

АЛГОРИТМЫ МИНИМИЗАЦИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОЛИНОМОВ ОТ БУЛЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

А. А. АГЕЕВ, В. Л. БЕРЕСНЕВ

Задача отыскания минимума (максимума) полиномов от булевых переменных естественно возникает в разнообразных вопросах теории и практики дискретной оптимизации. Разработке алгоритмических средств минимизации полиномов от булевых переменных посвящено значительное число публикаций в нашей стране и за рубежом. Известно, что в общей постановке рассматриваемая задача *NP*-трудна [1]. Точные эффективные алгоритмы минимизации найдены лишь для некоторых специальных классов полиномов [2—4]. Для труднорешаемых случаев разработаны и успешно применяются алгоритмы, в которых используется идея неявного перебора (см., например, [5]).

Настоящая работа посвящена построению и исследованию алгоритмов минимизации для ряда специальных классов полиномов.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

1.1. Всякая экстремальная задача представляет собой класс индивидуальных задач с числовыми исходными данными. *Подзадачей экстремальной задачи* называют задачу, соответствующую некоторому подклассу этого класса. Алгоритм называют *эффективным* (или *полиномиальным*), если время его работы ограничено сверху полиномом от длины записи исходных данных. Задачу называют *эффективно решаемой* (разрешимой), если существует эффективный алгоритм ее решения. *Под сводимостью экстремальных задач* будем понимать полиномиальную сводимость по Тьюрингу [1]. Две задачи будем называть *эквивалентными*, если они взаимно сводимы.

Пусть P и Q — две экстремальные задачи вида

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in X} \quad (P)$$

$$g(y) \rightarrow \min_{y \in Y} \quad (Q)$$

Признак сводимости [6]. Пусть имеются эффективный алгоритм, преобразующий исходные данные индивидуальной задачи $p \in P$ в исходные данные индивидуальной задачи $\sigma(p) \in Q$, и отображения $\varphi: Y \rightarrow X$ и $\psi: X \rightarrow Y$, порождаемые эффективными алгоритмами и обладающие свойствами

$$\forall y \in Y \quad f(\varphi(y)) \leq g(y), \quad \forall x \in X \quad g(\psi(x)) \leq f(x).$$

Тогда задача P сводится к задаче Q . Кроме того, если y^* — оптимальное решение задачи $\sigma(p)$, то $\varphi(y^*)$ — оптимальное решение задачи p , и наоборот, если x^* — оптимальное решение задачи p , то $\psi(x^*)$ — оптимальное решение задачи $\sigma(p)$.

1.2. Известно, что всякую функцию f от булевых переменных $x_1, \dots, x_m$ можно представить в виде полинома $f(x) = \sum_{\alpha \in \{1, \dots, m\}} c_\alpha \prod_{i \in \alpha} x_i$, где $c_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \subset \{1, \dots, m\}$. Выражение $c_\alpha \prod_{i \in \alpha} x_i$ — член полинома, число

c_α — коэффициент при этом члене, величина $|\alpha|$ — степень данного члена. Член полинома называют *линейным*, если $|\alpha| \leq 1$, и *нелинейным* в противном случае. Под *степенью полинома* понимается максимальная степень его членов.

Задачу минимизации полинома от булевых переменных можно записать в следующей форме [4]:

$$\sum_{k=1}^l a_k \left(1 - \prod_{i \in \alpha_k} x_i\right) + \sum_{j=1}^n b_j \prod_{i \in \beta_j} x_i \rightarrow \min, \quad (x_i) \quad (1.1)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.2)$$

где $a_k, b_j > 0$, $\alpha_k, \beta_j \subset \{1, \dots, m\}$, $k = \overline{1, l}$, $j = \overline{1, n}$.

В семействе подзадач задачи (1.1), (1.2) центральное место как в теоретических рассуждениях, так и в приложениях занимает задача минимизации полинома с неотрицательными коэффициентами при нелинейных членах:

$$\sum_{i=1}^m a_i (1 - x_i) + \sum_{j=1}^n b_j \prod_{i \in \beta_j} x_i \rightarrow \min, \quad (x_i) \quad (1.3)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.4)$$

где $a_i, b_j \geq 0$, $\beta_j \subset \{1, \dots, m\}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Матрицу (h_{ij}) ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) будем называть *характеристической матрицей полинома* (1.3), если

$$h_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i \in \beta_j, \\ 0, & \text{если } i \notin \beta_j. \end{cases}$$

Задача (1.3), (1.4) NP-трудна уже в квадратичном случае ($|\beta_j| = 2$, $j = \overline{1, n}$) [7]. Известен ряд эффективно разрешимых подзадач задачи (1.3), (1.4) [2—4]. К их числу относится задача минимизации квадратичного полинома с разделяющимися переменными

$$\sum_{i=1}^m c_i (1 - x_i) + \sum_{j=1}^n d_j (1 - y_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij} x_i y_j \rightarrow \min, \quad (x_i), (y_j) \quad (1.5)$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.6)$$

где $c_i, d_j, f_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. В [3] показано, что задача (1.5), (1.6) сводится к эффективно решаемой задаче о максимальном потоке, и на этой основе построен алгоритм ее решения с трудоемкостью $O(m^3 + n^3)$.

1.3. Задачей о покрытии будем называть следующую задачу:

$$\sum_{i=1}^m c_i u_i \rightarrow \min, \quad (u_i) \quad (1.7)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} u_i \geq 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad (1.8)$$

$$u_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (1.9)$$

где $c_i \geq 0$, $a_{ij} \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Подзадачу задачи (1.7) — (1.9), определяемую условием $\sum_{i=1}^m a_{ij} = 2$, $j = \overline{1, n}$, называют *задачей о вершинном покрытии*.

