ЛИТЕРАТУРА

1. **Булавский В. А.** Оценки факторов и проблема выбора // Оптимизация.— 1982.— Вып. 28.— С. 70—73.
2. **Browder F. E.** The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces // Math. Ann.— 1968.— V. 177.— P. 283—301.
3. **Никайдо Х.** Выпуклые структуры и математическая экономика.— М.: Мир, 1972.— 517 с.
4. **Eaves B. C.** The linear complementarity problem // Manag. Sci.— 1971.— V. 17.— P. 612—634.
5. **Булавский В. А.** Квазилинейное программирование и векторная оптимизация // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 257, № 4.— С. 788—791.
6. **Булавский В. А.** Обобщенные решения и регуляризация систем неравенств // Труды Ин-та математики/АН СССР. Сиб. отд-ние.— 1985.— Т. 6: Вычислительные методы линейной алгебры.— С. 161—174.
7. **Современное состояние теории исследования операций**/Под ред. Н. Н. Моисеева.— М.: Наука, 1979.— 464 с.
8. **Подиновский В. В., Ногин В. Д.** Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.— М.: Наука, 1982.— 256 с.

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЯДЕР И ОБОБЩЕННЫХ НМ-РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

В. А. ВАСИЛЬЕВ

В работе, состоящей из трех частей, анализируется взаимосвязь несимметричных аналогов вектора Шепли, недоминируемых дележей и обобщенных решений Неймана — Моргенштерна. Главное внимание уделяется вопросам достижимости ядер и их характеризации в терминах *Н*-дележей и механизмов распределения равновесного типа.

В первой части излагается единый функционально-аналитический подход к исследованию недоминируемых дележей и некоторых аналогов вектора Шепли для кооперативных игр с побочными платежами [1—3]. В рамках этого подхода устанавливается строение ядер вполне положительных и выпуклых игр, и при самых общих предположениях доказывается внешняя устойчивость множества индивидуально-рациональных *Н*-дележей. Так же как и в [4], основные результаты базируются на интегральном представлении опорной функции ядра выпуклой игры.

Вторая часть посвящена выяснению условий, обеспечивающих стабилизацию процессов последовательного улучшения доминируемых дележей. Здесь же рассматриваются некоторые смежные вопросы, касающиеся существования и классификации обобщенных НМ-решений — реализаций принципа оптимальности, объединяющего идеи динамики и устойчивости. В целом содержание второй части концентрируется вокруг задач, связанных с построением динамических систем, финальные множества которых глобально устойчивы и совпадают с ядрами рассматриваемых игр, а переходные функции генерируют лишь доминирующие дележи этих игр.

В третьей, заключительной, части проводится теоретико-игровой анализ вполне договорных состояний в моделях экономического обмена [5, 6]. Устанавливаются достаточно простые условия, гарантирующие совпадение вполне договорных ядер и равновесных состояний, изучаются некоторые свойства структуры блокирования, порождаемого разрывами эквивалентных систем договоров. Основу предлагаемого подхода составляет редукция исходного блокирования к более простому отношению доминирования в соответствующих кооперативных играх без побочных платежей.

§ 1. H-ДЕЛЕЖИ И ЯДРА КООПЕРАТИВНЫХ ИГР С ПОБОЧНЫМИ ПЛАТЕЖАМИ

Кооперативная игра n лиц с побочными платежами определяется вещественнозначной характеристической функцией v: $2^N \to \mathbf{R}$, где в соответствии с установившейся терминологией [1] элементы множества $N = \{1, \ldots, n\}$ называют *игроками*, подмножества $S \subseteq N$ — *коалициями*, а величины $v(S)$ интерпретируются как *максимальные гарантированные доходы* этих коалиций. Через $I(v)$ обозначается множество индивидуально-рациональных дележей игры v:

$$I(v) = \{x \in \mathbf{R}^N | x(N) = v(N),\ x_i \geqslant v(\{i\}),\ i \in N\},$$

где, как и всюду далее, $x(S) = \sum_S x_i$, $S \subseteq N$. Говорят, что *дележ* $x \in I(v)$ *доминируется дележом* $y \in I(v)$, если существует коалиция $S \subseteq N$ такая, что: (а) $x_i < y_i$ для всех $i \in S$, (б) $y(S) \leqslant v(S)$. Введенное отношение доминирования на $I(v)$ будем обозначать через α_v, а отвечающее ему множество максимальных элементов — через $C(\alpha_v)$. Напомним, что множество $C(\alpha_v)$ называется *ядром кооперативной игры* v.

Целью настоящего параграфа является характеризация ядер в терминах несимметричных аналогов вектора Шепли. Отметим сразу же, что понятие оптимальности, отвечающее вектору Шепли, имеет принципиально иную природу, нежели коалиционная устойчивость, лежащая в основе определения ядра. Тем не менее упомянутая характеризация оказывается возможной в достаточно широком классе кооперативных игр с побочными платежами.

1.1. Всюду в этом параграфе множество кооперативных игр n лиц с побочными платежами отождествляется с функциональным пространством $V = V(N)$ отображений v: $2^N \to \mathbf{R}$, удовлетворяющих единственному ограничению: $v(\varnothing) = 0$. Пусть v — произвольная кооперативная игра (КИ) из V. Определим величины v_ω из системы уравнений

$$v(S) = \sum_{\omega \subseteq N, \varnothing} v_\omega, \quad S \subseteq N. \tag{1.1}$$

Напомним [2—4, 7], что *вектором Шепли* КИ v называется вектор $\Phi^0(v) \in \mathbf{R}^N$, компоненты которого определяются по формуле

$$\Phi^0(v)_i = \sum_{\omega \in \sigma_i} (1/|\omega|)\, v_\omega, \tag{1.2}$$

где, как и всюду далее, $|\omega|$ — число элементов конечного множества ω, а $\sigma_i = \{S \subseteq N | i \in S\}$. Величины v_ω трактуются как прибыль, возникающая в результате образования союза игроков ω, а формула (1.1) — как совпадение максимального гарантированного дохода $v(S)$ с суммарной прибылью, доставляемой S всеми потенциально осуществимыми в рамках этой коалиции союзами. Таким образом, вектор Шепли представляет из себя дележ, в котором прибыль v_ω, имеющаяся в распоряжении союза игроков ω, распределяется между ними поровну; при этом общий доход (выигрыш) $\Phi^0(v)_i$ игрока $i \in N$ есть суммарная прибыль, получаемая им от всех союзов, членом которых он является.

Следуя [4], введем конус вполне положительных кооперативных игр с побочными платежами:

$$V_+ = \{v \in V | v_\omega \geqslant 0,\ \omega \subseteq N\}.$$

Обозначим через $\mathscr{H}$ семейство всех линейных операторов Φ: $V \to \mathbf{R}^N$, удовлетворяющих условиям

$$\Phi(V_+) \subseteq \mathbf{R}_+^N, \tag{1.3}$$

$$\Phi(v)(T) = v(N),\ v \in V,\ T \in \operatorname{Supp} v, \tag{1.4}$$

где $\operatorname{Supp} v = \{T \subseteq N | v(S \cap T) = v(S),\ S \subseteq N\}$. Нетрудно проверить, что линейный оператор Φ^0, определяемый формулой (1.2), принадлежит множеству $\mathscr{H}$ и удовлетворяет условию симметричности

$$\Phi^0(\pi \circ v) = \pi \circ \Phi^0(v), \quad v \in V, \quad \pi \in \Pi, \tag{1.5}$$

где $\Pi = \Pi(N)$ совокупность всех перестановок (взаимно-однозначных отображений) N, а $\pi \circ v(S) = v(\pi(S))$, $\pi \in \Pi$. Более того, свойства (1.3)—(1.5) дают исчерпывающее описание Φ^0 (причем не только для конечномерного случая, но при надлежащих уточнениях и для бесконечных регулярных игр [8]).

В силу сказанного операторы семейства $\mathscr{H} \setminus \{\Phi^0\}$ трактуются как несимметричные аналоги оператора Φ^0, а вводимые с их помощью H-дележи — как несимметричные аналоги вектора Шепли.

Определение 1.1 [4]. *H-дележами КИ v будем называть элементы множества $A(v) = \{\Phi(v) \mid \Phi \in \mathscr{H}\}$.*

Положим

$$\mathscr{P} = \left\{ [p_{i,\omega}]_{i \in \omega}^{\omega \subseteq N} \,\middle|\, p_{i,\omega} \geqslant 0, \ \sum_{i \in \omega} p_{i,\omega} = 1, \ \omega \subseteq N \right\}$$

и для каждого $p = [p_{i,\omega}] \in \mathscr{P}$ определим Φ_p: $V \to \mathbf{R}^N$ по формуле

$$\Phi_p(v)_i = \sum_{\omega \in \sigma_i} p_{i,\omega} v_\omega, \quad i \in N, \quad v \in V.$$

Справедлива следующая теорема представления.

Теорема 1.1. [8]. *Оператор Φ принадлежит $\mathscr{H}$ тогда и только тогда, когда существует $p \in \mathscr{P}$ такой, что $\Phi = \Phi_p$.*

Замечание 1.1. Соответствующий аналог имеет место и для бесконечных регулярных игр на метрическом компакте [8].

Из теоремы 1.1 вытекает, что для формирования H-дележей игры v используется тот же механизм распределения, что и для $\Phi^0(v)$, с той лишь разницей что участники i союзов ω получают долю $p_{i,\omega}$ прибыли v_ω, не обязательно равную $p^0_{i,\omega} = 1/|\omega|$. Элементы $p \in \mathscr{P}$ определяют некоторые конкретные реализации этого механизма, а множество $A(v)$ — все возможные исходы таких реализаций.

1.2. Переходя к описанию многогранников $A(v)$ в терминах линейных неравенств, напомним, что *с-ядром* КИ v называется множество

$$C(v) = \{x \in I(v) \mid x(S) \geqslant v(S), \ S \subseteq N\}.$$

Ясно, что $C(v) \subseteq C(\alpha_v)$ для всех $v \in V$. При этом совпадение гарантируется лишь в том случае, когда v удовлетворяет условию

$$v(N) \geqslant v(S) + \sum_{N \setminus S} v(\{i\}), \quad S \subseteq N. \tag{1.6}$$

Ниже устанавливается, что множество H-дележей игры v представляет собой c-ядро некоторой ассоциированной с v кооперативной игры v_H.

Введем некоторые понятия и обозначения, необходимые для построения v_H. С помощью конуса V_+ определим отношение полуупорядоченности $\leqslant_\circ$ в пространстве V:

$$v \leqslant_\circ u \Leftrightarrow u - v \in V_+.$$

Как обычно, функции $v^+ = v \vee \mathbf{0}$, $v^- = -v \vee \mathbf{0}$, $|v| = -v \vee v$ будем называть *положительной*, *отрицательной* и *полной вариацией* v ($\vee$ — знак супремума в полуупорядоченном пространстве $(V, \leqslant_\circ)$).

В приведенных обозначениях v_H имеет вид

$$v_H(S) = v(S) - v_2^-(S, N \setminus S), \quad S \subseteq N,$$

где $v_2^-(S, N \setminus S) = v^-(N) - v^-(S) - v^-(N \setminus S)$.

Ключевую роль в доказательстве равенства

$$A(v) = C(v_H) \tag{1.7}$$

играет теорема о представлении опорной функции ядра выпуклой игры v через ее конечные разности v_ω. Напомним [3] что КИ v называется *выпуклой*, если для всех S, $T \subseteq N$ выполняется неравенство

$$v(S \cup T)+v(S \cap T) \geqslant v(S)+v(T).$$

Опорную функцию множества $C(\alpha_v)$ будем обозначать через h_v. По определению

$$h_v(q)=\sup\{q\cdot x | x \in C(\alpha_v)\},\ q \in \mathbf{R}^N$$

(здесь и далее $q\cdot x$ — скалярное произведение векторов q и x).

Теорема 1.2. *Для любой выпуклой игры v функция h_v имеет вид*

$$h_v(q)=\sum_{\omega\subseteq N} v_\omega \max\{q_i \mid i \in \omega\}. \tag{1.8}$$

Доказательство. Пусть q — произвольный элемент из $\mathbf{R}^N$. Обозначим через $r(q)$ число различных значений, которые принимают компоненты вектора q, и положим $T_0=\varnothing$, $T_k=\left\{i \in N \mid q_i \leqslant \min\limits_{j\in N\setminus T_{k-1}} q_j\right\}$, $k=1, \ldots, r(q)$.

