ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

В. А. БУЛАВСКИЙ

В статье под обратной связью понимается соответствие между значениями основных переменных или значениями функционалов, описывающих модель, с одной стороны, и линейными формами или двойственными переменными — с другой. Такое соответствие выступает в качестве исходных данных задачи и в зависимости от обстоятельств заменяет либо целевую функцию, либо функцию ценности в задаче многокритериальной оптимизации, либо наконец, штрафную функцию, если речь идет, скажем, о несовместной системе неравенств. При этом используется тот факт, что сами по себе упомянутые выше функции не столь существенны. Основную роль играют их субдифференциальные отображения, потенциальные в силу своего происхождения. Если от требования этой потенциальности отказаться, то получаются модели и более общие, и в определенной степени допускающие более естественную содержательную интерпретацию.

§ 1. ФУНКЦИЯ ВЫБОРА

Предположим, что выбраны выпуклое замкнутое множество $Z \subseteq \mathbf{R}^m$, выпуклое замкнутое множество Y линейных форм над $\mathbf{R}^m$ и множество $P \subset Z \times Y$. Для пар из декартова произведения $Z \times Y$ мы будем использовать обозначение (z, y), а значение формы y на векторе z обозначим через $[z, y]$. Множество P будем трактовать как соответствие из Z в Y и через $P(z)$ обозначим сечение соответствия P по элементу z, т. е.

$$P(z) = \{y \in Y\colon\ (z, y) \in P\}.$$

Тем самым определяется точечно-множественное отображение $z \to P(z)$, для которого сохраним обозначение P.

Определение. *Точку z_0 в некотором множестве $D \subset Z$ назовем предпочтительной на D, если существует линейная форма $y_0 \in P(z_0)$, для которой неравенство $[z - z_0, y_0] \geqslant 0$ выполняется при всех $z \in D$.*

Сформулируем следующие предположения.

(P1) Множество $P(z)$ при каждом $z \in Z$ является непустым выпуклым компактом.

(P2) Точечно-множественное отображение P полунепрерывно сверху.

Условий (P1) и (P2) достаточно для существования предпочтительной точки на любом выпуклом компакте D. Соответствующая теорема [1] является обобщением на случай точечно-множественного отображения результата Браудера [2]. Однако в общем случае предпочтительная точка может быть и не единственной. Чтобы избавиться от этого неудобства и получить множественно-точечную функцию выбора, нужно на соответствие P наложить дополнительное условие. В первой публикации автора [1] было использовано свойство строгой монотонности точечно-множественного отображения P. Хотя это свойство и является достаточным для единственности предпочтительной точки, оно не очень естественно в данной ситуации, так как зависит от нормировки линейных форм в множествах $P(z)$. В то же время в определение предпочтительной точки форма y_0 входит однородно, и, следовательно, ее нормировка несущественна. Поэтому ниже формулируется более слабое свойство, которое естественно назвать строгой квазимонотонностью.

(P3) Если $(z_0, y_0) \in P$, $(z_1, y_1) \in P$ и $z_0 \neq z_1$, то выполняется по крайней мере одно из неравенств $[z_0 - z_1, y_1] < 0$, $[z_1 - z_0, y_0] < 0$.

Отметим, что в теории потребительского выбора предположение, аналогичное свойству (P3), принято называть *слабой аксиомой выявленного предпочтения.*

Прежде чем перейти к формулировке и доказательству теоремы о существовании и единственности предпочтительной точки, приведем формулировки двух утверждений. Их доказательства можно найти, например, в книге Никайдо [3, с. 97, 100].

Лемма 1.1. *Пусть каждое $P(z)$ является непустым компактным множеством. Тогда если отображение P полунепрерывно сверху и множество D компактно, то множество*

$$P(D) = \bigcup_{z \in D} P(z) \tag{1.1}$$

также компактно.

