

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА КВАЗИОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В. М. АЛЕКСАНДРОВ

Построение оптимального управления для линейных динамических систем высокого порядка представляет значительный теоретический и практический интерес. Основная трудность заключается в нахождении начальных условий для сопряженной системы, соответствующих начальным условиям прямой системы. Ввиду невозможности аналитического решения задачи был предложен целый ряд итерационных методов нахождения оптимального управления [1—31]. Основным недостатком этих методов является значительный объем необходимых вычислений, что приводит к запаздыванию в управлении. Запаздывание тем больше, чем выше размерность управляемой системы, чем больше число управляющих параметров и чем выше точность, с которой необходимо найти оптимальное управление. Наличие запаздывания ухудшает качество процессов и делает невозможным оптимальное управление быстропротекающими процессами.

Предлагаемый новый метод основан на принципах квазиоптимального управления [32—34]. Квазиоптимальное управление формируется раздельно из начальных значений каждой фазовой координаты и представляет последовательность разнополярных импульсов, величины которых пропорциональны начальным условиям. Моменты переключений не зависят от значений начальных условий и постоянны в случае постоянных параметров управляемой системы, что существенным образом упрощает техническую реализацию квазиоптимального управления и делает возможным управление в реальном масштабе времени быстропротекающими процессами. Каждая компонента вектора управления образуется суммированием составляющих, сформированных из каждой фазовой координаты. Итерационный метод нахождения оптимального управления основан на постепенном выравнивании величин управляющих воздействий до предельно-допустимых значений путем соответствующего изменения моментов переключений управления. Изменения величин управляющих воздействий порождают в конечный момент времени отклонения фазовых координат. Противоположные по знаку отклонения фазовых координат достигаются соответствующей вариацией моментов переключений управления. В результате суммирования отклонений получается система линейных алгебраических уравнений, устанавливающая связь между вариациями величин и моментов переключений управляющих воздействий. Квазиоптимальное управление является своеобразной кусочно-постоянной аппроксимацией оптимального управления и дает количественную меру близости заданных (произвольно) моментов переключений и времени процесса к моментам переключений и времени оптимального управления.

Отличительная особенность предлагаемого итерационного алгоритма заключается в том, что на каждой итерации обеспечивается перевод системы в требуемое конечное состояние. Поэтому процесс вычислений может быть прекращен на любой итерации, что представляет существенный практический интерес, так как время поиска оптимального управления, порождающее запаздывание в управлении, ограничено. Вычислительная процедура сводится к последовательному решению систем линейных алгебраических уравнений и решению задач Коши. Доказывается сходимость вычислительного процесса и сходимость последовательности квазиоптимальных управлений к оптимальному.

Рассматриваемый подход допускает обобщение на различные классы задач и позволяет находить: финитное управление; управление, минимизирующее расход ресурсов; решать обратные задачи оптимального управления. Приведены математические постановки этих задач и даны способы их решения.

§ 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

1.1. Постановка задачи. Пусть управляемая система описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) \in X_0, \quad u \in U, \quad (1.1.1)$$

где x — n -мерный вектор фазового состояния; $A(t)$ и $B(t)$ — непрерывные матрицы размеров $n \times n$ и $n \times m$ соответственно, имеющие непрерывные производные; u — m -мерный вектор управления, компоненты которого принадлежат классу кусочно-непрерывных функций и подчинены ограничениям

$$|u_j| \leq M_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad M_j > 0. \quad (1.1.2)$$

Предполагается, что система (1.1.1) полностью управляема, т. е.

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_1, \tau) d\tau \right] = n \quad (1.1.3)$$

($\Phi(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений линейного однородного дифференциального уравнения), и переводима в начало координат ограниченным управлением (1.1.2), т. е. $x(t_0)$ принадлежит области управляемости X_0 .

Задача. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее систему (1.1.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в нулевое конечное состояние $x(t_1) = 0$ за минимальное время $T = t_1 - t_0$.

1.2. Определение начальных условий сопряженной системы и моментов переключений управления. На интервале $[t_0, t_1]$, где t_1 произвольно, выберем $(n-1)$ точек переключения v_j^p , $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, g_j}$, $\sum_{j=1}^m g_j = n-1$, для компонент вектора управления: v_j^p — p -й момент переключения j -й компоненты вектора управления $u(t)$. Для линейной системы оптимальное по быстродействию управление задается выражением

$$u_j^0(t) = M_j \text{sign} [B_j(t)]^* \psi(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.2.1)$$

где $[B_j(t)]^*$ — j -й столбец транспонированной матрицы $B(t)$; $\psi(t)$ — решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi, \quad \psi(t_0) = \psi_0, \quad (1.2.2)$$

имеющее следующий вид:

$$\psi(t) = \widehat{\Phi}(t, t_0) \psi(t_0). \quad (1.2.3)$$

Здесь $\widehat{\Phi}(t, t_0)$ — фундаментальная матрица решений линейного однородного дифференциального уравнения (1.2.2), которая находится из решения матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d\widehat{\Phi}(t, t_0)}{dt} = -A^*(t) \widehat{\Phi}(t, t_0), \quad \widehat{\Phi}(t_0, t_0) = I. \quad (1.2.4)$$

Для уменьшения объема вычислений целесообразно не вычислять отдельно матрицу $\Phi^{-1}(t, t_0)$, а выразить ее через матрицу $\widehat{\Phi}(t, t_0)$. Нетрудно показать, что $\widehat{\Phi}(t, t_0) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^*$. Отсюда $\Phi^{-1}(t, t_0) = [\Phi(t, t_0)]^*$. Действительно, продифференцировав тождество $\Phi(t_0, t) \times \Phi(t, t_0) = I$, получим уравнение

$$\dot{\Phi}(t_0, t) \Phi(t, t_0) + \Phi(t_0, t) \dot{\Phi}(t, t_0) = 0. \quad (1.2.5)$$

Подставим в (1.2.5) $\dot{\Phi}(t, t_0) = A(t)\Phi(t, t_0)$:

$$[\dot{\Phi}(t_0, t) + \Phi(t_0, t)A(t)]\Phi(t, t_0) = 0. \quad (1.2.6)$$

В силу невырожденности фундаментальной матрицы решений из (1.2.6) имеем

$$\dot{\Phi}(t_0, t) = -\Phi(t_0, t)A(t) \quad (1.2.7)$$

или

$$\dot{\Phi}^*(t_0, t) = -A^*(t)\Phi^*(t_0, t). \quad (1.2.8)$$

Из (1.2.8) непосредственно вытекает, что для однородного дифференциального уравнения $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$ фундаментальная матрица решений $\widehat{\Phi}(t, t_0)$ равна $\Phi^*(t_0, t)$. Так как $\Phi(t_0, t) = \Phi^{-1}(t, t_0)$, то

$$\widehat{\Phi}(t, t_0) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^*, \quad \Phi^{-1}(t, t_0) = [\widehat{\Phi}(t, t_0)]^*. \quad (1.2.9)$$

Отметим, что обратная матрица $\Phi^{-1}(t, t_0)$ используется также при нахождении весовых коэффициентов, так что дополнительной является лишь операция транспонирования.

Моменты переключений компонент вектора оптимального управления и их число на интервале $[t_0, t_1]$ однозначно определяются функциями переключений $[B_j(t)]^*\psi(t)$, $j = \overline{1, m}$, если известно решение $\psi(t)$, т. е. известны начальные условия $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$, для сопряженной системы (1.2.2). Для их нахождения поступаем следующим образом. В заданные g_j моментов переключений v_j^p , $p = \overline{1, g_j}$, для j -й компоненты вектора управления функция переключения равна нулю, т. е.

$$[B_j(v_j^p)]^*[\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^*\psi(t_0) = 0, \quad (1.2.10)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, g_j}, \quad \sum_{j=1}^m g_j = n - 1.$$

Получим систему из $(n - 1)$ линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которыми являются начальные условия $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$, для сопряженной системы (1.2.2).

Введем обозначение $\widehat{\psi}(t_0) = \psi(t_0)/\psi_1(t_0)$ и запишем (1.2.10) так:

$$\psi_1(t_0)[B_j(v_j^p)]^*[\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^*\widehat{\psi}(t_0) = 0. \quad (1.2.11)$$

Полагаем $|\psi_1(t_0)| = 1$ и получаем систему

$$[B_j(v_j^p)]^*[\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^*\widehat{\psi}(t_0) = 0, \quad (1.2.12)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, g_j}, \quad \sum_{j=1}^m g_j = n - 1,$$

из $(n - 1)$ линейных алгебраических уравнений с $(n - 1)$ неизвестными $\widehat{\psi}_i(t_0)$, $i = \overline{2, n}$ (так как $\widehat{\psi}_1(t_0) = 1$). Здесь $\widehat{\psi}(t_0) = \psi(t_0)\text{sign } \psi_1(t_0)$.

Из (1.2.12) находим начальные условия для сопряженной системы (1.2.2) с точностью до знака $\psi_1(t_0)$. Способ определения знака дан ниже. Важно подчеркнуть, что для нахождения моментов переключений управления нет необходимости определять $\text{sign } \psi_1(t_0)$. Функция переключения $[B_j(t)]^*\psi(t)$, $j = \overline{1, m}$, при $\psi_1(t_0) = +1$ симметрична функции переключения при $\psi_1(t_0) = -1$, и обе функции проходят через одни и те же нули (моменты переключений). Поэтому, задавая произвольно знак $\psi_1(t_0)$ и полагая $|\psi_1(t_0)| = 1$, решаем (1.2.2) на интервале $[t_0, t_1]$ и находим все остальные моменты переключений (если они существуют) управления на заданном интервале.

Таким образом, по $(n - 1)$ заданным моментам переключений определяем все остальные моменты переключений ($r_j - 1$ для j -й компоненты) на $[t_0, t_1]$. Начальные условия находим из решения системы (1.2.12).

1.3. Вычисление весовых коэффициентов для квазиоптимального управления. Для систем с постоянными матрицами A и B интервалы знакопостоянства квазиоптимального управления [32] постоянны для любых начальных условий, что упрощает реализацию. В случае переменных матриц $A(t)$ и $B(t)$ весовые коэффициенты N_{ij} принимают различные значения N_{ij}^p на каждом интервале знакопостоянства управления, где $p = \overline{1, r_j^i}$, а r_j^i — число интервалов знакопостоянства j -й компоненты вектора квазиоптимального управления, сформированного из i -й фазовой координаты. Квазиоптимальное управление формируется по алгоритму

$$u_j(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij}^p x_i(t_0) \operatorname{sign} \sum_{\xi=1}^n b_{\xi j}(t) \psi_{\xi}^{(i)}(t), \quad (1.3.1)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j^i}, \quad t \in [v_{ij}^{p-1}, v_{ij}^p].$$

Интервал $[t_0, t_1]$ разбивается для каждой компоненты и каждой координаты точками переключений v_{ij}^p , где $v_{ij}^0 = t_0$, $v_{ij}^{r_j^i} = t_1$. Примем одинаковыми моменты переключений квазиоптимального управления для каждой фазовой координаты, т. е. $v_{ij}^p = v_j^p$ и $r_j^i = r_j$. Квазиоптимальное управление в этом случае формируется по алгоритму

$$u_j(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij}^p x_i(t_0) \operatorname{sign} \sum_{\xi=1}^n b_{\xi j}(t) \psi_{\xi}(t), \quad (1.3.2)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j}, \quad t \in [v_j^{p-1}, v_j^p].$$

Введем обозначение $\hat{N}_{ij}^p = N_{ij}^p \operatorname{sign} \sum_{\xi=1}^n b_{\xi j}(t) \psi_{\xi}(t)$. Для квазиоптимального управления получаем следующее простое выражение:

$$u_j(t) = \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad (1.3.3)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j},$$

$$t \in [v_j^{p-1}, v_j^p].$$

Число возможных интервалов r_j , $j = \overline{1, m}$, для каждой компоненты вектора управления в общем случае различно и зависит от собственных значений матрицы A и элементов матрицы B . На рис. 1 изображено формирование квазиоптимального управления для системы третьего порядка с двумя управляющими параметрами u_1 и u_2 . Квазиоптимальное управление является своеобразной кусочно-постоянной аппроксимацией оптимального управления, однако оно не обязательно совпадает по знаку с оп-

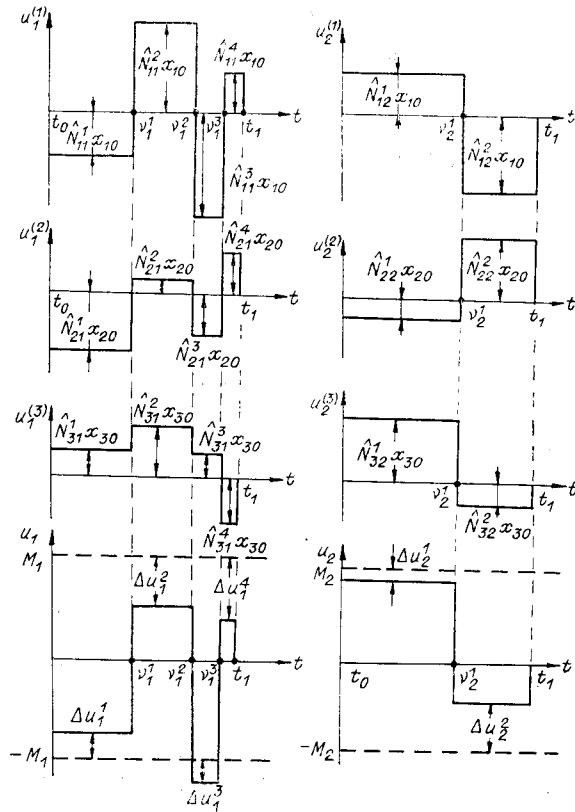


Рис. 1.

тимальным управлением на каждом интервале постоянства. Квази-оптимальное и оптимальное управления в общем случае различаются по моментам переключений и, как следствие, имеют различные амплитуды управлений: оптимальное управление имеет равные амплитуды, а квазиоптимальное — неодинаковые амплитуды управляющих воздействий на каждом из интервалов. Идея предлагаемого метода заключается в «выравнивании» амплитуд квазиоптимального управления до предельно-допустимых значений $\pm M_j$, $j = \overline{1, m}$, при оптимальном управлении. При этом изменяются моменты переключений. В силу единственности оптимального по быстродействию управления для линейных систем они стремятся к моментам переключений оптимального управления. Доказательство приводится ниже.

Весовые коэффициенты N_{ij}^p , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, связаны с параметрами системы (1.1.1) соотношением [32]

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} N_{ij}^p \int_{v_j^{p-1}}^{v_j^p} \sum_{\mu=1}^n \Phi_{i\mu}(\tau, t_0) b_{\mu j}(\tau) \operatorname{sign} \sum_{\xi=1}^n b_{\xi j}(\tau) \psi_{\xi}(\tau) d\tau + \gamma_{ii} = 0, \quad (1.3.4)$$

где $l = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, n}$, $\Phi_{i\mu}(\tau, t_0)$ — элементы матрицы $\Phi^{-1}(\tau, t_0)$; γ_{ii} — элементы единичной матрицы I . Систему (1.3.4) запишем следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{v_j^{p-1}}^{v_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.3.5)$$

Здесь $B_j(t)$ — j -й вектор-столбец матрицы $B(t)$; I_i — i -й вектор-столбец единичной матрицы I .

Пусть определены все моменты переключений v_j^p , $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j}$, включая и конечный $t_1 = v_j^{r_j}$. Принимаем $\sum_{j=1}^m r_j \geq n$. Число параметров $\hat{N}_{ij}^p$ может быть больше числа уравнений. Поэтому для i -й фазовой координаты на n интервалах знакопостоянства считаем коэффициенты $\hat{N}_{ij}^p$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, \lambda_j}$, где $\sum_{j=1}^m \lambda_j = n$, неизвестными, а на остальных интервалах полагаем $\hat{N}_{ij}^{p+1} = -\hat{N}_{ij}^p$, $p = \overline{\lambda_j, r_j - 1}$. Смена знака у коэффициентов обусловлена сменой знака управления на каждом интервале. В результате получаем n систем, каждая из которых состоит из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $\hat{N}_{ij}^p$, $p = \overline{1, \lambda_j}$, $\sum_{j=1}^m \lambda_j = n$, именно:

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{\lambda_j} \hat{N}_{ij}^p \int_{v_j^{p-1}}^{v_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + \sum_{p=\lambda_j+1}^{r_j} (-1)^{p-\lambda_j} \hat{N}_{ij}^{\lambda_j} \int_{v_j^{p-1}}^{v_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau \right\} + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.3.6)$$

Решение системы (1.3.6) существует, если выполнено условие полной управляемости. Действительно, принимая $\hat{N}_{ij}^p = \hat{N}_{ij}$, $|\hat{N}_{ij} x_i(t_0)| = M_j$, $i = \overline{1, n}$, приходим к задаче «осевого» оптимального управления: перевести систему (1.1.1) из точки $x^{(n)}(t_0) = (0, \dots, 0, x_i(t_0))$,

$0, \dots, 0$) в начало координат $x^{(i)}(t_1^{(i)}) = 0$ за минимальное время $T_i = t_1^{(i)} - t_0$ при ограничениях на управления

$$|u_j| \leq M_j, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.3.7)$$

Из теории оптимального управления известно:

1. Если система (1.1.1) является полностью управляемой и устойчивой, то перевод системы возможен за конечное время из любой начальной точки фазового пространства.

