\lambda > 0$. Из равенства

$$\mathcal{A}_T(\lambda, t_2) - \mathcal{A}_T(\lambda, t_1) = \lambda \int_{t_1}^{t_2} e^{-\lambda t} T(t) dt$$

ясно, что если при некотором $t_0 > 0$ семейство операторов $\{\mathcal{A}_T(\lambda, t_0)\}$ ($\lambda > 0$) оказалось равномерно непрерывным, то таким же будет и семейство $\{\mathcal{A}_T(\lambda, t)\}$ ($\lambda > 0, a_1 \leq t \leq a_2$).

Итак, если T — абелевская полугруппа, то в силу отмеченных обстоятельств семейство операторов $\{\mathcal{A}_T(\lambda, t)\}$ ($\lambda > 0$, $a/2 \leq t \leq a$) равномерно непрерывно. Если еще учесть равенство

$$\mathcal{A}_T(\lambda, t) = \mathcal{A}_T(\lambda, a) + e^{-\lambda t} T(t) \mathcal{A}_T(\lambda, a - t)$$

и принять во внимание равномерную суммируемость полугруппы T , то станет ясно, что для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ можно подобрать такие полунорму $\hat{p} \in \mathfrak{Q}$ и функцию $\hat{\varphi}_p \in \mathcal{L}_{(0,a)}^1$, что для всех $\lambda > 0$ и $t \in [0, a]$ справедлива оценка $\|\mathcal{A}_T(\lambda, t)\|_p^{\hat{p}} \leq \hat{\varphi}_p(t)$.

(3) Пусть, как и ранее, $\psi_q = \|BT\| \text{dom } A\|_q^q$ для всех $q \in \mathfrak{Q}$. Тогда, по индукции, для произвольного $n \geq 0$ легко выводим оценки

$$\|A_n(\lambda, t)\|_p^{\hat{p}} \leq \int_0^t (\hat{\varphi}_p * \psi_p^{*(n-1)})(t-s) \psi_{\hat{p}}(s) ds = (\hat{\varphi}_p * \psi_{\hat{p}}^{*n})(t).$$

(4) Полученные оценки нам удобнее использовать в интегральной форме. В связи с этим заметим, что если $\lambda > 0$ и $\varphi_\lambda(s) = \lambda e^{-\lambda s}(a-s)$, то

$$\begin{aligned} S_0(\sigma_a(t) \varphi_\lambda) &= \int_0^{a-t} \lambda e^{-\lambda(t+s)} (a-t-s) T(s) ds = \\ &= e^{-\lambda t} \int_0^{a-t} \lambda \int_0^u e^{-\lambda s} T(s) ds du = e^{-\lambda t} \int_0^{a-t} A_0(\lambda, u) du, \end{aligned}$$

откуда в силу рекуррентных соотношений для S_n и A_n последовательно выводятся равенства

$$S_n(\sigma_a(t) \varphi_\lambda) = e^{-\lambda t} \int_0^{a-t} A_n(\lambda, u) du$$

для всех $n \geq 0$. Таким образом,

$$S(\varphi_\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a A_n(\lambda, t) dt, \quad \lambda > 0.$$

(5) Нам осталось подвести итоги. Из доказанного в (3) и (4) следует, что $\|S(\varphi_\lambda)\|_p^{\hat{p}} \leq \|\hat{\Phi}_p\|_{1,a}$, где $\lambda > 0$, $p \in \mathfrak{P}$ и

$$\hat{\Phi}_p = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\varphi}_p * \psi_p^{*n}$$

— сумма в $\mathcal{L}_{(0,a)}^1$. Отсюда в силу очевидного равенства

$$\mathcal{A}_S(\lambda, a) = \frac{1}{a} (S(\varphi_\lambda) + \int_0^a \lambda t e^{-\lambda t} S(t) dt)$$

следует равностепенная непрерывность операторов $\mathcal{A}_S(\lambda, a)$, $\lambda > 0$. Теорема доказана.

Замечание 3. Доказательство теоремы можно немного сократить за счет (не совсем типичных для этой работы) рассуждений, опирающихся на отмеченную в п. 2.3 поточечную сходимость «сверточных» рядов.