Лемма 1.2. *Пусть D и V — непустые компактные выпуклые множества в $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^s$ соответственно. Пусть также M и N — замкнутые подмножества декартова произведения $D \times V$ такие, что сечения $M(z) = \{y \in V\colon (z, y) \in M\}$, $N(y) = \{z \in D\colon (z, y) \in N\}$ при каждом $z \in D$ и каждом $y \in V$ являются непустыми выпуклыми множествами. Тогда $M \cap N \neq \varnothing$.*

Теорема 1.1. *Допустим, что $D \subset Z$ — непустой выпуклый компакт и справедливы предположения* (P1) *и* (P2). *Тогда в множестве D существует предпочтительная точка. Если к тому же справедливо предположение* (P3), *то предпочтительная точка единственная.*

Доказательство. Обозначим через V выпуклую оболочку множества (1.1). Ввиду конечномерности пространства и компактности множества $P(D)$ множество V является выпуклым компактом. Кроме того, $V \neq \varnothing$ в силу предположения (P1) и непустоты множества D. Множество M определим как сужение соответствия P на произведение $D \times V$. В силу определения множества V при всех $z \in D$ оказывается $M(z) = P(z)$. Поэтому из предположения (P1) и (P2) следует замкнутость множества M.

При каждом $y \in V$ через $N(y)$ обозначим множество решений задачи

$$\min\{[z, y]\colon z \in D\}.$$

Поскольку D — непустой выпуклый компакт, то каждое из множеств $N(y)$ также непусто, выпукло и компактно, а множество $N = \{(z, y)\colon z \in N(y),\ y \in V\}$ замкнуто. Согласно лемме 1.2 существует пара $(z_0, y_0) \in M \cap N$. Принадлежность множеству M означает, что $y_0 \in P(z_0)$, а принадлежность множеству N — что $[z_0, y_0] \leqslant [z, y_0]$ при всех $z \in D$. Таким образом, z_0 является предпочтительной точкой на выпуклом компакте D.

Предположим теперь, что имеется еще одна пара $(z_1, y_1) \in M \cap N$, причем $z_1 \neq z_0$. Тогда одновременно выполняются неравенства $[z_0, y_0] \leqslant [z_1, y_0]$, $[z_1, y_1] \leqslant [z_0, y_1]$, что противоречит предположению (P3). Теорема доказана.

Если множество P является графиком субдифференциального отображения некоторой непрерывной выпуклой функции f, т. е. $P(z) = \partial f(z)$, то определение предпочтительной точки совпадает с признаком оптимальности для задачи

$$\min\{f(z)\colon z \in D\}.$$

Таким образом, введенное понятие естественно обобщает понятие предпочтения, вводимое путем задания функции полезности. Предположение (P3) в этом случае означает, что выпуклая функция f вдоль каждой прямой должна иметь не более одной точки минимума. Нетрудно проверить, что это эквивалентно строгой выпуклости множеств уровня и единственности точки глобального минимума (если она вообще существует).

Согласно теореме 1.1 соответствие P, удовлетворяющее предположениям (P1)—(P3), определяет функцию выбора, сопоставляющую каждому непустому выпуклому компакту $D \subset Z$ предпочтительную точку $p(D) \in D$.

Теорема 1.2. *Функция выбора p в предположениях* (P1)—(P3) *обладает следующими двумя свойствами:*

(а) *свойство наследования, т. е. если D_1 и D_2 — выпуклые компакты в Z, причем $D_1 \subset D_2$ и $p(D_2) \in D_1$, то $p(D_1) = p(D_2)$;*

(б) *непрерывность по Хаусдорфу.*

Доказательство. Свойство (а) непосредственно следует из определения предпочтительной точки. Проверим непрерывность функции p. Введем в пространстве $\mathbf{R}^m$ евклидову норму и для выпуклых компактов D_1 и D_2 определим расстояние Бляшке

$$d(D_1, D_2) = \min\{\lambda \geqslant 0:\ D_1 \subset D_2 + \lambda S,\ D_2 \subset D_1 + \lambda S\},$$

где через S обозначен единичный шар в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^m$. Проведем рассуждения от противного.

Предположим, что для некоторого выпуклого компакта $D \subset Z$ существуют число $\varepsilon > 0$ и последовательность выпуклых компактов $D_k \subset Z$, $k = 2, 3, \ldots$, удовлетворяющие соотношениям

$$\lim d(D_k, D) = 0, \quad \|p(D_k) - z_0\| \geqslant \varepsilon, \tag{1.2}$$

где $z_0 = p(D)$. Через $y_0 \in P(z_0)$ и $y_k \in P(p(D_k))$ обозначим линейные формы, участвующие в определении предпочтительных точек. Таким образом,