Ясно, что выпуклые игры удовлетворяют соотношениям (1.6). Поэтому в рассматриваемой ситуации ядро игры v совпадает с ее c-ядром и, стало быть, является ограниченным выпуклым многогранником. Значит, существует дележ $x_q \in C(v)$, удовлетворяющий равенству $q\cdot x_q = h_v(q)$. Положим $\mathcal{T}_q=\{S \mid x_q(S)=v(S)\}$ и покажем, что $T_k \in \mathcal{T}_q$ для всех $k=1, \ldots, r(q)$. С этой целью заметим, что $\varnothing$, $N \in \mathcal{T}_q$, и кроме того, $\mathcal{T}_q$ замкнуто относительно операций пересечения и объединения. Действительно, пусть S_1, $S_2 \in \mathcal{T}_q$. Ввиду выпуклости v имеем $v(S_1\cup S_2)+v(S_1\cap S_2)\geqslant x_q(S_1)+x_q(S_2)$. Отсюда, учитывая включение $x_q \in C(v)$ и тождество $x_q(S_1\cup S_2)+x_q(S_1\cap S_2)=x_q(S_1)+x_q(S_2)$, получаем требуемое: $S_1\cap S_2$, $S_1\cap S_2 \in \mathcal{T}_q$. Зафиксируем теперь некоторое $k \leqslant r(q)$ и рассмотрим семейство $\mathcal{T}_q^k=\{S\in\mathcal{T}_q \mid T_k\subseteq S\}$. В силу замкнутости $\mathcal{T}_q$ относительно конечных пересечений семейство $\mathcal{T}_q^k$ содержит наименьший (по включению) элемент S_k. Покажем, что $S_k=T_k$. Поскольку $T_{r(q)}=N$, можно, не уменьшая общности, считать $k<r(q)$. Допустим, что $T_k \neq S_k$. Выберем произвольный элемент $i \in S_k\setminus T_k$ и для каждого $j \in T_k$ определим

$$\mathcal{T}_{ij}=\{S\subseteq N | i \notin S,\ j \in S\},\ \delta_{ij}=\min\{x_q(S)-v(S) | S \in \mathcal{T}_{ij}\}.$$

Возможны два случая: 1) $\forall j \in T_k$ $(\delta_{ij}=0)$; 2) $\exists j_0 \in T_k$ $(\delta_{ij_0}>0)$. Пусть реализуется первый из них. Выберем произвольные $S_{ij} \in \mathcal{T}_{ij}\cap\mathcal{T}_q$ $(j \in T_k)$ и положим $T_k^i=S_k \cap\left(\bigcup\limits_{j\in T_k} S_{ij}\right)$. Тогда ввиду замкнутости $\mathcal{T}_q$ имеем $T_k^i \in \mathcal{T}_q$. Однако по построению $T_k \subseteq T_k^i \subseteq S_k$ и $i \notin T_k^i$, что противоречит минимальности S_k. Рассмотрим второй случай. Выберем произвольно $\varepsilon \in (0, \delta_{ij_0})$ и положим $x_q^\varepsilon = x_q+\varepsilon e^i-\varepsilon e^{j_0}$, где e^i, e^{j_0} — соответствующие орты из $\mathbf{R}^N$. Из определения x_q^ε вытекает, что $x_q^\varepsilon(S)=x_q(S)$ при i, $j_0 \in S$, $x_q^\varepsilon(S)=x_q(S)+\varepsilon$ при $i \in S$, $j_0 \notin S$ и $x_q^\varepsilon(S)=x_q(S)-\varepsilon$ при $i \notin S$, $j_0 \in S$. Отсюда $x_q^\varepsilon \in C(v)$ согласно выбору ε. В то же время, поскольку $q_i>q_{j_0}$, справедливо неравенство $q\cdot x_q^\varepsilon > q\cdot x_q$, которое противоречит условию $q\cdot x_q=\sup\{q\cdot x | x \in C(v)\}$. Итак, $S_k=T_k$, что ввиду произвольности k и означает справедливость включений $T_k \in \mathcal{T}_q$, $k=1, \ldots, r(q)$.

Перейдем к доказательству формулы (1.8). Из условий $x_q(T_k)=v(T_k)$ и непосредственно определения множеств T_k получаем

$$q\cdot x_q=\sum_{k=1}^{r(q)} \bar{q}_k(v(T_k)-v(T_{k-1})),$$

где $\bar{q}_k = \max\{q_i | i \in T_k\}$. Далее, из определения величин v_ω имеем

$$v(T_k) - v(T_{k-1}) = \sum_{T_{k-1,k}} v_\omega,$$

где $T_{k-1,k} = \{\omega \subseteq T_k | \omega \cap (T_k \setminus T_{k-1}) \neq \emptyset\}$. Учитывая, что $\max\{q_i | i \in \omega\} = \bar{q}_k$ для всех $\omega \in T_{k-1,k}$, на основании вышеприведенных соотношений получаем

$$q \cdot x_q = \sum_{\omega \subseteq N} v_\omega \max\{q_i \mid i \in \omega\},$$

что и требовалось установить. В качестве простого следствия установленных соотношений $T_k \in \mathcal{T}_q$, $k = 1, \ldots, r(q)$, приведем известную теорему Шепли о крайних точках ядра выпуклой игры. Для перестановки $\pi = (i_1, \ldots, i_n) \in \Pi$ и функции v положим $v^\pi = (v_1^\pi, \ldots, v_n^\pi)$, где $v_k^\pi = v(S_k^\pi) - v(S_{k-1}^\pi)$, $S_0^\pi = \emptyset$, $S_k^\pi = \{i_1, \ldots, i_k\}$.

Теорема 1.3. [9]. *Множество* $\mathrm{ex}\, C(\alpha_v)$ *крайних точек ядра выпуклой игры* v *имеет вид*

$$\mathrm{ex}\, C(\alpha_v) = \{v^\pi | \pi \in \Pi\}.$$

Доказательство. Поскольку $C(\alpha_v) = C(v)$ — выпуклый многогранник, то $x \in \mathrm{ex}\, C(v)$ тогда и только тогда, когда существует открытое множество $G^x \subseteq \mathbf{R}^N$ такое, что для каждого элемента $q \in G^x$ множество $\{y \in C(v) | h_v(q) = q \cdot y\}$ состоит ровно из одного элемента x. Но каждая окрестность в $\mathbf{R}^N$ содержит точки, все координаты которых различны. Следовательно, если x принадлежит $\mathrm{ex}\, C(v)$, то существует $q \in \mathbf{R}^N$ такой, что $q_{i_1} < q_{i_2} < \ldots < q_{i_n}$ для некоторого $\pi = (i_1, \ldots, i_n) \in \Pi$; при этом (ввиду $T_k = S_k^\pi$) выполняются равенства $x(S_k^\pi) = v(S_k^\pi)$, $k = 1, \ldots, n$. Но тогда, очевидно, $x = v^\pi$. Проверка вложения $\{v^\pi | \pi \in \Pi\} \subseteq \mathrm{ex}\, C(v)$ осуществляется непосредственно.

Установим выпуклость функции v_H при всех $v \in V$. Вводя обозначения

$$[S_1, \ldots, S_m] = \left\{\omega \subseteq \bigcup_{i=1}^m \hat{S}_i \,|\, \omega \cap S_i \neq \emptyset, \quad i = 1, \ldots, m\right\},$$

$$v_m(S_1, \ldots, S_m) = \sum_{\omega \subseteq \{1, \ldots, m\}} (-1)^{m-|\omega|} v\left(\bigcup_{i \in \omega} S_i\right),$$

непосредственно из определения выпуклости получаем следующий критерий: *для выпуклости функции и необходимо и достаточно, чтобы для любых попарно-непересекающихся множеств* S_1, S_2, S_3 *выполнялось неравенство*

$$u_2(S_1, S_2) + u_3(S_1, S_2, S_3) \geq 0. \tag{1.9}$$

Используя соотношение

$$\sum_{[S_1, \ldots, S_m]} (-1)^{|\omega|} = (-1)^m, \tag{1.10}$$

выполняющееся для любого набора непустых попарно-непересекающихся множеств $S_1, \ldots, S_m$, нетрудно проверить, что для таких наборов справедлива формула

$$v_m(S_1, \ldots, S_m) = \sum_{[S_1, \ldots, S_m]} v_\omega. \tag{1.11}$$

Для того чтобы воспользоваться формулой (1.11) и критерием (1.9), найдем предварительно конечные разности функции v_H.

Лемма 1.1. *Для любой функции* $v \in V$ *справедлива формула*

$$(v_H)_\omega = v_\omega^+ + (-1)^{|\omega|} \sum_{\omega' \subseteq N \setminus \omega} v_{\omega \cup \omega'}^-. \tag{1.12}$$

Доказательство проводится индукцией по $k=|\omega|$ с использованием соотношений (1.1) и (1.10).

Предложение 1.1. *Для любой КИ $v\in V$ функция v_H выпукла.*

Доказательство. Достаточно убедиться в справедливости (1.9) для $u=v_H$. Пусть S_1, S_2, S_3 — произвольная система попарно-непересекающихся подмножеств N. Зафиксируем какой-либо элемент $v_{\bar{\omega}_0}$ ($\omega_0\cup S_i\neq\phi$, $i=1, 2$) и подсчитаем коэффициент c_0, с которым он входит в левую часть соответствующего неравенства (1.9). Положим $\omega_i=\omega_0\cap S_i$, $=1, 2, 3$. Нетрудно проверить, что

$$c_0=\begin{cases}\sum\limits_{[\omega_1,\omega_2]}(-1)^{|\omega|}+\sum\limits_{[\omega_1,\omega_2,\omega_3]}(-1)^{|\omega|}, & \omega_3\neq\varnothing,\\ \sum\limits_{[\omega_1,\omega_2]}(-1)^{|\omega|}, & \omega_3=\varnothing.\end{cases}$$

Отсюда в силу (1.10) имеем $c_0=0$ $(\omega_3\neq\phi)$, $c_0=1$ $(\omega_3=\phi)$. Но ввиду неотрицательности величин $v_{\bar{\omega}}$ это и означает справедливость соотношений (1.9) для $u=v_H$.

Приведем еще один вспомогательный результат, необходимый для установления равенства (1.7). Он является некоторым обобщением формулы (1.10) и представляет самостоятельный интерес.

Лемма 1.2. *Для любых попарно-непересекающихся непустых множеств $S_1, \ldots, S_m$ и $q\in\mathbf{R}^N$ справедлива формула*

$$\sum_{[S_1,\ldots,S_m]}(-1)^{|\omega|}\max\{q_i\mid i\in\omega\}=(-1)^m\max_j\min\{q_i\mid i\in S_j\}. \tag{1.13}$$

Доказательство. Пусть $m=1$. Не уменьшая общности, можно считать, что $S_1=N$. Рассмотрим кооперативную игру $u\in V$, конечные разности которой определяются равенствами $u_\omega=(-1)^{|\omega|}$, $\omega\subseteq N$. Используя критерий (1.9), нетрудно убедиться, что u выпуклая. Действительно, в нашем случае левая часть соотношений (1.9) имеет вид

$$\sum_{[T_1,T_2]}(-1)^{|\omega|}+\sum_{[T_1,T_2,T_3]}(-1)^{|\omega|}.$$

Но в силу (1.10) последняя величина всегда неотрицательна. Таким образом, к функции u применима теорема 1.2, из которой вытекает равенство

$$h_u(q)=\sum_{\omega\subseteq N}(-1)^{|\omega|}\max\{q_i\mid i\in\omega\}. \tag{1.14}$$

С другой стороны, на основании равенства $u(\omega)=\sum\limits_{\omega'\subseteq\omega}u_{\omega'}$ и (1.10) имеем $u(S)=-1$ для всех $S\subseteq N$, $S\neq\phi$. Поэтому, как нетрудно проверить,

$$C(\alpha_u)=\{x\in\mathbf{R}^N|x(N)=-1,\ x_i\leqslant 0,\ i\in N\}.$$

Но $\sup\{q\cdot x|x\in C(\alpha_u)\}=-\min\{q_i|i\in N\}$, что в виду (1.14) и завершает доказательство леммы для $m=1$.