2. Если система полностью управляема и неустойчива, то перевод системы в начало координат возможен лишь из некоторой ограниченной области начальных условий V , для которой $0 \in \text{int } V$.

3. Если система неустойчива, но полностью управляема, то, непрерывно увеличивая те (либо одну ту) из компонент $j \in \{1, m\}$, для которых справедливо условие компонентной полной управляемости

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) B_j^*(\tau) \Phi^*(t_1, \tau) d\tau \right] = n, \quad (1.3.8)$$

непрерывно расширяем область начальных условий V , из которой возможен перевод системы в начало координат. При $M_j \rightarrow \infty$ перевод за конечное время возможен из любой конечной точки фазового пространства.

4. Если система является не полностью управляемой, то она распадается на управляемую и неуправляемую подсистемы. Для неуправляемой подсистемы невозможен перевод в начало координат за конечное время фазовых координат, принадлежащих этой подсистеме, и увеличение управляющих параметров не сказывается на управляемости этой подсистемы.

5. Если система является полностью управляемой, но условие полной управляемости выполняется не для каждой компоненты (система покомпонентно частично управляема), то система для каждой компоненты с неполной управляемостью распадается на управляемую и неуправляемую подсистемы, образующие управляемое и неуправляемое фазовые подпространства. Объединение управляемых подпространств для всех компонент образует управляемое пространство, размерность которого для полностью управляемых систем совпадает с размерностью пространства X . Для полностью управляемых систем по крайней мере хотя бы для одной из компонент выполняется условие (1.3.8). Непрерывное увеличение амплитуды управления приводит к непрерывному расширению управляемого фазового подпространства, но не увеличивает его размерности. Если система не полностью управляема, то размерность пространства управляемых состояний не совпадает с размерностью пространства X .

Из рассмотренных свойств следует, что в случае полностью управляемой системы для любого конечного времени существует конечное управление, а следовательно, и конечные значения $\hat{N}_{ij}^p$, при которых достигается перевод системы в начало координат, т. е. для любого конечного T существует решение уравнения (1.3.6).

Рассмотрим процедуру выбора «опорной» последовательности и «опорного» интервала. Проверяем смену знаков у управляющих воздействий и выделяем такие номера интервалов $p = k_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots$, для которых знаки на этом и последующем интервалах совпадают. В этом случае не происходит чередования знаков управляющих воздействий и выполняется соотношение

$$\text{sign} \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^{k_\alpha} x_i(t_0) = \text{sign} \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^{k_\alpha+1} x_i(t_0). \quad (1.3.9)$$

Квазиоптимальное и оптимальное управления для β -й компоненты совпадают по знакам на такой последовательности интервалов $p \in [k_{\mu-1}, k_{\mu}]$, для которой достигается максимум выражения

$$\sum_{p=k_{\mu-1}+1}^{k_{\mu}} (v_{\beta}^p - v_{\beta}^{p-1}) = \max_{\substack{p \in [1, r_j] \\ j \in [1, m], \alpha \in L}} \sum_{p=k_{\alpha-1}+1}^{k_{\alpha}} (v_j^p - v_j^{p-1}). \quad (1.3.10)$$

Пусть $k_0 = 0$. Если знаки чередуются на всех интервалах и не существует $p = k_{\alpha}$, удовлетворяющего (1.3.9), то полагаем $\alpha = 1$ и $p = k_1 = r_j$. Примем интервал $p = k_{\mu}$ в качестве «опорного» и введем обозначение $\mathfrak{E} = \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^{k_{\mu}} x_i(t_0)$. Для β -й компоненты легко находится знак оптимального управления на первом интервале и в начальный момент времени $t = t_0$:

$$u_{\beta}^0(t_0) = M_{\beta} \operatorname{sign} [(-1)^{|1-k_{\mu}|} \mathfrak{E}]. \quad (1.3.11)$$

Применяя введенное ранее обозначение $\widehat{\psi}(t_0) = \psi(t_0)/\psi_1(t_0)$, получаем

$$\operatorname{sign} \psi_1(t_0) \operatorname{sign} \sum_{\xi=1}^n b_{\xi\beta}(t_0) \widehat{\psi}_{\xi}(t_0) = \operatorname{sign} [(-1)^{|1-k_{\mu}|} \mathfrak{E}]. \quad (1.3.12)$$

Значения $\widehat{\psi}_{\xi}(t_0)$ при $\xi = \overline{2, n}$ определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений (1.2.12), а $\widehat{\psi}_1(t_0) = 1$. Из (1.3.12) находится знак начального условия $\psi_1(t_0)$, следовательно, и само начальное условие, так как $|\psi_1(t_0)| = 1$.

Итак, определив начальные условия $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$, находим решение $\psi(t)$ сопряженной системы (1.2.2) и функцию переключения $\operatorname{sign} B^*(t)\psi(t)$ на интервале $[t_0, t_1]$.

1.4. Определение отклонений фазовых координат при вариации моментов переключений управления. Выпишем решение уравнения (1.1.1) в конечный момент времени $t = t_1$ для кусочно-постоянного управления $u(t)$, компоненты которого переключаются в моменты времени $t = v_j^p$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j}$, и принимают значения $u_j(t) = \widehat{u}_j^p$, $t \in [v_j^{p-1}, v_j^p]$:

$$x(t_1) = \Phi(t_1, t_0) x(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1}}^{v_j^p} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) \widehat{u}_j^p d\tau. \quad (1.4.1)$$

Изменим моменты переключений v_j^p на Δv_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$, а конечный момент t_1 — на Δt_1 . Получим

$$\begin{aligned} x(t_1) + \widetilde{\Delta} x(t_1) &= \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1}}^{v_j^p} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) \widehat{u}_j^p d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{v_j^p}^{v_j^p + \Delta v_j^p} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) (\widehat{u}_j^p - \widehat{u}_j^{p+1}) d\tau + \\ &+ \sum_{j=1}^m \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) \widehat{u}_j^{r_j} d\tau + \Phi(t_1, t_0) x(t_0). \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Для отклонения фазовых координат $\widetilde{\Delta x}(t_1)$ из (1.4.2) находим

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta x}(t_1) = & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{v_j^p}^{v_j^p + \Delta v_j^p} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) [\widehat{u}_j^p - \widehat{u}_j^{p+1}] d\tau + \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) \widehat{u}_j^{r_j} d\tau.\end{aligned}\quad (1.4.3)$$

Введем обозначение $S_j(p) = \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t)$, $t \in [v_j^{p-1}, v_j^p]$. Если управляющие параметры принимают предельно-допустимые значения $\widehat{u}_j^p = M_j S_j(p)$, $\widehat{u}_j^{p+1} = M_j S_j(p+1)$, то, учитывая, что $S_j(p+1) = -S_j(p)$, из (1.4.3) получаем для отклонения фазовых координат следующее выражение:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta x}(t) = & 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \int_{v_j^p}^{v_j^p + \Delta v_j^p} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(p) d\tau + \\ & + \sum_{j=1}^m \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_1} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) M_j S_j(r_j) d\tau.\end{aligned}\quad (1.4.4)$$

Так как подынтегральная функция непрерывна на каждом интервале $[v_j^p, v_j^p + \Delta v_j^p]$, то на основании теоремы о среднем из (1.4.3) имеем

$$\begin{aligned}\widetilde{\Delta x}(t_1) = & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_1, v_j^p + \mu_j^p \Delta v_j^p) B_j(v_j^p + \mu_j^p \Delta v_j^p) [\widehat{u}_j^p - \widehat{u}_j^{p+1}] \Delta v_j^p + \\ & + \sum_{j=1}^m \Phi(t_1, t_1 + \mu_j \Delta t_1) B_j(t_1 + \mu_j \Delta t_1) \widehat{u}_j^{r_j} \Delta t_1,\end{aligned}\quad (1.4.5)$$

$$0 < \mu_j^p, \mu_j < 1.$$

Воспользуемся теоремой Лагранжа о конечном приращении. Получим

$$\begin{aligned}x(t_1) = & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_1, v_j^p) B_j(v_j^p) [\widehat{u}_j^p - \widehat{u}_j^{p+1}] \Delta v_j^p + \sum_{j=1}^m \Phi(t_1, t_1) B_j(t_1) \widehat{u}_j^{r_j} \Delta t_1 + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \mu_j^p [\widehat{u}_j^p - \widehat{u}_j^{p+1}] \frac{d\{\Phi(t_1, v_j^p + \Theta_j^p \mu_j^p \Delta v_j^p) B_j(v_j^p + \Theta_j^p \mu_j^p \Delta v_j^p)\}}{dt} (\Delta v_j^p)^2 + \\ & + \sum_{j=1}^m \mu_j \widehat{u}_j^{r_j} \frac{d\{\Phi(t_1, t_1 + \Theta_j \mu_j \Delta t_1) B_j(t_1 + \Theta_j \mu_j \Delta t_1)\}}{dt} (\Delta t_1)^2,\end{aligned}$$

$$0 < \Theta_j^p, \Theta_j < 1, \quad 0 < \mu_j^p, \mu_j < 1.\quad (1.4.6)$$

Если Δv_j^p и Δt_1 достаточно малы (для выполнения этого условия применяются специальные меры), то можно ограничиться в (1.4.6) лишь членами первого порядка малости и записать следующее приближенное соотношение (которое тем точнее, чем меньше по модулю Δv_j^p и Δt_1):

$$\begin{aligned}\Delta x(t_1) \cong & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_1, v_j^p) B_j(v_j^p) [\widehat{u}_j^p - \widehat{u}_j^{p+1}] \Delta v_j^p + \\ & + \sum_{j=1}^m \Phi(t_1, t_1) B_j(t_1) \widehat{u}_j^{r_j} \Delta t_1.\end{aligned}\quad (1.4.7)$$

В случае $\widehat{u}_j^p = M_j S_j(p)$, $\widehat{u}_j^{p+1} = -M_j S_j(p)$ (1.4.7) имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta x}(t_1) \cong & 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_1, v_j^p) B_j(v_j^p) M_j S_j(p) \Delta v_j^p + \\ & + \sum_{j=1}^m \Phi(t_1, t_1) B_j(t_1) M_j S_j(r_j) \Delta t_1. \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

1.5. Вариация моментов переключений и величин управляющих параметров. Квазиоптимальное управление отличается от предельно-допустимого значения M_β при оптимальном управлении для β -й компоненты на k -м интервале, принимаемом в качестве «опорного», на величину

$$\Delta u_\beta^k(t) = M_\beta \operatorname{sign} \xi - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{i\beta}^k x_i(t_0), \quad t \in [v_\beta^{k-1}, v_\beta^k]. \quad (1.5.4)$$

Отклонение величины квазиоптимального управления от оптимального для β -й компоненты на p -м интервале равно

$$\begin{aligned} \Delta u_\beta^p(t) = M_\beta \operatorname{sign} [(-1)^{|p-k|} \xi] - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{i\beta}^p x_i(t_0), \\ p = \overline{1, r_\beta}, \quad t \in [v_\beta^{p-1}, v_\beta^p], \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

а от предельно-допустимого значения при оптимальном управлении для j -й компоненты на p -м интервале

$$\begin{aligned} \Delta u_j^p(t) = M_j \operatorname{sign} [B_j(t)]^* \psi - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \\ j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j}, \quad t \in [v_j^{p-1}, v_j^p]. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

При оптимальном по быстродействию управлении линейными системами компоненты вектора управления принимают предельно-допустимые значения и переключаются в некоторые моменты времени, отличные в общем случае от произвольно выбранных значений v_j^p . Отклонения Δu_j , $j = \overline{1, m}$, управляющих параметров от соответствующих предельно-допустимых значений порождают отклонения фазовых координат. Найдем эти отклонения.

Решение уравнения (1.1.4) при вариации величин управляющих параметров можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} x(t_1) + \widehat{\Delta x}(t_1) = \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) u_j(\tau) d\tau + \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) \Delta u_j(\tau) d\tau + \\ + \Phi(t_1, t_0) x(t_0). \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Квазиоптимальное управление $u_j(t)$ переводит систему (1.1.1) в начало координат $x(t_1) = 0$. Отклонения $\Delta u_j(t)$ управляющих параметров порождают отклонения фазовых координат

$$\widehat{\Delta x}(t_1) = \sum_{j=1}^m \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) \Delta u_j(\tau) d\tau. \quad (1.5.5)$$

Подставляя (1.5.3) в (1.5.5), получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta x}(t_1) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1}}^{v_j^p} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) \left\{ M_j \operatorname{sign} [B_j(\tau)]^* \psi(\tau) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

Так как при найденных начальных условиях $\psi(t_0)$ функция переключения $S_j(p) = \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, определена, то

$$\widehat{\Delta x}(t_1) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1}}^{v_j^p} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau. \quad (1.5.7)$$

При значительном отклонении квазиоптимального управления от оптимального необходимо существенное изменение произвольно выбранных моментов переключений. Однако при больших отклонениях сходимость вычислительного процесса не гарантируется. Чтобы обеспечить сходимость вычислительного процесса, будем выравнивать амплитуды управляющих воздействий не сразу полностью, а постепенно, беря лишь часть отклонения.

Пусть на p -м интервале отклонение квазиоптимального управления от оптимального для j -й компоненты составляет

$$\Delta u_j^p = M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad (1.5.8)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j}.$$

Возьмем лишь ξ_j -ю часть этого отклонения

$$\Delta u_j^p = \xi_j^p \Delta u_j^p, \quad 0 < \xi_j^p < 1. \quad (1.5.9)$$

Управление будет стремиться не к $\pm M_j$, а к величине

$$\widehat{u}_j^p = \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0) + \xi_j^p \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right]. \quad (1.5.10)$$

Отклонение фазовых координат, вызванное отклонениями управляющих параметров u_j^p от $\widehat{u}_j^p$, вычисляется по формуле

$$\widehat{\Delta x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0) \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1}}^{v_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi_j^p \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau \right\}. \quad (1.5.11)$$

По мере приближения квазиоптимального управления к оптимальному, т. е. при изменении амплитуд компонент вектора квазиоптимального управления и постепенном выравнивании их значений до M_j , отклонение фазовых координат $\widehat{\Delta x}(t_1)$, вызванное изменениями амплитуд управляющих воздействий, должно быть скомпенсировано отклонением $\widetilde{\Delta x}(t_1)$, вызванным изменением моментов переключений:

$$\widehat{\Delta x}(t_1) + \widetilde{\Delta x}(t_1) = 0. \quad (1.5.12)$$

Вариация моментов переключений порождает отклонение фазовых координат, которое определяется приближенным соотношением (1.4.7). Запишем его в следующем виде:

$$\widetilde{\Delta x}(t_1) = \Phi(t_1, t_0) \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi^{-1}(v_j^p, t_0) B_j(v_j^p) [\widehat{u}_j^p - \widehat{u}_j^{p+1}] \Delta v_j^p + \sum_{j=1}^m \Phi^{-1}(t_1, t_0) B_j(t_1) \widehat{u}_j^{r_j} \Delta t_1 \right\}. \quad (1.5.13)$$

Подставляя (1.5.13) и (1.5.11) в (1.5.12) и учитывая, что матрица фундаментальных решений невырождена, получаем систему из n линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi^{-1}(v_j^p, t_0) B_j(v_j^p) [\hat{u}_j^p - \hat{u}_j^{p+1}] \Delta v_j^p + \sum_{j=1}^m \Phi^{-1}(t_1, t_0) B_j(t_1) \hat{u}_j^{r_j} \Delta t_1 + \\ + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1}}^{v_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi_j^p \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau = 0. \quad (1.5.14)$$

В (1.5.14) число неизвестных Δv_j^p , $j = \overline{1, m}$; $p = \overline{1, r_j - 1}$, и Δt_1 может быть не равным числу линейных алгебраических уравнений. Поэтому необходимо перейти к вычислению приращений начальных условий $\hat{\Delta}\psi_i(t_0)$ сопряженной системы, число которых $(n - 1)$. Вместе с Δt_1 они составляют n неизвестных.