$$[z - p(D_k),\ y_k] \geqslant 0, \quad z \in D_k. \tag{1.3}$$

$$[z - z_0,\ y_0] \geqslant 0, \quad z \in D. \tag{1.4}$$

Положим $\delta = \max\{d(D_k, D):\ k = 2, 3, \ldots\}$. Тогда все точки $p(D_k)$ принадлежат компакту $D_0 = (D + \delta S) \cap Z$. Аналогично все линейные формы y_k принадлежат компакту

$$P(D_0) = \bigcup_{z \in D_0} P(z).$$

Поэтому можно считать, что существуют пределы $y_1 = \lim y_k$ и $z_1 = \lim p(D_k)$. Ввиду соотношений (1.2) $z_1 \in D$, $z_1 \neq z_0$. Кроме того $y_1 \in P(z_1)$ в силу полунепрерывности сверху точечно-множественного отображения P. Так как $z_0 \in D$, то из (1.3)

$$[z_0 - p(D_k),\ y_k] \geqslant -\|y_k\| d(D_k, D).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу, найдем, что $[z_0 - z_1,\ y_1] \geqslant 0$. С другой стороны, положив в (1.4) $z = z_1$, получим неравенство $[z_1 - z_0,\ y_0] \geqslant 0$, что противоречит предположению (P3). Теорема доказана.

В заключение этого параграфа отметим, что описанный аппарат функции выбора можно использовать вместо целевой функции в задаче выпуклого программирования. Именно, предположим, что множество D описывается системой

$$g_i(z) \leqslant \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, q, \quad z \in Z, \tag{1.5}$$

где g_i — непрерывные выпуклые функции. Предпочтительная точка $z_0 = p(D)$ может рассматриваться как решение задачи при ограничениях (1.5) и обобщенном целевом критерии P. Линейная форма $y_0 \in P(z_0)$ играет роль субградиента целевой фукнции в дифференциальном признаке оптимальности. При выполнении обычных условий регулярности необходимым и достаточным признаком решения такой задачи является наличие множителей Лагранжа λ_i, $i = 1, 2, \ldots, q$, удовлетворяющих условиям $\lambda_i \geqslant 0$, $(g_i(z_0) - \alpha_i)\lambda_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, q$, и линейных форм $y_0 \in P(z_0)$, $y_i \in \partial g_i(z_0)$, $i = 1, 2, \ldots, q$, при которых линейная форма $y_0 + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i y_i$ достигает минимума на Z в точке z_0. Через $\partial g_i(z_0)$, как обычно, обозначен субдифференциал функции g_i в точке z_0. Разумеется, стандартная задача выпуклого программирования с целевой функцией

g_0 вкладывается в эту схему: нужно в качестве соответствия P взять субдифференциальное отображение ∂g_0.

Выделим отдельно линейный случай. Предположим, что $Z=\mathbf{R}_+^m$, функции g_i линейные, а отображение P является аффинным отображением, т. е. $P(z)=Bz-c$, где B — некоторая квадратная матрица, а c — вектор из $\mathbf{R}^m$. Вместо системы (1.5) имеется тогда система вида

$$Az\leqslant a, \quad z\geqslant 0 \tag{1.6}$$

с матрицей A размеров $q\times m$. Если множители Лагранжа организовать в вектор λ, то признак оптимальности превратится в условия

$$\lambda\geqslant 0, \ \lambda^T(a-Az)=0, \tag{1.7}$$

$$Bz-c+A^T\lambda\geqslant 0, \ z^T(Bz-c+A^T\lambda)=0. \tag{1.8}$$

Соотношения (1.6)—(1.8) образуют специального вида линейную задачу о дополнительности [4—6]

$$Mw\geqslant b, \ w\geqslant 0, \ w^T(Mw-b)=0, \tag{1.9}$$

где применены обозначения

$$M=\begin{bmatrix} B & A^T \\ -A & 0\end{bmatrix}, \quad b=\begin{bmatrix} c \\ -a\end{bmatrix}, \quad w=\begin{bmatrix} z \\ \lambda\end{bmatrix}.$$

Отметим, что для справедливости предположения (Р3) в линейном случае достаточно положительной определенности матрицы B без ее симметрии. При симметричной же матрице B полученная задача эквивалентна задаче квадратичного программирования.