Предполагая, что равенство (1.13) справедливо для всех $m\leqslant r$, рассмотрим произвольное семейство непустых попарно-непересекающихся множеств $S_1, \ldots, S_{r+1}$. Не уменьшая общности, можно считать, что

$$\min_{S_1}q_i\leqslant\min_{S_2}q_i\leqslant\ldots\leqslant\min_{S_{r+1}}q_i.$$

Положим

$$q[S_1,\ldots,S_k]=\sum_{[S_1,\ldots,S_k]}(-1)^{|\omega|}\max_\omega q_i.$$

Используя равенство

$$q[S_1,\ldots,S_r,S_{r+1}]=q[S_1,\ldots,S_{r-1},S_r\cup S_{r+1}]-\sum_{k=r}^{r+1}q[S_1,\ldots,S_{r-1},S_k],$$

в силу индукционного предположения получаем

$$q[S_1, \ldots, S_r, S_{r+1}] = (-1)^{r+1} \min_{S_{r+1}} q_i,$$

что и завершает доказательство леммы 1.2.

Теорема 1.4. *Множество H-дележей* КИ v *совпадает с ядром* КИ v_H.

Доказательство. Поскольку множества $A(v)$ и $C(v_H)$ — выпуклые компакты, для доказательства теоремы 1.4 достаточно убедиться в совпадении опорных функций h_u и g_v, где $u = v_H$, а $g_v(q) = \sup\{q \cdot x | x \in A(v)\}$. Учитывая равенство

$$A(v) = \sum_{\omega \subseteq N} v_\omega^+ A_\omega - \sum_{\omega \subseteq N} v_\omega^- A_\omega,$$

где $A_\omega = \{x \in \mathbf{R}_+^N | x(\omega) = 1, \ x(N \setminus \omega) = 0\}$, нетрудно убедиться в справедливости формулы

$$g_v(q) = \sum_{\omega \subseteq N} v_\omega^+ \max\{q_i \mid i \in \omega\} - \sum_{\omega \subseteq N} v_\omega^- \min\{q_i \mid i \in \omega\}.$$

Что касается опорной функции ядра выпуклой игры $u = v_H$, то, учитывая лемму 1.1, предложение 1.1 и теорему 1.2, имеем

$$h_u(q) = \sum_{\omega \subseteq N} v_\omega^+ \max\{q_i \mid i \in \omega\} +$$

$$+ \sum_{\omega \subseteq N} \sum_{\omega' \subseteq N \setminus \omega} (-1)^{|\omega|} v_{\omega \cup \omega'}^- \max\{q_i \mid i \in \omega\},$$

Собирая в правой части коэффициенты при некотором $v_{\omega_0}^-$, получаем, что их сумма c_0 имеет следующий вид:

$$c_0 = \sum_{\omega \subseteq \omega_0} (-1)^{|\omega|} \max\{q_i \mid i \in \omega\}.$$

Но ввиду леммы 1.2 для любых $S \subseteq N$ и $q \in \mathbf{R}^N$ справедливо равенство

$$\sum_{\omega \subseteq S} (-1)^{|\omega|} \max\{q_i \mid i \in \omega\} = -\min\{q_i \mid i \in S\}.$$

Таким образом,

$$\sum_{\omega \subseteq N} \sum_{\omega' \subseteq N \setminus \omega} (-1)^{|\omega|} v_{\omega \cup \omega'}^- \max_{\omega} q_i = -\sum_{\omega \subseteq N} v_\omega^- \min_{\omega} q_i,$$

что и завершает доказательство теоремы 1.4.

1.3. Приступая к характеризации ядер в терминах H-дележей, приведем сначала непосредственное следствие теоремы 1.4. Обозначим через $v_{(1)}$ аддитивную составляющую игры $v: v_{(1)}(S) = \sum_S v(\{i\}), \ S \subseteq N$.

Теорема 1.5. *Если* КИ v *удовлетворяет условию* (1.6), *то каждый элемент ядра* $C(\alpha_v)$ *является H-дележом игры* v. *При этом (вне зависимости от выполнения условия* (1.6)) *равенство* $C(\alpha_v) = A(v)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $v - v_{(1)} \in V_+$.

Доказательство. Из определения v_H вытекают соотношения $v_H(S) \leqslant v(S)$ для всех $S \subseteq N$, причем $v_H(N) = v(N)$. Следовательно, на основании теоремы 1.4 для любой игры выполняется вложение

$$C(v) \subseteq A(v). \tag{1.15}$$

Ввиду (1.15) первое утверждение теоремы вытекает из того, что для всех игр v, удовлетворяющих условию (1.6), справедливо равенство $C(\alpha_v) = C(v)$.

Что касается второго утверждения, то, полагая $u = v - v_{(1)}$ и учитывая $C(\alpha_v) = v_{(1)} + C(\alpha_u)$, $A(v) = v_{(1)} + A(u)$, достаточно убедиться, что $C(\alpha_u) = A(u) \Leftrightarrow u \in V_+$. Ясно, что все дележи из ядра u неотрицательны.

Поэтому, предполагая, что $A(u)=C(\alpha_u)$, на основании теоремы 1.1 имеем $u\in V_+$. Действительно, допуская, что $u_\omega<0$ для некоторого $\omega\subseteq N$ и выбирая $p\in\mathscr{P}$ таким образом, чтобы $p_{i,\omega}=1$ для некоторого $i\in\omega$, а $p_{i,\omega'}=0$ для всех остальных ω', содержащих i, получаем $\Phi_p(u)_i<0$.

С другой стороны, для любого $p\in\mathscr{P}$ и $S\subseteq N$ ввиду (1.1) справедливо соотношение

$$\Phi_p(u)(S)=u(S)+\sum_{i\in S}\sum_{\substack{\omega\subseteq\sigma_i\\ \omega\cap N\setminus S\neq\varnothing}} p_{i,\omega}u_\omega.$$

Учитывая неотрицательность u_ω, имеем $\Phi_p(u)\in C(\alpha_u)$. Привлекая еще раз теорему 1.1 и установленное вложение $C(\alpha_u)\subseteq A(u)$, получаем требуемое: $C(\alpha_u)=A(u)$.

Более тонкое описание ядер требует выделения специальных классов игр и отвечающих им подмножеств $\mathscr{H}$. Приведем один из примеров такого рода.

Напомним, что функция v называется *монотонной*, если справедлива импликация $S\subseteq T\Rightarrow v(S)\leqslant v(T)$. Обозначим через $\mathscr{H}_0$ семейство операторов из $\mathscr{H}$, удовлетворяющих более сильному условию положительности

$$\Phi(BV_+)\subseteq \mathbf{R}_+^N, \tag{1.16}$$

где BV_+ — конус монотонных функций из V. Положим $A_0(v)=\{\Phi(v)\mid \Phi\in\mathscr{H}_0\}$ и покажем, что для выпуклых функций множество $A_0(v)$ исчерпывается недоминируемыми дележами КИ v.

Приведем сначала теорему представления для операторов $\Phi\in\mathscr{H}_0$. Обозначим через $\mathscr{P}_0$ совокупность элементов $p=[p_{i,\omega}]\in\mathscr{P}$, удовлетворяющих неравенствам

$$\sum_{\omega'\subseteq N\setminus\omega}(-1)^{|\omega'|}p_{i,\omega\cup\omega'}\geqslant 0,\quad i\in\omega,\quad \omega\subseteq N. \tag{1.17}$$

Теорема 1.6. *Оператор Φ принадлежит $\mathscr{H}_0$ тогда и только тогда, когда $\Phi=\Phi_p$ для некоторого $p\in\mathscr{P}_0$.*

Доказательство. Зафиксируем $p\in\mathscr{P}$ и положим

$$\lambda_\omega^i(p)=\sum_{\omega'\subseteq N\setminus\omega}(-1)^{|\omega'|}p_{i,\omega\cup\omega'},\quad i\in\omega.$$

Покажем, что для любого $i\in N$ справедливо представление

$$\Phi_p(v)_i=\sum_{\omega\subseteq\sigma_i}\lambda_\omega^i(p)(v(\omega)-v(\omega\setminus i)). \tag{1.18}$$

Действительно, используя равенство (1.1), определяющее величины v_ω, имеем $v(\omega)-v(\omega\setminus i)=\sum_{\omega'\subseteq\omega\mid i\in\omega'}v_{\omega'}$. Поэтому

$$\sum_{\omega\subseteq\sigma_i}\lambda_\omega^i(p)(v(\omega)-v(\omega\setminus i))=\sum_{\sigma_i}\Bigl(\sum_{\omega'\mid\omega\subseteq\omega'}\lambda_{\omega'}^i(p)\Bigr)v_\omega.$$

Поскольку

$$\Phi_p(v)_i=\sum_{\omega\subseteq\sigma_i}p_{i,\omega}v_\omega,$$

достаточно убедиться в том, что

$$\sum_{\omega'\mid\omega\subseteq\omega'}\lambda_{\omega'}^i(p)=p_{i,\omega}. \tag{1.19}$$

Но

$$\sum_{\omega'\mid\omega\subseteq\omega'}\lambda_{\omega'}^i(p)=\sum_{\omega'\mid\omega\subseteq\omega'}\Bigl(\sum_{\omega''\subseteq N\setminus\omega'}(-1)^{|\omega''|}p_{i,\omega'\cup\omega''}\Bigr).$$

Собирая коэффициенты при $p_{i,\omega\cup\omega_0}$ $(\omega_0 \subseteq N\setminus\omega)$, получаем

$$\sum_{\omega' \mid \omega\subseteq\omega'} \lambda^i_{\omega'}(p) = \sum_{\omega_0\subseteq N\setminus\omega} \Big(\sum_{\omega''\subseteq\omega_0} (-1)^{|\omega''|}\Big) p_{i,\omega\cup\omega_0}.$$

Отсюда, учитывая формулу (1.10), имеем требуемое соотношение (1.19).

Допустим теперь, что $p \in \mathscr{P}_0$. Тогда по определению $\lambda^i_\omega(p) \geqslant 0$ для всех $i \in \omega$, $\omega \subseteq N$. Стало быть, на основании (1.18) для всех $v \in BV_+$ имеет место включение $\Phi_p(v) \in \mathbf{R}^N_+$. С другой стороны, если $\Phi \in \mathscr{H}_0$, то в силу теоремы 1.1 найдется $p \in \mathscr{P}$ такой, что $\Phi = \Phi_p$. Ввиду монотонности функций

$$\widehat{\varepsilon}_T(S) = \begin{cases} 1, & T \subset S, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

векторы $\Phi(\widehat{\varepsilon}_T)$ неотрицательны при всех $T \subseteq N$*). Кроме того, на основании (1.18) для любых $T \subset N$, $i \notin T$, справедливы соотношения $\Phi(\widehat{\varepsilon}_T)_i = \lambda^i_{T\cup i}(p)$. Отсюда $\lambda^i_\omega(p) \geqslant 0$ $(i \in \omega,\ \omega \subseteq N)$, что и завершает доказательство теоремы 1.6.

Отметим, что каждый элемент $p \in \mathscr{P}_0$ представим в виде

$$p_{i,\omega} = \sum_{\omega' \mid \omega\subseteq\omega'} q_{i,\omega'}, \quad i \in \omega, \quad \omega \subseteq N, \tag{1.20}$$

где все $q_{i,\omega}$ неотрицательны и удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\sum_{i\in\omega} \sum_{\omega' \mid \omega\subseteq\omega'} q_{i,\omega'} = 1, \quad \omega \subseteq N. \tag{1.21}$$

Поскольку единственным решением системы (1.20) являются величины $q_{i,\omega} = \lambda^i_\omega(p)$, верно и обратное утверждение: каждое неотрицательное решение системы (1.21) определяет в соответствии с формулами (1.20) некоторый элемент $p \in \mathscr{P}_0$. Установленное соответствие позволяет явным образом выписывать элементы многогранника $\mathscr{P}_0$ и отвечающие им операторы $\Phi \in \mathscr{H}_0$.

В дальнейшем потребуется более удобное задание системы (1.21).

Лемма 1.3. *Для того чтобы числа $q_{i,\omega}$ удовлетворяли системе линейных уравнений* (1.21), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

$$\sum_N q_{i,N} = 1, \tag{1.22}$$

$$\sum_{i\in\omega} q_{i,\omega} = \sum_{j\in N\setminus\omega} q_{j,\omega\cup j}, \quad \omega \subseteq N. \tag{1.23}$$

Доказательство проводится индукцией по $k = |N\setminus\omega|$.

Перейдем к характеризации недоминируемых дележей выпуклых игр.