Для j -й компоненты вектора управления функция переключения равна нулю в каждый из $(r_j - 1)$ моментов переключений, т. е. справедливо уравнение

$$[B_j(v_j^p)]^* [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \hat{\psi}(t_0) = 0, \quad (1.5.15) \\ j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j - 1}.$$

Изменим $\hat{\psi}(t_0)$ на $\hat{\Delta}\psi(t_0)$. Это порождает изменение v_j^p на Δv_j^p :

$$[B_j(v_j^p + \Delta v_j^p)]^* [\Phi^{-1}(v_j^p + \Delta v_j^p, t_0)]^* (\hat{\psi}(t_0) + \hat{\Delta}\psi(t_0)) = 0, \quad (1.5.16) \\ j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j - 1}.$$

Разложим полученное выражение в ряд Тейлора и ограничимся лишь линейными членами:

$$\left[B_j(v_j^p) + \hat{\Delta}v_j^p \frac{dB(v_j^p)}{dt} \right]^* \left[\Phi^{-1}(v_j^p, t_0) + \hat{\Delta}v_j^p \frac{d\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)}{dt} \right]^* (\hat{\psi}(t_0) + \\ + \hat{\Delta}\psi(t_0)) = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \quad (1.5.17)$$

Здесь $\hat{\Delta}v_j^p$ — диагональная матрица $(n \times n)$ с элементом Δv_j^p на диагонали. Ввиду равенств $[\Phi^{-1}(t, t_0)]^* = \hat{\Phi}(t, t_0)$ и $\dot{\hat{\Phi}}(t, t_0) = -A^*(t) \hat{\Phi}(t, t_0)$

$$[B_j(v_j^p)]^* [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \hat{\psi}(t_0) + [\dot{B}_j(v_j^p)]^* [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \hat{\psi}(t_0) \Delta v_j^p - \\ - [B_j(v_j^p)]^* A^*(v_j^p) [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \hat{\psi}(t_0) \Delta v_j^p - \\ - [\dot{B}_j(v_j^p)]^* A^*(v_j^p) [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \hat{\psi}(t_0) (\Delta v_j^p)^2 + \\ + [B_j(v_j^p)]^* [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \hat{\Delta}\psi(t_0) + [\dot{B}_j(v_j^p)]^* [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \hat{\Delta}\psi(t_0) \Delta v_j^p - \\ - [B_j(v_j^p)]^* A^*(v_j^p) [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \hat{\Delta}\psi(t_0) \Delta v_j^p - \\ - [\dot{B}_j(v_j^p)]^* A^*(v_j^p) [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \hat{\Delta}\psi(t_0) (\Delta v_j^p)^2 = 0, \quad (1.5.18) \\ j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j - 1}.$$

Пренебрегая малыми величинами второго и более высокого порядка малости и учитывая (1.5.15), получаем для вычисления приращения Δv_j^p приближенное уравнение

$$[\dot{B}_j(v_j^p)]^* [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \hat{\psi}(t_0) - [B_j(v_j^p)]^* A^*(v_j^p) [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \hat{\psi}(t_0) \Delta v_j^p + \\ + [B_j(v_j^p)]^* [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \hat{\Delta}\psi(t_0) = 0, \quad (1.5.19) \\ j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j - 1}.$$

Из (1.5.19) находим связывающее приращение $\Delta\widehat{\psi}(t_0)$ с каждым приращением момента переключения Δv_j^p следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \Delta v_j^p = & \{ [B_j(v_j^p)]^* A^*(v_j^p) - \\ & - [\dot{B}_j(v_j^p)]^* [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \widehat{\psi}(t_0) \}^{-1} [B_j(v_j^p)]^* [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \Delta\widehat{\psi}(t_0), \\ & j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \end{aligned} \quad (1.5.20)$$

Подставив (1.5.20) в (1.5.14), получим систему

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi^{-1}(v_j^p, t_0) B_j(v_j^p) [\widehat{u}_j^p - \widehat{u}_j^{p+1}] \{ [B_j(v_j^p)]^* A^*(v_j^p) - \\ & - [\dot{B}_j(v_j^p)]^* [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \widehat{\psi}(t_0) \}^{-1} [B_j(v_j^p)]^* [\Phi^{-1}(v_j^p, t_0)]^* \Delta\widehat{\psi}(t_0) + \\ & + \sum_{j=1}^m \Phi^{-1}(t_1, t_0) B_j(t_1) \widehat{u}_j^{r_j} \Delta t_1 + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1}}^{v_j^p} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \times \\ & \times \xi_j^p \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau = 0 \end{aligned} \quad (1.5.24)$$

из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которыми являются $(n-1)$ приращений $\Delta\widehat{\psi}_i(t_0)$, $i = \overline{2, n}$ и отклонение Δt_1 конечного момента времени t_1 . Решив (1.5.24), находим $\Delta\widehat{\psi}(t_0)$ и Δt_1 . Подставляя в (1.5.20) найденное значение $\Delta\widehat{\psi}(t_0)$, получим приращения Δv_j^p каждого момента переключения.

1.6. Итерационный процесс нахождения оптимального по быстродействию управления. Выпишем по шагам итерационную процедуру нахождения оптимального по быстродействию управления.

Шаг 1. На интервале $[t_0, t_1^s]$, где $s = 0, 1, 2, \dots$, — номер итерации, имеем $(n-1)$ моментов переключений $v_j^{p,s}$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, g_j}$, $\sum_{j=1}^m g_j = n-1$; причем $v_j^{p,0}$ и t_1^0 — произвольно выбранные значения. Решаем уравнение (1.2.4) на интервале $\left[t_0, \max_{j \in \{1, m\}} v_j^{g_j} \right]$, находим фундаментальную матрицу $[\Phi^{-1}(t, t_0)]^*$ и запоминаем значения $[\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^*$. Одновременно при решении уравнения (1.2.4) транспонируем полученную матрицу $[\Phi^{-1}(t, t_0)]^*$ и вычисляем интегральные выражения

$$\int_{v_j^{p-1,s}}^{v_j^{p,s}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau$$

до максимального значения $v_j^{p,s}$.

Шаг 2. Решаем систему (1.2.12) из $(n-1)$ линейных алгебраических уравнений

$$[B_j(v_j^{p,s})]^* [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\psi}^s(t_0) = 0, \quad (1.6.1)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, g_j}, \quad \sum_{j=1}^m g_j = n-1, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Находим $\widehat{\psi}_i^s(t_0)$, $i = \overline{2, n}$.

Шаг 3. Решаем на интервале $[t_0, t_1^s]$ уравнение

$$\dot{\widehat{\psi}}^s = -A^*(t) \widehat{\psi}^s, \quad \widehat{\psi}^s(t_0) = \widehat{\psi}_0^s \quad (1.6.2)$$

и находим все значения моментов переключений $v_j^{p,s}$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j}$. Продолжаем на интервале $[\max v_j^{q_j}, t_1^s]$ решение уравнения (1.2.4) и вычисление интегральных выражений. Подсчитываем выражения $\text{sign}[B_j(t)]^* \widehat{\psi}^s(t)$, $t \in [v_j^{p-1,s}, v_j^{p,s}]$, $j = \overline{1, m}$.

Шаг 4. Находим весовые коэффициенты. Для этого решаем n систем (1.3.6), каждая из которых состоит из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $\widehat{N}_{ij}^{p,s}$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j}$, $\sum_{j=1}^m \lambda_j = n$, именно:

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{\lambda_j} \widehat{N}_{ij}^{p,s} \int_{v_j^{p-1,s}}^{v_j^{p,s}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + \sum_{p=\lambda_j+1}^{r_j} (-1)^{p-\lambda_j} \widehat{N}_{ij}^{\lambda_j,s} \int_{v_j^{p-1,s}}^{v_j^{p,s}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau \right\} + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (1.6.3)$$

Если некоторые $x_\alpha(t_0)$, $\alpha \in \{1, n\}$, равны нулю, то соответствующие системы уравнений для $i = \alpha$ решать не надо, что сокращает объем вычислений и затраты машинного времени.

Шаг 5. Проверяем чередование знаков управляющих воздействий и находим номера интервалов $p = k_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots$, для которых знаки на этом и последующем интервалах совпадают:

$$\text{sign} \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^{k_\alpha} x_i(t_0) = \text{sign} \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^{k_\alpha+1} x_i(t_0). \quad (1.6.4)$$

Выделяем «опорную» последовательность знаков из условия максимизации выражения

$$\sum_{p=k_{\mu-1}+1}^{k_\mu} (v_\beta^p - v_\beta^{p-1}) = \max_{p=k_{\alpha-1}+1}^{k_\alpha} \sum (v_j^p - v_j^{p-1}). \quad (1.6.5)$$

Здесь $k_0 = 0$. Если знаки чередуются на всех интервалах и не существует такого $p = k_\alpha$, для которого справедливо (1.6.4), то полагаем $\alpha = 1$, $p = k_1 = r_j$. Находим «опорную последовательность» $p \in [k_{\mu-1}, k_\mu]$ и β (номер компоненты). Принимаем интервал $p = k_\mu$ в качестве «опорного». Из

$$\text{sign} \psi_1^s(t_0) \text{sign}[B_\beta(t_0)]^* \widehat{\psi}^s(t_0) = \text{sign} [(-1)^{1-k_\mu} g^s] \quad (1.6.6)$$

находим $\text{sign} \psi_1^s(t_0)$ (см. (1.3.12)), а следовательно, и $\widehat{\psi}^s(t_0)$. Определяем $S_j^s(p)$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j}$, используя равенства

$$S_j^s(p) = \text{sign} \psi_1^s(t) \text{sign}[B_j(t)]^* \widehat{\psi}^s(t), \quad t \in [v_j^{p-1,s}, v_j^{p,s}],$$

где $\psi_1^s(t) = \text{const}$ (1 либо -1). Выражения $\text{sign}[B_j(t)]^* \widehat{\psi}^s(t)$ найдены на шаге 3.

Шаг 6. Определим приращения моментов переключений. Для этого решим систему (1.5.21) из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которыми являются приращения $\widehat{\Delta \psi}^s(t_0) = (0, \widehat{\Delta \psi}_2^s(t_0), \dots, \widehat{\Delta \psi}_n^s(t_0))$ нормированной сопряженной системы ($(n-1)$ значений) и приращение Δt_1^s конечного момента времени t_1^s . Решаем (1.5.21) при

$\xi_j^{p,s} = 1$ и обозначаем неизвестные через $\widehat{\Delta\psi}^s, \overline{\Delta t}_1^s$. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0) B_j(v_j^{p,s}) [\widehat{u}_j^{p,s} - \widehat{u}_j^{p+1,s}] \{ [B_j(v_j^{p,s})]^* A^*(v_j^{p,s}) - \\ & - [\dot{B}_j(v_j^{p,s})]^* \} [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\psi}^s(t_0)^{-1} [B_j(v_j^{p,s})]^* [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\Delta\psi}^s(t_0) + \\ & + \sum_{j=1}^m \Phi^{-1}(t_1^s, t_0) B_j(t_1^s) \widehat{u}_j^{r_j} \overline{\Delta t}_1^s + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1}}^{v_j^{p,s}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \left[M_j S_j^s(p) - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^{p,s} x_i(t_0) \right] d\tau = 0. \quad (1.6.7) \end{aligned}$$

Подставляем найденное значение $\widehat{\Delta\psi}^s(t_0)$ в (1.5.20) и находим приращения моментов переключений

$$\begin{aligned} \overline{\Delta v}_j^{p,s} &= \{ [B_j(v_j^{p,s})]^* A^*(v_j^{p,s}) - \\ & - [\dot{B}_j(v_j^{p,s})]^* \} [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\psi}^s(t_0)^{-1} [B_j(v_j^{p,s})]^* [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\Delta\psi}^s(t_0), \\ & p = \overline{1, r_j - 1}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (1.6.8)$$

Введем для единообразия обозначение $\Delta v_j^{r_j,s} = \overline{\Delta t}_1^s$. Проверяем выполнение условия

$$|\overline{\Delta v}_p^{l,s}| = \max_{\substack{j \in [1, m] \\ p \in [1, r_j]}} [|\Delta v_j^{p,s}|] < \varepsilon_1^s. \quad (1.6.9)$$

Здесь $\varepsilon_1^s = \varepsilon_2(t_1^s - t_0)$, $0 < \varepsilon_2 < 1$ (например, $\varepsilon_2 = 0,3 \div 0,5$). При выполнении (1.6.9) находим новые значения $t_1^{s+1} = t_1^s + \overline{\Delta t}_1^s$, $v_j^{p,s+1} = v_j^{p,s} + \overline{\Delta v}_j^{p,s}$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j - 1}$.

Если некоторые приращения отрицательны, причем такие, что отдельные моменты переключений становятся отрицательными, то полагаем эти моменты переключений малыми, но положительными величинами:

$$\widehat{v}_j^{p,s+1} = \gamma h, \quad j = \overline{1, m}, \quad \gamma \in [1, r_j - 1]. \quad (1.6.10)$$

Здесь h — шаг интегрирования; γ — номер отрицательного момента переключения. Переобозначим, если это необходимо, нумерацию моментов переключений по мере их расположения на оси времени. Выбираем $(n-1)$ первых моментов переключений и переходим к шагу 1.

Если $\widehat{v}_j^{p,s+1} > \widehat{v}_j^{p+1,s+1}$, $j \in [1, m]$, $p \in [1, r_j - 1]$, то упорядочиваем нумерацию (переобозначаем) моментов переключений. В результате получаем

$$v_j^{p,s+1} < v_j^{p+1,s+1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j - 1}. \quad (1.6.11)$$

Выбираем $(n-1)$ первых моментов переключений и переходим к шагу 1.

Пусть кроме (1.6.9) на $(s+1)$ -м шаге выполняется условие

$$\left| \frac{\overline{\Delta v}_p^{l,s+1}}{\overline{\Delta v}_p^{l,s}} \right| < 1. \quad (1.6.12)$$

Тогда точность h_0 , с которой вычисляются моменты переключений на $(s+2)$ -й итерации в шаге 3, принимается не менее 0,01 от величины максимального приращения на $(s+1)$ -й итерации, т.е. $h_0 \leq 0,01 |\overline{\Delta v}_p^{l,s+1}|$. Заданная точность вычислений достигается путем дихотомии. Шаг интегрирования и точность вычисления моментов переключений в шаге 3 до выполнения условия (1.6.12) принимаются равными $0,01(t_1^s - t_0)$.

В результате «вдали» от истинных значений вычисления производятся с невысокой точностью, а в окрестности истинных значений точность вычислений возрастает на каждой итерации, и решение может быть найдено с любой наперед заданной точностью.

Процесс вычислений заканчивается, если выполняется одно из следующих условий:

$$\max |\overline{\Delta v_j^{p,s}}| \leq \varepsilon_3, \quad (1.6.13)$$

$$|\widehat{\Delta x}(t_1)| \leq \varepsilon_4, \quad (1.6.14)$$

где $\varepsilon_3, \varepsilon_4$ — заданные положительные числа. Величина ε_3 характеризует точность, с которой достаточно вычисление моментов переключений (возможна техническая реализация моментов переключений). Величина ε_4 характеризует точность перехода в начало координат с найденными моментами переключений при предельно допустимых значениях управляющих параметров. Значение $\widehat{\Delta x}(t_1)$ находится из (1.5.6).

Если условие (1.6.9) не выполняется, то переходим к шагу 7.