4.2. Чезаровские полугруппы. Если T — равномерно суммируемая полугруппа, а $\beta > 0$, то для любого $t > 0$ определен оператор

$$\mathcal{C}_T^\beta(t) = \frac{\beta}{t^\beta} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} T(s) ds,$$

называемый чезаровским средним порядка β полугруппы T на промежутке $(0, t)$. Полугруппу T называют *чезаровской порядка β* , если для некоторого (а тогда, разумеется, и для произвольного) числа $\alpha > 0$ семейство операторов $\{\mathcal{C}_T^\beta(t)\}$ ($0 < t < \alpha$) равномерно непрерывно. Нетрудно показать, что для β -чезаровской полугруппы T операторы $\mathcal{C}_T^\beta(t)$ стремятся (в сильном смысле) к id при $t \rightarrow +0$. Если же пространство бочечно, то верно, конечно, и обратное утверждение. Заметим еще, что класс β -чезаровских полугрупп тем шире, чем больше β , но все чезаровские полугруппы принадлежат абелевскому классу (см., например, [2, с. 520]).

Теорема 4.2. *Если операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы 1.2 и, кроме того, полугруппа, порожденная оператором A , — чезаровская данного порядка β , то и оператор $A + B$ порождает чезаровскую полугруппу порядка β .*

Замечание 1. Для чезаровских полугрупп порядка 1 в банаховом пространстве — это один из результатов Р. Филлипса [2, с. 416].

Замечание 2. В условиях теоремы 4.2 будет доказано также, что для любого $t \in [0, a]$ справедливо равенство

$$\mathcal{C}_T^\beta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\beta(t),$$

где $C_0^\beta(t) = \mathcal{C}_T^\beta$, а операторы $C_n^\beta(t) \in L(X)$, $n \geq 1$, однозначно определяются по формуле

$$C_n^\beta(t)x = \int_0^t (1 - st^{-1})^\beta C_{n-1}^\beta(t-s) BT(s) x ds, \quad x \in \text{dom } A.$$

Здесь, как и в предыдущем разделе, безоговорочно используются обозначения, введенные при формулировке теоремы 3.1.

Доказательство теоремы. (1) Сначала установим необходимые оценки для операторов $C_n^\beta(t)$ и попутно обоснуем корректность их определения. Пусть $p \in \mathfrak{P}$, а полунорма $\tilde{p} \in \Omega$ такова, что $\|\mathcal{C}_T^\beta(t)\|_{\tilde{p}}^p \leq 1$ для всех $t \in (0, a]$. Так как семейство $\mathcal{C}_T^\beta(t)$, $0 < t \leq a$, очевидно, сильно непрерывно, то для всякого элемента $x \in \text{dom } A$ (в силу обстоятельств, не раз уже встречавшихся нам в аналогичных ситуациях), в пространстве X определен интеграл

$$C_1^\beta(t)x = \int_0^t (1 - st^{-1})^\beta C_0^\beta(t-s) BT(s) x ds.$$

Ясно, что отображение $C_1^\beta x$ непрерывно на $(0, a]$. Из оценки

$$p(C_1^\beta(t)x) \leq \int_0^t \psi_{\tilde{p}}^*(s) ds \tilde{p}(x), \quad p \in \mathfrak{P},$$

следует, что каждый оператор $C_1^\beta(t)$ продолжается по непрерывности на X и возникающее тем самым семейство $\{C_1^\beta(t)\}$ ($0 < t \leq a$) из $L(X)$ равномерно непрерывно, а значит, и сильно непрерывно. Кроме того, предыдущая оценка верна уже для всех $x \in X$. Продолжая эти рассуждения, мы увидим, что интересующие нас операторы действительно корректно определены указанным в теореме соотношением и

$$\|C_n^\beta(t)\|_{\tilde{p}}^p \leq \int_0^t \psi_{\tilde{p}}^{*n}(s) ds, \quad 0 < t \leq a, \quad p \in \mathfrak{P}.$$

(2) Пусть теперь

$$C^\beta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\beta(t), \quad 0 < t \leq a.$$

В силу доказанных оценок этот ряд сходится (как обычно, в сильной операторной топологии) и

$$\|C^\beta(t)\|_{\tilde{p}} \leq \|1 + \sum_{n \geq 1} \psi_p^{*n}\|_{1,a}, \quad p \in \mathfrak{P}.$$

Итак, семейство $\{C^\beta(t)\} (0 < t \leq a)$ равномерно непрерывно, и нам остается убедиться в справедливости равенства $C^\beta(t) = \mathcal{C}_S^\beta(t)$ для всех $t \in (0, a]$. Этим мы сейчас и займемся.