Утверждение 1.1 [4, лемма 2]. Задача (1.3), (1.4) сводится к задаче о покрытии вида

$$\sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{j=1}^n b_j v_j \rightarrow \min, \\ (u_i), (v_j) \\ \sum_{i \in \beta_j} u_i + v_j \geq 1, \quad j = \overline{1, n},$$

$$u_i, v_j \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Задача о покрытии (1.7)–(1.9) сводится к задаче (1.3), (1.4) вида

$$\sum_{i=1}^m c_i (1 - x_i) + \Phi \sum_{j=1}^n \prod_{i: a_{ij}=1} x_i \rightarrow \min, \\ (x_i) \\ x_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m},$$

$$\text{где } \Phi > \sum_{i=1}^m c_i.$$

§ 2. ПОЛИНОМЫ, ОБЛАДАЮЩИЕ СВОЙСТВОМ СУБМОДУЛЯРНОСТИ

Функцию f , определенную на множестве $\mathbf{B}^m$ булевых векторов $x = (x_1, \dots, x_m)$, называют *субмодулярной*, если для всех $x, y \in \mathbf{B}^m$

$$f(x \vee y) + f(x \wedge y) \leq f(x) + f(y),$$

где $x \vee y = (\max(x_1, y_1), \dots, \max(x_m, y_m))$,

$$x \wedge y = (\min(x_1, y_1), \dots, \min(x_m, y_m)).$$

Рассмотрим следующую задачу:

$$\sum_{j=1}^n a_j \left(1 - \prod_{i \in \alpha_j} x_i\right) + \sum_{k=1}^l b_k \left(1 - \prod_{i \in \beta_k} \bar{x}_i\right) \rightarrow \min, \quad (2.1) \\ (x_i)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.2)$$

где $a_j, b_k \geq 0$, $\alpha_j, \beta_k \subset \{1, \dots, m\}$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, l}$ и $\bar{x}_i = 1 - x_i$, $i = \overline{1, m}$. Нетрудно проверить, что функция (2.1) субмодулярна. В [8] построен эффективный алгоритм минимизации произвольной субмодулярной функции. Этот алгоритм основан на использовании метода эллипсоидов и имеет характерные для данного метода недостатки, в частности значительную трудоемкость. Для решения задачи (2.1), (2.2) мы предлагаем малотрудоемкий алгоритм, основанный на сведении ее к задаче о максимальном потоке.

Теорема 2.1. Задача (2.1), (2.2) сводится к задаче (1.5), (1.6).

Доказательство. Задаче (2.1), (2.2) поставим в соответствие следующую задачу вида (1.5), (1.6):

$$\sum_{j=1}^n a_j (1 - \tilde{x}_j) + \sum_{k=1}^l b_k (1 - \tilde{y}_k) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l c_{jk} \tilde{x}_j \tilde{y}_k \rightarrow \min, \quad (2.3) \\ (\tilde{x}_j), (\tilde{y}_k)$$

$$\tilde{x}_j, \tilde{y}_k \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, l}, \quad (2.4)$$

где $c_{jk} = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_j \cap \beta_k = \emptyset, \\ 1, & \text{если } \alpha_j \cap \beta_k \neq \emptyset \end{cases}$ и $\Phi > \sum_{i=1}^m a_i + \sum_{j=1}^n b_j$. В силу выбора коэффициентов c_{jk} для оптимального решения $(\tilde{x}_j^*), (\tilde{y}_k^*)$ задачи (2.3), (2.4), очевидно, справедливы соотношения $\tilde{x}_j^* \tilde{y}_k^* = 0$, если $\alpha_j \cap \beta_k \neq \emptyset$. Отсюда следует, что задача (2.3), (2.4) эквивалентна задаче (2.3), (2.4) с дополнительным ограничением

$$\tilde{x}_j \tilde{y}_k = 0 \text{ для } j \text{ и } k \text{ таких, что } \alpha_j \cap \beta_k \neq \emptyset. \quad (2.5)$$

Покажем, что задача (2.1), (2.2) сводится к задаче (2.3)–(2.5). С этой целью построим преобразования допустимых решений, фигурирующие в условиях признака сводимости.

Рассмотрим следующие отображения области (2.4), (2.5) в область (2.2):

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists j: i \in \alpha_j, \tilde{x}_j = 1; \\ 0, & \text{если } \exists k: i \in \beta_k, \tilde{y}_k = 1; \\ 0, & \text{если } \tilde{x}_j = \tilde{y}_k = 0 \quad \forall j, k: i \in \alpha_j \cap \beta_k. \end{cases} \quad (2.6)$$

Корректность определения (2.6) вытекает из ограничений (2.5). Из равенства (2.6) легко получаются соотношения

$$\tilde{x}_j \leq \prod_{i \in \alpha_j} x_i, \quad j = \overline{1, n}, \quad \tilde{y}_k \leq \prod_{i \in \beta_k} x_i, \quad k = \overline{1, l},$$

из которых следует, что на соответствующих согласно (2.6) допустимых решениях задач (2.1), (2.2) и (2.3)–(2.5) значение полинома (2.1) не превосходит значения полинома (2.3).

Отображение области (2.2) в область (2.4), (2.5) зададим формулами

$$\tilde{x}_j = \prod_{i \in \alpha_j} x_i, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.7)$$

$$\tilde{y}_k = \prod_{i \in \beta_k} x_i, \quad k = \overline{1, l}. \quad (2.8)$$

Ограничения (2.5) для булевых векторов $(\tilde{x}_j)$, $(\tilde{y}_k)$, полученных по формулам (2.7), (2.8) из булева вектора (x_i) , выполняются в силу тривиального тождества $t(1-t)=0$ при $t \in \{0, 1\}$. Очевидно также, что значения полиномов (2.4) и (2.3) на соответствующих согласно (2.7), (2.8) булевых векторах совпадают. Таким образом, по признаку сводимости задача (2.1), (2.2) сводится к задаче (2.3)–(2.5). Теорема доказана.

Из теоремы 2.1 и [3, теорема 1] получаем следующий алгоритм решения задачи (2.1), (2.2):

Этап I. Построение соответствующей полиному (2.1) двудольной сети $G=(V, E)$ с множеством вершин $V=$

$=\{1, \dots, n+l\} \cup \{s, t\}$, множеством дуг $E=\{(j, n+k): \alpha_j \cap \beta_k \neq \emptyset\} \cup \{(s, j): j \in [1, n] \cap \mathbb{Z}\} \cup \{(n+k, t): k \in [1, l] \cap \mathbb{Z}\}$ и пропускными способностями дуг, указанными на рисунке.

Этап II. Решение задачи о максимальном потоке в сети G и нахождение минимального разреза $V_s^* \rightarrow V_t^*$.