Шаг 7. Если нарушается (1.6.9) и

$$|\overline{\Delta v_p^{l,s}}| = \max |\overline{\Delta v_j^{p,s}}| > \varepsilon_1, \quad (1.6.15)$$

$$j \in [1, m], \quad p \in [1, r_j],$$

то решаем систему (1.5.21) при $\xi_j^{p,s} \ll 1$ (например, $\xi_j^{p,s} = 0,001$). Обозначим в этом случае неизвестные через $\widehat{\Delta \psi}^s(t_0), \overline{\Delta t}_1^s$. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0) B_j(v_j^{p,s}) [\widehat{u}_j^{p,s} - \widehat{u}_j^{p+1,s}] \{ [B_j(v_j^{p,s})]^* A^*(v_j^{p,s}) - \\ & - [\dot{B}_j(v_j^{p,s})]^* \} [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\psi}^s(t_0) \}^{-1} [B_j(v_j^{p,s})]^* [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\Delta \psi}^s(t_0) + \\ & + \sum_{j=1}^m \Phi^{-1}(t_1^s, t_0) B_j(t_1^s) \widehat{u}_j^{r_j} \cdot \overline{\Delta t}_1^s + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1,s}}^{v_j^{p,s}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi_j^{p,s} \left[M_j S_j^s(p) - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^{p,s} x_i(t_0) \right] d\tau = 0. \end{aligned} \quad (1.6.16)$$

Подставляем найденное значение $\widehat{\Delta \psi}^s(t_0)$ в (1.5.20) и находим

$$\begin{aligned} \overline{\Delta v_j^{p,s}} &= \{ [B_j(v_j^{p,s})]^* A^*(v_j^{p,s}) - [\dot{B}_j(v_j^{p,s})]^* \} [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\psi}^s(t_0) \}^{-1} \times \\ & \times [B_j(v_j^{p,s})]^* [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\Delta \psi}^s(t_0), \end{aligned} \quad (1.6.17)$$

$$j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j - 1}.$$

Обозначаем $\overline{\Delta v_j^{r_j,s}} = \overline{\Delta t}_1^s$ и проверяем выполнение условия

$$|\overline{\Delta v_\eta^{\mu,s}}| = \max_{\substack{j \in [1, m] \\ p \in [1, r_j]}} |\overline{\Delta v_j^{p,s}}| \leq \varepsilon_1. \quad (1.6.18)$$

Если оно выполнено, то для максимального отклонения принимаем

$$\widehat{\Delta v_\eta^{\mu,s}} = \frac{1}{2} \varepsilon_1^s \operatorname{sign} \overline{\Delta v_\eta^{\mu,s}}, \quad (1.6.19)$$

а для остальных отклонений —

$$\widehat{\Delta v_j^{p,s}} = \frac{1}{2} \overline{\Delta v_j^{p,s}} \left| \frac{\varepsilon_1^s}{\overline{\Delta v_\eta^{\mu,s}}} \right|, \quad (1.6.20)$$

где $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j}$ кроме $p = \mu$ для $j = \eta$. Находим новые значения $t_1^{s+1} = t_1^s + \Delta t_1^s$, $v_j^{p,s+1} = v_j^{p,s} + \Delta v_j^{p,s}$ и переходим к шагу 1, если $v_j^{p,s+1} < v_j^{p+1,s+1}$ и $v_j^{p,s+1} > 0$. Когда $v_j^{p,s+1} < 0$, используем соотношение (1.6.10). Если $v_j^{p,s+1} > v_j^{p+1,s+1}$, то упорядочиваем нумерацию (переобозначаем) моментов переключений и переходим к шагу 1. При нарушении (1.6.18) уменьшаем на порядок значение $\xi_j^{p,s}$ в (1.6.16) и вновь вычисляем приращения $\Delta v_j^{p,s}$ и Δt_1^s , решая (1.6.16) и (1.6.17).

1.7. Доказательство сходимости вычислительного процесса. Вариация фазовых координат, порождаемая вариацией моментов переключений, определяется выражением (1.4.6). Введем обозначения

$$\Delta v_j^p = \widetilde{\Delta v}_j^p + \delta v_j^p, \quad \Delta t_1 = \widetilde{\Delta t}_1 + \delta t_1. \quad (1.7.1)$$

Здесь $\Delta v_j^p, \Delta t_1$ — точные (истинные), а $\widetilde{\Delta v}_j^p, \widetilde{\Delta t}_1$ — вычисленные значения отклонений; $\delta v_j^p, \delta t_1$ — погрешности (ошибки) вычисления отклонений; $\widetilde{\Delta v}_j^p, \widetilde{\Delta t}_1$ определяются из решения следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_1, v_j^p) B_j(v_j^p) [\widetilde{u}_j^p - \widetilde{u}_j^{p+1}] \widetilde{\Delta v}_j^p + \\ & + \sum_{j=1}^m \Phi(t_1, t_1) B_j(t_1) \widetilde{u}_j^{r_j} \widetilde{\Delta t}_1 = \widetilde{\Delta x}(t_1). \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

Подставим (1.7.1) в (1.4.6) и, учитывая (1.7.2), получим уравнение

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_1, v_j^p) B_j(v_j^p) [\widetilde{u}_j^p - \widetilde{u}_j^{p+1}] \delta v_j^p + \\ & + \sum_{j=1}^m \Phi(t_1, t_1) B_j(t_1) \widetilde{u}_j^{r_j} \delta t_1 + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \mu_j^p [\widetilde{u}_j^p - \widetilde{u}_j^{p+1}] \frac{dF(\Delta v_j^p)}{dt} (\Delta v_j^p)^2 + \\ & + \sum_{j=1}^m \mu_j \widetilde{u}_j^{r_j} \frac{dF(\Delta t_1)}{dt} (\Delta t_1)^2 = 0, \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

где для сокращения записи использованы обозначения

$$\begin{aligned} F(\Delta v_j^p) &= \Phi(t_1, v_j^p + \Theta_j^p \mu_j^p \Delta v_j^p) B_j(v_j^p + \Theta_j^p \mu_j^p \Delta v_j^p), \\ F(\Delta t_1) &= \Phi(t_1, t_1 + \Theta_j \mu_j \Delta t_1) B_j(t_1 + \Theta_j \mu_j \Delta t_1). \end{aligned}$$

Важно следующее обстоятельство. Погрешности $\delta v_j^p, \delta t_1$, найденные на s -й итерации, являются точными (истинными) значениями отклонений для $(s+1)$ -й итерации, т. е.

$$\delta v_j^{p,s} = \Delta v_j^{p,s+1}, \quad \delta t_1^s = \Delta t_1^{s+1}. \quad (1.7.4)$$

С учетом (1.7.4) и (1.7.3) получаем выражение, связывающее отклонения на s -й и $(s+1)$ -й итерациях:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi(t_1^s, v_j^{p,s}) B_j(v_j^{p,s}) [\widetilde{u}_j^{p,s} - \widetilde{u}_j^{p+1,s}] \Delta v_j^{p,s+1} + \\ & + \sum_{j=1}^m \Phi(t_1^s, t_1^s) B_j(t_1^s) \widetilde{u}_j^{r_j,s} \Delta t_1^{s+1} = \\ & = - \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \mu_j^{p,s} [\widetilde{u}_j^{p,s} - \widetilde{u}_j^{p+1,s}] \frac{dF(\Delta v_j^{p,s})}{dt} (\Delta v_j^{p,s})^2 - \\ & - \sum_{j=1}^m \mu_j \widetilde{u}_j^{r_j,s} \frac{dF(\Delta t_1^s)}{dt} (\Delta t_1^s)^2. \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Итерационный процесс сходится, если

$$|\Delta v_j^{p,s+1}| < |\Delta v_j^{p,s}|, |\Delta t_1^{s+1}| < |\Delta t_1^s|, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7.6)$$

Поскольку $t_1 = v_j^j$, положим $\Delta t_1 = \Delta v_j^j$ и представим систему (1.7.5) в следующем компактном виде:

$$\Delta v^{s+1} = (P \tilde{\Delta} v^s) \Delta v^s. \quad (1.7.7)$$

Здесь Δv^s — r -мерный вектор, содержащий $\left(\sum_{j=1}^m r_j - m + 1\right)$ значений $\Delta v_j^{p,s}$; $\tilde{\Delta} v^s$ — диагональная матрица размеров $\left(\sum_{j=1}^m r_j - m + 1\right) \times \left(\sum_{j=1}^m r_j - m + 1\right)$ с элементами $\Delta v_j^{p,s}$ на диагонали; P — матрица размеров $\left(\sum_{j=1}^m r_j - m + 1\right) \times \left(\sum_{j=1}^m r_j - m + 1\right)$, определяемая из системы (1.7.5). Из (1.7.7) непосредственно видно, что в силу квадратичной зависимости для любого конечного оператора P существует такое конечное Δv^0 , что если $|\Delta v_i^0| \leq |\tilde{\Delta} v_i^0|$, $i = \overline{1, r}$, то

$$|\Delta v_i^1| < |\Delta v_i^0|, \quad i = \overline{1, r}, \quad (1.7.8)$$

и, следовательно,

$$|\Delta v_i^{s+1}| < |\Delta v_i^s|, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1, r}, \quad (1.7.9)$$

т. е. итерационный процесс сходится. Уравнение (1.7.7) можно рассматривать как разностное, и процесс вычислений является сходящимся, если все собственные значения ω_i , $\xi = \overline{1, r}$ матрицы $(P \tilde{\Delta} v^s)$ лежат внутри единичного круга, т. е.

$$|\omega_i| < 1, \quad \xi = \overline{1, r}. \quad (1.7.10)$$

Соотношения (1.7.10) позволяют, определив матрицу P , найти Δv^0 .

Все параметры, входящие в (1.7.5), не могут изменяться по нашему усмотрению, кроме начальных значений $\Delta v_j^{p,0}$ и Δt_1^0 , т. е. значений Δv^0 и Δv^s на итерации $s=0$. Выбор малого значения Δv^0 достигается следующим образом. В силу (1.5.42) $\tilde{\Delta} x(t_1) = -\Delta x(t_1)$, где $\tilde{\Delta} x(t_1)$ — отклонение, порождаемое отклонениями величин управляющих воздействий. Отклонения величин квазиоптимальных управляющих воздействий от предельно-допустимых значений могут быть большими, что порождает соответственно и большое значение $\Delta x(t_1)$. Будем брать лишь ξ -ю часть отклонения управления от предельно-допустимого значения. Тогда

$$\Delta x(t_1) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1}}^{v_j^p} \Phi(t_1, \tau) B_j(\tau) \xi_j^p \left[M_j S_j(p) - \sum_{i=1}^n \tilde{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau. \quad (1.7.11)$$

Если $\xi_j^p \rightarrow 0$, то $\tilde{\Delta} x(t_1) \rightarrow 0$ и, следовательно, $\Delta x(t_1) \rightarrow 0$. В силу (1.4.6) из $\tilde{\Delta} x(t_1) \rightarrow 0$ следует, что $\Delta v_j^p, \Delta t_1 \rightarrow 0$, т. е. $\Delta v \rightarrow 0$. Существуют такие значения ξ_j^p , что если $\xi_j^p \leq \tilde{\xi}_j^p$, то $|\Delta v_i^0| < |\tilde{\Delta} v_i^0|$, $i = \overline{1, n}$. Значения $\tilde{\Delta} v_i^0$ находятся с помощью (1.7.10), а для них из (1.7.2) — отклонение $\tilde{\Delta} x(t_1)$. Учитывая, что $\tilde{\Delta} x(t_1) = -\Delta x(t_1)$, из (1.7.11) находим ξ_j^p . Выберем $\xi_j^p \leq \tilde{\xi}_j^p$. Тогда выполняются условия (1.7.9) и обеспечивается сходимость вычислительного процесса.

Таким образом, доказана следующая

Теорема. Если $\xi_j^p \leq \bar{\xi}_j^p$, то вычислительный процесс сходится.

Замечание. Если начальные значения $v_j^{p,0}, t_1^0$ выбраны справа от истинных v_j^p, t_1 , а значения погрешностей $\delta v_j^{p,0}, \delta t_1^0$ по абсолютной величине больше истинных, то возможно, что на первой (и некоторых других нечетных) итерации значения $v_j^{p,1}, t_1^1$ (либо некоторые из них) окажутся отрицательными. Это свидетельствует о невозможности физической реализации управления на такой итерации, но не противоречит утверждению о сходимости вычислительной процедуры. Если $v_j^{p,0}, t_1^0 > 0$ заданы слева от истинных значений, то всегда $v_j^{p,s}, t_1^s > 0$, и управление на s -й итерации физически реализуемо. Поэтому целесообразно выбирать начальные значения моментов переключений слева от истинных значений. Для этого достаточно принять $0 < v_j^{p,0}, t_1^0 < \alpha$, где α — мало.

1.8. О связи между условиями полной управляемости и общности положения. Для доказательства сходимости последовательности квазиоптимальных управлений к оптимальному необходимо установить связь и различие между условиями полной управляемости и общности положения.

Динамическая система $\dot{x} = Ax + Bu$ (где постоянная $(n \times n)$ -матрица A характеризует структуру управляемой системы, а $(n \times m)$ -матрица B — структуру управляющего устройства) полностью управляема, если для каждого состояния $x(t_0) = x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, найдутся число $t_1 > 0$ и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ такие, что соответствующая траектория $x(t)$ удовлетворяет условию $x(t_1) = 0$. Система полностью управляема, если

$$\text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n. \quad (1.8.1)$$

Критерий полной управляемости в форме условия (1.8.1) был впервые установлен в конце 50-х годов Р. Калманом [35] для $m = 1$ и Ла Саллем [36] для $m \leq n$. Примерно в это же время в теории оптимальных процессов для получения достаточных условий оптимальности по быстродействию было введено условие общности положения [37], заключающееся в следующем: если ω — вектор, имеющий направление одного из ребер многогранника области управления U , то вектор $B\omega$ не принадлежит никакому истинному подпространству пространства X , инвариантному относительно оператора A , т. е. векторы $B\omega, AB\omega, \dots, A^{n-1}B\omega$ линейно независимы в пространстве X .

Пусть ω совпадает с одной из компонент вектора u , например u_j , $j \in \{1, m\}$. Без потери общности результатов можно принять $|\omega| = 1$. Тогда условие линейной независимости в пространстве X векторов $B\omega, AB\omega, \dots, A^{n-1}B\omega$ эквивалентно условию

$$\text{rank}[B_j, AB_j, \dots, A^{n-1}B_j] = n, \quad j = \overline{1, m}, \quad (1.8.2)$$

где B_j — j -й столбец матрицы B . Соотношение (1.8.2) есть условие «компонентной полной управляемости».

Ребра многогранника области управления U всегда совпадают по направлению с одной из осей m -мерного пространства переменных $u_1, u_2, \dots, u_m$, если U — m -мерный прямоугольный параллелепипед. В рассматриваемом случае область управления является m -мерным прямоугольным параллелепипедом. Поэтому условие общности положения эквивалентно (1.8.2).

Условие покомпонентной полной управляемости является более жестким требованием, предъявляемым к структуре управляемой системы, чем требование полной управляемости. Из последней следует, что по крайней мере бы для одной компоненты обязательно выполняется условие полной управляемости. В случае выполнения условия общности положения условие полной управляемости всегда выполняется. Однако обратное неверно. В п. 1.9 доказана достаточность принципа

максимума оптимальных быстродействий при выполнении лишь более слабого условия полной управляемости, что расширяет возможное множество рассматриваемых систем.

1.9. Доказательство сходимости последовательности квазиоптимальных управлений к оптимальному. В п. 1.7 доказана сходимость вычислительного процесса, т. е. сходимость последовательности квазиоптимальных управлений к управлению

$$u_j(t) = M_j \operatorname{sign} [B_j(t)] * \psi(t), \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.9.1)$$

Докажем, что управление, к которому сходится процесс, оптимально. При выполнении условия общности положения в [38] доказано, что для оптимальности управления необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло принципу максимума. Условие общности положения предъявляет к структуре системы более жесткие требования по сравнению с условием полной управляемости. Действительно, в рассматриваемом случае, когда область управления U — m -мерный прямоугольный параллелепипед, условие общности положения равносильно (1.8.2). По сравнению с условием полной управляемости (1.8.1) условие покомпонентной полной управляемости (1.8.2) действительно является жестким требованием, сужающим возможное множество рассматриваемых систем.

Ослабим требования, предъявляемые к системам, и докажем следующую теорему.

Теорема. Пусть $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, — допустимое управление, переводящее систему из заданного начального состояния $x(t_0) = x_0$ в начало координат $x(t_1) = 0$. Предположим, что

(а) выполнены условия полной управляемости (1.8.1);

(б) начало координат m -мерного пространства переменных $u_1, u_2, \dots, u_m$ принадлежит области управления U .

Тогда для оптимальности управления $u(t)$ необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло принципу максимума.