(3) Нам придется рассмотреть два случая: $\beta \geq 1$ и $0 < \beta < 1$. Дело в том, что лишь при $\beta \geq 1$ функция φ , определенная равенством $\varphi(s) = (a-s)^{\beta-1}$, принадлежит классу $\mathcal{L}_{(0,a)}^\infty$ и мы можем непосредственно воспользоваться утверждением теоремы 3.1, записав разложение

$$\mathcal{C}_S^\beta(t) = \frac{\beta}{t^\beta} S(\sigma_a(a-t)\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta}{t^\beta} S_n(\sigma_a(a-t)\varphi).$$

Для получения требуемого равенства в рассматриваемом случае нужно только заметить, что

$$\frac{\beta}{t^\beta} S_n(\sigma_a(a-t)\varphi) = C_n^\beta(t)$$

для всех $n \geq 0$ и $t \in (0, a]$. В самом деле, для $n=0$ это совсем просто:

$$\frac{\beta}{t^\beta} S_0(\sigma_a(a-t)\varphi) = \frac{\beta}{t^\beta} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} T(s) ds = C_0^\beta(t).$$

Если же аналогичное соотношение установлено для S_{n-1} и C_{n-1}^β при некотором $n \geq 1$, то

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{t^\beta} S_n(\sigma_a(a-t)\varphi)x &= \int_0^t \frac{\beta}{t^\beta} S_{n-1}(\sigma_a(a-(t-s))\varphi) BT(s) x ds = \\ &= \int_0^t (1-st^{-1})^\beta C_{n-1}^\beta(t-s) BT(s) x ds = C_n^\beta(t)x. \end{aligned}$$

Здесь имелось в виду, что $x \in \text{dom } A$, но в окончательном равенстве это предположение не требуется.

(4) В случае $\beta < 1$ дело обстоит несколько сложнее и нам придется прежде более обстоятельно изучить операторы $C_n^\beta(t)$. Начнем с того, что для всякого $\beta > 0$ установим равенство

$$A\mathcal{C}_T^{\beta+1}(t) = \frac{\beta+1}{t} (-\text{id} + \mathcal{C}_T^\beta(t)), \quad t > 0$$

(справедливое для любых равномерно суммируемых полугрупп). В самом деле, если $x \in \text{dom } A$, то

$$\begin{aligned} A\mathcal{C}_T^{\beta+1}(t)x &= \frac{\beta+1}{t^{\beta+1}} \int_0^t (t-s)^\beta T'(s) x ds = \\ &= \frac{\beta+1}{t^{\beta+1}} \left(-t^\beta x + \beta \int_0^t (t-s)^{\beta-1} T(s) x ds \right) = \frac{\beta+1}{t} (-x + \mathcal{C}_T^\beta(t)x). \end{aligned}$$

Так как оператор A замкнут, а $\mathcal{C}_T^\beta(t)$ и $\mathcal{C}_T^{\beta+1}(t)$ непрерывны, то полученное соотношение распространяется на все элементы $x \in X$.

Выберем теперь x из $\text{dom } A$ и, пользуясь утверждениями из п. 2.4 и 2.5, заметим, что

$$\begin{aligned} AC_1^{\beta+1}(t)x &= \int_0^t (1-st^{-1})^{\beta+1} AC_0^{\beta+1}(t-s)BT(s)x ds = \\ &= \frac{\beta+1}{t} \int_0^t (1-st^{-1})^{\beta} (-BT(s)x + C_0^{\beta}(t-s)BT(s)x) ds = \\ &= -BC_0^{\beta+1}(t)x + \frac{\beta+1}{t} C_1^{\beta}(t)x. \end{aligned}$$

Здесь мы применили и предыдущее соотношение. Оно же показывает, что оператор $AC_0^{\beta+1}(t)$ определен и непрерывен на X , так что, ввиду A -непрерывности оператора B , и $BC_0^{\beta+1}(t) \in L(X)$. Поэтому, благодаря замкнутости оператора A , полученное равенство распространяется на все $x \in X$. Такие же аргументы приводят, по индукции, к тождеству

$$AC_n^{\beta+1}(t) + BC_{n-1}^{\beta+1}(t) = \frac{\beta+1}{t} C_n^{\beta}(t)$$

для любого $n \geq 1$.