§ 2. ЗАДАЧА МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Предположим, что в пространстве $\mathbf{R}^n$ выбраны выпуклое замкнутое множество X, а также совокупность выпуклых непрерывных функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$, которые в данном параграфе будут трактоваться как критерии, подлежащие минимизации. Эти критерии удобно собрать в единую функцию F: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ и рассматриваемую задачу сформулировать в виде

$$\min\{F(x):\ x\in X\}. \tag{2.1}$$

Для более или менее однозначного решения задача (2.1) обычно требует дополнительной расшифровки. Это достигается путем введения в пространстве значений функции F отношения предпочтения, функции ценности или каким-либо иным способом [7, 8]. В этом параграфе в качестве средства скаляризации задачи (2.1) используется снова соответствие P, введенное выше при определении функции выбора.

Предположим, что множество X является выпуклым компактом, и обозначим через D выпуклую оболочку его образа $F(X)$. В качестве Z можно взять любое выпуклое замкнутое множество в $\mathbf{R}^m$, содержащее $F(X)$, а в качестве Y — конус положительных линейных форм над $\mathbf{R}^m$. Выберем также некоторое соответствие P, удовлетворяющее предположениям (Р1)—(Р3). В силу компактности множества X и непрерывности отображения F множество $F(X)$ также компактно, а ввиду конечномерности пространства его выпуклая оболочка D является выпуклым компактом. Согласно теореме 1.1 в D существуют единственная точка $z_0=p(D)$ и положительная линейная форма $y_0\in P(z_0)$, для которых

$$[z-z_0,\ y_0]\geqslant 0, \ z\in D. \tag{2.2}$$

Покажем, что на самом деле $z_0\in F(X)$. Действительно, пусть

$$z_0=\sum_{k=1}^{m+1}\alpha_kF(x_k), \quad \sum_{k=1}^{m+1}\alpha_k=1,$$

$\alpha_k \geqslant 0$, $x_k \in X$, $k = 1, 2, \ldots, m+1$. Положим

$$x = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k x_k, \quad z_1 = F(x).$$

В силу выпуклости множества X точка z_1 принадлежит множеству $F(X)$, а так как каждая из функций f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, выпукла, то покомпонентно имеет место неравенство $z_1 \leqslant z_0$. Форма $y_1 \in P(z_1)$ положительна, поэтому $[z_0 - z_1, y_1] \geqslant 0$. Если бы оказалось, что $z_1 \neq z_0$, то ввиду предположения (P3) выполнялось бы неравенство $[z_1 - z_0, y_0] < 0$, что противоречит (2.2), поскольку $z_1 \in F(X) \subset D$. Следовательно $z_1 = z_0$, т. е. $z_0 \in F(X)$. Более того, в множестве D, и, следовательно, в множестве $F(X)$ не существует точки z_1, отличной от z_0 и удовлетворяющей неравенству $z_1 \leqslant z_0$. Тем самым доказана следующая

Теорема 2.1. *Пусть в задаче многокритериальной оптимизации* (2.1) *множество X является выпуклым компактом в $\mathbf{R}^n$, а функция F: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ непрерывна и покомпонентно выпукла. Пусть также соответствие P удовлетворяет предположениям* (P1)—(P3). *Тогда существуют единственная точка $z_0 \in F(X)$ и положительная линейная форма $y_0 \in P(z_0)$, удовлетворяющие условиям*

(а) $[F(x) - z_0, y_0] \geqslant 0$, $x \in X$;

(б) *точка z_0 принадлежит границе Парето множества $F(X)$.*

Сделаем одно замечание. Поскольку все формы $u \in P(w)$ при $w \in Z$ положительные, то при $z \geqslant w$ выполняется неравенство $[z - w, u] \geqslant 0$. В силу предположения (P3) тогда $[w - z, y] < 0$ для $y \in P(z)$. Но если $Z = \mathbf{R}^m$, то за счет выбора w разность $w - z$ может принимать любые значения из отрицательного ортанта. Поэтому форма y должна быть строго положительной. Таким образом, все линейные формы, участвующие в соответствии P, строго положительны. В частности, строго положительна форма y_0 из доказанной теоремы. Ее компоненты играют роль весовых множителей для частных скалярных критериев f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Точка z_0 тогда получается минимизацией взвешенного критерия $\varphi(x) = [F(x), y_0]$ на множестве X. Однако такая минимизация не дает, вообще говоря, однозначного решения даже в пространстве критериев. Таким образом, применение соответствия P осуществляет более тонкий выбор решения.