Этап III. Построение по разрезу $V_s^* \rightarrow V_t^*$ оптимального решения (x_i^*) по формуле:

$$x_i^* = \begin{cases} 1, & \text{если } \exists j: i \in \alpha_j, j \in V_s^*; \\ 0, & \text{если } \exists k: i \in \beta_k, n+k \in V_t^*; \\ 0, & \text{если } j \in V_t^*, n+k \in V_s^* \quad \forall j, k: i \in \alpha_j \cap \beta_k. \end{cases}$$

Трудоемкость алгоритма определяется трудоемкостью выполнения второго этапа и равна $O(l^3 + n^3)$.

§ 3. ПОЛИНОМ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Цель этого параграфа — доказательство труднорешаемости задачи минимизации полинома (1.5) в общем случае, когда коэффициентам t_{ij} разрешается принимать значения любого знака.

Нам потребуются два вспомогательных утверждения. Из утверждения 1.1 и [4, лемма 1] тривиально вытекает

Лемма 3.1. *Задача о покрытии (1.7) — (1.9) сводится к задаче о вершинном покрытии вида*

$$\sum_{i=1}^m c_i s_i + \Phi \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^n a_{kj} t_{kj} \rightarrow \min_{(s_i), (t_{kj})}, \quad (3.1)$$

$$s_i + t_{ij} \geq a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.2)$$

$$t_{ij} + t_{kj} \geq a_{ij} a_{kj}, \quad i, k = \overline{1, m}, \quad i \neq k, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.3)$$

$$s_i, t_{kj} \in \{0, 1\}, \quad i, k = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.4)$$

$$\text{где } \Phi > \sum_{i=1}^m c_i.$$

Рассмотрим задачу о вершинном покрытии минимальной мощности:

$$\sum_{v \in V} u_v \rightarrow \min_{(u_v)}, \quad (3.5)$$

$$u_{v_1} + u_{v_2} \geq 1, \quad (v_1, v_2) \in E, \quad (3.6)$$

$$u_v \in \{0, 1\}, \quad v \in V, \quad (3.7)$$

где $G = (V, E)$ — неориентированный граф без петель. Произвольным образом выбирая направления ребер, сделаем граф G ориентированным графом $\vec{G} = (V, \vec{E})$.

Лемма 3.2. *Задача о вершинном покрытии (3.5) — (3.7) сводится к задаче о вершинном покрытии вида*

$$\sum_{v \in V} s_v + \sum_{e \in \vec{E}} (t_e^1 + t_e^2) \rightarrow \min_{(s_v), (t_e^k)}, \quad (3.8)$$

$$s_{v_1} + t_e^1 \geq 1, \quad e = (v_1, v_2) \in \vec{E}, \quad (3.9)$$

$$s_{v_2} + t_e^2 \geq 1, \quad e = (v_1, v_2) \in \vec{E}, \quad (3.10)$$

$$t_e^1 + t_e^2 \geq 1, \quad e = (v_1, v_2) \in \vec{E}, \quad (3.11)$$

$$s_v, t_e^k \in \{0, 1\}, \quad v \in V, \quad e \in \vec{E}, \quad k = 1, 2. \quad (3.12)$$

Доказательство. Согласно утверждению 2.1 задача (3.5) — (3.7) сводится к задаче о вершинном покрытии вида

$$\sum_{v \in V} r_v + \Phi \sum_{e \in \vec{E}} (q_e^1 + q_e^2) \rightarrow \min_{(r_v), (q_e^k)}, \quad (3.13)$$

$$r_{v_1} + q_e^1 \geq 1, \quad e = (v_1, v_2) \in \vec{E}, \quad (3.14)$$

$$r_{v_2} + q_e^2 \geq 1, \quad e = (v_1, v_2) \in \vec{E}, \quad (3.15)$$

$$q_e^1 + q_e^2 \geq 1, \quad e = (v_1, v_2) \in \vec{E}, \quad (3.16)$$

$$r_v, q_e^k \in \{0, 1\}, \quad v \in V, \quad e \in \vec{E}, \quad k = 1, 2, \quad (3.17)$$

где $\Phi > |V|$.

Утверждение леммы будет доказано, если мы покажем, что задача (3.13) — (3.17) сводится к задаче (3.8) — (3.12). Нетрудно видеть, что

для любого оптимального решения задачи (3.13)–(3.17) соотношения (3.16) обращаются в равенства.

Обозначим через $E((s_v), (t_e^k))$, где $(s_v), (t_e^k)$ — допустимое решение задачи (3.8)–(3.12), множество $\{e \in \vec{E}: t_e^1 + t_e^2 > 1\}$. Покажем, что найдется оптимальное решение $(s_v^*), (t_e^{k*})$ задачи (3.8)–(3.12) такое, что $E((s_v^*), (t_e^{k*})) = \emptyset$. Действительно, пусть $(s_v'), (t_e^{k'})$ — оптимальное решение задачи (3.8)–(3.12) такое, что $E((s_v'), (t_e^{k'})) \neq \emptyset$. Возьмем $e' = (v_1, v_2) \in E((s_v'), (t_e^{k'}))$ и преобразуем решение $(s_v'), (t_e^{k'})$ в решение $(s_v''), (t_e^{k''})$ такое, что

$$s_v'' = \begin{cases} 1, & \text{если } v = v_1, \\ s_v', & \text{если } v \in V \setminus \{v_1\}, \end{cases}$$

$$t_e^{k''} = \begin{cases} 0, & \text{если } e = e', k = 1, \\ 1, & \text{если } e = e', k = 2, \\ t_{e'}^{k'}, & \text{если } e \in \vec{E} \setminus \{e'\}. \end{cases}$$

Понятно, что $(s_v''), (t_e^{k''})$ — допустимое решение задачи (3.8)–(3.12). Более того, $(s_v''), (t_e^{k''})$ — оптимальное решение, поскольку значение целевой функции (3.8) на этом решении не превосходит значения на оптимальном решении $(s_v'), (t_e^{k'})$. По построению для решения $(s_v''), (t_e^{k''})$ справедливо равенство

$$|E((s_v''), (t_e^{k''}))| < |E((s_v'), (t_e^{k'}))|. \quad (3.18)$$

Если $E((s_v''), (t_e^{k''})) \neq \emptyset$, то описанное преобразование применим к решению $(s_v''), (t_e^{k''})$ и т. д. В силу (3.18) в конечном счете получим оптимальное решение $(s_v^*), (t_e^{k*})$ задачи (3.8)–(3.12), обладающее необходимыми свойствами. Описанная процедура, очевидно, эффективна.