Несложные вычисления показывают также, что для любых $q \in \Omega$ и $t \in (0, a]$ справедлива оценка

$$\|BC_n^{\beta+1}(t)\|_q^q \leq \frac{\beta+1}{t} \|\psi_q^{*(n+1)}\|_{1,a}.$$

(5) Теперь легко прийти к требуемому выводу. Действительно, из отмеченной только что оценки для всякого $t \in (0, a]$ вытекает сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} BC_n^{\beta+1}(t).$$

Но тогда, как показывают полученные в (4) тождества, сходится и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} AC_n^{\beta+1}(t).$$

Поэтому в силу замкнутости оператора A и относительной непрерывности оператора B имеют место равенства

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} AC_n^{\beta+1}(t) &= AC^{\beta+1}(t), \\ \sum_{n=0}^{\infty} BC_n^{\beta+1}(t) &= BC^{\beta+1}(t). \end{aligned}$$

Пользуясь еще раз тождествами из (4) и установленным уже равенством $C^{\beta+1}(t) = \mathcal{C}_S^{\beta+1}(t)$ (ведь $\beta+1 > 1$), приходим к следующей цепочке соотношений:

$$\begin{aligned} C^{\beta}(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\beta}(t) = \\ &= \text{id} + \frac{t}{\beta+1} \left(\frac{\beta+1}{t} (-\text{id} + C_0^{\beta}(t)) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta+1}{t} C_n^{\beta}(t) \right) = \\ &= \text{id} + \frac{t}{\beta+1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} AC_n^{\beta+1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} BC_{n-1}^{\beta+1}(t) \right) = \\ &= \text{id} + \frac{t}{\beta+1} (A+B) \mathcal{C}_S^{\beta+1}(t) = \text{id} + (-\text{id} + \mathcal{C}_S^{\beta}(t)) = \mathcal{C}_S^{\beta}(t). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

4.3. Сильно ограниченные операторы. Одним из замечательных результатов теории возмущений Р. Филлипса является теорема об устой-

чивости различных классов полугрупп относительно возмущений их генераторов непрерывными операторами. Для доказательства теоремы достаточно заметить, что такие операторы в случае банахова пространства принадлежат рассматриваемому классу возмущений. Если же пространство всего лишь локально выпукло, непрерывность оператора не обеспечивает выполнимости используемых здесь предположений. Разумеется, эти предположения могли бы быть менее жесткими, однако сейчас дело не в них. Оказывается, производящие операторы (сколь угодно хороших) полугрупп в ненормируемых пространствах просто не выдерживают возмущений непрерывными операторами. Пример легко найти в пространстве $X = \text{ind} \lim \mathbb{R}^n$, которое состоит из всех финитных вещественных последовательностей и снабжено локально выпуклой топологией строгого индуктивного предела пространств $\mathbb{R}^n$. Это пространство полно, бочечно, борнологично и т. п. Рассмотрим оператор B в X , который каждый элемент $x = \{x_n\} \in X$ переводит в элемент $y = \{y_n\} \in X$, где $y_1 = 0$ и $y_{n+1} = x_n$ для всех $n \geq 1$. Оператор B непрерывен. Тем не менее, если дифференцируемое отображение $u: [0, \infty) \rightarrow X$ удовлетворяет уравнению $u'(t) = Bu(t)$, $t \geq 0$, то, как нетрудно убедиться, $u \equiv 0$. Поэтому оператор B не может порождать какой-либо полугруппы в X . Следовательно, не порождает полугруппы и оператор $A + \varepsilon B$, где $\varepsilon \neq 0$, а $A = \omega \cdot \text{id}$ — генератор группы $\{e^{\omega t} \cdot \text{id} \mid t \in \mathbb{R}\}$ (здесь ω — произвольное вещественное число).

В связи с указанным обстоятельством любопытно отметить, что для локально выпуклых пространств все же существует аналог сформулированной выше теоремы Р. Филлипса. Линейный оператор B , определенный на всем пространстве, назовем *сильно ограниченным*, если образ $B[V]$ некоторой окрестности нуля V есть ограниченное множество.