Если $Z = \mathbf{R}^m_+$, т. е. критерии могут принимать только неотрицательные значения, то рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что предположение (P3) обеспечивает выполнение следующего условия: при всяком $Z \in \mathbf{R}^m_+$ и $y \in P(z)$ положительная форма y имеет строго положительные компоненты, соответствующие строго положительным компонентам вектора z. Это обстоятельство имеет ясную содержательную трактовку. Нулевые значения критериев f_i в данной ситуации являются идеальными. Если компоненты формы y рассматривать как локальные (в положении z) оценки достигнутого состояния, то они оказываются строго положительными для тех факторов, для которых идеальное значение не достигнуто.

В качестве примера снова рассмотрим линейный случай. Пусть множество X описывается системой

$$Ax \leqslant a, \quad x \geqslant 0 \tag{2.3}$$

с матрицей A размеров $q \times n$, отображение P задается формулой $P(z) = Bz - c$ при положительно определенной квадратной матрице B порядка m, а критерии линейные и задаются матрицей F размеров $m \times n$, так что $F(x) \equiv Fx$. В рассматриваемом случае $z_0 = Fx_0$ и $y_0 = BFx_0 - c$, где x_0 — соответствующая точка среди решений системы (2.3). При этом для всех решений системы (2.3) должно выполняться неравенство из определения предпочтительной точки $(BFx_0 - c)^T (Fx - Fx_0) \geqslant 0$. Согласно теореме Минковского — Фаркаша это эквивалентно существованию вектора λ_0, удовлетворяющего условиям

$$\lambda_0 \geqslant 0,\ A^T\lambda_0 + F^T(BFx_0 - c) \geqslant 0, \tag{2.4}$$

$$\lambda_0^T a + (BFx_0 - c)^T Fx_0 \leqslant 0. \tag{2.5}$$

Поскольку x_0 удовлетворяет системе (2.3), то умножив второе неравенство в (2.4) слева на x_0^T, найдем, что фактически в (2.5) достигается равенство, причем $\lambda_0^T Ax_0 = \lambda_0^T a$. Следовательно, пара (x_0, λ_0) снова является решением линейной задачи о дополнительности (1.9), если в данном случае принять

$$M = \begin{bmatrix} F^TBF & A^T \\ -A & 0 \end{bmatrix},\quad b = \begin{bmatrix} F^Tc \\ -a \end{bmatrix},\quad w = \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Теперь несколько обобщим результат теоремы 2.1. Чтобы сделать это, утверждение (а) теоремы заменим эквивалентным линеаризированным утверждением. Именно, в точке x_0, для которой $z_0 = F(x_0)$, должны существовать субградиенты $h_i \in \partial f_i(x_0)$, при которых линейная форма

$$h = \sum_{i=1}^{m} \eta_0^i h_i \tag{2.6}$$

достигает минимума на множестве X в точке x_0. Здесь через η_0^i, $i = 1, 2, \ldots, m$, обозначены компоненты формы y_0. Единственность точки x_0 уже, конечно, не утверждается. Для сокращения обозначений линейные формы h_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ соберем в линейный оператор (матрицу) H: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, являющийся субградиентом в точке x_0 отображения F. Равенство (2.6) тогда запишется в виде $h = H^T y_0$. Направление, в котором может быть сделано обобщение, теперь довольно очевидно.

Обозначим через W совокупность линейных форм над $\mathbf{R}^n$ и для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ зададим вместо скалярного критерия f_i точечно-множественное отображение Q_i: $X \to 2^W$, обладающее свойствами (P1) и (P2). Для скалярных критериев f_i это были бы их субдифференциальные отображения. В общем случае эти отображения заменяют скалярные критерии в том же смысле, как это описано в конце первого параграфа. Отображения Q_i соберем в одно отображение Q: $X \to 2^L$, где L — пространство линейных операторов из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$. Для этого положим

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{m} Q_i(x). \tag{2.7}$$

Отображение Q также обладает свойствами (P1) и (P2). Через Y снова обозначим конус положительных линейных форм над $\mathbf{R}^m$ и введем в рассмотрение отображение P: $X \to 2^Y$ со свойствами (P1) и (P2).