Таким образом, обе задачи (3.8)–(3.12) и (3.13)–(3.17) эквивалентны одной и той же задаче с целевой функцией (3.8) при ограничениях (3.9), (3.10), (3.12) и $t_e^1 + t_e^2 = 1, e \in \vec{E}$, что и доказывает требуемое. Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Задача минимизации полинома*

$$\sum_{i=1}^m c_i (1 - x_i) + \sum_{j=1}^n d_j (1 - y_j) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f_{ij} x_i y_j \rightarrow \min, \quad (x_i), (y_j) \quad (3.19)$$

$$x_i, y_j \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.20)$$

где $c_i, d_j, f_{ij} \in \mathbb{Q}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, NP-трудна.

Доказательство. Из леммы 3.2 вытекает, что задача (3.8)–(3.12) NP-трудна. Сведем эту задачу к рассматриваемой. Согласно утверждению 1.1 задача о вершинном покрытии (3.8)–(3.12) сводится к задаче минимизации полинома вида

$$\sum_{v \in V} (1 - \tilde{x}_v) + \sum_{e \in \vec{E}} (1 - \tilde{y}_e) + \sum_{e \in \vec{E}} (1 - \tilde{z}_e) + \Phi \sum_{e=(v_1, v_2) \in \vec{E}} \tilde{x}_{v_1} \tilde{y}_e + \Phi \sum_{e=(v_1, v_2) \in \vec{E}} (\tilde{x}_{v_2} + \tilde{y}_e) \tilde{z}_e \rightarrow \min, \quad (3.21)$$

$$\tilde{x}_v, \tilde{y}_e, \tilde{z}_e \in \{0, 1\}, \quad v \in V, \quad e \in \vec{E}, \quad (3.22)$$

где $\Phi > |V| + 2|\vec{E}|$. Покажем, что задача (3.21), (3.22) эквивалентна

следующей:

$$\sum_{v \in V} (1 - x_v) + \sum_{e \in \vec{E}} (1 - y_e) + \sum_{e \in \vec{E}} (1 - z_e) + \sum_{e=(v_1, v_2) \in \vec{E}} x_{v_1} y_e +$$

$$+ \Phi \sum_{e=(v_1, v_2) \in \vec{E}} (x_{v_2} + y_e) z_e \rightarrow \min_{(x_v), (y_e), (z_e)} \quad (3.23)$$

$$x_v, y_e, z_e \in \{0, 1\}, \quad v \in V, \quad e \in \vec{E}. \quad (3.24)$$

Действительно, легко видеть, что любое оптимальное решение задачи (3.21) — (3.22) удовлетворяет соотношению

$$\sum_{e=(v_1, v_2) \in \vec{E}} \tilde{x}_{v_1} \tilde{y}_e = 0. \quad (3.25)$$

Следовательно, задача (3.21), (3.22) эквивалентна задаче (3.21), (3.22), (3.25). Предположим теперь, что $(x'_v), (y'_e), (z'_e)$ — оптимальное решение задачи (3.23), (3.24) такое, что $\sum_{e=(v_1, v_2) \in \vec{E}} x'_{v_1} y'_e > 0$. Обозначим

$\vec{E}_1 = \{e \in \vec{E} : x'_{v_1} y'_e = 1\}$. Рассмотрим допустимое решение $(x^*_v), (y^*_e), (z^*_e)$

задачи (3.23), (3.24) такое, что $x^*_v = x'_v, v \in V, z^*_e = z'_e, e \in \vec{E}$ и

$$y^*_e = \begin{cases} 0, & \text{если } e \in \vec{E}_1, \\ y'_e, & \text{если } e \in \vec{E} \setminus \vec{E}_1. \end{cases}$$

Решение $(x^*_v), (y^*_e), (z^*_e)$ оптимально, поскольку значение полинома (3.23) на этом решении не превосходит значения на оптимальном решении $(x'_v), (y'_e), (z'_e)$. Кроме того, оно удовлетворяет соотношению

$$\sum_{e=(v_1, v_2) \in \vec{E}} x_{v_1} y_e = 0. \quad (3.26)$$

Таким образом, задача (3.23), (3.24) эквивалентна задаче (3.23), (3.24), (3.26). Ясно, что (3.21), (3.22), (3.25) и (3.23), (3.24), (3.26) эквивалентны, что и доказывает требуемое.

Покажем, что задача (3.23), (3.24) сводится к задаче (3.19), (3.20). Действительно, несложно проверить, что всякое оптимальное решение задачи (3.23), (3.24) удовлетворяет соотношениям

$$z_e = (1 - x_{v_2})(1 - y_e), \quad e = (v_1, v_2) \in \vec{E}, \quad (3.27)$$

и, следовательно, задача (3.23), (3.24) эквивалентна задаче (3.23), (3.24), (3.27). Исключим в последней задаче переменные (z_e) , выразив их согласно (3.27) через остальные переменные. Сделав затем замену $\bar{x}_v = 1 - x_v, v \in V, \bar{y}_e = 1 - y_e, e \in \vec{E}$, получим следующую, эквивалентную (3.23), (3.24), задачу:

$$\sum_{v \in V} \bar{x}_v + \sum_{e \in \vec{E}} \bar{y}_e + \sum_{e=(v_1, v_2) \in \vec{E}} (1 - \bar{x}_{v_1} \bar{y}_e) +$$

$$+ \sum_{e=(v_1, v_2) \in \vec{E}} (1 - \bar{x}_{v_1})(1 - \bar{y}_e) \rightarrow \min_{(\bar{x}_v), (\bar{y}_e)} \quad (3.28)$$

$$\bar{x}_v, \bar{y}_e \in \{0, 1\}, \quad v \in V, \quad e \in \vec{E}. \quad (3.29)$$

Остается только заметить, что задача (3.28), (3.29) является подзадачей задачи (3.19), (3.20). Теорема доказана.