Теорема 4.3. *Если A — производящий оператор некоторой равномерно суммируемой полугруппы в локально выпуклом пространстве, а B — сильно ограниченный оператор, то выполнены условия теоремы 1.2. Таким образом, оператор $A + B$ также порождает некоторую равномерно суммируемую полугруппу. Если же исходная полугруппа равномерно суммируема в той или иной степени или принадлежит абелевскому классу или, наконец, является чезаровской данного порядка, то и возмущенная полугруппа обладает соответствующим свойством.*

Доказательство. Так как оператор B , разумеется, непрерывен, то он, в частности, и непрерывен относительно A . Теперь построим мультинорму $\bar{\Omega}$, удовлетворяющую нужным условиям. Нехитрые рассуждения, связанные с функционалами Минковского, показывают, что сильная ограниченность оператора B равносильна существованию такой полунормы $\bar{p} \in \mathfrak{P}$, что $\|B\|_{\bar{p}}^{\bar{p}} < \infty$ для всех $p \in \mathfrak{P}$. Если T — равномерно суммируемая полугруппа, порожденная оператором A , подберем полунорму $\bar{q} \in \mathfrak{P}$ так, чтобы функция $t \mapsto \|T(t)\|_{\bar{q}}^{\bar{q}}$ была интегрируемой от 0 до 1. Пусть $\Omega = \{q \in \mathfrak{P} \mid q \geq \bar{q}\}$. Ясно, что мультинорма Ω эквивалентна $\mathfrak{P}$. Если же $q \in \Omega$, то для всех $t \in (0, 1)$ и $x \in X$ получаем

$$q(BT(t)x) \leq \|B\|_{\bar{q}}^{\bar{p}} \|T(t)\|_{\bar{q}}^{\bar{q}} \bar{q}(x) \leq \|B\|_{\bar{q}}^{\bar{p}} \|T(t)\|_{\bar{q}}^{\bar{q}} q(x),$$

что и нужно было. Теорема доказана.

Устойчивость полугруппы класса C_0 относительно сильно ограниченных возмущений была доказана Е. В. Мельниковым.

§ 5. Возмущение непрерывных в нуле полугрупп

Обсудим в заключение вопрос о возмущении классических C_0 -полугрупп. Здесь мы рассмотрим несколько иной способ построения возмущенной полугруппы, хотя, как и выше, основным средством исследования для нас будет аппарат квазирезольвенты.

5.1. Теорема Миядеры — Дембарта. Для полугрупп класса C_0 рассмотренный ранее класс возмущений может быть расширен.

Теорема 5.1. Пусть A — производящий оператор C_0 -полугруппы T в пространстве X , оператор B непрерывен относительно A и существуют такие число $a > 0$ и мультиорма Ω , эквивалентная $\mathfrak{P}$, что каждой полунорме $q \in \Omega$ можно сопоставить числа $\omega_q \geq 0$ и $K_q \in (0, 1)$, удовлетворяющие условию

$$\int_0^a e^{-\omega_q t} q(BT(t)x) dt \leq K_q q(x), \quad x \in \text{dom } A.$$

Тогда оператор $A + B$ также порождает некоторую полугруппу в X класса C_0 . При этом если S — искомая полугруппа, то для любого $t \in [0, a]$ справедливо равенство

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t),$$

где $S_0(t) = T(t)$, а операторы $S_n(t) \in L(X)$, $n \geq 1$, однозначно определяются по формуле

$$S_n(t)x = \int_0^t S_{n-1}(t-s) BT(s)x ds, \quad x \in \text{dom } A.$$

Наконец, для каждого $n \geq 0$ отображение $S_n: [0, a] \rightarrow L(X)$ сильно непрерывно, а для всякого элемента $x \in X$ ряд, определяющий $S(t)x$, сходится равномерно относительно t из отрезка $[0, a]$.

Указанное в теореме условие на возмущающий оператор действительно слабее, чем в теореме 1.2. В самом деле, предположим, что для полунормы $q \in \Omega$ можно найти функцию $\psi_q \in \mathcal{L}_{(0,a)}^1$, для которой почти при всех $t \in (0, a)$ и для всех $x \in \text{dom } A$ выполняется оценка $q(BT(t)x) \leq \psi_q(t) q(x)$. Тогда мы выберем $\omega_q \geq 0$ с тем расчетом, чтобы было

$$K_q = \|e^{-\omega_q(\cdot)} \psi_q\|_{1,a} < 1,$$

и заметим, что для таких ω_q и K_q справедливо указанное в теореме неравенство. С другой стороны, из условия теоремы 5.1 нельзя вывести условия теоремы 1.2.