Определение. *Точку $x_0 \in X$ будем называть решением задачи с обобщенным векторным критерием Q и скаляризующим отображением P, если существуют $H \in Q(x_0)$ и $y_0 \in P(x_0)$, при которых неравенство $[x - x_0, H'y_0] \geqslant 0$ выполняется для всех $x \in X$. Через H' обозначен сопряженный к H оператор.*

Доказательству теоремы о существовании решения описанной задачи предпошлем простую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть V_i, $i = 1, 2, \ldots, m$,— выпуклые множества в $\mathbf{R}^n$ и S — выпуклое множество в $\mathbf{R}_+^m$. Тогда множество*

$$V = \left\{ \sum_{i=1}^{m} s_i v_i :\ v_i \in V_i,\ (s_1, s_2, \ldots, s_m) \in S \right\}$$

также выпуклое.

Доказательство. Пусть $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m) \in S$, $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m) \in S$, $v_i \in V_i$, $w_i \in V_i$ и $\lambda \in (0, 1)$. Положим $s_i = \lambda\sigma_i + (1 - \lambda)\tau_i$ и $\alpha_i = \lambda\sigma_i/s_i$, если $s_i > 0$. Если же $s_i = 0$, то примем $\alpha_i = 0$. Тогда $(s_1, s_2, \ldots, s_m) \in S$,

$\alpha_i v_i + (1-\alpha_i) w_i \in V_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ и

$$\lambda \sum_{i=1}^{m} \sigma_i v_i + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{m} \tau_i w_i = \sum_{i=1}^{m} s_i (\alpha_i v_i + (1-\alpha_i) w_i).$$

Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Пусть множество X — выпуклый компакт в $\mathbf{R}^n$, а отображения P и Q_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, описанные выше, обладают свойствами* (P1) *и* (P2). *Тогда существует решение задачи с критерием Q и скаляризующим отображением P.*

Доказательство. При каждом $x \in X$ образуем множество

$$T(x) = \{H'y\colon\ H \in Q(x),\ y \in P(x)\}.$$

В силу непустоты и компактности множеств $Q(x)$ и $P(x)$ множество $T(x)$ также непусто и компактно. Кроме того, отбражение T полунепрерывно сверху. Действительно, в силу компактности X объединения $\mathrm{P}(X)$ и $\mathrm{Q}(X)$, построенные аналогично формуле (1.1), также компактны. Поэтому если $H_k \in Q(x_k)$, $y_k \in P(x_k)$ и $H'_k y_k \to h$, то для предельных точек H и y последовательностей $\{H_k\}$ и $\{y_k\}$ получим, что $h = H'y$. Таким образом, множество $T(X)$ замкнуто и в силу своей ограниченности компактно. Если кроме того $x_k \to x$, то ввиду полунепрерывности отображений P и Q имеем, что $y \in P(x)$ и $H \in Q(x)$, т. е. $h \in T(x)$, и полунепрерывность отображения T следует из компактности $T(X)$. Для проверки выпуклости $T(X)$ заметим, что

$$T(x) = \left\{\sum_{i=1}^{m} \eta_i h_i\colon\ h_i \in Q_i(x),\quad (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m) \in P(x)\right\},$$

и воспользуемся только что доказанной леммой.

Мы установили, что отображение T обладает свойствами (P1) и (P2). Согласно теореме 1.1 в множестве X существует предпочтительная по отображению T точка x_0, которая и является искомым решением. Теорема доказана.

Нетрудно заметить, что если бы отображения P и Q_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, были субдифференциальными отображениями некоторых выпуклых функций, то отображение T, построенное в доказательстве теоремы 2.2, оказалось бы субдифференциальным отображением их суперпозиции.

§ 3. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим систему

$$G(x) \leqslant 0, \quad x \in X, \tag{3.1}$$

где X — непустое выпуклое замкнутое множество в $\mathbf{R}^n$, а G — непрерывное отображение из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$, выпуклое покомпонентно. В основном нас будет интересовать случай несовместной системы (3.1), для которого предлагается схема определения обобщенного решения, основанная на использовании соответствия P. В качестве множества z возьмем положительный ортант в $\mathbf{R}^m$, а в качестве множества Y — конус положительных линейных форм, т. е. тоже положительный ортант $\mathbf{R}^m_+$. Через $G(x)^+$ будем обозначать положительную часть вектора $G(x)$.