Теорема 1.7. *Ядро выпуклой игры v совпадает с множеством ее Н-дележей из $A_0(v) = \{\Phi_p(v) \mid p \in \mathscr{P}_0\}$.*

Доказательство. Пусть v — произвольная выпуклая игра. Если $x \in C(\alpha_v)$, то, по теореме 1.3, найдутся $t_\pi \geqslant 0$ $(\pi \in \Pi)$ такие, что $\sum_\Pi t_\pi = 1$ и $x = \sum_\Pi t_\pi v^\pi$. Нетрудно проверить, что линейный оператор $\Phi(u) = \sum_\Pi t_\pi u^\pi$ $(u \in V)$ принадлежит $\mathscr{H}_0$. В силу теоремы 1.5 найдется $p_0 \in \mathscr{P}_0$ такой, что $\Phi(u) = \Phi_{p_0}(u)$ для всех $u \in V$. В частности, $x = \Phi_{p_0}(v)$, что и требовалось установить.

Что касается обратного вложения, то для его доказательства достаточно убедиться в том, что для любого набора $q_{i,\omega} \geqslant 0$, удовлетворяюще-

*) Здесь и далее знак $\subset$ означает строгое вложение.

го условиям (1.21), система линейных уравнений

$$\sum_{\pi|\omega_i^\pi=\omega} t_\pi = q_{i,\omega}, \quad i\in\omega, \quad \omega\subseteq N, \tag{1.24}$$

имеет неотрицательное решение ($\omega_i^\pi=\{i_1\ldots, i_k\}$, где k — номер элемента i в перестановке $\pi=(i_1, \ldots, i_n)$). В самом деле, пусть $x=\Phi_p(v)$ для некоторого $p\in\mathscr{P}_0$. Предполагая, что система (1.24) имеет неотрицательное решение $\{t_\pi\}_\Pi$ для $q_{i,\omega}\geqslant 0$, удовлетворяющих системе (1.21), имеем $\sum\limits_\Pi t_\pi=\sum\limits_N q_{i,N}=1$. Далее, ввиду (1.20), (1.24) $\sum\limits_{\pi|\omega\subseteq\omega_i^\pi} t_\pi=p_{i,\omega}$. Но тогда для каждого $i\in N$ справедливы соотношения

$$x_i=\sum_{\omega\subseteq\sigma_i}\left(\sum_{\pi|\omega\subseteq\omega_i^\pi} t_\pi\right)v_\omega=\sum_\Pi t_\pi\left(\sum_{\omega\subseteq\sigma_i|\omega\subseteq\omega_i^\pi} v_\omega\right).$$

Отсюда, учитывая, что $\sum\limits_{\omega\subseteq\sigma_i|\omega\subseteq\omega_i^\pi} v_\omega=v^\pi(\omega_i^\pi)-v^\pi(\omega_i^\pi\setminus i)=v_i^\pi$, получаем

$$x_i=\sum_\Pi t_\pi v_i^\pi, \quad i\in N. \tag{1.25}$$

Так как функция v выпуклая, в силу теоремы 1.3 элементы v^π принадлежат $C(\alpha_v)$ при всех $\pi\in\Pi$. Значит и x, являющийся ввиду (1.25) выпуклой комбинацией элементов v^π, тоже принадлежит $C(\alpha_v)$, что и требовалось.

Для завершения доказательства теоремы остается установить разрешимость системы (1.24) в неотрицательных t_π. Построим частное неотрицательное решение этой системы, воспользовавшись приемом, аналогичным предложенному в [10]. Для $\omega\subseteq N$ положим $q(\omega)=\sum\limits_{i\in\omega} q_{i,\omega}$ ($q(\varnothing)\triangleq 1$) и для $\pi\in\Pi$ определим

$$t_\pi^0=\begin{cases}\prod\limits_{r\in N} q_{r,\omega_r^\pi}/q(\omega_r^\pi\setminus r), & \text{если } \prod\limits_N q_{r,\omega_r^\pi}>0,\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

В силу определения t_π^0 справедливы равенства

$$\sum_{\pi|\omega_i^\pi=\omega} t_\pi^0=(q_{i,\omega}/q(\omega\setminus i))\,a_\omega^i b_\omega, \tag{1.26}$$

где

$$a_\omega^i=\sum_{\pi\in\Pi(\omega\setminus i)}\prod_{j\in\omega\setminus i} q_{j,\omega_j^\pi}/q(\omega_j^\pi\setminus j),$$

$$b_\omega=\sum_{\pi\in\Pi(N\setminus\omega)}\prod_{j\in N\setminus\omega} q_{j,\omega\cup\omega_j^\pi}/q(\omega\cup\omega_j^\pi\setminus j)$$

(при этом $b_N\triangleq 1$). Учитывая очевидные соотношения

$$a_\omega^i=\sum_{j\in\omega\setminus i}(q_{j,\omega\setminus i}/q(\omega\setminus\{i, j\}))\,a_{\omega\setminus i}^j,$$

$$b_\omega=\sum_{j\in N\setminus\omega}(q_{j,\omega\cup j}/q(\omega))\,b_{\omega\cup j}$$

и применяя индукцию по числу элементов в ω и $N\setminus\omega$ соответственно, получаем (с учетом леммы 1.3 для b_ω): $a_\omega^i=q(\omega\setminus i)$, $b_\omega=1$ $(\omega\subseteq N)$. Таким образом, ввиду (1.26) числа t_π^0 удовлетворяют системе (1.24), что и требовалось установить.

В заключение этого параграфа приведем обобщение теоремы 1.5 на случай игр, не удовлетворяющих условию (1.6). Ясно, что постановка вопроса о представимости элементов ядра игры v в виде H-дележей этой же игры корректна лишь в том случае, когда множество ее индивидуально-рациональных H-дележей $A^+(v)=A(v)\cap I(v)$ непусто. Известно [4], что $A^+(v)\neq\varnothing$ тогда и только тогда, когда

$$v(N)\geqslant v_H(S)+\sum_{N\setminus S} v(\{i\}),\quad S\subseteq N. \tag{1.27}$$

Покажем, что выполнение этого минимального требования уже гарантирует справедливость вложения $C(\alpha_v)\subseteq A(v)$.

Теорема 1.8. *Пусть v удовлетворяет условию* (1.27). *Тогда любой дележ из $I(v)\setminus A^+(v)$ доминируется некоторым дележом из $A^+(v)$.*

Доказательство. Пусть v — произвольная игра, удовлетворяющая условию (1.27). Не уменьшая общности, можно считать, что $v(\{i\})=0$ для всех $i\in N$. Обозначим через $\bar v_H$ функцию, определенную формулой

$$\bar v_H(S)=\max\{v_H(T)\,|\,T\subseteq S\},\quad S\subseteq N.$$

Нетрудно проверить, что $A^+(v)=C(\bar v_H)$, причем $\bar v_H$ — выпуклая функция (см., например, [4]). Пусть y — произвольный элемент из $I(v)\setminus A^+(v)$. Тогда семейство $\sigma_y=\{S\,|\,y(S)<\bar v_H(S)\}$ непусто. Рассмотрим какую-нибудь минимальную (по включению) коалицию $S_0\in\sigma_y$. Ясно, что $\bar v_H(S_0)=v_H(S_0)$. Действительно, в противном случае найдется $T\subset S_0$, для которой $\bar v_H(S_0)=v_H(T)$. Отсюда ввиду неотрицательности y получаем включение $T\in\sigma_y$, что противоречит минимальности S_0. Обозначим через y^0 и v^0 сужение y и $\bar v_H$ на множество S_0. Далее, выберем строго положительный вектор $d\in\mathbf{R}^{S_0}$ так, чтобы сумма компонент вектора $x^0=y^0+d$ стала равной $\bar v_H(S_0)$. В силу выбора S_0 и непосредственно из определения v^0 имеем $x^0\in C(v^0)$. Поскольку $\bar v_H$ выпуклая, на основании теоремы 1.3 существует продолжение дележа x^0 до дележа $x\in C(\bar v_H)$. Итак, существует $x\in A^+(v)$ такой, что $y_i<x_i=x_i^0$ для всех $i\in S_0$, и при этом $x(S_0)=v_H(S_0)\leqslant v(S_0)$. Но это и означает, что $y\alpha_v x$, т. е. y доминируется дележом из $A^+(v)$, что и требовалось установить.

Замечание 1.2. Теорема 1.8 показывает, что индивидуально-рациональные H-дележи игры v «в целом» доминируют все остальные дележи из $I(v)$. Идея последовательного разбиения множеств на доминируемые и доминирующие составляющие лежит в основе рассматриваемого в следующем параграфе понятия обобщенного решения Неймана — Моргенштерна.

§ 2. ОБОБЩЕННЫЕ НМ-РЕШЕНИЯ И ДОСТИЖИМОСТЬ ЯДЕР

Ниже излагаются результаты, касающиеся внешней устойчивости решений абстрактных кооперативных игр. При этом под решением понимается ядро соответствующего бинарного отношения или, более общим образом, некоторое содержащее его множество не доминирующих друг друга альтернатив. Исследуются условия существования монотонных траекторий, сходящихся к решениям рассматриваемых игр, анализируется устойчивость процессов последовательного улучшения доминируемых альтернатив. В целом рассматриваемая проблематика тесно связана с вопросами стабилизации переговоров и сопутствующих им явлений, таких как образование блокирующих коалиций, доминирующих дележей и т. п.

2.1. Основные определения и конструкции этого параграфа даются в терминах абстрактных игр, что позволяет использовать вводимые понятия не только для исследования стандартных теоретико-игровых принципов оптимальности, но и для анализа широкого класса решений многокритериальной оптимизации, базирующихся на бинарных отношениях доминирования [11—13].

Пусть X — некоторое множество, $\alpha\subseteq X\times X$ — произвольное иррефлексивное бинарное отношение на X. Систему $\Gamma=(X,\alpha)$ назовем абстрактной игрой (АИ). Будем говорить, что *множество $Y\subseteq X$ внутренне устойчиво* [1], если для любых двух элементов $x,\ y\in Y$ пара $(x,\ y)$ не принадлежит α. Напомним [1], что внутренне-устойчивое множество $Y \subseteq X$ называется НМ-*решением* АИ Г, если оно внешне устойчиво, т. е. для любого $x \notin Y$ существует $y \in Y$ такой, что $(x, y) \in \alpha$. Обозначим через α_* транзитивное замыкание α, определяемое по формуле $\alpha_* = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n$, где $\alpha' \cdot \alpha'' = \{(x, y) \mid \exists z[(x, z) \in \alpha', \quad (z, y) \in \alpha'']\}$, $\alpha^1 = \alpha$. Множество $Y \subseteq X$ назовем *слабо внешне устойчивым*, если для любого $x \notin Y$ найдется $y \in Y$ такой, что $(x, y) \in \alpha_*$.

Определение 2.1 [14]. *Внутренне устойчивое множество Y называется обобщенным* НМ — *решением* АИ (X, α), *если оно слабо внешне устойчиво.*

Используя стандартное сокращение $(x, y) \in \alpha \Leftrightarrow x\alpha y$, условие слабой внешней устойчивости можно записать следующим образом:

(Е) *Для любого $x \notin Y$ найдется конечное семейство $\{y_r\}_{r=0}^{m(x)}$ такое, что* $y_0 = x$, $y_{m(x)} \in Y$ и $y_{r-1}\alpha y_r$ *для всех* $r = 1, \ldots, m(x)$.

Пусть Y — некоторое обобщенное НМ-решение АИ $\Gamma = (X, \alpha)$. Для $x \notin Y$ через m_x обозначим наименьшее из натуральных чисел $m(x)$, для которых существует семейство $\{y_r\}_{r=0}^{m(x)}$, фигурирующее в условии (Е). Назовем Y *финитным*, если $r(Y) = \sup\{m_x \mid x \in X\setminus Y\} < \infty$. В случае, когда АИ Г допускает хотя бы одно такое решение, величину $r(\Gamma) = \min\{r(Y) \mid Y$ — финитное обобщенное НМ — решение $\Gamma\}$ будем называть НМ-*рангом* Г.

Примеры игр, у которых НМ-ранг отличен от единицы, приведены в [6] (см. также [11]). В частности, НМ-ранг известной игры Лукаса, не имеющей НМ-решения, равен двум [14].

В дальнейшем будем предполагать, что X наделено некоторой топологией τ. Еще одним ослаблением условия внешней устойчивости является следующее требование:

(Е$'$) *Любая τ-окрестность Y слабо внешне устойчива.*

Определение 2.2. *Внутренне устойчивое множество Y называется предельным обобщенным* НМ-*решением* АИ (X, α), *если оно удовлетворяет условию* (Е$'$).