§ 4. КВАДРАТИЧНЫЕ ПОЛИНОМЫ

В § 1 было отмечено, что задача минимизации квадратичного полинома NP-трудна, так что поиск эффективных алгоритмов ее решения — занятие бесперспективное. Для отыскания точного решения задачи в большинстве работ предлагается использовать универсальные схемы неявного перебора. Работоспособность алгоритмов, основанных на таких схемах, существенно зависит от степени эксплуатации полезной специфики задачи. В [6] установлены некоторые новые свойства рассматриваемой задачи и дан набросок алгоритма, использующего эти свойства. В настоящем параграфе содержится полное описание этого алгоритма.

Алгоритм состоит из двух этапов. На первом данный квадратичный полином преобразуется в квадратичный полином с неотрицательными коэффициентами при нелинейных членах. Преобразование основано на следующем факте.

Утверждение 4.1 [4, лемма 1]. *Задача минимизации полинома*

$$\sum_{j=1}^n a_j \left(1 - \prod_{i \in \alpha_j} x_i\right) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=i+1}^m b_{ik} x_i x_k \rightarrow \min, \quad (x_i)$$

где $a_j, b_{ik} \geq 0$, $j = \overline{1, n}$, $k = \overline{i+1, m}$, $i = \overline{1, m-1}$, сводится к задаче минимизации полинома

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n A_j (1 - \tilde{y}_j) + \sum_{i=1}^m B_i (1 - \tilde{x}_i) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m b_{ik} \tilde{x}_i \tilde{x}_k + \\ + \Phi \sum_{j=1}^n \sum_{i \in \alpha_j} \tilde{x}_i \tilde{y}_j \rightarrow \min, \quad (\tilde{x}_i), (\tilde{y}_j) \end{aligned}$$

где $A_j = \Phi |\alpha_j| - a_j$, $j = \overline{1, n}$, $B_i = \Phi |\{j: i \in \alpha_j\}|$, $i = \overline{1, m}$,
 $\Phi > \sum_{j=1}^n a_j + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m b_{ik}$.

Второй этап представляет собой алгоритм решения задачи минимизации квадратичного полинома с неотрицательными коэффициентами при нелинейных членах. Запишем ее в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^m a_i (1 - x_i) + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m b_{ik} x_i x_k \rightarrow \min, \quad (x_i) \quad (4.1)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.2)$$

где $a_i, b_{ik} \geq 0$, $k = \overline{i+1, m}$, $i = \overline{1, m}$. Согласно утверждению 4.1 задача (4.1), (4.2) сводится к задаче о покрытии вида

$$\sum_{i=1}^m a_i u_i + \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=i+1}^m b_{ik} v_{ik} \rightarrow \min, \quad (u_i), (v_{ik}) \quad (4.3)$$

$$u_i + u_k + v_{ik} \geq 1, \quad k = \overline{i+1, m}, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad (4.4)$$

$$u_i, v_{jk} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{j+1, m}, \quad j = \overline{1, m-1}, \quad (4.5)$$

$$u_i, v_{jk} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{j+1, m}, \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (4.6)$$

Алгоритм решения задачи (4.1), (4.2) опирается на следующие свойства задачи (4.3) — (4.6) [6]:

I. Существует алгоритм решения линейной релаксации (4.3) — (4.5) с трудоемкостью $O(m^3)$.

II. Существует оптимальное решение $(\tilde{u}_i^*), (\tilde{v}_{jk}^*)$ задачи (4.3) — (4.5), обладающее свойством

$$\tilde{u}_i^*, \tilde{v}_{jk}^* \in \{0, 1/2, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad k = \overline{j+1, m}, \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (4.7)$$

III. Пусть $(\tilde{u}_i^*), (\tilde{v}_{jk}^*)$ — оптимальное решение задачи (4.3) — (4.5), обладающее свойством (4.7). Обозначим $I_l = \{i: \tilde{u}_i^* = l\}$, $l = 0, 1$. Тогда найдется оптимальное решение $(u_i^*), (v_{jk}^*)$ задачи о покрытии (4.3) — (4.6) такое, что $u_i^* = l$, когда $i \in I_l$, $l \in \{0, 1\}$.

Перейдем теперь непосредственно к описанию алгоритма.

Общая схема ветвей и границ. Описание вычислительной схемы будем вести применительно к дискретной экстремальной задаче общего вида:

$$F(x) \rightarrow \min_{x \in \mathcal{D}},$$

где $\mathcal{D}$ — конечное множество. На множестве $\mathfrak{A}$ всех подмножеств множества $\mathcal{D}$ считаем заданными функцию «нижняя граница», функцию ветвления и функцию выбора оптимального подмножества. Под *нижней границей* понимаем функцию $H: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$ такую, что $H(d) \leq F(x)$ для любого $x \in d \subset \mathcal{D}$. *Ветвлением* назовем функцию $B: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ такую, что $B(d)$ есть собственное подмножество множества $d \in \mathfrak{A}$, если $|d| \geq 2$ и $B(d) = d$, если $|d| \leq 1$. Под функцией выбора оптимального подмножества понимаем функцию $A: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ такую, что $A(d)$ есть непустое подмножество d и $\min_{x \in A(d)} F(x) = \min_{x \in d} F(x)$.

Вычислительная схема состоит из конечной последовательности однотипных шагов, на каждом из которых рассматриваются множество $t \subset \mathcal{D}$ не отброшенных к данному шагу решений, множество решений $t' \subset t$, проверяемых на данном шаге, и рекордное решение $x^0 \in \mathcal{D}$, являющееся наилучшим из просмотренных к данному шагу решений. На первом шаге $t = t' = \mathcal{D}$, а x^0 — произвольный элемент множества $\mathcal{D}$.

Шаг начинается с проверки множества t' , цель которой установить, можно ли отбросить это подмножество. Полагаем $t'' = A(t')$. Множество t' считается проверенным в одном из двух случаев: либо $H(t'') > F(x^0)$, либо $|t''| = 1$, $t'' = \{x\}$. При этом во втором случае, если $F(x) < F(x^0)$, то полагаем $x^0 = x$. Пусть множество t' проверено. Если $t \setminus t' = \emptyset$, то алгоритм заканчивает работу. Если $t \setminus t' \neq \emptyset$, то полагаем $t = t \setminus t'$, $t' = B(t)$ и переходим к следующему шагу. Пусть множество t' проверить не удастся. Тогда полагаем $t = (t \setminus t') \cup t''$, $t' = B(t'')$ и переходим к следующему шагу.