Доказательство. Принцип максимума является в общем случае лишь необходимым условием оптимальности. Докажем его достаточность для линейных систем при допущениях (а), (б).

Выберем нетривиальное решение $\psi(t)$ сопряженной системы (1.2.2), для которого при $t \in [t_0, t_1]$

$$(\psi(t), Bu(t)) = \max_{u \in U} (\psi(t), Bu). \quad (1.9.2)$$

Такое решение $\psi(t)$ существует, так как управление $u(t)$ по предположению удовлетворяет принципу максимума.

Допустим, что управление $u(t)$ неоптимально. Тогда найдется такое допустимое управление $\tilde{u}(t)$, которое переводит систему из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в нулевое конечное состояние $x(\theta) = 0$ в момент времени $\theta < t_1$. В силу (1.9.2) для любого $t \in [t_0, t_1]$

$$(\psi(t), Bu(t)) = \max_{u \in U} (\psi(t), Bu) \geq (\psi(t), B\tilde{u}(t)). \quad (1.9.3)$$

Так как траектории $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$, порожденные управлениями $u(t)$ и $\tilde{u}(t)$ соответственно, выходят в момент $t = t_0$ из одной и той же начальной точки $x(t_0) = \tilde{x}(t_0) = x_0$, то

$$(\psi(t_0), x(t_0)) = (\psi(t_0), \tilde{x}(t_0)). \quad (1.9.4)$$

Для конечных точек

$$(\psi(t_1), x(t_1)) = (\psi(\theta), \tilde{x}(\theta)) = 0. \quad (1.9.5)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (\psi(\theta), x(\theta)) &= (\psi(\theta), x(\theta)) - (\psi(\theta), \tilde{x}(\theta)) = \\ &= [(\psi(\theta), x(\theta)) - (\psi(t_0), x(t_0))] - [(\psi(\theta), \tilde{x}(\theta)) - (\psi(t_0), \tilde{x}(t_0))]. \end{aligned} \quad (1.9.6)$$

Имеет место следующее соотношение:

$$(\psi(t_1), x(t_1)) - (\psi(t_0), x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} (\psi(\tau), Bu(\tau)) d\tau. \quad (1.9.7)$$

Действительно, продифференцируем скалярное произведение $(\psi(t), x(t))$; получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\psi(t), x(t)) &= (\dot{\psi}(t), x(t)) + (\psi(t), \dot{x}(t)) = \\ &= - (A^* \psi(t), x(t)) + (\psi(t), Ax(t)) + (\psi(t), Bu(t)) = \\ &= - (\psi(t), Ax(t)) + (\psi(t), Ax(t)) + (\psi(t), Bu(t)) = (\psi(t), Bu(t)). \end{aligned} \quad (1.9.8)$$

Отсюда следует

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{d\tau} (\psi(\tau), x(\tau)) d\tau = (\psi(t_1), x(t_1)) - (\psi(t_0), x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} (\psi(\tau), Bu(\tau)) d\tau, \quad (1.9.9)$$

т. е. (1.9.7).

Теперь выражение (1.9.6), используя (1.9.7) и (1.9.3), можно представить так:

$$\begin{aligned} (\psi(\theta), x(\theta)) &= \int_{t_0}^{\theta} (\psi(\tau), Bu(\tau)) d\tau - \int_{t_0}^{\theta} (\psi(\tau), \tilde{Bu}(\tau)) d\tau = \\ &= \int_{t_0}^{\theta} [(\psi(\tau), Bu(\tau)) - (\psi(\tau), \tilde{Bu}(\tau))] d\tau \geq 0. \end{aligned} \quad (1.9.10)$$

С другой стороны, ввиду условия (б) $(\psi(t), Bu(t)) = \max_{u \in U} (\psi(t), Bu) \geq 0$ при любом $t \in [t_0, t_1]$.

$$(\psi(\theta), x(\theta)) = (\psi(\theta), x(\theta)) - (\psi(t_1), x(t_1)) = - \int_{\theta}^{t_1} (\psi(\tau), Bu(\tau)) d\tau \leq 0. \quad (1.9.11)$$

Таким образом, $(\psi(\theta), x(\theta)) = 0$. Но тогда по (1.9.11) $\int_{\theta}^{t_1} (\psi(\tau), Bu(\tau)) d\tau = 0$, а потому в силу соотношения $(\psi(t), Bu(t)) = \max_{u \in U} (\psi(t), Bu) \geq 0$ при $t \in [\theta, t_1]$

$$(\psi(t), Bu(t)) = \max_{u \in U} (\psi(t), Bu) \equiv 0. \quad (1.9.12)$$

Вектор $\psi(t)$ нетривиален на интервале $[\theta, t_1]$, и поэтому из (1.9.12) следует, что вектор Bu принадлежит подпространству Y , которое не совпадает со всем пространством X . Действительно, продифференцировав соотношение $(\psi(t), Bu) \equiv 0$, $t \in [\theta, t_1]$, получим

$$\frac{d}{dt} (\psi(t), Bu) = (-A^* \psi(t), Bu) = -(\psi(t), ABu) = 0. \quad (1.9.13)$$

Оператор A преобразует Bu в подпространство $A(Bu)$, которое не совпадает со всем пространством X . Таким образом, $A(Bu) \in Y$, т. е. подпространство Y инвариантно относительно преобразования A . Аналогично,

$$\frac{d^k}{dt^k} (\psi(t), Bu) = -(\psi(t), A^k Bu) = 0, \quad k = 2, 3, \dots, n-1. \quad (1.9.14)$$

Оператор A^k , $k = 2, 3, \dots, n-1$, преобразует Bu в подпространство $A^k(Bu)$, которое также не совпадает со всем пространством X . Таким образом, $A^k(Bu) \in Y$, $k = 2, 3, \dots, n-1$, т. е. Y преобразованием A^k , $k = \overline{1, n-1}$, переводится в себя. Итак, вектор Bu принадлежит собственному инвариантному подпространству, что может быть в том и только том случае, когда векторы $Bu, ABu, A^2Bu, \dots, A^{n-1}Bu$ линейно зависимы, т. е.

$$\text{rank}[B_j u_j, AB_j u_j, \dots, A^{n-1} B_j u_j] < n, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.9.15)$$

Ранг матрицы в (1.9.15) не зависит от значения u_j , и условие принадлежности Bu собственному инвариантному подпространству принимает вид

$$\text{rank}[B_j, AB_j, A^2 B_j, \dots, A^{n-1} B_j] < n, \quad j = \overline{1, m}. \quad (1.9.16)$$

С другой стороны, согласно (а) по крайней мере хотя бы для одного значения $j = \xi$ должно быть выполнено условие полной управляемости для этой компоненты

$$\text{rank}[B_\xi, AB_\xi, A^2 B_\xi, \dots, A^{n-1} B_\xi] = n, \quad (1.9.17)$$

но это противоречит (1.9.16).

Итак, предположение $\theta < t_1$ приводит к противоречию, тем самым оптимальность управления (1.9.1) доказана.

З а м е ч а н и е 1. Для полностью управляемой системы вектор-столбцы матрицы управляемости $P_0 = (B, AB, A^2 B, A^{n-1} B)$ порождают n -мерное пространство. Действительно, пусть система в момент $t = t_0$ находится в состоянии $x(t_0) = x_0$ и под действием управления $u(t)$ должна быть переведена в нулевое состояние $x(t_1) = 0$. Из решения линейного дифференциального уравнения $\dot{x} = Ax + Bu$ имеем

$$-e^{A(t_1-t_0)} x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} Bu(\tau) d\tau. \quad (1.9.18)$$

Представляя экспоненциал в виде ряда Тейлора, найдем

$$-e^{A(t_1-t_0)} x(t_0) = B \int_{t_0}^{t_1} u(\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{\infty} A^k B \int_{t_0}^{t_1} \frac{(t_1-\tau)^k}{k!} u(\tau) d\tau. \quad (1.9.19)$$

У фундаментальной матрицы решений $\exp A(t_1 - t_0)$ столбцы и строки линейно независимы. Поэтому начальное состояние $x(t_0)$ принадлежит линейному подпространству, порожденному вектор-столбцами матриц $B, AB, A^2 B, \dots$. В этой последовательности должна появиться матрица $A^l B$, все вектор-столбцы которой линейно зависят от комбинации вектор-столбцов предыдущих матриц $B, AB, \dots, A^{l-1} B$. Такая матрица должна иметь место, так как в n -мерном пространстве не может быть более, чем n линейно независимых векторов. Поэтому $l \leq n$.

Если вектор-столбцы матрицы $A^l B$ зависят от вектор-столбцов матриц $B, AB, A^2 B, \dots, A^{l-1} B$, то вектор-столбцы матриц $A^{l+1} B, A^{l+2} B, \dots$ также линейно зависят от них. Таким образом, начальное состояние, из которого возможен перевод системы в требуемое конечное состояние, принадлежит линейному подпространству, порожденному вектор-столбцами матриц $B, AB, \dots, A^{l-1} B$. Если эти вектор-столбцы не порождают n -мерное пространство, то можно перейти в начало координат лишь из тех начальных точек, которые принадлежат этому линейному подпространству меньшей размерности, и поэтому система не полностью управляема. И наоборот, если система полностью управляема, вектор-столбцы матрицы управляемости P_0 порождают n -мерное пространство.

Пусть вектор-столбцы P_0 порождают n -мерное пространство. Тогда подходящим выбором управления $u(t)$ можно взять такие вектор-столбцы коэффициентов $\int_{t_0}^{t_1} \frac{(t_1 - \tau)^k}{k!} u(\tau) d\tau$ в уравнении (1.9.19), что правая

часть будет равна любому значению $x(t_0)$. Это означает, что перевод системы за конечное время возможен из любого начального состояния.

Замечание 2. Перевод системы за конечное время возможен из любого начального состояния, если управление неограничено. Если же управление ограничено, то в случае неустойчивого оператора A перевод возможен из некоторой ограниченной области начальных условий X_0 , для которой $0 \in \text{int } X_0$.

§ 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ФИНИТНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ

2.1. Перевод системы за фиксированное время. Рассмотренный подход позволяет получить решение следующей актуальной во многих технических приложениях задачи: найти допустимое управление $u(t)$, переводящее систему (1.1.1) из начального состояния $x(t_0) = x_0$ в нулевое конечное состояние $x(t_1) = 0$ за фиксированное время $T = t_1 - t_0$. Пусть

$$u_j^\Phi(t) = \eta M_j \text{sign}[B_j(t)]^* \psi(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad (2.1.1)$$

где параметр $\eta > 0$ показывает во сколько раз следует изменить величины компонент вектора управления, чтобы обеспечить перевод системы (1.1.1) из $x(t_0) = x_0$ в $x(t_1) = 0$ за заданное время T . Уравнение, связывающее приращения начальных условий нормированной сопряженной системы с приращениями величин управляющих воздействий, получается из (1.6.7) и (1.6.16):

1) заменой $\widehat{u}_j^{p,s}, \widehat{u}^{p+1,s}$ на $\widehat{u}_j^{p,s} = \eta^s M_j S_j^s(p)$, $\widehat{u}_j^{p+1,s} = \eta^s M_j S_j^s(p+1) = -\eta^s M_j S_j^s(p)$;

2) подстановкой в третье слагаемое $\eta^s M_j$ вместо M_j ;

3) исключением второго слагаемого с Δt_1 .

Действительно, по условию задачи момент времени t_1 фиксирован и, следовательно, $\Delta t_1 = 0$. В результате вместо (1.6.16) имеем

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0) B_j(v_j^{p,s}) \eta^s M_j S_j^s(p) \{ [B_j(v_j^{p,s})]^* A^*(v_j^{p,s}) - \\ & - [\dot{B}_j(v_j^{p,s})]^* \} [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\psi}^s(t_0)^{-1} [B_j(v_j^{p,s})]^* [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\Delta \psi}^s(t_0) + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1,s}}^{v_j^{p,s}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi_j^{p,s} \left[\eta^s M_j S_j^s(p) - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^{p,s} x_i(t_0) \right] d\tau = 0. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Полагая в (2.1.2) $\xi_j^{p,s} = 1$, получаем уравнение, которое следует использовать в общей итерационной процедуре (см. п. 1.6) вместо (1.6.7). Число неизвестных по-прежнему равно n : исключено Δt_1 , но введено η^s (значение параметра η на s -й итерации). Разделим на η^s обе части уравнения (2.1.2) и тогда относительно n неизвестных $\widehat{\Delta \psi}_i^s(t_0)$, $i = \overline{2, n}$,

1/η^s получим следующую систему:

$$\begin{aligned}
 & 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0) B_j(v_j^{p,s}) M_j S_j^s(p) \{ [B_j(v_j^{p,s})]^* A^*(v_j^{p,s}) - \\
 & - [\dot{B}_j(v_j^{p,s})]^* [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\Psi}^s(t_0)]^{-1} [B_j(v_j^{p,s})]^* [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\Delta \Psi}^s(t_0) - \\
 & - \left\{ \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1,s}}^{v_j^{p,s}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi_j^{p,s} \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right\} \frac{1}{\eta^s} + \\
 & + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1,s}}^{v_j^{p,s}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi_j^{p,s} M_j S_j^s(p) d\tau = 0. \quad (2.1.3)
 \end{aligned}$$

В остальном процесс нахождения финитного управления аналогичен итерационной процедуре п. 1.6.

Замечание 1. Важно подчеркнуть, что второе слагаемое в (2.1.3) получено на основе точных соотношений, и поэтому допустимо любое конечное изменение η^s без потери сходимости вычислительного процесса. В то же время первое слагаемое в (2.1.3) получено на основе приближенных соотношений, что допускает лишь ограниченные изменения Δv_j^{p,s} (без потери сходимости вычислительного процесса), а это достигается введением в вычислительный процесс малых параметров ξ_j^{p,s}.

Замечание 2. Рассмотренный метод представляет способ выравнивания управляющих воздействий на всех интервалах знакопостоянства квазиоптимального управления, т. е. N_{ij}^p = N_{ij}. При наличии ограничений на компоненты вектора управления формирование управления с одинаковыми величинами управляющих воздействий на каждом интервале представляет существенный практический интерес для многих технических приложений.

Замечание 3. Если $\left| \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij} x_i(t_0) \right| < M_j, \quad j = \overline{1, m}$, то оптимальное по быстродействию управление позволяет перевести систему из данной начальной точки $x(t_0) = x_0$ в $x(t_1) = 0$ за время, меньшее, чем заданное время $T = t_1 - t_0$. Если существует $j \in \{1, m\}$, для которого $\left| \sum_{i=1}^n N_{ij} x_i(t_0) \right| > M_j$, то с помощью оптимального управления невозможен перевод из данной точки x_0 в начало координат за время ≤ T. Необходимо увеличить либо T, либо M_j, j = 1, m. При увеличении только T для неустойчивых систем существуют области начальных условий, из которых невозможен перевод системы в начало координат за любое конечное (и даже бесконечное) время [37]. Если непрерывно увеличивать амплитуды компонент вектора оптимального управления, для которых выполняются условия покомпонентной полной управляемости, то области начальных условий, из которых возможен перевод системы, непрерывно расширяются, и перевод становится возможным из любой конечной точки. (Достаточно увеличивать только одну из компонент, для которых выполняется условие полной управляемости.) При квазиоптимальном управлении находятся такие значения $\widehat{N}_{ij}^p$, а следовательно, и величины управляющих воздействий $u_j(t) = \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad t \in [v_j^{p-1}, v_j^p]$, обеспечивающие перевод системы за заданное конечное время $T = t_1 - t_0$.