Для банаховых пространств сформулированная здесь теорема эквивалентна теореме И. Миядеры [11]. В случае локально выпуклых пространств теореме 5.1 предшествовала и аналогичная ей теорема Б. Дембарта [12], которая, собственно, и побудила автора заняться вопросом о возмущении полугрупп. Теорема Б. Дембарта, явившаяся, по-видимому, первым существенным результатом о возмущении полугрупп в ненормируемых пространствах, все же несколько уступает теореме И. Миядеры в том отношении что в ней не устанавливается замкнутости возмущенного оператора, а утверждается только, что его замыкание порождает полугруппу класса C_0 . Теорема 5.1 устраняет этот недостаток и, кроме того, содержит чуть меньше требований, чем в теореме Б. Дембарта, в которой (если пользоваться нашими обозначениями) предполагается, что $\omega_q = 0$ и $K_q \leq K < 1$ для всех $q \in \Omega$. Предлагаемое ниже доказательство основано на иных методах, чем в [12].

5.2. Сходимость усредняющего ряда. Прежде всего для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$ фиксируем полунорму $p_1 \in \Omega$, для которой $p(T(t)x) \leq p_1(x)$ при всех $x \in X$ и $t \in [0, a]$.

Если $x \in \text{dom } A$, то определен интеграл

$$S_1(t)x = \int_0^t S_0(t-s) BT(s)x ds.$$

При этом, в случае $0 \leq t \leq a$ для каждой полунормы $p \in \mathfrak{P}$, очевидно, $p(S_1(t)x) \leq e^{\omega_{p_1} t} K_{p_1} p_1(x)$. Таким образом, можно считать, что по-

строен оператор $S_1(t) \in L(X)$ и

$$\|S_1(t)\|_p^{p_1} \leq e^{\omega_{p_1} t} K_{p_1}, \quad p \in \mathfrak{P}, \quad 0 \leq t \leq a.$$

Так как для $x \in \text{dom } A$ отображение $S_1 x$, разумеется, непрерывно на $[0, a]$, то, в силу последнего неравенства, это верно и для произвольного $x \in X$. Сильная непрерывность отображения S_n на $[0, a]$ и оценка

$$\|S_n(t)\|_p^{p_1} \leq e^{\omega_{p_1} t} K_{p_1}^n, \quad p \in \mathfrak{P}, \quad 0 \leq t \leq a,$$

выводятся из соответствующих свойств отображения S_{n-1} для произвольного $n \geq 1$ точно так же, как в рассмотренном только что случае $n = 1$. Итак, равенство

$$\bar{S}(t)x = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(t)x, \quad x \in X,$$

определяет при каждом $t \in [0, a]$ линейный оператор $\bar{S}(t)$ в X , для которого

$$\|\bar{S}(t)\|_p^{p_1} \leq e^{\omega_{p_1} a} (1 - K_{p_1})^{-1}, \quad p \in \mathfrak{P}.$$

При этом, для всех $x \in X$ ряд, определяющий $\bar{S}(t)x$, сходится равномерно по $t \in [0, a]$ и, следовательно, отображение $\bar{S}x$ непрерывно на отрезке $[0, a]$.

5.3. Квазирезольвента возмущенного оператора. Доказательство того, что $\bar{S}$ — это «часть» некоторой полугруппы класса C_0 , проведем с помощью аппарата квазирезольвенты. С этой целью для каждого λ положим

$$P(\lambda) = \int_0^a e^{-\lambda t} \bar{S}(t) dt, \quad \mu(\lambda) = -e^{-\lambda a} \bar{S}(a)$$

и докажем, что P — квазирезольвента оператора $A + B$ с остатком μ . Изучим прежде операторы

$$P_n(\lambda, t) = \int_0^t e^{-\lambda s} S_n(s) ds,$$

где $n \geq 0$ и $t \in [0, a]$. Несложными вычислениями можно убедиться в справедливости равенства

$$P_n(\lambda, t)x = \int_0^t e^{-\lambda s} P_{n-1}(\lambda, t-s) BT(s)x ds,$$

где $x \in \text{dom } A$ и $n \geq 1$. Далее, как отмечено в предложении 4.2 из [10],

$$P_0(\lambda, t)A \subset AP_0(\lambda, t) = \lambda P_0(\lambda, t) - \text{id} + e^{-\lambda t} S_0(t).$$