Легко видеть, что алгоритм, работающий по описанной схеме, останавливается через конечное число шагов, а последнее рекордное решение является оптимальным.

Алгоритм. Конкретизируем элементы данной схемы в соответствии со спецификой задачи (4.1), (4.2).

1. Задание подмножества решений. Подмножества допустимых решений задачи будем задавать с помощью частичных решений. *Частичным решением (вектором)* назовем булев вектор $(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$, $0 \leq r \leq m$, где $\langle i_1, \dots, i_r \rangle$ — упорядоченная выборка элементов множества $\{1, \dots, m\}$, а продолжением этого частичного вектора — всякое допустимое решение (x_i) задачи (4.1), (4.2) такое, что $x_{i_k} = y_{i_k}$, $k = \overline{1, r}$. Множество продолжений частичного решения $(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$ обозначим $\pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$. Для частичного решения $(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$ положим $\bar{M} = \{i_1, \dots, i_r\}$, $M_1 = \{i \in \bar{M}: y_i = 1\}$, $M_0 = \{i \in \bar{M}: y_i = 0\}$, $M' = \{1, \dots, m\} \setminus \bar{M}$.

2. Нижняя граница. Обозначим значение полинома (4.1) на булевом векторе (x_i) через $P((x_i))$. Построим функцию $H(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$, $0 \leq r \leq m$, такую, что $H(y_{i_1}, \dots, y_{i_r}) \leq P((x_i))$ для любого решения (x_i) из множества $\pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$. Для этого перейдем к рассмотрению линейной релаксации (4.3) — (4.5) и в качестве значения функции «нижняя граница» примем оптимальное значение целевой функции этой

задачи. Задача (4.1), (4.2) на множестве $\pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$ записывается следующим образом:

$$C(y_{i_1}, \dots, y_{i_r}) + \sum_{i \in M'} a_i(1 - x_i) + \sum_{\substack{j, k \in M' \\ j < k}} b_{jk} x_j x_k \rightarrow \min_{(x_i)}, \quad (4.8)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \quad i \in M', \quad (4.9)$$

$$\text{где } C(y_{i_1}, \dots, y_{i_r}) = \sum_{i \in M_0} a_i + \sum_{\substack{j, k \in M_1 \\ j < k}} b_{jk}.$$

Эквивалентная задаче (4.8), (4.9) задача о покрытии имеет вид

$$C(y_{i_1}, \dots, y_{i_r}) + \sum_{i \in M'} a_i u_i + \sum_{\substack{j, k \in M' \\ j < k}} b_{jk} v_{jk} \rightarrow \min_{(u_i), (v_{jk})}, \quad (4.10)$$

$$u_j + u_k + v_{jk} \geq 1, \quad j, k \in M', \quad j < k, \quad (4.11)$$

$$u_i, v_{jk} \geq 0, \quad i, j, k \in M', \quad j < k, \quad (4.12)$$

$$u_i, v_{jk} \in \{0, 1\}, \quad i, j, k \in M', \quad j < k. \quad (4.13)$$

С учетом сказанного определим нижнюю границу целевой функции задачи (4.8), (4.9) следующим образом:

$$H(y_{i_1}, \dots, y_{i_r}) = C(y_{i_1}, \dots, y_{i_r}) + \sum_{i \in M'} a_i u_i^* + \sum_{\substack{j, k \in M' \\ j < k}} b_{jk} v_{jk}^*,$$

где $(u_i^*), (v_{jk}^*)$ — оптимальное решение задачи линейного программирования (4.10) — (4.12). Для вычисления функции H используем эффективный алгоритм, существование которого утверждается в свойстве I.

3. Выбор оптимального подмножества. Из свойства III вытекает сводимость задачи о покрытии (4.3) — (4.6) к задаче, получающейся из исходной путем фиксации значений булевых компонент оптимального решения линейной задачи (4.3) — (4.5). Этот результат мы положим в основу способа построения оптимального подмножества. Пусть $(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$ — некоторое частичное решение задачи (4.1), (4.2), а $(u_i^*), (v_{jk}^*)$ — оптимальное решение линейной задачи (4.3) — (4.5). Положим $x_i^* = 1 - u_i^*, i \in M', \bar{M}' = \{i \in M': x_i^* = 0\} \cup \{i \in M': x_i^* = 1\}$, и пусть $\bar{M}' = \{k_1, \dots, k_p\}$. В качестве оптимального подмножества множества $\pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$ берем множество $\pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_r}, x_{k_1}^*, \dots, x_{k_p}^*)$.

4. Функция ветвления. Пусть даны частичное решение $(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$ и некоторое множество номеров $S \subset M_1$. Рассмотрим два множества допустимых решений задачи (4.1) — (4.2): множество продолжений $\pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$ и объединение $\pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$ и всех множеств вида $\pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_{r'-1}}, 0)$, где $r' \in S$. Результатом применения функции ветвления ко второму множеству будем считать подмножество $\pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$, а к первому — подмножество $\pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_r}, 1)$, где i_{r+1} — номер из множества M' , на котором достигается

$$\min_{j \in M'} \left(\sum_{\substack{k \in M' \\ k > j}} b_{jk} + \sum_{\substack{i \in M' \\ i < j}} b_{ij} - a_j \right).$$

Выбранная стратегия ветвления определяется чисто эвристическими соображениями. Именно, легко заметить, что когда указанный минимум неположителен, то найдется оптимальное решение (x_i^*) ($i \in M'$) задачи (4.8), (4.9) такое, что $x_{i_{r+1}} = 1$. Покажем, что при такой функции ветвления на каждом шаге алгоритма ветвей и границ множество t неотброшенных решений и множество t' проверяемых решений определяются парой $((y_{i_1}, \dots, y_{i_r}), S)$, где $(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$ — некоторое частичное решение,

S — некоторое подмножество множества M_1 , причем t' есть множество продолжений $\pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$, а t — рассмотренное выше объединение $\pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$ и всех множеств вида $\pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_{r'-1}}, 0)$, $r' \in S$.