Определение. *Точку $x_0 \in X$ и (положительную) линейную форму y_0 над $\mathbf{R}^m$ будем называть компромиссной парой для системы* (3.1), *если $y_0 \in P(z_0)$ при $z_0 = G(x_0)^+$ и точка x_0 является решением задачи*

$$\min\{[G(x)^+,\ y_0]\colon\ x \in X\}.$$

Точку x_0 при этом будем называть обобщенным решением системы (3.1), *а линейную форму y_0 — оценками неравенств.*

Теорема 3.1. *Пусть система* (3.1) *совместна, справедливо предположение* (P3) *и* $P(0) = \{0\}$. *Тогда обобщенными решениями системы* (3.1) *являются ее истинные решения и только они, а оценки неравенств равны нулю.*

Доказательство. Если x_0 — решение системы (3.1), то $z_0 = G(x_0)^+ = 0$, и положив $y_0 = 0$, получим, что пара $(x_0, 0)$ является компромиссной. Пусть теперь наоборот, (x, y) — некоторая компромиссная пара, а x_0 — решение системы (3.1). Поскольку $x_0 \in X$, то

$$0 = [G(x_0)^+, y] \geqslant [G(x)^+, y] = [z, y]. \tag{3.2}$$

Так как $(0, 0) \in P$ и $[z - 0, 0] = 0$, то в силу предположения (Р3) $[0 - z, y] < 0$, если только $z \neq 0$. Таким образом, $[z, y] > 0$ при $z \neq 0$, что противоречит (3.2). Следовательно, $z = G(x)^+ = 0$, и так как $P(0) = \{0\}$, то $y = 0$. Теорема доказана.

Как отмечено в доказательстве, предположение (Р3) и условие $P(0) = \{0\}$ обеспечивают неравенство $[z, y] > 0$ при $z \neq 0$ и $y \in P(z)$. Однако для доказательства теоремы о существовании компромиссной пары этого оказывается недостаточно. Поэтому сформулируем дополнительно предположение о коэрцитивности.

(Р4) Для всякого $\gamma > 0$ найдется $\delta(\gamma)$ такое, что $[z, y] \geqslant \gamma \|y\|$ при $\|z\| > \delta(\gamma)$ и $y \in P(z)$.

Теорема 3.2. *Пусть при некотором $v \in X$ система*

$$G(x) \leqslant G(v), \quad x \in X \tag{3.3}$$

имеет компактное множество решений и выполнены предположения (Р1)—(Р4). *Тогда существует обобщенное решение системы* (3.1).

Доказательство. Обозначим через e вектор в $\mathbf{R}^m$, все компоненты которого равны единице, и выберем α_0 так, чтобы выполнялось неравенство $G(v) \leqslant \alpha_0 e$. Положим

$$X_\alpha = \{x \in X\colon\ G(x) \leqslant \alpha e\}. \tag{3.4}$$

Покажем, что при $\alpha \geqslant \alpha_0$ множество X_α являются непустыми выпуклыми компактами. Проверки требует лишь ограниченность этих множеств. Предположим, что в множестве (3.4) содержится последовательность $\{x_k\}$ при $\|x_k\| \to \infty$. Можно считать, что существует $\lim x_k/\|x_k\| = \xi$. При любом $\lambda > 0$ и достаточно большом k число $\lambda_k = \lambda/\|x_k\|$ принадлежит промежутку $[0, 1]$, так что последовательность точек $v_k = (1 - \lambda_k) v + \lambda_k x_k$ лежит в X вместе со своим пределом $v + \lambda\xi$. С другой стороны, $G(v_k) \leqslant (1 - \lambda_k) G(v) + \lambda_k G(x_k)$ в силу выпуклости отображения G. Переходя здесь к пределу, получим, что $G(v + \lambda\xi) \leqslant G(v)$, т. е. при всех $\lambda > 0$ точка $v + \lambda\xi$ удовлетворяет системе (3.3), что противоречит условиям теоремы. Таким образом, все множества (3.4) компактны.