Отсюда, пользуясь предложением 2.6, для $x \in \text{dom } A$ получаем соотношение

$$\begin{aligned} AP_1(\lambda, t)x &= \int_0^t e^{-\lambda s} AP_0(\lambda, t-s) BT(s)x ds = \\ &= \lambda P_1(\lambda, t)x - BP_0(\lambda, t)x + e^{-\lambda t} S_1(t)x. \end{aligned}$$

В силу A -непрерывности оператора B , оператор $BP_0(\lambda, t)$, вместе с операторами $P_0(\lambda, t)$ и $AP_0(\lambda, t)$, определен и непрерывен на X . Поэтому замкнутость оператора A позволяет заключить, что операторы слева и справа в последнем соотношении совпадают на всех $x \in X$. Точно так же и для всякого $n \geq 1$ устанавливается равенство

$$AP_n(\lambda, t) = \lambda P_n(\lambda, t) - BP_{n-1}(\lambda, t) + e^{-\lambda t} S_n(t).$$

Теперь займемся выводом аналогичного равенства, в котором операторы A и B действуют первыми. Если $x \in \text{dom}(A^2)$, то, как легко понять, $(BTx)' = BTAx$ на $(0, \infty)$ и $BT(s)x \rightarrow Bx$ при $s \rightarrow +0$. Кроме того,

$$\frac{\partial}{\partial t} P_n(\lambda, t) = e^{-\lambda t} S_n(t), \quad n \geq 0.$$

Поэтому для всех $n \geq 1$ получаем

$$\begin{aligned} P_n(\lambda, t) Ax &= \int_0^t e^{-\lambda s} P_{n-1}(\lambda, t-s) (BT(s)x)' ds = \\ &= -P_{n-1}(\lambda, t) Bx + \lambda \int_0^t e^{-\lambda s} P_{n-1}(\lambda, t-s) BT(s)x ds + \\ &\quad + e^{-\lambda t} \int_0^t S_{n-1}(t-s) BT(s)x ds = \\ &= -P_{n-1}(\lambda, t) Bx + \lambda P_n(\lambda, t)x + e^{-\lambda t} S_n(t)x. \end{aligned}$$

Мы уже отмечали в аналогичной ситуации (при доказательстве леммы 3.4), что оператор A восстанавливается замыканием по оператору $A| \text{dom}(A^2)$ (см. [10]). Отсюда легко следует, что равенство

$$P_n(\lambda, t) Ax = \lambda P_n(\lambda, t)x - P_{n-1}(\lambda, t) Bx + e^{-\lambda t} S_n(t)x$$

справедливо для всех $x \in \text{dom } A$.

Возвращаясь к построенным выше операторам $P(\lambda)$ и $\mu(\lambda)$, заметим, что из доказанного сейчас соотношения для любого $x \in \text{dom } A$ вытекает равенство

$$P(\lambda)(A+B)x = \lambda P(\lambda)x - x - \mu(\lambda)x.$$

Чтобы установить аналогичное равенство для оператора $(A+B)P(\lambda)$, необходимо отметить некоторые оценки. Пусть $q \in \mathfrak{Q}$ и $x \in \text{dom } A$. Так как

$$BP_0(\lambda, t)x = \int_0^t e^{-\lambda s} BS_0(s)x ds,$$

то, очевидно,

$$q(BP_0(\lambda, t)x) \leq e^{\max(0, \omega_q - \lambda)t} K_q q(x), \quad 0 \leq t \leq a.$$

В силу того, что $BP_0(\lambda, t) \in L(X)$, полученная оценка верна и для произвольного $x \in X$. Пользуясь указанным в начале раздела соотношением, связывающим P_n и P_{n-1} , по индукции приходим к оценке

$$\|BP_n(\lambda, t)\|_q^q \leq e^{\max(0, \omega_q - \lambda) \cdot t} K_q^{n+1}$$

для произвольного $n \geq 0$. Дальнейшие рассуждения проводятся по знакомой уже нам схеме. Предыдущие оценки обеспечивают сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} BP_n(\lambda, a).$$

Тогда в силу доказанных выше тождеств сходится и ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} AP_n(\lambda, a).$$

Суммируя указанные тождества и пользуясь замкнутостью оператора A и относительной непрерывностью B , получаем требуемое равенство

$$(A+B)P(\lambda) = \lambda P(\lambda) - \text{id} - \mu(\lambda),$$

т. е. P — квазирезольвента оператора $A+B$ с остатком μ .