На первом шаге имеем пару, состоящую из пустого частичного решения ($r=0$) и пустого множества S , и справедливость утверждения очевидна. Предположим, что на некотором шаге множества t и t' определяются парой $((y_{i_1}, \dots, y_{i_r}), S)$. Пусть $t'' = \pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_r}, y_{i_{r+1}}, \dots, y_{i_p})$ — оптимальное подмножество множества $t' = \pi(y_{i_1}, \dots, y_{i_r})$. Возможны два исхода проверки множества t' : его удастся отбросить, и тогда функция ветвления применяется к множеству $t \setminus t'$, иначе — функция ветвления применяется к множеству t'' . Пусть имеет место первый случай, и пусть r' — наибольший номер из множества S . Рассмотрим пару $((y_{i_1}, \dots, y_{i_{r'-1}}, 0), S')$, где $S' = S \setminus \{r'\}$, и заметим, что она задает, во-первых, множество $t \setminus t'$ и, во-вторых, множество $B(t \setminus t')$. Если $S = \emptyset$, то, очевидно, $t = t'$, и алгоритм заканчивает работу. Пусть реализуется второй случай. Рассмотрим тогда пару $((y_{i_1}, \dots, y_{i_p}, 1), S'')$, где номер i_{p+1} определяется функцией ветвления, $S'' = S \cup \{i_{p+1}\}$ и заметим, что она задает множество t и множество $B(t'')$. Таким образом, в обоих случаях на следующем шаге алгоритма информация о множестве неотброшенных решений и множестве проверяемых решений задается парой, состоящей из частичного решения и некоторого множества номеров. Описание алгоритма закончено.

Трудоемкость одного шага процедуры второго этапа оценивается величиной $O(m^3)$. В обозначениях исходной задачи минимизации квадратичного полинома общего вида трудоемкость одного шага не будет превосходить $O(m^3 + n^3)$, где m — число переменных, n — число квадратичных членов с отрицательными коэффициентами.

§ 5. 2-СВЯЗНЫЕ ПОЛИНОМЫ

Матрицу (f_{ij}) ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) будем называть k -связной, если для любой пары строк i_1, i_2 разность $f_{i_1 j} - f_{i_2 j}$ меняет знак не более k раз при монотонном изменении от 1 до n . Полином задачи (1.3) — (1.4) назовем k -связным, если его характеристическая матрица k -связна.

Известно, что задача минимизации k -связного полинома при $k \geq 3$ NP-трудна [4]. В [2] построены эффективные алгоритмы минимизации 1- и 2-связных полиномов. В данном параграфе мы приводим более простое и наглядное обоснование алгоритма минимизации 2-связного полинома.

Согласно утверждению 1.1 задача минимизации k -связного полинома эквивалентна задаче о покрытии (1.7) — (1.9) с k -связной матрицей ограничений (a_{ij}) . С использованием признака сводимости легко показать, что задача (1.7) — (1.9) сводится к задаче размещения (или стандартизации) вида

$$\sum_{i=1}^m c_i \max_{j=1, \dots, n} w_{ij} + \Phi \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij} w_{ij} \rightarrow \min, \quad (5.1)$$

$$\sum_{i=1}^m w_{ij} = 1, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.2)$$

$$w_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (5.3)$$

где $\bar{a}_{ij} = 1 - a_{ij}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $\Phi > \sum_{i=1}^m c_i$. Введем обозначения $I = \{1, \dots, m\}$, $J = \{1, \dots, n\}$, $\gamma_j = \{i \in I: a_{ij} = 1\}$, $j \in J$, $\delta_i = \{j \in J: a_{ij} = 1\}$, $i \in I$; $J_{rr} = \emptyset$, $r = 0$, n , $J_{rs} = \{r+1, \dots, s\}$, $r = 0, n-1$, $s = r+1, n$. С за-

дачей (5.1) — (5.3) свяжем семейство задач Π_{rs} ($r = \overline{0, n}, s = \overline{r, n}$) вида

$$F_{rs}(w) = \sum_{i \in I} c_i \max_{j \in J} w_{ij} + \Phi \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_{rs}} \bar{a}_{ij} w_{ij} \rightarrow \min_{(w_{ij})},$$

$$\sum_{i \in I} w_{ij} = 1, \quad j \in J_{rs}, \quad w_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, \quad j \in J.$$

Очевидно, что задача Π_{0n} — это исходная задача (5.1) — (5.3). Оптимальное значение целевой функции задачи Π_{rs} будем обозначать через F_{rs}^* . Через $\Pi_{rs}(i)$ ($0 \leq r \leq s \leq n$) обозначим задачу Π_{rs} с дополнительным ограничением $w_{is} = 1$, а через $F_{rs}^*(i)$ — оптимальное значение целевой функции этой задачи. Заметим, что

$$F_{rs}^* = \min_{i \in I} F_{rs}^*(i) \quad \text{при } r < s. \quad (5.4)$$

Далее будем предполагать, что матрица (a_{ij}) 2-связна. Кроме того, не уменьшая общности, будем считать, что матрица (a_{ij}) не имеет нулевых столбцов и одинаковых строк. Положим

$$Q_{rr}(i) = c_i, \quad i \in I, \quad (5.5)$$

и определим функции $Q_{rs}(i)$ ($i \in \gamma_s$) рекуррентными формулами

$$Q_{rs}(i) = \min_{j \in (J_{rs} \cap \delta_i) \cup \{r\}} \{Q_{rj}(i) + F_{js-1}\}, \quad (5.6)$$

$$r = \overline{0, n-1}, \quad s = \overline{r+1, n}.$$

Основу построенного в [2] алгоритма решения задачи (5.1) — (5.3) составляет

Теорема 5.1. Для любых $r = 0, \dots, n-1, s = r+1, \dots, n$ справедливо равенство

$$F_{rs}^* = \min_{i \in \gamma_s} Q_{rs}(i). \quad (5.7)$$

Формулы (5.5) — (5.7) позволяют рекуррентно вычислять величины $Q_{rs}(i)$ и F_{rs}^* и находить по ним компоненты оптимального решения (w_{ij}^*) задачи (5.1) — (5.3). Эти действия (подробнее см. [2]) могут быть выполнены за время $O(n^2 \max_{j \in J} |\gamma_j| \max_{i \in I} |\delta_i|)$.

Предлагаемое доказательство теоремы 5.1 опирается на очевидное соотношение (5.4) и следующие леммы.