Пусть $F(x) = G(x)^+$. Согласно теореме 2.1 для каждого $\alpha \geqslant \alpha_0$ существуют $z_\alpha = F(x_\alpha)$ при некоторых $x_\alpha \in X_\alpha$ и $y_\alpha \in P(z_\alpha)$ такие, что

$$[F(x) - z_\alpha, y_\alpha] \geqslant 0, \quad x \in X_\alpha. \tag{3.5}$$

Если хоть для одного α неравенства (3.5) выполнены при всех $x \in X$, то соответствующее x_α является обобщенным решением с оценками y_α. Предположим, что это не так, т. е. для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ найдется $w_\alpha \in X$, при котором $[F(w_\alpha) - z_\alpha, y_\alpha] < 0$. Если бы для $x = x_\alpha$ неравенства в (3.4) выполнялись как строгие, то функция $\varphi(\lambda) = [F(\lambda w_\alpha + (1 - \lambda) x_\alpha), y_\alpha]$, $\lambda \in [0, 1]$, для некоторого (достаточно малого) $\lambda_0 \in (0, 1)$ удовлетворяла бы неравенствам $\varphi(\lambda_0) \geqslant \varphi(0) > \varphi(1)$, что противоречит ее выпуклости. Таким образом, хоть одна из компонент вектора $Z_\alpha = G(x_\alpha)^+$ совпадает с α и $\|z_\alpha\| \to \infty$ при $\alpha \to +\infty$. С другой стороны, $v \in X_\alpha$ при всех $\alpha \geqslant \alpha_0$ и, следовательно, при всех α

$$[z_\alpha, y_\alpha] \leqslant [F(v), y_\alpha] \leqslant \|F(v)\| \|y_\alpha\|.$$

Полученное противоречие с предположением (Р4) доказывает теорему.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Булавский В. А.** Оценки факторов и проблема выбора // Оптимизация.— 1982.— Вып. 28.— С. 70—73.
2. **Browder F. E.** The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces // Math. Ann.— 1968.— V. 177.— P. 283—301.
3. **Никайдо X.** Выпуклые структуры и математическая экономика.— М.: Мир, 1972.— 517 с.
4. **Eaves B. C.** The linear complementarity problem // Manag. Sci.— 1971.— V. 17.— P. 612—634.
5. **Булавский В. А.** Квазилинейное программирование и векторная оптимизация // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 257, № 4.— С. 788—791.
6. **Булавский В. А.** Обобщенные решения и регуляризация систем неравенств // Труды Ин-та математики/АН СССР. Сиб. отд-ние.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 161—174.
7. **Современное состояние теории исследования операций**/Под ред. Н. Н. Моисеева.— М.: Наука, 1979.— 464 с.
8. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.— М.: Наука, 1982.— 256 с.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЯДЕР И ОБОБЩЕННЫХ НМ-РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

В. А. ВАСИЛЬЕВ

В работе, состоящей из трех частей, анализируется взаимосвязь несимметричных аналогов вектора Шепли, недоминируемых дележей и обобщенных решений Неймана — Моргенштерна. Главное внимание уделяется вопросам достижимости ядер и их характеризации в терминах H-дележей и механизмов распределения равновесного типа.

В первой части излагается единый функционально-аналитический подход к исследованию недоминируемых дележей и некоторых аналогов вектора Шепли для кооперативных игр с побочными платежами [1—3]. В рамках этого подхода устанавливается строение ядер вполне положительных и выпуклых игр, и при самых общих предположениях доказывается внешняя устойчивость множества индивидуально-рациональных H-дележей. Так же как и в [4], основные результаты базируются на интегральном представлении опорной функции ядра выпуклой игры.

Вторая часть посвящена выяснению условий, обеспечивающих стабилизацию процессов последовательного улучшения доминируемых дележей. Здесь же рассматриваются некоторые смежные вопросы, касающиеся существования и классификации обобщенных НМ-решений — реализаций принципа оптимальности, объединяющего идеи динамики и устойчивости. В целом содержание второй части концентрируется вокруг задач, связанных с построением динамических систем, финальные множества которых глобально устойчивы и совпадают с ядрами рассматриваемых игр, а переходные функции генерируют лишь доминирующие дележи этих игр.

В третьей, заключительной, части проводится теоретико-игровой анализ вполне договорных состояний в моделях экономического обмена [5, 6]. Устанавливаются достаточно простые условия, гарантирующие совпадение вполне договорных ядер и равновесных состояний, изучаются некоторые свойства структуры блокирования, порождаемого разрывами эквивалентных систем договоров. Основу предлагаемого подхода составляет редукция исходного блокирования к более простому отношению доминирования в соответствующих кооперативных играх без побочных платежей.