5.4. Полугруппа, порожденная возмущенным оператором. Теперь нетрудно доказать, что $A + B$ — производящий оператор некоторой полугруппы класса C_0 . Покажем сначала, что оператор $A + B$ замкнут. Имея квазирезольвенту, оператор $A + B$ допускает замыкание. Это утверждает предложение 2.5 из [10]. То же предложение гарантирует в этом случае, что P — квазирезольвента и оператора $\text{cl}(A + B)$. Рассуждения, проведенные при доказательстве предложения 1.1, показывают, что при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ имеет место представление

$$\text{dom}(A + B) = \text{im } P(\lambda_1) + \text{im } P(\lambda_2).$$

Но тогда по тем же причинам и

$$\text{dom}(\text{cl}(A + B)) = \text{im } P(\lambda_1) + \text{im } P(\lambda_2).$$

Таким образом, $\text{cl}(A + B) = A + B$.

Используя оценку для $\bar{S}$, полученную в конце п. 5.2, мы видим, что

$$\|P^{(n)}(\lambda)\|_{p_1}^{p_1} \leq \frac{n!}{\lambda^{n+1}} e^{\omega_{p_1} a} (1 - K_{p_1})^{-1}$$

для всех $p \in \mathfrak{P}$, $\lambda > 0$ и $n \geq 0$. В таком случае, как доказано в [10, теорема 4.6], оператор $A + B$ порождает некоторую полугруппу S класса C_0 .

Остается выяснить, как связаны между собой отображения S и $\bar{S}$. Аргументы, высказанные по аналогичному поводу в п. 3.5, убеждают в справедливости равенства

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-\lambda t} (\bar{S}(t) - S(t)) dt = \\ = e^{-\lambda a} \int_0^a e^{-\lambda t} (S(a) \bar{S}(t) - S(t) \bar{S}(a)) dt. \end{aligned}$$

Из ограниченности S и $\bar{S}$ вытекает, что интеграл справа ограничен по $\lambda > 0$, а значит, интеграл в левой части равенства убывает при $\lambda \rightarrow \infty$, как $e^{-\lambda a}$. Отсюда и следует равенство $S(t) = \bar{S}(t)$ для всех $t \in [0, a]$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Phillips R. S. Perturbation theory for semi-groups of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1953.—V. 74, N 2.—P. 199—221.
2. Филлипс Р., Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы.—М.: Изд-во иностр. лит., 1962.—830 с.
3. Крейн С. Г., Хазан М. И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Сер. мат. анализ.—М., 1983.—Т. 21.—С. 130—264.
4. Ouchi S. Semi-groups of operators in locally convex spaces // J. Math. Soc. Jap.—1973.—V. 25, N 2.—P. 265—276.
5. Иванов В. В. Резольвентная последовательность в вопросах порождения суммируемых полугрупп операторов // Докл. АН СССР.—1973.—Т. 213, № 2.—С. 282—285.
6. Иванов В. В. Полугруппы линейных операторов в локально выпуклом пространстве // Теория операторов в функциональных пространствах.—Новосибирск, 1977.—С. 121—153.
7. Oharu S. Semigroups of Linear Operators in a Banach Space // Publ. Res. Inst. math. sci.—1971.—V. 7, N 2.—P. 205—260.
8. Lions J. L. Les semi-groupes distributions // Port. math.—1960.—V. 19, N 3—4.—P. 141—164.
9. Иванов В. В. Возмущение равномерно суммируемых полугрупп операторов // Докл. АН СССР.—1980.—Т. 250, № 2.—С. 269—273.
10. Иванов В. В. Равномерно суммируемые полугруппы операторов. I. Порождение полугрупп // Исследования по геометрии и математическому анализу.—Новосибирск, 1987.—Т. 7.—С. 117—131.
11. Miyadera I. On the perturbation theory for semi-groups of operators // Tohoku math. J.—1966.—V. 48, N 3.—P. 299—310.
12. Dembart B. On the theory of semi-groups of operators on locally convex spaces // J. funct. anal.—1974.—V. 16, N 2.—P. 123—160.