Лемма 5.1. Задача (5.1) — (5.3) имеет 2-связное оптимальное решение (рассматриваемое как матрица).

Доказательство. Пусть $(\bar{w}_{ij})$ — оптимальное решение задачи (5.1) — (5.3) и $I_1 = \{i \in I: \max_{j \in J} \bar{w}_{ij} = 1\}$. Для $t \in J$ определим на множестве I отношение $<_t: i_1 <_t i_2 \Leftrightarrow$ первая ненулевая компонента вектора $(a_{i_1 j} - a_{i_2 j})$ ($j = t, t+1, \dots, n, 1, \dots, t-1$) положительна. Легко видеть, что отношение $<_t$ — линейный порядок. Положим

$$w_{ij}^* = \begin{cases} 1, & \text{если } i - \text{минимальный элемент } I_1 \text{ относительно порядка } <_j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Из построения ясно, что (w_{ij}^*) — оптимальное решение задачи (5.1) — (5.3). Остается показать, что матрица (w_{ij}^*) 2-связна. Это нетрудно сделать, если заметить, что из 2-связности матрицы (a_{ij}) вытекает следующее свойство порядков $<_i$: если $i_1, i_2 \in I, j_1, j_2, j_3 \in J$, причем $j_1 < j_2 < j_3$ и $i_1 <_{j_1} i_2, i_1 <_{j_1} i_2, i_2 <_{j_2} i_1, i_1 <_{j_3} i_2$, то $i_1 <_j i_2$ для всех $j \geq j_3, j \in J$.

Лемма 5.2. Для любых $r = 0, \dots, n-1$, $s = r, \dots, n$ и $i \in \gamma_s$ выполнено неравенство

$$Q_{rs}(i) \geq F_{rs}^*(i). \quad (5.8)$$

Доказательство проведем индукцией по $l = s - r$. При $r = s$ неравенство (5.8) очевидно. Пусть (5.8) справедливо для всех $l \leq l_0$ ($0 < l_0 < n$). Покажем, что тогда оно выполнено и при $l = l_0 + 1$. Действительно, пусть $i \in \gamma_s$ и $s - r = l_0 + 1$. Согласно (5.5) и по предположению индукции имеем $Q_{rs}(i) = Q_{rj}(i) + F_{js-1}^* \geq F_{rj}(i) + F_{js-1}^* = F_{rj}(w') + F_{js-1}^*(w'')$, где $w' = (w'_{kj})$ — оптимальное решение задачи $\Pi_{rj}(i)$, $w'' = (w''_{ij})$ — оптимальное решение задачи Π_{js-1} . Пусть (ε_{kj}) — $(m \times n)$ -матрица с элементами

$$\varepsilon_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } k = i, j = s, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Положим $\bar{w}_{kj} = w'_{kj} + w''_{ij} + \varepsilon_{kj}$, $k \in I$, $j \in J$. Очевидно, $\bar{w} = (\bar{w}_{kj})$ — допустимое решение задачи $\Pi_{rs}(i)$. Имеем $F_{rj}(w') + F_{js-1}^*(w'') \geq F_{rs}(\bar{w}) \geq F_{rs}^*(i)$, что и требовалось доказать.

Лемма 5.3. Пусть $r, s \in [0, n] \cap \mathbb{Z}$, $r \leq s$, $i \in \gamma_s$, и задача $\Pi_{rs}(i)$ имеет 2-связное оптимальное решение. Тогда

$$Q_{rs}(i) = F_{rs}^*(i). \quad (5.9)$$

Доказательство. Как и в предыдущем рассуждении применим индукцию по $l = s - r$. При $l = 0$ утверждение очевидно. В предположении справедливости равенства (5.9) при $l \leq l_0$ ($0 < l_0 < n$) покажем, что (5.9) верно и при $l = l_0 + 1$. Пусть $s - r = l_0 + 1$, $i \in \gamma_s$ и $w^* = (w^*_{kj})$ — 2-связное оптимальное решение задачи $\Pi_{rs}(i)$. Обозначим $J_{rs}^1 = \{j \in J_{rs} : w^*_{ij} = 1\}$ и положим

$$t = \begin{cases} \max_{j \in J_{rs}^1} j, & \text{если } J_{rs}^1 \neq \emptyset, \\ r, & \text{если } J_{rs}^1 = \emptyset. \end{cases}$$

Тогда $F_{rs}^*(i) = F_{rs}(w^*) = F_{rt}(w^{rt}) + F_{ts-1}(w^{ts-1})$, где через $w^{pq}(p, q \in [r, s] \cap \mathbb{Z})$ обозначено допустимое решение задачи Π_{pq} с компонентами

$$w^{pq}_{kj} = \begin{cases} w^*_{kj}, & \text{если } p + 1 \leq j \leq q, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Окончательно, в силу индукционного предположения получаем

$$F_{rt}(w^{rt}) + F_{ts-1}(w^{ts-1}) \geq F_{rt}(i) + F_{ts-1} = Q_{rt}(i) + F_{ts-1} \geq Q_{rs}(i),$$

откуда с учетом неравенства (5.8) и вытекает требуемое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982. — 416 с.
2. Береснев В. Л. Алгоритмы минимизации полиномов от булевых переменных // Проблемы кибернетики. — 1979. — Вып. 36. — С. 225—246.
3. Агеев А. А. О минимизации некоторых полиномов от булевых переменных // Управляемые системы. — Новосибирск, 1981. — Вып. 21. — С. 3—5.
4. Агеев А. А. О сложности задач минимизации полиномов от булевых переменных // Управляемые системы. — Новосибирск, 1983. — Вып. 23. — С. 3—11.
5. Береснев В. Л., Гимади Э. Х., Дементьев В. Т. Экстремальные задачи стандартизации. — М.: Наука, 1978. — 333 с.
6. Агеев А. А. О минимизации квадратичных полиномов от булевых переменных // Управляемые системы. — Новосибирск, 1984. — Вып. 25. — С. 3—16.
7. Трубин В. А. Универсальность одного класса квадратичных целочисленных задач // Кибернетика. — 1977. — № 2. — С. 147.
8. Grötschel M., Lovász L., Schrijver A. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization // Combinatorica. — 1981. — V. 1. — P. 169—197.