2.2. О количественной мере полной управляемости. Критерий полной управляемости для линейных систем с постоянными параметрами

$$\text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (2.2.1)$$

и переменными параметрами

$$\text{rank} \left[\int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t_1, \tau) d\tau \right] = n, \quad (2.2.2)$$

как и любые другие эквивалентные формы критерия полной управляемости [39], является «релейным», т. е. дает ответ на вопрос существования полной управляемости в форме «да — нет». Поэтому критерий в такой форме носит качественный характер. В то же время весьма актуальна проблема нахождения и определения количественной меры полной управляемости. На основе решения задач финитного управления и параметрической оптимизации [32] возможны определение и нахождение количественной меры полной управляемости. При переводе системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(t_0) = x_0, \quad (2.2.3)$$

из $x(t_0) = x_0$ в $x(t_1) = 0$ за фиксированное время $T = t_1 - t_0 = \text{const}$ величины (амплитуды) управляющих воздействий $|u_j| = \left| \sum_{i=1}^n \tilde{N}_{ij} x_i(t_0) \right|$,

$j = \overline{1, m}$, различны для различных значений элементов матриц A, B и заданного T . При этом чем больше элементы матрицы B или чем больше T , тем меньше необходимые величины управляющих воздействий. Зависимость величин управляющих воздействий от элементов матрицы A носит более сложный характер. Существуют такие значения элементов матрицы A , при которых фазовые координаты системы (2.2.3) оказываются линейно зависимыми. В этом случае не выполняется условие полной управляемости (2.2.1), т. е. $\text{rank}(B, A) < n$. При этом $|\tilde{N}_{ij}| = \infty$, т. е. величины управляющих воздействий, необходимые для перевода системы, становятся бесконечно большими. Физически это объясняется следующим образом. При наличии линейной зависимости между некоторыми фазовыми координатами для их разделения и управления каждой фазовой координатой необходимо приложить управляющее воздействие бесконечной величины.

Более важным и интересным с практической точки зрения является управление системами, достаточно «удаленными» от линейной зависимости. И здесь возникает актуальная проблема нахождения (на этапе проектирования управляемых объектов) параметров (собственных значений) матрицы A , при которых амплитуды управляющих воздействий минимальны. Минимальные управляющие воздействия будут для систем с минимально возможным временем квазиоптимальных процессов [32]. Действительно, чем меньше заданное время, тем больше необходимые величины управляющих воздействий. Если, наоборот, зафиксировано время перевода системы, то для систем с оптимальными значениями параметров достаточно меньших значений управляющих воздействий, чем для систем с неоптимальными значениями.

На основании вышеизложенного дадим следующее

Определение. Количественной мерой полной управляемости линейной системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0$$

называется величина $R = \|u\|_{\min} / \|u\|$.

Здесь $\|u\|$ — норма вектора управления (2.1.1) при решении задачи перевода системы за фиксированное время $T = t_1 - t_0$; $\|u\|_{\min}$ — минималь-

ная норма вектора управления, которая достигается при решении задачи перевода системы за то же время и оптимальных значениях коэффициентов матрицы A . Имеем $R \in [1, 0)$.

Замечание. Мере «1» соответствует система с минимальной величиной управления; мере «0» — система с бесконечно большой величиной управления. Это уже неполностью управляемая система, так как в этом случае $\text{rank}(B, A) < n$. На этапе проектирования управляемых объектов представляет существенный практический интерес построение систем с $R = 1$.

2.3. К вопросу управления неполностью управляемыми системами. Если критерий полной управляемости не выполняется, то система не может быть переведена из любой начальной точки в любую конечную точку. На практике, однако, возможны задачи, в которых и не требуется перевод системы в произвольную конечную точку.

Возможны две причины возникновения неполной управляемости. Первая — наличие линейной зависимости между некоторыми фазовыми координатами. Вторая — наличие неуправляемой подсистемы, процессы в которой протекают вне зависимости от процессов управляемой (полностью) подсистемы.

Представляют практический интерес анализ причин порождения и устранения линейной зависимости между фазовыми координатами и исследование ограниченных возможностей по управлению такими системами.

Пусть у системы

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

линейно зависимы, например фазовые координаты x_k и x_l , x_r и x_q , $k, l, r, q \in \{1, n\}$. Решая на интервале $[t_0, t_1]$ систему (2.3.1) при нулевых начальных условиях и произвольном законе управления $u(t)$, находим коэффициенты

$$k_1 = \frac{x_l(t)}{x_k(t)}, \quad k_2 = \frac{x_q(t)}{x_r(t)}. \quad (2.3.2)$$

Важно подчеркнуть, что линейная зависимость сохраняется при любом законе управления.

Из (2.3.1) исключаем уравнения для фазовых координат x_l и x_q и в остальных уравнениях системы (2.3.1) заменяем x_l , x_q на x_k и x_r с помощью соотношений $x_l(t) = k_1 x_k(t)$, $x_q(t) = k_2 x_r(t)$. Приходим к системе вида

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= \tilde{A}(t) \cdot \tilde{x} + B(t)u, \quad \tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0, \\ \tilde{x} &\in \mathbb{R}^{n-2}, \quad u \in \mathbb{R}^m, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

порядок которой на две (в данном случае) единицы меньше порядка исходной системы (2.3.1). Полученная система полностью управляема, т. е. $\text{rank}(\tilde{B}, \tilde{A}) = n - 2$.

Для полностью управляемой системы (2.3.3) возможны постановки различных задач. Линейно зависимые фазовые координаты $x_l(t)$ и $x_q(t)$ в начальный момент времени $t = t_0$ должны иметь значения $x_l(t_0) = k_1 x_k(t_0)$; $x_q(t_0) = k_2 x_r(t_0)$. Аналогично и на правом конце. Таким образом, перевод системы (2.3.1) возможен не из любых начальных условий и не в любые конечные условия, а лишь в связанные соотношениями (2.3.2).

§ 3. РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Наряду с прямой задачей оптимального управления, рассмотренной выше, представляет интерес и обратная: найти начальные условия $x^*(t_0)$ для системы (1.1.1), при которых система переводится оптималь-

ным управлением в начало координат $x(t_1)=0$ за заданное время $T=t_1-t_0$.

Обратная задача возникает, например, при формировании квази-оптимального управления из каждой фазовой координаты [32]. При этом необходимо решение обратных «осевых» задач: найти на каждой из осей фазового пространства точки $X^{(i)}(t_0)=(0, \dots, 0, x_i^*(t_0), 0, \dots, 0)$, $i=1, n$, из которых система (1.1.4) переводится оптимальным управлением в начало координат за заданное время $T=t_1-t_0$.

Для решения обратной задачи в вышеизложенной вычислительной процедуре (см. п. 1.6) в уравнениях (1.6.7) и (1.6.16) следует сделать следующие изменения:

принять $\Delta t_1=0$, так как момент t_1 фиксирован;

заменить $\widehat{u}_j^{p,s}, \widehat{u}_j^{p+1,s}$ на $\widehat{u}_j^{p,s}=M_j S_j^s(p)$, $\widehat{u}_j^{p+1,s}=M_j S_j^s(p+1)=-M_j S_j^s(p)$ соответственно;

заменить $\sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^{p,s} x_i(t_0)$ на $\widehat{N}_{ij}^{p,s} x_i^*(t_0)$, $i=\overline{1, n}$, где $x_i^*(t_0)$ — иско-
мое начальное условие.

В результате приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0) B_j(v_j^{p,s}) M_j S_j^s(p) \times \\ & \times \{ [B_j(v_j^{p,s})]^* A^*(v_j^{p,s}) - [\dot{B}_j(v_j^{p,s})]^* \} [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\Psi}^s(t_0)^{-1} \times \\ & \times [B_j(v_j^{p,s})]^* [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\Delta \Psi}^s(t_0) - \\ & - \left[\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1,s}}^{v_j^{p,s}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \widehat{N}_{ij}^{p,s} d\tau \right] x_i^*(t_0) + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1,s}}^{v_j^{p,s}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) S_j^s(p) M_j d\tau = 0, \quad i=\overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Систему (3.1) требуется решать для каждого $i \in \{1, n\}$. Таким образом, (1.6.7) трансформируется в n систем. Вместо (1.6.16) используем

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j-1} \Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0) B_j(v_j^{p,s}) M_j S_j^s(p) \times \\ & \times \{ [B_j(v_j^{p,s})]^* A^*(v_j^{p,s}) - [\dot{B}_j(v_j^{p,s})]^* \} [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\Psi}^s(t_0)^{-1} \times \\ & \times [B_j(v_j^{p,s})]^* [\Phi^{-1}(v_j^{p,s}, t_0)]^* \widehat{\Delta \Psi}^s(t_0) + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1,s}}^{v_j^{p,s}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi_{ij}^{p,s} M_j S_j^s(p) d\tau - \\ & - \left[\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{v_j^{p-1,s}}^{v_j^{p,s}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi_{ij}^{p,s} \widehat{N}_{ij}^{p,s} d\tau \right] x_i^*(t_0) = 0, \quad i=\overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Решение обратных осевых задач сопряжено с решением n систем (3.1) и n систем (3.2), каждая из которых состоит из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $\widehat{\Delta \Psi}_i(t_0)$, $i=\overline{2, n}$, $x_i^*(t_0)$. В остальном вычислительная процедура аналогична изложенной в п. 1.6.

Отметим, что в силу симметричности относительно начала координат гиперповерхностей переключений существуют на фазовых осях две

симметричные относительно начала координат точки, переход из которых происходит за одно и то же время T , но с симметричными оптимальными управлениями. Для определенности необходимо задавать знак искомого начального условия $x_i^*(t_0)$, $i = \overline{1, n}$.

§ 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА МИНИМУМ РАСХОДА РЕСУРСОВ

4.1. Постановка задачи. Пусть система

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u, \quad x(t_0) = x_0, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad |u_j| \leq M_j, \quad j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

полностью управляема и переводима в начало координат ограниченным управлением.

Задача. Найти допустимое управление $u^0(t)$, переводящее систему (4.1.1) из начального $x(t_0) = x_0$ в нулевое конечное состояние $x(t_1) = 0$ за фиксированное время $T = t_1 - t_0$ ($T \geq T_{\text{опт}}$) и минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^m |u_j(\tau)| d\tau. \quad (4.1.2)$$

Здесь $T_{\text{опт}}$ — время оптимального по быстродействию перевода системы.

4.2. Решение задачи по переводу системы за фиксированное время. В постановке задачи предполагается, что заданное время больше времени оптимального по быстродействию перевода системы, т. е. $T \geq T_{\text{опт}}$. Поэтому прежде всего необходимо проверить, выполняется ли это необходимое условие. Находим решение задачи по переводу системы за фиксированное время (см. п. 2.1). Если окажется,

что $\left| \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij} x_i(t_0) \right| \leq M_j, \quad j = \overline{1, m}$, то $T \geq T_{\text{опт}}$, и решение задачи суще-

ствует. Если $\left| \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij} x_i(t_0) \right| > M_j, \quad j = \overline{1, m}$, то $T < T_{\text{опт}}$, и решения поставленной задачи для принятого значения T нет.

Решение финитной задачи дает некоторую информацию, необходимую для решения задачи минимизации расхода ресурсов:

1. Последовательность управляющих воздействий и число перемен знака для каждой компоненты.

Действительно, при $T = T_{\text{опт}}$ решение задачи на минимум расхода ресурсов совпадает с решением задачи оптимального быстродействия. При $T > T_{\text{опт}}$ появляются участки «выключения» управления, за счет которых и происходит экономия ресурсов. При этом структура финитного управления отличается от структуры управления, минимизирующего расход ресурсов, однако последовательность кусочно-постоянных воздействий и число перемен знака для каждой компоненты сохраняются.

2. Если существует $j, j \in \{1, m\}$, для которого $\left| \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij} x_i(t_0) \right| > M_j$, то решения задачи минимизации расхода ресурсов не существует.

Для разрешимости необходимо увеличить либо T , либо M_j . Увеличение M_j , как отмечалось выше в задаче быстродействия, всегда приводит к решению задачи (если система полностью управляема), но сопряжено с увеличением управляющего параметра. Увеличение T для неустойчивых систем не обязательно приводит к решению задачи. Действительно, для неустойчивых систем с ограниченным по величине управлением переход в начало координат возможен лишь из ограниченной области начальных условий (даже за бесконечное время). Однако на практике время T задается зачастую произвольно, без учета возмож-

ностей системы. Поэтому увеличение T позволяет во многих случаях получить решение задачи. Отношение $\eta = T/T_{\text{опт}}$ (при условии $T/T_{\text{опт}} > 1$) характеризует запас по времени и определяет экономию ресурсов. Чем больше η , тем меньше расход ресурсов. Однако интенсивность, с которой происходит уменьшение расхода, уменьшается с ростом η . При этом увеличивается и время перевода системы. Поэтому целесообразно принимать $\eta \sim 3 \div 4$ [32].

4.3. Определение начальных условий для сопряженной системы. Квазиоптимальное управление по расходу ресурсов при одинаковых для всех фазовых координат моментах переключений определяется соотношением [32]

$$u_j^{\text{KB}}(t) = \sum_{i=1}^n N_{ij}^p |x_i(t_0)| \text{sign} \{ [B_j(t)]^* \psi [1 - \text{sign} (1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|)] \}, \quad (4.3.1)$$

$$j = \overline{1, m}, p = \overline{1, r_j}, t \in [v_j^{p-1}, v_j^p].$$

Оптимальное по расходу ресурсов управление формируется по алгоритму

$$u_j^0(t) = M_j \text{sign} \{ [B_j(t)]^* \psi(t) [1 - \text{sign} (1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|)] \}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (4.3.2)$$

На рис. 2 показаны: структура финитного управления $u_j^\Phi(t)$; структура квазиоптимального по расходу ресурсов управления $u_j^{\text{KB}}(t)$; функция $[B_j(t)]^* \psi(t)$ для квазиоптимального управления при одинаковых для всех фазовых координат моментах переключений.

Задавая первоначально n моментов переключений, можно определить начальное условие $\psi(t_0)$ для сопряженной системы $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$, а с помощью решения $\psi(t)$ — все переключения компонент вектора управления на заданном интервале $[t_0, t_1]$.

Пусть t_j^α ($\alpha = \overline{1, l_j}$, $\sum_{j=1}^m l_j = n$) — α -й момент переключения j -й компоненты вектора управления. Моменты переключений $t_j^{\alpha, s}$ ($\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, $j = \overline{1, m}$) для начального приближения $s=0$ искомого управления на минимум расхода ресурсов целесообразно задавать через моменты переключений v_j^p финитного управления следующим образом:

$$\begin{aligned} t_j^{2p-1,0} &= v_j^p - (v_j^p - v_j^{p-1}) \left(1 - \frac{|u_j^\Phi|}{M_j} \right), \\ t_j^{2p,0} &= v_j^p + (v_j^{p+1} - v_j^p) \left(1 - \frac{|u_j^\Phi|}{M_j} \right), \\ p &= \overline{1, (r_j - 1)}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Действительно, если $|u_j^\Phi| = M_j$, то финитное управление должно совпадать с оптимальным управлением по расходу ресурсов, что и отражает формула (4.3.3). Если $u_j^\Phi/M_j \rightarrow 0$, то интервалы, на которых управление, минимизирующее расход ресурсов, отлично от нуля, должны стремиться к нулю, что и следует из (4.3.3).

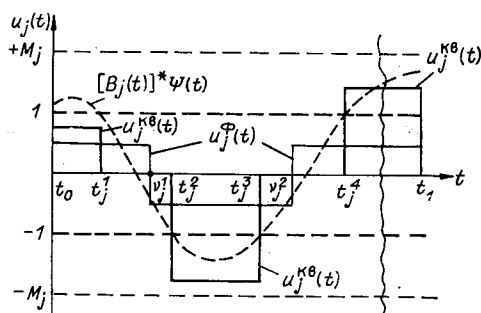


Рис. 2.

Функция переключения $[B_j(t)]^* \psi(t)$ обращается в нуль в некоторые моменты времени, а при $t = t_j^\alpha$

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = \pm 1. \quad (4.3.4)$$

Запишем решение сопряженной системы так:

$$\psi(t) = [\Phi^{-1}(t, t_0)]^* \psi(t_0). \quad (4.3.5)$$

Зная $u^\Phi(t)$, легко определить знак на первом интервале постоянства квазиоптимального управления по расходу ресурсов:

$$\text{sign } u^{\text{нб}}(t_0) = \text{sign } u^\Phi(t_0). \quad (4.3.6)$$

Следовательно, можно определить знаки функции переключения на каждом p -м интервале постоянства, именно:

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) = (-1)^{p-1} \text{sign } u_j^\Phi(t_0). \quad (4.3.7)$$

Связь между параметрами p и α выражается формулой

$$p = E\{\alpha/2 + 1\}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, \quad (4.3.8)$$

где $E\{\cdot\}$ — целая часть числа. Подставляя (4.3.5) и (4.3.8) в (4.3.7), получаем относительно $\psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$, следующую систему:

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E\{\alpha/2+1\}-1} = 0, \quad (4.3.9)$$

$$\alpha = \overline{1, l_j}, \quad \sum_{j=1}^m l_j = n, \quad j = \overline{1, m}.$$

Подчеркнем, что нет необходимости в аналитическом определении значений $[\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^*$. Последние находятся в заданные моменты времени $t = t_j^\alpha$ при численном решении на ЭВМ системы

$$\frac{d\widehat{\Phi}(t, t_0)}{dt} = -A^*(t) \widehat{\Phi}(t, t_0), \quad \widehat{\Phi}(t_0, t_0) = I. \quad (4.3.10)$$

4.4. Определение весовых коэффициентов для квазиоптимального управления. В случае переменных матриц $A(t)$, $B(t)$ весовые коэффициенты N_{ij} принимают различные значения N_{ij}^p на каждом p -м интервале знакопостоянства компонент вектора управления, где $p = \overline{1, r_j}$, а r_j — число интервалов знакопостоянства j -й компоненты. Число возможных переключений $\alpha_{\max} = 2(r_j - 1)$, $j = \overline{1, m}$, для каждой компоненты вектора управления в общем случае различно и зависит от $A(t)$, $B(t)$, T .