Тип обобщенных НМ-решений АИ $\Gamma = (X, \alpha)$ обусловлен топологическими и порядковыми характеристиками множеств $\alpha(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in \alpha\}$, $\alpha^{-1}(x) = \{y \in X \mid (y, x) \in \alpha\}$ и определяемого в терминах $\alpha(x)$ ядра $C(\alpha) = \{x \in X \mid \alpha(x) = \varnothing\}$. Ядро, как множество максимальных элементов, содержится в любом обобщенном НМ-решении Г (если таковые существуют). Более того, при некоторых естественных условиях $C(\alpha)$ является предельным обобщенным НМ-решением Г.

Напомним, что бинарное отношение β называется *ациклическим*, если его транзитивное замыкание иррефлексивно ($(x, x) \notin \beta_*$ для всех $x \in X$).

Предложение 2.1. *Пусть $C(\alpha) \neq \varnothing$. Если X компактно и существует ациклическое сужение $\beta \subseteq \alpha$, для которого $C(\beta) = C(\alpha)$ и $\beta^{-1}(x)$ открыты для всех $x \in X$, то $C(\alpha)$ является предельным обобщенным* НМ-*решением* АИ $\Gamma = (X, \alpha)$.

Доказательство. Пусть U — произвольная окрестность $C(\alpha)$. Для каждого $y \notin U$ зафиксируем некоторый элемент $y' \in \alpha(y)$ и положим $U_y = \beta^{-1}(y')$. Ясно, что семейство $\{U_y\}_{y \in X\setminus U}$ образует открытое покрытие множества $X\setminus U$. Ввиду компактности последнего найдется конечное подмножество $X' \subseteq X$ такое, что $X\setminus U = \bigcup\limits_{X'} \beta^{-1}(y')$. Пусть x — произвольный элемент $X\setminus U$. Процедуру последовательного улучшения x, завершающуюся в U, определим следующим образом. Положим $y_0 = x$ и в качестве y_1 выберем произвольный элемент X', удовлетворяющий условию $y_0\beta y_1$. Если $y_1 \notin U$, в качестве y_2 выбираем произвольный элемент из X', удовлетворяющий условию $y_1\beta y_2$, и т. д. В силу ацикличности β и конечности множества X' указанный процесс через конечное число шагов приводит к построению искомой последовательности $\{y_r\}_{r=0}^{m(x)}$, для которой $y_{m(x)} \in U$ и $y_{r-1}\alpha y_r$ для всех $r = 1, \ldots, m(x)$.

Приведенный результат дополняется следующим утверждением.

Предложение 2.2. *Если X компактно и существует сужение $\beta \subseteq \alpha$, для которого $C(\beta) = \varnothing$ и $\beta^{-1}(x)$ открыты для всех $x \in X$, то $\Gamma = (X, \alpha)$ имеет финитное обобщенное* НМ*-решение Y такое, что $|Y| < \infty$ и $r(\Gamma) \leqslant 3$.*

Доказательство. Поскольку $C(\beta) = \varnothing$, семейство $\{\beta^{-1}(x)\}_X$ образует открытое покрытие X. Ввиду компактности последнего найдется конечное подмножество X_0, для которого $X = \bigcup_{X_0} \beta^{-1}(y)$. Индукцией по числу элементов нетрудно показать, что всякая конечная игра имеет НМ-ранг, не превышающий двух (см., например, [6]). Поэтому X_0 допускает разбиение $\{Y_0, Y_1, Y_2\}$, для которого Y_0 внутренне устойчиво (относительно α), и, кроме того, $Y_1\alpha Y_0$, $Y_2\alpha Y_1$, где

$$Y'\alpha Y'' \Leftrightarrow \forall y' \in Y' \, \exists y'' \in Y'' \, (y'\alpha y''). \tag{2.0}$$

Учитывая, что $(X \setminus X_0)\beta X_0$, в качестве искомого обобщенного НМ-решения АИ $\Gamma = (X, \alpha)$ можно взять множество Y_0.

Следствие 2.1. *Если X компактно, $C(\alpha) = \varnothing$ и $\alpha^{-1}(x)$ открыты для всех $x \in X$, то игра (X, α_*) имеет конечное* НМ*-решение.*

Говоря другими словами, в условиях следствия 2.1 игра (X, α) имеет конечное обобщенное НМ-решение, внутренне устойчивое относительно α_*.

Известно [14], что НМ-ранг кооперативной игры n лиц с побочными платежами не превышает $2^n - n - 2$. На основании предложения 2.2 имеем следующее уточнение этого результата.

Следствие 2.2. *Если кооперативная игра с побочными платежами не имеет ядра, то ее* НМ*-ранг не превышает трех.*

Укажем некоторую конкретизацию полученных результатов и для кооперативных игр без побочных платежей, задающихся в форме характеристической функции $S \mapsto G(S)$, $S \in \bar{\sigma}$, где $\bar{\sigma} = \sigma \cup \{N\}$, $\sigma \subseteq 2^N$ — семейство блокирующих коалиций, $N = \{1, \ldots, n\}$ — множество игроков, а $G(S) \subseteq \mathbf{R}^S$ — множество дележей, достижимых усилиями коалиции $S \in \bar{\sigma}$. В этом случае бинарное отношение α_G на $X_G = G(N)$ имеет вид (ниже y_S — сужение y на S)

$$x\alpha_G y \Leftrightarrow \exists S \in \sigma \, [\forall i \in S \, (x_i < y_i) \,\&\, (y_S \in G(S))].$$

Будем говорить, что *игра $\Gamma_G = (X_G, \alpha_G)$ насыщена*, если для любых $x \in G(N)$ и $y \in G(S)$ $(S \in \sigma)$ справедлива импликация $y \leqslant x_S \Rightarrow (y, x_{N \setminus S}) \in G(N)$.

Приводимое утверждение усиливает некоторые результаты [11].

Теорема 2.1. *Пусть $G(S)$ замкнуты для всех $S \in \bar{\sigma}$ и $G(N)$ ограничено сверху. Тогда $r(\Gamma_G) \leqslant |\sigma|$ и при этом общая часть всех финитных обобщенных* НМ*-решений Γ_G совпадает с $C(\alpha_G)$. Если, кроме того, Γ_G насыщена, слабая граница Парето множества $G(N)$ ограничена снизу и $C(\alpha_G) = \varnothing$, то $r(\Gamma_G) \leqslant 3$.*

Доказательство. Занумеруем каким-либо образом коалиции из σ и в соответствии с полученной последовательностью $S_1, \ldots, S_m$ определим разбиение $\{X_0, X_1, \ldots, X_m\}$ множества X_G:

$$X_m = \{x \in X_G \mid \exists \, y \in X_G (x\alpha_m y)\},$$

$$X_{r-1} = \left\{x \in X_G \setminus \bigcup_{s=r}^{m} X_s \mid \exists y \in X_G \setminus \bigcup_{s=r}^{m} X_s \, (x\alpha_{r-1} y)\right\}, \quad r = 2, \ldots, m,$$

$$X_0 = X_G \setminus \bigcup_{s=1}^{m} X_s,$$

где

$$x\alpha_r y \Leftrightarrow \left[\left(y_{S_r} \in G(S_r)\right) \,\&\, (x_i < y_i,\ i \in S_r)\right].$$

Для простоты будем предполагать, что $X_r \neq \varnothing$, $r = 1, \ldots, m$. Положим $Y_r = X_G \setminus \bigcup\limits_{s=r}^{m} X_s$ и покажем, что $X_r \alpha_G Y_r$ (см. обозначение (2.0)). С этой целью отметим, что множества X_r открыты относительно Y_{r+1} $(Y_{m+1} = X_G)$. Отсюда и из замкнутости и ограниченности сверху множества X_G вытекает замкнутость и ограниченность сверху множеств X_r. Поэтому для любого $x \in X_r$ существует $\varepsilon > 0$ такое, что множество $Y_r(x) = \{y \in Y_{r+1} \mid x\alpha_r y,\ y_i \geqslant x_i + \varepsilon,\ i \in S_r\}$ непусто и компактно. Положим $B_r(x) = \{y \in Y_r(x) \mid y(S_r) = \max\{z(S_r) \mid z \in Y_r(x)\}\}$. Ясно, что $\{x\}\alpha_r B_r(x)$. Кроме того, $B_r(x) \subseteq Y_r$, так как иначе найдутся $z \in Y_{r+1}$ и $y \in B_r(x)$, для которых $z(S_r) > y(S_r)$, что противоречит определению $B_r(x)$. Итак, $X_r \alpha_G Y_r$ для всех $r = 1, \ldots, m$. Отметим также, что $X_0 = Y_1 \neq \varnothing$ и $Y_r \neq \varnothing$, $r = 1, \ldots, m$. Непосредственно из определения α_G и построения X_r вытекают внутренняя устойчивость X_0 и тот факт, что $r(X_0) \leqslant m$. Для завершения доказательства первой части теоремы 2.1 остается заметить, что в качестве S_m можно взять любую коалицию $S \in \sigma$. Поэтому для каждого $x \notin C(\alpha_G)$ найдется финитное обобщенное НМ-решение Γ_G, не содержащее этого элемента.

Приступая к доказательству второй части, обозначим через Θ слабую границу Парето множества $G(N)$ и введем в рассмотрение игру G': $G'(N) = \Theta$, $G'(S) = G(S)$, $S \neq N$. В силу сделанных предложений $C(\alpha_{G'}) = \varnothing$. Действительно, если $x \in \Theta$ доминируется элементом из $G(N)$, то он доминируется и некоторым элементом из Θ. Пусть, например, $x\alpha_G x'$, причем доминирование осуществляется по коалиции S. Рассмотрим множество $Z = \{y' \in G(N) \mid x' \leqslant y',\ y'_S \in G(S)\}$. В силу компактности Z найдется элемент $y \in Z$, для которого $y(N) = \max\{z(N) \mid z \in Z\}$. Допуская, что $y \notin \Theta$, найдем $\bar{y} \in G(N)$, для которого $\bar{y}_i > y_i$, $i \in N$. Ввиду насыщенности Γ_G элемент $\overset{\circ}{y} = (y_S, \bar{y}_{N \setminus S})$ также принадлежит Z. Но это противоречит выбору y. Итак, $y \in \Theta$ и $x\alpha_G y$. Приведенное рассуждение вместе с условием $C(\alpha_G) = \varnothing$ и доказывает пустоту $C(\alpha_{G'})$. Далее, поскольку Θ замкнуто и ограничено, к игре $\Gamma_{G'}$ применимо предложение 2.2. Для завершения доказательства остается заметить, что всякое обобщенное НМ-решение ранга m игры $\Gamma_{G'}$ является таковым и для игры Γ_G.

Отметим, что для случая, когда $\sigma = 2^N$, а $G(S) - \mathbf{R}_+^S \subseteq G(S)$ для всех $S \in \sigma$, НМ-ранг игры Γ_G не превышает двух (независимо от того, имеет Γ_G ядро или нет).

2.2. В дальнейшем ограничимся рассмотрением наиболее интересного для приложений случая, когда $C(\alpha) \neq \varnothing$. Назовем последовательность $\{y_r\}_{r=0}^{\infty}$ *α-монотонной*, если $y_{r+1} \in \alpha(y_r) \cup \{y_r\}$ для всех $r = 0, 1, \ldots$.

Определение 2.3 [11]. *Ядро $C(\alpha)$ называется достижимым, если для любого $x \notin C(\alpha)$ найдется сходящаяся α-монотонная последовательность $\{y_r\}_{r=0}^{\infty}$ такая, что $y_0 = x$* и $\lim y_r \in C(\alpha)$.

Помимо естественной связи с рассмотренными ранее вопросами задача установления достижимости ядер тех или иных игр представляет и самостоятельный интерес. Приведем некоторые результаты о достижимости, базирующиеся на изучении подходящих динамических систем, ассоциированных с бинарным отношением α.

Ниже предполагается, что X — полное метрическое пространство с метрикой d. *Точечно-множественными динамическими системами* (ДС) на X называются соответствия $\varphi\colon X \to 2^X$, для которых $\varphi(x) \neq \varnothing$ при всех $x \in X$. Под *траекториями* понимаются последовательности $\{x_r\}_{r=0}^{\infty}$, для которых $x_{r+1} \in \varphi(x_r)$, $r = 0, 1 \ldots$. Для $\psi\colon X \to 2^X$ положим $\operatorname{gr}\psi =$

$= \{(x, y) \mid y \in \psi(x)\}$, $\psi_*(x) = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} \psi^m(x)$, $x \in X$, где $\psi^1 = \psi$, $\psi^{m+1}(x) = \bigcup\limits_{y \in \psi^m(x)} \psi(y), x \in X$.