Весовые коэффициенты N_{ij}^p , $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j}$, связаны [32, с. 179] с параметрами управляемой системы следующими уравнениями:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} N_{ij}^p \Phi(t_1, t_0) \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \text{sign} \{ [B_j(\tau)]^* \psi(\tau) [1 - \text{sign}(1 - | [B_j(\tau)]^* \psi(\tau) |)] \} d\tau + \Gamma_j(t_1, t_0) = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.4.1)$$

Здесь $\psi(t)$ — решение сопряженной системы, соответствующее положительному значению $x_i(t_0) \quad \forall i = \overline{1, n}$, $\Gamma_i(t_1, t_0)$ — i -й вектор-столбец фундаментальной матрицы решений $\Phi(t_1, t_0)$.

Введем обозначение

$$\widehat{N}_{ij}^p = N_{ij}^p \text{sign} \{ [B_j(t)]^* \psi(t) [1 - \text{sign}(1 - | [B_j(t)]^* \psi(t) |)] \}. \quad (4.4.2)$$

Учитывая, что $\Gamma_i(t_1, t_0) = \Phi(t_1, t_0) I_i$, где I_i — i -й вектор-столбец единичной матрицы, а $\Phi(t_1, t_0)$ — невырождена, систему уравнений (4.4.1)

представим, используя обозначение (4.4.2), следующим образом:

$$\sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \widehat{N}_{ij}^p \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.4.3)$$

Квазиоптимальное управление по расходу ресурсов формируется по алгоритму

$$u_j(t) = \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad t \in [t_j^{2(p-1)}, t_j^{2p-1}],$$

$$u_j(t) \equiv 0, \quad t \in (t_j^{2p-1}, t_j^{2p}), \quad p = \overline{1, r_j}. \quad (4.4.4)$$

Пусть определены все моменты переключений t_j^α , $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j}$, включая и конечный $t_j^{2r_j-1} = t_1$. Параметры p и α связаны соотношением (4.3.8). Так как $\sum_{j=1}^m 2r_j - 1 \geq n$, то число параметров $\widehat{N}_{ij}^p$ может быть больше числа уравнений. Поэтому для i -й фазовой координаты на n интервалах знакопостоянства компонент вектора управления принимаем неизвестными коэффициенты $\widehat{N}_{ij}^p$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, k_j}$, где $\sum_{j=1}^m k_j = n$, а на остальных интервалах — $\widehat{N}_{ij}^{p+1} = -\widehat{N}_{ij}^p$, $p = \overline{k_j, r_j - 1}$. Отсюда

$$\widehat{N}_{ij}^{p+1} = (-1)^{p-k_j} \widehat{N}_{ij}^{k_j}, \quad p = \overline{k_j, r_j - 1}. \quad (4.4.5)$$

В результате получаем n систем, каждая из которых состоит из n линейных алгебраических уравнений относительно n неизвестных весовых коэффициентов, именно:

$$\sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{k_j} \widehat{N}_{ij}^p \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=k_j+1}^{r_j} (-1)^{p-k_j} \widehat{N}_{ij}^{k_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau \right\} + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (4.4.6)$$

4.5. Вариация величин управляющих воздействий.

Моменты переключений t_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$, управляющих параметров $u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$, находятся из решения на интервале $[t_0, t_1]$ уравнений

$$[B_j(t_j^\alpha)]^* \psi(t_j^\alpha) - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E(\alpha/2+1)-1} = 0, \quad j = \overline{1, m}. \quad (4.5.1)$$

Зная начальное условие $\psi(t_0) = \psi_0$, решаем на интервале $[t_0, t_1]$ сопряженную систему $\dot{\psi} = -A^*(t)\psi$, $\psi(t_0) = \psi_0$ и находим все $t = t_j^\alpha$, для которых выполняются (4.5.1), а следовательно, определяем и r_j , $j = \overline{1, m}$, где $r_j = p_{\max} = E\{\alpha_{\max}/2 + 1\}$.

Найдем отклонения фазовых координат, порожденные отклонениями величин управляющих воздействий квазиоптимального управления от оптимального. Квазиоптимальное по расходу ресурсов управление формируется по алгоритму (4.3.1), а оптимальное — (4.3.2). Отклонения квазиоптимального управления от оптимального соответственно равны

$$\Delta u_j(t) = \left[M_j - \sum_{i=1}^n N_{ij}^p |x_i(t_0)| \right] \text{sign } \{ [B_j(t)]^* \psi(t) [1 -$$

$$- \text{sign}(1 - |[B_j(t)]^* \psi(t)|) \}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (4.5.2)$$

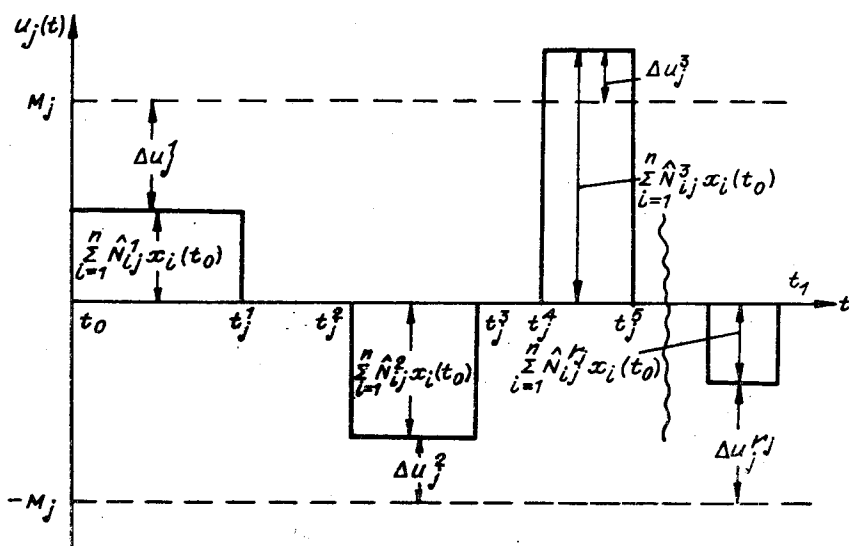


Рис. 3.

Отклонение фазовых координат в конечный момент времени $t = t_1$, вызванное отклонениями управляющих параметров, равно

$$\begin{aligned} \widehat{x}(t_1) = \sum_{j=1}^m \Phi(t_1, t_0) \int_{t_0}^{t_1} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \left[M_j - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n N_{ij}^p |x_i(t_0)| \right] \text{sign} \{ [B_j(\tau)]^* \psi(\tau) [1 - \text{sign}(1 - |[B_j(\tau)]^* \psi(\tau)|)] \} d\tau. \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

Выражение (4.5.3) представим в несколько ином виде. Квазиоптимальное управление (4.3.1) принимает значения $\left\{ \pm \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0), 0 \right\}$, а оптимальное — $\{\pm M_j, 0\}$. На рис. 3 показаны j -я компонента квазиоптимального по расходу ресурсов управления и ее отклонение $\Delta u_j^p(t)$. Учитывая, что на интервалах с нулевым управлением $\Delta u(t) = 0$, выражение (4.5.3) запишем так:

$$\begin{aligned} \widehat{x}(t_1) = \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \Phi(t_1, t_0) \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \times \\ \times \left[M_j \text{sign} u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Итак, на p -м интервале

$$\Delta u_j^p = M_j \text{sign} u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0), \quad j = \overline{1, m}, \quad p = \overline{1, r_j}. \quad (4.5.5)$$

Для обеспечения сходимости вычислительного процесса будем брать лишь ξ -ю часть ($0 < \xi < 1$) этого отклонения

$$\widehat{\Delta u}_j^p = \xi_j^p \Delta u_j^p, \quad 0 < \xi_j^p < 1. \quad (4.5.6)$$

Управление будет стремиться теперь не к $\pm M_j$, а к величине

$$\widehat{u}_j^p = \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0) + \xi_j^p \left[M_j \text{sign} u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right], \quad j = \overline{1, m}. \quad (4.5.7)$$

В этом случае отклонение фазовых координат, вызванное отклонениями (4.5.6) управляющих параметров u_j^p от $\hat{u}_j^p$, равно

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta x}(t_1) = & \Phi(t_1, t_0) \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi_j^p \times \\ & \times \left[M_j \operatorname{sign} u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

4.6. Вариация моментов переключений управления. Изменения t_j^α на величину Δt_j^α , $\alpha = \overline{1, 2(r_j-1)}$, $j = \overline{1, m}$, порождают отклонения фазовых координат, которые находятся из следующего приближенного соотношения:

$$\widetilde{\Delta x}(t_1) \cong \Phi(t_1, t_0) \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0) B_j(t_j^\alpha) \widehat{u}_j^p \Delta t_j^\alpha. \quad (4.6.1)$$

Здесь $\widehat{u}_j^p$ определяется из выражения (4.5.7); $p = E\{\alpha/2 + 1\}$. Вывод соотношения (4.6.1) аналогичен выводу, изложенному в п. 1.4. На рис. 4 показана вариация моментов переключений для j -й компоненты вектора управления.

В (4.6.1) число неизвестных Δt_j^α , $j = \overline{1, m}$, $\alpha = \overline{1, 2(r_j-1)}$, может быть больше числа уравнений. Необходимо перейти к вычислению приращений $\Delta \psi_i(t_0)$ начальных условий сопряженной системы, число которых равно n . Аналогично п. 1.5 можно получить соотношение, связывающее приращения моментов переключений с приращениями сопряженной системы, вида

$$\begin{aligned} \Delta t_j^\alpha = & \{ [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* \} \times \\ & \times [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \}^{-1} [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \times \\ & \times \Delta \psi(t_0), \quad j = \overline{1, m}, \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j-1)}. \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

Подставим (4.6.2) в (4.6.1):

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta x}(t_1) = & \Phi(t_1, t_0) \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0) \times \\ & \times B_j(t_j^\alpha) \widehat{u}_j^p \{ [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* \} \times \\ & \times [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \}^{-1} [B_j(t_j^\alpha)]^* [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0). \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Отклонения фазовых координат, вызванные изменениями величин управляющих воздействий, должны быть скомпенсированы отклонениями фазовых координат, вызванными изменениями моментов переключений, т. е.

$$\widehat{\Delta x}(t_1) + \widetilde{\Delta x}(t_1) = 0. \quad (4.6.4)$$

Подставляя в (4.6.4) выражения (4.5.3), (4.6.3) и учитывая невырожденность $\Phi(t_1, t_0)$, получаем относительно $\Delta \psi_i(t_0)$, $i = \overline{1, n}$, систему из n уравнений

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0) B_j(t_j^\alpha) \widehat{u}_j^p \{ [B_j(t_j^\alpha)]^* A^*(t_j^\alpha) - \\ & - [\dot{B}_j(t_j^\alpha)]^* \} [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \psi(t_0) \}^{-1} [B_j(t_j^\alpha)]^* \times \\ & \times [\Phi^{-1}(t_j^\alpha, t_0)]^* \Delta \psi(t_0) + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi_j^p \times \\ & \times \left[M_j \operatorname{sign} u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^p x_i(t_0) \right] d\tau = 0. \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

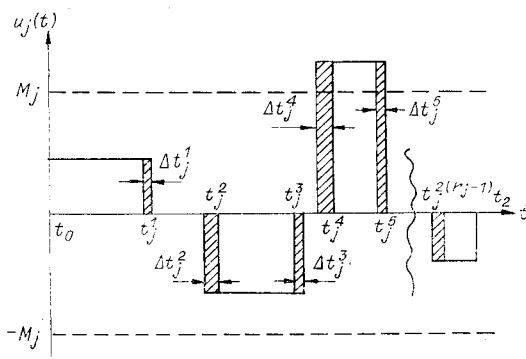


Рис. 4.

Сходимость вычислительного процесса и сходимость последовательности квазиоптимальных управлений к оптимальному доказываются так же, как в задаче быстрогодействия.

4.7. Итерационный процесс вычисления оптимального по расходу ресурсов управления.

Шаг 1. Для заданного интервала $[t_0, t_1]$, где t_1 фиксировано, решаем задачу конечного управления и находим $u_j^\Phi(t)$, $j = \overline{1, m}$. Если $|u_j^\Phi(t)| \leq M_j$

$\forall j = \overline{1, m}$, то оптимальное по расходу ресурсов управление существует. Запоминаем v_j^p , $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, r_j}$, $\text{sign } u^\Phi(t_0)$ и переходим к шагу 2.

Если существует $j \in \{1, m\}$, для которого $|u_j^\Phi(t)| > M_j$, то оптимального управления по расходу ресурсов (при заданных ограничениях на компоненты вектора управления и заданном времени процесса $T = t_1 - t_0$) нет. Для существования управления необходимо увеличить M_j либо T и перейти к шагу 1.

Шаг 2. На интервале $[t_0, t_1]$ имеем n моментов переключений $t_j^{\alpha, s}$, $j = \overline{1, m}$, $\alpha = \overline{1, l_j}$, $\sum_{j=1}^m l_j = n$. Значения $t_j^{\alpha, 0}$ определяются по формуле

(4.3.3). Решаем уравнение (4.3.10) на интервале $[t_0, \max_{j \in \{1, m\}} t_j^{\alpha, s}]$, нахо-

дим фундаментальную матрицу $[\Phi^{-1}(t, t_0)]^*$ и запоминаем значения $[\Phi^{-1}(t_j^{\alpha, s}, t_0)]^*$. Одновременно при решении уравнения (4.3.10) транспонируем матрицу $[\Phi^{-1}(t, t_0)]^*$ и вычисляем интегральные выражения t_j^{2p-1}

$\int_{t_j^{2p-1}}^{\tau} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau$ до максимального значения $t_j^{\alpha, s}$. Параметры α

и p связаны соотношением (4.3.8).

Шаг 3. Относительно n неизвестных $\psi_i^s(t_0)$, $i = \overline{1, n}$, решаем систему (см. (4.3.9))

$$[B_j(t_j^{\alpha, s})]^* [\Phi^{-1}(t_j^{\alpha, s}, t_0)]^* \psi^s(t_0) - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E(\alpha/2+1)-1} = 0, \\ \alpha = \overline{1, l_j}, \quad \sum_{j=1}^m l_j = n, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (4.7.1)$$

Находим $\psi^s(t_0) = \psi_0^s$.

Шаг 4. Решаем на интервале $[t_0, t_1]$ уравнение

$$\dot{\psi}^s = -A^*(t) \psi^s, \quad \psi^s(t_0) = \psi_0^s. \quad (4.7.2)$$

Находим все значения $t_j^{\alpha, s}$ из уравнения

$$[B_j(t_j^{\alpha, s})]^* \psi^s(t_j^{\alpha, s}) - \text{sign } u_j^\Phi(t_0) (-1)^{E(\alpha/2+1)-1} = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad (4.7.3)$$

и, учитывая (4.3.8), число r_j интервалов знакопостоянства для каждой j -й компоненты вектора управления:

$$r_j = E \left\{ \frac{\alpha_{j\max}}{2} + 1 \right\}, \quad j = \overline{1, m}. \quad (4.7.4)$$

Продолжаем решение уравнения (4.3.10) на интервале $\left[\max_{j \in \{1, m\}} t_j^{\alpha, s}, t_1 \right]$

и вычисление интегральных выражений

$$t_j^{2p-1} \int_{t_j^{2(p-1)}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau.$$

Шаг 5. Находим весовые коэффициенты $\widehat{N}_{ij}^{p,s}$. Для этого решаем n систем (4.4.6), каждая из которых состоит из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $\widehat{N}_{ij}^{p,s}$, $j = \overline{1, m}$, $p = \overline{1, k_j}$, $\sum_{j=1}^m k_j = n$, $s = 0, 1, 2, \dots$, именно:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \left\{ \sum_{p=1}^{k_j} \widehat{N}_{ij}^{p,s} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau + \right. \\ & \left. + \sum_{p=k_j+1}^{r_j} (-1)^{p-k_j} \widehat{N}_{ij}^{p,s} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) d\tau \right\} + I_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (4.7.5)$$

Если некоторые начальные условия равны нулю (например, $x_\mu(t_0) = 0$, $\mu \in \{1, n\}$), то соответствующие системы уравнений для $i = \mu$ решать не надо, что уменьшает объем вычислений.