Определение 2.4. *Будем говорить, что* ДС φ *допускает обобщенную функцию Ляпунова, если существует ограниченная сверху по второму аргументу функция* $l\colon \mathrm{gr}\,\varphi_* \to \mathbf{R}$ *такая, что*

$$l(x, y) \geqslant d(x, y), \ x \in X, \ y \in \varphi(x), \tag{2.1}$$

$$l(x, z) \geqslant l(x, y) + l(y, z), \ x \in X, \ y \in \varphi_*(x), \ z \in \varphi_*(y) \tag{2.2}$$

Наименьшей функцией, обладающей свойствами (2.1), (2.2), является конструируемое далее отображение $l_\varphi\colon X \times X \to \overline{\mathbf{R}}$. Пусть

$$T_\varphi^m(x, y) = \{\{x_r\}_{r=0}^m \mid x_0 = x, \ x_m = y, \ x_{r+1} \in \varphi(x_r), \ r = 0, \ldots, m-1\},$$

$$T_\varphi^*(x, y) = \bigcup_{m=1}^{\infty} T_\varphi^m(x, y).$$

На множестве всех (конечных) траекторий t, соединяющих точку x с точкой y, введем функцию

$$d(t) = \sum_{r=0}^{m-1} d(x_r, x_{r+1}), \quad t = \{x_r\}_{r=0}^m \in T_\varphi^*(x, y).$$

В этих обозначениях l_φ определяется формулой $l_\varphi(x, y) = \sup\{d(t) \mid t \in T_\varphi^*(x, y)\}$. Ясно, что φ допускает обобщенную функцию Ляпунова тогда и только тогда, когда l_φ ограничена сверху по второму аргументу на графике φ_*. Наличие обобщенной функции Ляпунова еще не гарантирует сходимости всех траекторий φ к ее финальному множеству $E_\varphi = \{x \in X \mid \varphi(x) = \{x\}\}$. Вместе с тем для полунепрерывных снизу ДС φ существует стандартный способ формирования селекторов, обладающих указанным свойством и имеющих то же финальное множество, что и φ. Здесь под селектором ДС φ понимается ДС ψ, удовлетворяющая условию $\mathrm{gr}\,\psi \subseteq \mathrm{gr}\,\varphi$. Как и в [13], в основе этого способа лежит выделение «максимально продвинутых» элементов множества $\varphi(x)$.

Предложение 2.3. *Пусть* φ — *полунепрерывная снизу, допускающая обобщенную функцию Ляпунова* ДС *на* X. *Положим* $\rho(x) = \sup\{d(x, y) \mid y \in \varphi(x)\}$, $x \in X$. *Тогда для любого* $\delta \in (0, 1)$ *все траектории* ДС

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} \{x\}, & x \in E_\varphi, \\ \{y \in \varphi(x) \mid d(x, y) > \delta\rho(x)\}, & x \notin E_\varphi, \end{cases}$$

сходятся к элементам финального множества E_φ.

Доказательство. Зафиксирует некоторое $\delta \in (0, 1)$ и рассмотрим произвольную траекторию $\{x_r\}_{r=0}^\infty$ ДС φ_δ. Из определения l вытекают неравенства $\sum\limits_{r=0}^{m} d(x_r, x_{r+1}) \leqslant l(x_0, x_{m+1})$, $m \geqslant 1$. Отсюда $\sum\limits_{r=0}^{\infty} d(x_r, x_{r+1}) \leqslant \sup\{l(x_0, y) \mid y \in \varphi_*(x_0)\}$. Значит, ввиду полноты X и ограниченности l по второму аргументу последовательность $\{x_r\}$ сходящаяся. Покажем, что $x_* = \lim x_r \in E_\varphi$. С этой целью заметим, что в силу полунепрерывности снизу ДС φ функция ρ полунепрерывна снизу. Действительно, пусть a — произвольное вещественное число. Покажем, что множество $M_\rho(a) = \{x \mid \rho(x) \leqslant a\}$ замкнуто. Рассмотрим произвольную сходящуюся последовательность $\{z_r\}_{r=1}^\infty \subseteq M_\rho(a)$. Пусть $z = \lim z_r$. Тогда на основании полунепрерывности снизу для любого $y \in \varphi(z)$ найдется сходящаяся последовательность $\{y_r\}_{r=1}^\infty$ такая, что $y = \lim y_r$ и $y_r \in \varphi(z_r)$ для всех $r = 1, \ldots$. Поскольку по условию $d(y_r, z_r) \leqslant a$ для всех $r = 1, \ldots$, имеем

$d(y, z)=\lim d(y_r, z_r)\leqslant a$. Отсюда и получаем требумое $\rho(z)=\sup\{d(y, z)\mid y\in\varphi(z)\}\leqslant a$.

Итак, допустим, что $x_*\notin E_\varphi$. Но тогда $\rho(x_*)=c>0$. Вввиду полунепрерывности снизу функции ρ найдется $r_0\geqslant 1$ такое, что $\rho(x_r)>c/2$ для всех $r\geqslant r_0$. В силу определения φ_δ имеем $d(x_r, x_{r+1})>c\delta/2$ для всех $r\geqslant r_0$. Но это противоречит сходимости последовательности $\{x_r\}_{r=0}^\infty$. Таким образом, $\rho(x_*)=0$ и, следовательно, $x_*\in E_\varphi$, что и требовалось установить.

На основании предложения 2.3 для доказательства достижимости ядра $C(\alpha)$ достаточно построить полунепрерывную снизу, допускающую обобщенную функцию Ляпунова ДС ψ на X, являющуюся селектором соответствия $\varphi^\alpha(x)=\alpha(x)\cup\{x\}$ $(x\in X)$ и удовлетворяющую соотношению $E_\psi=C(\alpha)$. Наводящим соображением для построения таких систем $\psi\subseteq\varphi^\alpha$ является следующий простой факт (ниже и далее U_x — окрестность $x\in X$).

Предложение 2.4. *Если φ удовлетворяет условию*

$$\forall x\forall y\in\varphi(x)\setminus\{x\}\exists U_x\Big[y\in\bigcap_{z\in U_x}\varphi(z)\Big], \tag{2.3}$$

то для каждого $y\in X$ функция $l_\varphi(\cdot, y)$ полунепрерывна снизу на $X\setminus\{y\}$.

Доказательство. Пусть $y\in\varphi(x)\setminus\{x\}$ и $l_\varphi(x, y)>a$. В силу определения l_φ найдется конечная последовательность $\{x_r\}_{r=0}^m$ такая, что $x_0=x$, $x_m=y$, $x_{r+1}\in\varphi(x_r)$, $r=0,\ldots,m-1$, и при этом $\sum_{r=0}^{m-1}d(x_r, x_{r+1})>a$. Не уменьшая общности, можно считать, что $x_1\neq x_0$. На основании (2.3) существует окрестность U_{x_0} такая, что $x_1\in\varphi(x')$ для всех $x'\in U_{x_0}$. Учитывая непрерывность функции d и сужая, если необходимо, окрестность U_{x_0}, получаем требуемое соотношение

$$l_\varphi(x', y)\geqslant d(x', x_1)+\sum_{r=1}^{m-1}d(x_r, x_{r+1})>a$$

для всех x' из некоторой окрестности x.

Отметим, что условию (2.3) очевидным образом удовлетворяют все ДС φ^α, для которых $\alpha^{-1}(x)$ открыты при всех $x\in X$.

Пусть $\mathscr{K}$ — совокупность всех подмножеств $K\subseteq X\times X$, удовлетворяющих условиям транзитивности и «телесности» по первому аргументу:

$$[(x, y), (y, z)\in K]\Rightarrow(x, z)\in K, \tag{2.4}$$

$$\forall(x, y)\in K[(x\neq y)\Leftarrow\exists U_x(U_x\times\{y\}\subseteq K)]. \tag{2.5}$$

Через $L(K)$ обозначим семейство ограниченных функций l: $K\to\mathbf{R}$ таких, что $l(x, z)\geqslant l(x, y)+l(y, z)$, (x, y), $(y, z)\in K$, и при этом для любого y функция $l(\cdot, y)$ полунепрерывна снизу на множестве $\{x\mid(x, y)\in K\}\setminus\{y\}$. Положим $\mathscr{L}=\bigcup_{\mathscr{K}}L(K)$. Рассматривая в качестве искомых селекторов системы вида

$$\varphi_l(x)=\{y\in\alpha(x)\mid l(x, y)>d(x, y)\}\cup\{x\},\quad x\in X,$$

получаем следующий признак достижимости.

Теорема 2.2. *Если $\alpha^{-1}(x)$ открыты для всех $x\in X$ и при этом существует функция $l\in\mathscr{L}$ такая, что*

$$\forall x\notin C(\alpha)\exists y\in\alpha(x)[l(x, y)>d(x, y)],$$

то ядро $C(\alpha)$ достижимо.

Доказательство. По условию теоремы существует функция $l\in\mathscr{L}$, определенная на некотором множестве $K\in\mathscr{K}$ такая, что для любого $x\notin C(\alpha)$ найдется $y\in\alpha(x)\cap K(x)$, где

$$K(x)=\{y\in X\mid(x, y)\in K, l(x, y)>d(x, y)\}.$$

Положим $\psi_l(x)=\alpha(x)\cap K(x)\cup\{x\}$, $x\in X$. Ясно, что $\psi_l\subseteq\varphi^\alpha$, и при этом $E_{\psi_l}=C(\alpha)$. Доопределяя, если это необходимо, функцию l по формуле $l(x,\ x)=0$ $(x\in X)$, получаем, что ψ_l допускает обобщенную функцию Ляпунова. В силу предложения 2.3 для завершения доказательства теоремы 2.2 остается установить полунепрерывность снизу ДС ψ_l. Пусть $x\in X$, $y\in\psi_l(x)$ и $x=\lim x_r$. Если $y=x$, то, полагая $y_r=x_r$, имеем требуемое $y_r\in\psi_l(x_r)$, $r=0,\ 1,\ \ldots$. Если же $y\neq x$, то ввиду открытости $\alpha^{-1}(x)$ и полунепрерывности снизу $l(\cdot,\ y)$ на $X\setminus\{y\}$ найдется окрестность U_x точки x такая, что $x'\in\alpha^{-1}(y)$ и $l(x',\ y)-d(x',\ y)>0$ для всех $x'\in U_x$. Стало быть, $l(x_r,\ y)>d(x_r,\ y)$ для всех номеров, больших некоторого r_0. Полагая $y_r=x_r$ для $r\leqslant r_0$ и $y_r=y$ для $r>r_0$, получаем $y_r\in\psi_l(x_r)$ $(r\geqslant 0)$ и $y=\lim y_r$. Таким образом, ДС ψ_l полунепрерывна снизу, что и завершает доказательство теоремы 2.2.

Заметим, что теорема 2.2 остается справедливой, если требовать лишь полунепрерывности снизу для φ^α, предполагая, что $\alpha\subseteq K$ и l: $K\to\mathbf{R}$ полунепрерывна снизу по совокупности аргументов.

Следствие 2.3. *Если X компактно, φ^α — полунепрерывна снизу и при этом существует непрерывная функция u: $X\to\mathbf{R}$ такая, что*

$$\forall x\notin C(\alpha)\,\exists y\in\alpha(x)[u(x)-u(y)>d(x,\ y)], \qquad (2.6)$$

то ядро игры $\Gamma=(X,\ \alpha)$ достижимо.

2.3. Рассмотрим конкретизацию простейшей схемы доказательства достижимости ядра для случая кооперативных игр с побочными платежами. Отметим сразу же, что отношение доминирования

$$x\alpha_v y\Leftrightarrow\exists S\subseteq N[(x_i<y_i,\ i\in S)\,\&\,(y(S)\leqslant v(S))],$$

отвечающее КИ $v\in V$, как правило, нетранзитивно и неациклично. Поэтому система $x\mapsto\alpha_v(x),x\in I(v)\setminus C(\alpha_v)$ может допускать траектории, никоим образом не аппроксимирующие ядро $C(\alpha_v)$. Кроме того, уже простейшие примеры игр трех лиц показывают, что положительная доля их дележей обладает тем свойством, что все начинающиеся в них конечные монотонные траектории не достигают ядра.

Таким образом, за исключением отдельных случаев, когда ядра являются слабо внешне устойчивыми, речь может идти лишь о выяснении условий, при которых $C(\alpha_v)$ является предельным НМ-решением. Вместе с тем использование схемы, предложенной в предыдущем пункте, позволяет не только установить достижимость ядра любой КИ $v\in V$, но и построить надлежащие селекторы ДС

$$\varphi^v(x)=\{y\in I(v)\,|\,x\alpha_v y\}\cup\{x\},\quad x\in I(v),$$

финальные множества которых глобально устойчивы и совпадают с $C(\alpha_v)$.

Итак, пусть v — произвольная кооперативная игра n лиц с побочными платежами такая что $C(\alpha_v)\neq\varnothing$. Поскольку $I(v)$ компактно, а все множества $\alpha_v^{-1}(x)$ открыты, для доказательства достижимости $C(\alpha_v)$ достаточно (на основании следствия 2.3), построить непрерывную функцию u: $I(v)\to\mathbf{R}$, удовлетворяющую условию (2.6) для $\alpha=\alpha_v$. Зафиксируем в качестве метрики d на $I(v)$ евклидово расстояние $d(x,\ y)=\left[\sum_N(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$ и покажем, что требуемыми свойствами обладает функция $u_v(x)=4nd(x,\ C(\alpha_v))$, $x\in I(v)$, где $d(x,\ Y)$ — расстояние (в метрике d) от точки x до множества Y.

Предложение 2.5. *Для любого $x\notin C(\alpha_v)$ существует $z\in\alpha_v(x)$ такой, что*

$$u_v(x)-u_v(z)>d(x,\ z). \qquad (2.7)$$

Доказательство. Пусть x — произвольный элемент из $I(v)\setminus C(\alpha_v)$. Покажем, что существует $z\in I(v)$, удовлетворяющий неравенству (2.7) и следующему ослабленному требованию доминирования: $z\in\beta_v(x)$, где

$$x\beta_v z\Leftrightarrow\exists S\subseteq N\,[(x_i\leqslant z_i,\ i\in S)\,\&\,(x(S)<z(S)\leqslant v(S))].$$

Существование упомянутого z обеспечивает справедливость предложения 2.5, поскольку при выполнении условия $x\beta_v z$ всякая окрестность z содержит элементы, доминирующие (в смысле α_v) дележ x, а соотношение $u_v(x)-u_v(z)>d(x,\ z)$ ввиду непрерывности u_v выполняется и в некоторой окрестности z.

Не уменьшая общности, будем считать, что $v(\{i\})=0$ для всех $i\in N$. Рассмотрим функцию $\bar{v}(S)=\min\{v(S),\ v(N)\}$, $S\subseteq N$. Поскольку $\alpha_{\bar{v}}\subseteq\alpha_v$, $I(v)=I(\bar{v})$ и $C(\alpha_v)=C(\alpha_{\bar{v}})=C(\bar{v})$, для наших целей достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда $v(S)\leqslant v(N)$ $(S\supseteq N)$ и стало быть,

$$C(\alpha_v)=\{x\in I(v)\,|\,x(S)\geqslant v(S),\ S\subseteq N\}. \tag{2.8}$$

Для построения $z\in I(v)$, удовлетворяющего условию (2.7) и соотношению $z\in\beta_v(x)$, рассмотрим $y\in C(v)$ такой, что $d(x,\ y)=d(x,\ C(x))$. Покажем, что непустое семейство $\sigma_x=\{T\,|\,x(T)<v(T)\}$ содержит коалицию S, для которой $y(S)=v(S)$. Действительно, в противном случае ввиду (2.8) для всех $T\in\sigma_x$ выполняются неравенства $y(T)>v(T)$. Но тогда при достаточно малом $\lambda\in(0,\ 1)$ элемент $y'=\lambda x+(1-\lambda)y$ принадлежит $C(v)$. В то же время $d(x,\ y')<d(x,\ y)$, что противоречит предположению $d(x,\ y)=\min\{d(x,\ x')\,|\,x'\in C(v)\}$. Итак, существует коалиция $S\subseteq N$ такая, что $x(S)<v(S)$ и $y(S)=v(S)$. Определим множества

$$S_1=\{i\in S\,|\,x_i<y_i\},\ S_2=\{i\in N\backslash S\,|\,x_i>y_i\},$$
$$T_1=\{i\in S\,|\,x_i\geqslant y_i\},\ T_2=\{i\in N\backslash S\,|\,x_i\leqslant y_i\}.$$

В силу выбора S, x и y множества S_1 и S_2 непусты. Если при этом $T_1^+=\{i\in T_1\,|\,x_i>y_i\}=\varnothing$, в качестве искомого можно взять $z=y$.

Рассмотрим случай, когда $T_1^+\neq\varnothing$. Положим $e(x,\ S)=v(S)-x(S)$, $q_j=e(x,\ S)/|y(S_j)-x(S_j)|$, $j=1,\ 2$, и, следуя [15], определим z по формуле

$$z_i=\begin{cases}x_i+q_1(y_i-x_i), & i\in S_1,\\ x_i+q_2(y_i-x_i), & i\in S_2,\\ x_i, & i\in T_1\cup T_2.\end{cases}$$

Ясно, что $z\in I(v)$ и $x\beta_v z$. В самом деле, ввиду соотношений

$$e(x,\ S)=\left|\sum_{i\in S_j\cup T_j}(y_i-x_i)\right|,\quad j=1,\ 2, \tag{2.9}$$

справедливы включения $q_1,\ q_2\in(0,\ 1]$. Поэтому для всех $i\in S_1\cup S_2$ имеют место неравенства $z_i\geqslant\min\{x_i,\ y_i\}\geqslant 0$, которые наряду с соотношениями $e(x,\ S)=q_j|y(S_j)-x(S_j)|$ $(j=1,\ 2)$ и доказывают принадлежность $z\in I(v)$. Что касается условия $x\beta_v z$, то для его проверки достаточно заметить, что $S_1\neq\varnothing$, причем $x_i=z_i$ $(i\in T_1)$, $z(S)=x(S)+e(x,\ S)=v(S)$ и, следовательно, $x_i\leqslant z_i$, $i\in S$, $x(S)<z(S)\leqslant v(S)$.

Покажем теперь, что для z выполняется (2.7). Для этого установим верхнюю и нижнюю оценки $d(x,\ z)$ и $u_v(x)-u_v(z)$ соответственно. Учитывая определение множеств S_1 и S_2, имеем

$$d(x,\ z)=\left[\sum_{j=1}^{2}q_j^2\left(\sum_{S_j}(y_i-x_i)^2\right)\right]^{1/2}=$$
$$=e(x,\ S)\left[\sum_{j=1}^{2}\sum_{S_j}(y_i-x_i)^2/(y(S_j)-x(S_j))^2\right]^{1/2}\leqslant\sqrt{2}\,e(x,\ S).$$

Далее, непосредственно из определения функции u_v вытекает неравенства

$$(4n)^{-1}(u_v(x)-u_v(z))\geqslant d(x,\ y)-d(z,\ y). \tag{2.10}$$

Получим нижнюю оценку для $d(x, y)-d(z, y)$. С этой целью заметим, что в силу определения z справедливо равенство $d(z, y)=[d^2(x, y)-(Q_1+Q_2)]^{1/2}$, где $Q_j=\left(2q_j-q_j^2\right)\sum_{S_j}(x_i-y_i)^2$, $j=1, 2$. При этом ввиду q_1, $q_2\in(0, 1]$, справедливы неравенства $2q_1-q_1^2>0$, $2q_2-q_2^2>0$ и, следовательно, $Q_1>0$, $Q_2>0$. Поэтому

$$d(x, y)-d(z, y)=\frac{d^2(x, y)-d^2(z, y)}{d(x, y)+d(z, y)}\geqslant(Q_1+Q_2)/2d(x, y). \qquad (2.11)$$

Для оценки величины $(Q_1+Q_2)/2d(x, y)$ воспользуемся вытекающим из неравенства Коши — Буняковского соотношением

$$\sum_{i=1}^{m}a_i^2\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)^2\geqslant 1/m. \qquad (2.12)$$

Именно, из определения множеств T_1, T_2 и соотношений (2.9) вытекают неравенства

$$\sum_{T_j}(x_i-y_i)^2\leqslant(x(T_j)-y(T_j))^2\leqslant(y(S_j)-x(S_j))^2, \quad j=1, 2.$$

В силу (2.12)

$$\sum_{T_j}(x_i-y_i)^2\leqslant(y(S_j)-x(S_j))^2\leqslant|S_j|\sum_{S_j}(x_i-y_i)^2, \quad j=1, 2. \qquad (2.13)$$

Следовательно,

$$d(x, y)\leqslant\sqrt{n}\left[\sum_{S_1\cup S_2}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2},$$

откуда, учитывая определение Q_1, Q_2, имеем

$$d(x, y)\leqslant\sqrt{n}\left(\sum_{j=1}^{2}Q_j/2q_j-q_j^2\right)^{1/2}.$$

Но тогда на основании (2.11)

$$d(x, y)-d(z, y)\geqslant\frac{Q_1+Q_2}{2\sqrt{n}\left(\sum_{j=1}^{2}Q_j/2q_j-q_j^2\right)^{1/2}}. \qquad (2.14)$$

Оценим знаменатель правой части неравенства (2.14). С этой целью, используя определение q_1, q_2, перепишем последние неравенства в соотношениях (2.13) в виде

$$q_j^2\sum_{S_j}(x_i-y_i)^2\geqslant e^2(x, S)/|S_j|, \quad j=1, 2.$$

Отсюда, учитывая, что $2q_j-q_j^2\geqslant q_j$ $(j=1, 2)$, получаем $2q_j-q_j^2\geqslant e^2(x, S)/$ $/|S_j|Q_j$, $j=1, 2$. Поэтому

$$2\sqrt{n}\left(\sum_{j=1}^{2}Q_j/2q_j-q_j^2\right)^{1/2}\leqslant 2\sqrt{n}\left(\sum_{j=1}^{2}|S_j|Q_j^2\right)^{1/2}\Bigg/e(x, S)\leqslant$$
$$\leqslant 2n\left(Q_1^2+Q_2^2\right)^{1/2}/e(x, S)\leqslant 2n(Q_1+Q_2)/e(x, S).$$

Но тогда ввиду соотношений (2.10) и (2.14) $u_v(x)-v_v(z)\geqslant 2e(x, S)$. Привлекая установленную ранее оценку $d(x, z)\leqslant\sqrt{2}e(x, S)$, получаем требуемое $u_v(x)-u_v(z)>d(x, z)$, что и завершает доказательство предложения 2.5. Учитывая, что функции u_v непрерывны, на основании доказанного утверждения и следствия 2.3 получаем искомый результат.

Теорема 2.3. *Ядра кооперативных игр с побочными платежами достижимы.*

§ 3. РАВНОВЕСНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ВПОЛНЕ ДОГОВОРНЫХ СОСТОЯНИЙ В МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ОБМЕНА

Проблеме характеризации ядер в моделях математической экономики присуща главным образом стоимостная специфика [2, 16]. Типичная постановка задачи имеет следующий вид: какому принципу индивидуальной рациональности отвечает то или иное понятие коллективной устойчивости? При этом под индивидуальной рациональностью понимают равновесие интересов автономных участников в условиях некоторого стоимостного механизма децентрализации. Ниже предлагается равновесная характеризация вполне договорных ядер для достаточно широкого класса игр, порожденных моделями экономического обмена [5, 6]. Ввиду сравнительно громоздкой логической структуры рассматриваемых отношений доминирования значительное внимание уделяется дескриптивным аспектам соответствующих понятий.

3.1. Всюду далее рассматривается модель экономического обмена

$$\mathscr{E} = \langle N, \{X_i, w^i, \alpha_i\}_N, \sigma\rangle,$$

где $N = \{1, \ldots, n\}$ — множество участников, $X_i \subseteq \mathbf{R}^l$, $w^i \in \mathbf{R}^l$, $\alpha_i \subseteq X_i \times X_i$ — их потребительские множества, начальные запасы и отношения предпочтения соответственно. Семейство $\sigma \subseteq 2^N$ определяет совокупность допустимых коалиций $S \subseteq N$, которые могут объединять возможности своих участников с целью улучшения не устраивающих их распределений суммарного запаса $\sum\limits_N w^i$.