Шаг 6. Определяем приращения моментов переключений. Для этого решаем систему (4.6.5) из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными, которыми являются приращения $\Delta\psi_i^s(t_0)$, $i = \overline{1, n}$, начальных условий сопряженной системы. Решение при $\xi_j^{p,s} = 1$ обозначим через $\overline{\Delta\psi}^s(t_0)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi^{-1}(t_j^{\alpha,s}, t_0) B_j(t_j^{\alpha,s}) \widehat{u}_j^p \{ [B_j(t_j^{\alpha,s})]^* A^*(t_j^{\alpha,s}) - \\ & - [\dot{B}_j(t_j^{\alpha,s})]^* [\Phi^{-1}(t_j^{\alpha,s}, t_0)]^* \psi^s(t_0)^{-1} [B_j(t_j^{\alpha,s})]^* [\Phi^{-1}(t_j^{\alpha,s}, t_0)]^* \overline{\Delta\psi}^s(t_0) + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \left[M_j \operatorname{sign} u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^n \widehat{N}_{ij}^{p,s} x_i(t_0) \right] d\tau = 0. \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

Подставляем найденное значение $\overline{\Delta\psi}^s(t_0)$ в (4.6.2) и находим приращения моментов переключений:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta t}_j^{\alpha,s} &= \{ [B_j(t_j^{\alpha,s})]^* A^*(t_j^{\alpha,s}) - \\ & - [\dot{B}_j(t_j^{\alpha,s})]^* [\Phi^{-1}(t_j^{\alpha,s}, t_0)]^* \psi^s(t_0)^{-1} [B_j(t_j^{\alpha,s})]^* [\Phi^{-1}(t_j^{\alpha,s}, t_0)]^* \overline{\Delta\psi}^s(t_0), \\ & \alpha = \overline{1, 2(r_j-1)}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned} \quad (4.7.7)$$

Проверяем выполнение условия

$$|\overline{\Delta t}_p^{l,s}| = \max_{\substack{j \in \{1, m\} \\ p \in \{1, r_j\}}} [|\Delta t_j^{\alpha,s}|] \leq \varepsilon_1. \quad (4.7.8)$$

Здесь $\varepsilon_1 = \varepsilon_2(t_1 - t_0)$, $0 < \varepsilon_2 < 1$.

Если (4.7.8) имеет место, то находим новые значения $t_j^{\alpha,s+1} = t_j^{\alpha,s} + \Delta t_j^{\alpha,s}$, $j = \overline{1, m}$, $\alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}$. Если некоторые приращения отрицательные, причем такие, что отдельные моменты переключений становятся отрицательными, то полагаем эти моменты переключений малыми, но положительными:

$$\widehat{t}_j^{\alpha,s+1} = \gamma h, \quad j \in [1, m], \quad \gamma \in [1, 2(r_j - 1)]. \quad (4.7.9)$$

Здесь h — шаг интегрирования; γ — номер отрицательного момента переключения. Перенумеруем, если необходимо, моменты переключений по мере их расположения на оси времени. Выбираем n первых моментов переключений и переходим к шагу 2.

Если $\widehat{t}_j^{\alpha,s+1} > \widehat{t}_j^{\alpha+1,s+1}$, $j \in [1, m]$, $\alpha \in [1, 2(r_j - 1)]$, то упорядочиваем нумерацию (переобозначаем) моментов переключений. В результате получаем

$$t_j^{\alpha,s+1} < t_j^{\alpha+1,s+1}, \quad j = \overline{1, m}; \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j - 1)}. \quad (4.7.10)$$

Выбираем n первых моментов переключений и переходим к шагу 2.

Если наряду с (4.7.8) на $(s+1)$ -м шаге выполняется и условие

$$|\Delta \widehat{t}_p^{l,s+1} / \Delta \widehat{t}_p^{l,s}| < 1, \quad (4.7.11)$$

то точность h_0 , с которой вычисляются моменты переключений на $(s+2)$ -й итерации в шаге 4, принимается не менее 0,01 от величины максимального приращения на $(s+1)$ -й итерации, т. е. $h_0 \leq 0,01 |\Delta \widehat{t}_p^{l,s+1}|$. Заданная точность вычислений достигается путем дихотомии. Шаг интегрирования и точность вычисления моментов переключений в шаге 4 до выполнения условия (4.7.11) принимаются равными $0,01T$. Таким образом, «вдали» от истинных значений вычисления производятся с невысокой точностью, а в окрестности истинных значений точность вычислений на каждой итерации возрастает, и решение может быть найдено с любой наперед заданной точностью.

Процесс вычислений заканчивается, если выполняется одно из трех следующих условий:

$$t_1 \geq t_1^*,$$

$$\max |\Delta \widehat{t}_j^{\alpha,s}| \leq \varepsilon_3 \quad (4.7.12)$$

$$|\widehat{\Delta x}(t_1)| \leq \varepsilon_4, \quad (4.7.13)$$

где ε_3 , ε_4 — заданные положительные числа, причем ε_3 характеризует точность, с которой достаточно вычисление моментов переключений (возможна техническая реализация моментов переключений); а ε_4 — точность перехода в начало координат с найденными моментами переключений при предельно допустимых значениях управляющих параметров. Значение $\widehat{\Delta x}(t_1)$ находится из выражения (4.5.8).

Если при решении задачи финитного управления $|u_j^\Phi(t)| \geq M_j$, то последовательно увеличиваем значение t_1 до некоторого предельного t_1^* . Если текущее значение t_1 превышает предельное значение t_1^* , то процесс вычислений останавливается. При нарушении условия (4.7.8) переходим к шагу 7.

Шаг 7. Пусть (4.7.8) не выполнено и

$$\Delta \widehat{t}_p^{l,s} = \max_{j,\alpha} |\Delta \widehat{t}_j^{\alpha,s}| > \varepsilon_1. \quad (4.7.14)$$

Тогда решаем систему (4.6.5) при $\varepsilon_j^{p,s} \ll 1$. Обозначив приращение через

$\bar{\Delta}\bar{\Psi}^s(t_0)$, имеем

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha=1}^{2(r_j-1)} \Phi^{-1}(t_j^{\alpha,s}, t_0) B_j(t_j^{\alpha,s}) \hat{u}_j^p \{ [B_j(t_j^{\alpha,s})]^* A^*(t_j^{\alpha,s}) - \\ & - [\dot{B}_j(t_j^{\alpha,s})]^* \} [\Phi^{-1}(t_j^{\alpha,s}, t_0)]^* \Psi^s(t_0) \}^{-1} [B_j(t_j^{\alpha,s})]^* [\Phi^{-1}(t_j^{\alpha,s}, t_0)]^* \bar{\Delta}\bar{\Psi}^s(t_0) + \\ & + \sum_{j=1}^m \sum_{p=1}^{r_j} \int_{t_j^{2(p-1)}}^{t_j^{2p-1}} \Phi^{-1}(\tau, t_0) B_j(\tau) \xi_j^{p,s} \left[M_j \operatorname{sign} u_j^\Phi(t_0) (-1)^{p-1} - \right. \\ & \left. - \sum_{i=1}^n \hat{N}_{ij}^{p,s} x_i(t_0) \right] d\tau = 0. \end{aligned} \quad (4.7.15)$$

Подставляя найденное значение $\bar{\Delta}\bar{\Psi}^s(t_0)$ в (4.6.2), находим

$$\begin{aligned} \Delta t_j^\alpha &= \{ [B_j(t_j^{\alpha,s})]^* A^*(t_j^{\alpha,s}) - [\dot{B}_j(t_j^{\alpha,s})]^* \} [\Phi^{-1}(t_j^{\alpha,s}, t_0)]^* \Psi(t_0) \}^{-1} \times \\ & \times [B_j(t_j^{\alpha,s})]^* [\Phi^{-1}(t_j^{\alpha,s}, t_0)]^* \bar{\Delta}\bar{\Psi}^s(t_0), \\ & j = \overline{1, m}, \quad \alpha = \overline{1, 2(r_j-1)}. \end{aligned} \quad (4.7.16)$$

Проверяем выполнение условия

$$|\bar{\Delta}t_{\eta}^{\mu,s}| = \max_{\substack{j \in \{1, m\} \\ \alpha \in \{1, 2(r_j-1)\}}} |\Delta t_j^{\alpha,s}| \leq \varepsilon_1. \quad (4.7.17)$$

Если оно имеет место, то для максимального отклонения принимаем

$$\hat{\Delta}t_{\eta}^{\mu,s} = \frac{1}{2} \varepsilon_1 \operatorname{sign} \bar{\Delta}t_{\eta}^{\mu,s}, \quad (4.7.18)$$

а для остальных отклонений —

$$\hat{\Delta}t_j^{\alpha,s} = \frac{1}{2} \bar{\Delta}t_j^{\alpha,s} \left| \frac{\varepsilon_1}{\bar{\Delta}t_{\eta}^{\mu,s}} \right|, \quad (4.7.19)$$

$j = \overline{1, m}, \alpha = \overline{1, 2(r_j-1)}$, кроме $\alpha = \mu$ для $j = \eta$. Находим новые значения моментов переключений $t_j^{\alpha,s+1} = t_j^{\alpha,s} + \hat{\Delta}t_j^{\alpha,s}$ и переходим к шагу 2, если $t_j^{\alpha,s+1} < t_j^{\alpha+1,s+1}$ и $t_j^{\alpha,s+1} > 0$. Если некоторые $t_j^{\alpha,s+1} < 0$, то используем соотношение (4.7.9). Если $t_j^{\alpha,s+1} > t_j^{\alpha+1,s+1}$, то упорядочиваем нумерацию (переобозначаем) моментов переключений и переходим к шагу 2. При нарушении (4.7.17) уменьшаем на порядок значение $\xi_j^{p,s}$ в (4.7.15) и вновь вычисляем приращение $\bar{\Delta}\bar{\Psi}^s(t_0)$, решая (4.7.15).

ЛИТЕРАТУРА

1. Neustadt L. W. Synthesizing time optimal control systems // J. math. anal. and Appl.—1960.—V. 1, N 3-4.—P. 484—493.
2. Крылов И. А., Черноусько Ф. Л. О методе последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1962.—Т. 2, № 6.—С. 1132—1139.
3. Eaton J. O. An iterative solution to time optimal control // J. math. anal. and Appl.—1962.—V. 5, N 2.—P. 329—344.
4. Демьянов В. Ф. К построению оптимальной программы в линейной системе // Автоматика и телемеханика.—1964.—Т. 25, № 1.—С. 3—11.
5. Кирия Н. Е. К решению общей задачи линейного быстрогодействия // Автоматика и телемеханика.—1964.—Т. 25, № 1.—С. 16—22.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Об одном способе решения некоторых задач оптимального регулирования // Автоматика и телемеханика.—1964.—Т. 25, № 3.—С. 312—320.
7. Пшеничный Б. Н. Численный метод расчета оптимального по быстродействию управления для линейных систем // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1964.—Т. 4, № 1.—С. 52—60.

8. Knudsen H. K. An iterative procedure for computing time optimal controls // IEEE Trans. automat. control.—1964.— V. Ac-9, N 1.— P. 23—30.
9. Федоренко Р. П. Приближенное решение некоторых задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1964.— Т. 4, № 6.— С. 1045—1064.
10. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Построение последовательных приближений для некоторых задач оптимального управления // Автоматика и телемеханика.—1966.— Т. 27, № 2.— С. 5—17.
11. Дубовицкий А. Я., Рубцов В. А. Линейные быстродействия // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1968.— Т. 8, № 5.— С. 937—949.
12. Срочко В. А. Градиентный метод решения одного класса задач быстродействия // Тр. ун-та/Иркутский гос. ун-т.—1969.— С. 101—108.
13. Гиндес В. Б. Один метод последовательных приближений для решения линейных задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1970.— Т. 10, № 1.— С. 216—223.
14. Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем.— М.: Наука, 1971.— 424 с.
15. Бабунашвили Т. Г., Мачаидзе З. А., Харатшвили Г. Л., Цискаридзе К. Ш. Расчет линейных оптимальных по быстродействию систем // Тр. ин-та/Ин-т прикл. математики Тбилисского гос. ун-та.—1972.— Т. 3.— С. 207—238.
16. Васильев О. В., Тятюшкин А. И. К численному решению задач линейного быстродействия // Дифференциальные и интегральные уравнения. Вып. 2.— Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1973.— С. 57—69.
17. Полак Э. Численные методы оптимизации. Единый подход.— М.: Мир, 1974.— 376 с.
18. Баншков Е. А. Алгоритм решения задачи быстродействия по амплитуде и «мере» управления // Теория оптимальных процессов.— Киев, 1974.— С. 15—23.
19. Кириш Н. Е. Методы последовательных оценок в задачах оптимального управления.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975.— 160 с.
20. Левин А. Ю. Линейные оптимальные быстродействия и центрированные сечения // Вестн. Ярославского ун-та.—1975.— Вып. 12.— С. 87—93.
21. Miele A. Recent advances in gradient algorithms for optimal control problems // J. Optim. theory and appl.—1975.— V. 17, N 5-6.— P. 361—430.
22. Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Вычислительные и приближенные методы оптимального управления // Математический анализ.— М., 1977.— Т. 14.— С. 101—166.
23. Горлов В. М. Метод решения задачи оптимального быстродействия // Изв. АН СССР. Сер. техн. кибернетики.—1977.— № 3.— С. 176—181.
24. Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления.— М.: Наука, 1978.— 488 с.
25. Грачев Н. И., Евтушенко Ю. Г. Пакет программ для решения задач оптимального управления.— М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1978.
26. Тятюшкин А. И. Алгоритмы поиска оптимального управления в задаче линейного быстродействия // Алгоритмы и программы решения задач линейной алгебры и математического программирования.— Иркутск, 1979.— С. 115—128.
27. Васильев О. В., Тятюшкин А. И. Об одном методе решения задач оптимального управления, основанном на принципе максимума // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1981.— Т. 21, № 6.— С. 1376—1384.
28. Любушин А. А. О применении модификаций метода последовательных приближений для решения задач оптимального управления // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1982.— Т. 22, № 1.— С. 30—35.
29. Дюркович Е. Численный метод решения линейных задач быстродействия с оценкой точности // Докл. АН СССР.—1982.— Т. 265, № 4.— С. 793—797.
30. Попов В. С., Федоренко Р. П. О стандартной программе решения задач оптимального управления.— М., 1983.— (Препринт/АН СССР. Ин-т прикл. мат.; № 100).
31. Горнов А. Ю., Жолудев А. И., Тятюшкин А. И., Эринчек Н. М. Численное решение задач оптимального управления в пакетном режиме // Пакеты прикладных программ. Опыт разработки.— Новосибирск, 1985.— С. 3—17.
32. Александров В. М. Приближенное решение задач оптимального управления // Проблемы кибернетики.—1984.— Вып. 41.— С. 143—206.
33. Александров В. М. Квазиоптимальные процессы в автоматических системах // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук.—1975.— Вып. 3, № 13.— С. 125—133.
34. Alexandrov V. M. Approximate solution of optimal control problems // Lecture Notes in Control and Information Sciences.—1979.— V. 18.— P. 147—156.
35. Калман Р. Об общей теории систем управления // Труды I-го Конгресса ИФАК.— М., 1961.— С. 260—266.
36. La Salle J. P. Time optimal control systems // Proc. Nat. Ac. USA.—1959.— V. 45, N 4.— P. 573—577.
37. Математическая теория оптимальных процессов/Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.— М.: Наука, 1976.— 392 с.
38. Болтянский В. Г. Математические методы оптимального управления.— М.: Наука, 1969.— 408 с.
39. Попов В. М. Гиперустойчивость автоматических систем.— М.: Наука, 1970.— 453 с.