Приступая к формальному определению интересующего нас блокирования в $\mathscr{E}$, модифицируем некоторые определения из [5] таким образом, чтобы они явным образом отражали ограничения на типовую структуру элементарных обменов в рамках коалиций из σ. Для каждого $S \in \sigma$ зафиксируем некоторое множество $M_S \subseteq \mathbf{R}^l$ и положим $M_\sigma = \{M_S\}_\sigma$.

Определение 3.1. *Договором* (*типа* M_σ) *коалиции* $S \in \sigma$ *называется совокупность векторов* $\mathrm{v} = \{\mathrm{v}_{ij}\}_{i,j\in S}$, *удовлетворяющая условиям:* (а) $\mathrm{v}_{ij} \in M_S$ *для всех* $i, j \in S$, (б) $\mathrm{v}_{ij} = -\mathrm{v}_{ji}$ *для всех* $i, j \in S$.

Коалицию S, в рамках которой заключается договор v, будем обозначать также через $S(\mathrm{v})$.

Компоненты вектора v_{ij}, фигурирующего в определении договора v, указывают объемы обмена между участниками i, $j \in S(\mathrm{v})$. При этом положительные компоненты v_{ij} определяют количество продуктов соответствующего наименования, которые участник j должен передать участнику i, а абсолютные значения отрицательных — количество продуктов, которые участник i должен передать участнику j.

Множества M_S определяют тип элементарных обменов v_{ij}, используемых в договорах, заключаемых коалициями $S \in \sigma$. Например, при $M_S = \{x \in \mathbf{R}^l | p_S \cdot x = 0\}$ единственное ограничение на v_{ij} состоит в том, чтобы обмены были эквивалентными в (договорных) ценах $p_s \in \mathbf{R}^l$.

Будем говорить, что *договор* v *правильный*, если для любого $i \in S(\mathrm{v})$ найдутся j, $k \in S(\mathrm{v})$ такие, что v_{ij} содержит положительные, а v_{ik} — отрицательные компоненты. *Системой договоров* называется всякое конечное множество правильных договоров типа M_σ.

Таким образом, предполагается, что между участниками одной и той же коалиции $S \in \sigma$ возможно заключение нескольких договоров. Отметим также, что система договоров может содержать несколько экземпляров идентичных (по значениям v_{ij}) договоров, отличающихся только своими номерами. Поэтому, как принято в подобных ситуациях, будем считать, что системы $\mathscr{V} = \{\mathrm{v}^r\}_{\mathscr{R}}$ и $\tilde{\mathscr{V}} = \{\tilde{\mathrm{v}}^r\}_{\tilde{\mathscr{R}}}$ совпадают в том и только том случае, когда $\mathscr{R} = \tilde{\mathscr{R}}$ и $\mathrm{v}^r = \tilde{\mathrm{v}}^r$ для всех $r \in \mathscr{R}$.

Обозначим через $\Delta_i(\mathscr{V})$ суммарный набор потребительских благ, получаемых и передаваемых участником $i \in N$ в результате заключения системы договоров $\mathscr{V} = \{\mathrm{v}^r\}_{\mathscr{R}}$

$$\Delta_i(\mathscr{V}) = \sum_{r|i\in S(\mathrm{v}^r)} \cdot \sum_{j\in S(\mathrm{v}^r)} \mathrm{v}^r_{ij}.$$

В силу равенства $\sum_N \Delta_i(\mathscr{V}) = 0$, вытекающего из соотношений $\mathrm{v}^r_{ij} = -\mathrm{v}^r_{ji}$, итоговое состояние $x(\mathscr{V}) = (x^i(\mathscr{V}))_N$, определяемое формулой $x^i(\mathscr{V}) = w^i + \Delta_i(\mathscr{V})$, $i \in N$, представляет из себя перераспределение суммарного начального запаса $\sum_N w^i$.

Определение 3.2. *Система договоров $\mathscr{V} = \{\mathrm{v}^r\}_{\mathscr{R}}$ называется допустимой, если $x^i(\mathscr{V}) \in X_i$ для всех $i \in N$.*

Допустимость системы $\mathscr{V}$ гарантирует принадлежность состояния $x(\mathscr{V})$ множеству

$$X(N) = \left\{(x^i)_N \in \prod_N X_i \,\middle|\, \sum_N x^i = \sum_N w^i\right\}$$

сбалансированных распределений $\mathscr{E}$. При этом каждый из участников системы имеет принципиальную возможность разорвать любой из касающихся его договоров. Для более полного описания исследуемых форм разрыва договоров введем следующие обозначения. Пусть $\mathscr{V} = \{\mathrm{v}^r\}_{\mathscr{R}}$ — произвольное множество договоров, $\mathscr{R}'$ — некоторое (быть может, пустое) подмножество $\mathscr{R}$. Обозначим через $A(\mathscr{V}, \mathscr{R}', \mathscr{E})$ совокупность всех допустимых систем договоров $\tilde{\mathscr{V}} = \{\tilde{\mathrm{v}}^r\}_{\tilde{\mathscr{R}}}$ модели обмена $\mathscr{E}$, удовлетворяющих условиям: а) $\tilde{\mathscr{R}} \subseteq \mathscr{R} \setminus \mathscr{R}'$, $\mathrm{v}^r = \tilde{\mathrm{v}}^r$ для всех $r \in \tilde{\mathscr{R}}$; (б) $\tilde{\mathscr{V}}$ — максимальная по включению среди всех допустимых систем договоров, удовлетворяющих условию (а).

Множество $A(\mathscr{V}, \mathscr{R}', \mathscr{E})$ характеризует результат процедуры разрыва договоров, состоящей из следующих этапов. На первом аннулируются все договоры v^r $(r \in \mathscr{R}')$. Если получившаяся система $\{\mathrm{v}^r\}_{\mathscr{R} \setminus \mathscr{R}'}$ допустима, то она и является единственным элементом $A(\mathscr{V}, \mathscr{R}', \mathscr{E})$. Если же нет, то на заключительном этапе аннулируется некоторое подмножество договоров из $\{\mathrm{v}^r\}_{\mathscr{R} \setminus \mathscr{R}'}$ с тем, чтобы обеспечить допустимость оставшихся. Условие (б) из определения $A(\mathscr{V}, \mathscr{R}', \mathscr{E})$ требует, чтобы при этом разрывался лишь необходимый минимум договоров. Указанная процедура, вообще говоря, неоднозначна, и ее итогом может оказаться как пустое множество, так и целое семейство допустимых систем.

Охарактеризуем возможности коалиции $S \in \sigma$ по блокированию состояния $x(\mathscr{V})$, порождаемого допустимой системой договоров $\mathscr{V} = \{\mathrm{v}^r\}_{\mathscr{R}}$. Будем предполагать, что наряду с разрывом договоров, отвечающих некоторой части $\mathscr{R}'$ множества $\mathscr{R}^S = \{r \in \mathscr{R} | S(\mathrm{v}^r) \cap S \neq \varnothing\}$, коалиция S может заключить новый договор w. Обозначим через $\mathscr{E}_{\mathrm{w}}$ вариацию модели $\mathscr{E}$, порожденную договором w:

$$\mathscr{E}_{\mathrm{w}} = \langle N, \{X_i, w^i + \Delta_i(\mathrm{w}), \alpha_i\}_N, \sigma\rangle,$$

где в соответствии с введенными ранее обозначениями $\Delta_i(\mathrm{w}) = \sum_{j\in S(\mathrm{w})} \mathrm{w}_{ij}$, $i \in N$.

Определение 3.3. *Будем говорить, что коалиция $S \in \sigma$ блокирует систему договоров $\mathscr{V} = \{\mathrm{v}^r\}_{\mathscr{R}}$, если найдутся $\mathscr{R}' \subseteq \mathscr{R}^S$, правильный договор w типа M_σ и система $\mathscr{V}' \in A(\mathscr{V}, \mathscr{R}', \mathscr{E}_{\mathrm{w}})$ такие, что $S(\mathrm{w}) = S$ и $x^i(\mathscr{V}) \alpha_i x^i(\mathscr{V}' \cup \{\mathrm{w}\})$ для всех $i \in S$, причем $x^k(\mathscr{V}' \cup \{\mathrm{w}\}) \in \mathscr{P}_k(x^k(\mathscr{V}))$ для некоторого $k \in S$* *).

*) Здесь и далее $\mathscr{P}_i(z) = \{x^i \in \alpha_i(z) \,|\, (x^i, z) \notin \alpha_i\}$.

Правильную систему договоров $\mathscr{V}$ будем называть *квазиустойчивой*, если не существует коалиции $S \in \sigma$, которая блокирует $\mathscr{V}$.

Выделим состояния $\mathscr{E}$, коллективная устойчивость которых не зависит (в рамках M_σ) от конкретного устройства порождающих их систем договоров. Пусть $x = (x^i)_N$ — произвольное состояние из $X(N)$. Обозначим через $\mathscr{W}(x)$ множество всех правильных систем договоров $\mathscr{V}$ таких, что $x = x(\mathscr{V})$.

Определение 3.4. *Состояние $x \in X(N)$ назовем вполне договорным, если множество $\mathscr{W}(x)$ непусто и все содержащиеся в нем системы договоров квазиустойчивы.*

Множество вполне договорных состояний обозначим через $D_0(\mathscr{E}) = D_0^{M\sigma}(\mathscr{E})$ и будем называть *вполне договорным множеством модели* $\mathscr{E}$.

В силу определения всякая правильная система $\mathscr{V} \in \mathscr{W}(x)$, обеспечивающая вполне договорное состояние x, является «взаимовыгодной» с точки зрения любой из коалиций $S \in \sigma$. Действительно, разрыв одного или нескольких договоров из $\mathscr{V}$, в которых участвует S, в любом случае не приводит к улучшению ее положения. Более того, в случае полноты бинарных отношений α_i всякий разрыв такого рода, приводящий к улучшению позиции одного из участников S, с неизбежностью ухудшает положение какого-либо из его партнеров.

Всякая коалиционная структура представима в виде объединения подструктур, вписанных в соответствующие компоненты связности множества N. Поэтому всюду в дальнейшем, не уменьшая общности, будем предполагать, что σ неразложима. Напомним [6], что коалиционная структура σ называется *неразложимой*, если для любого нетривиального разбиения $\{N_1, N_2\}$ множества N существует коалиция $S \in \sigma$ такая, что $S \cap N_1 \neq \varnothing$, $S \cap N_2 \neq \varnothing$. Кроме того, далее будем предполагать, что все множества M_S одинаковы и представляют собой некоторое подпространство $M \subseteq \mathbf{R}^l$, обладающее тем свойством, что каждый его ненулевой элемент содержит компоненты разных знаков. Отметим, что на основании теоремы отделимости подпространство $M \neq \mathbf{R}^l$ обладает указанным свойством в том и только том случае, когда его поляра $M^\circ = \{p \in \mathbf{R}^l | p \cdot x = 0,\ x \in M\}$ удовлетворяет условию

$$M^\circ \cap \operatorname{int} \mathbf{R}^l_+ \neq \varnothing. \tag{3.1}$$

Ясно, что в этом случае M допускает представление $M = \{x \in \mathbf{R}^l | p \cdot x = 0,\ p \in P_M\}$, где P_M — конечное подмножество из $\mathbf{R}^l$, среди элементов которого есть строго положительные векторы. Таким образом, ограничения на типы рассматриваемых далее договоров имеют балансовый характер, определяемый системой (фиксированных) цен из P_M.

Обозначим через $\mathscr{W}_M$ совокупность всех систем договоров типа M_σ, где $M_S = M$ для всех $S \in \sigma$. Договоры указанного типа в дальнейшем будем называть *M-договорами*.

Дадим более подробное описание структуры блокирования, ядром которого является множество $D_0(\mathscr{E}) = D_0^M(\mathscr{E})$. С этой целью охарактеризуем сначала совокупность состояний, достижимых посредством заключения M-договоров. Положим $M_{\mathscr{E}}(\mathscr{E}) = \left\{x \in \prod_N X_i \,|\, \exists \mathscr{V} \in \mathscr{W}_M (x = x(\mathscr{V}))\right\}$.

Предложение 3.1. *Если коалиционная структура σ неразложима, то*

$$M_{\mathscr{E}}(N) = \{x \in X(N) \,|\, \exists \Delta \in \triangle_M(N)\, [x = w + \Delta]\},$$

где $\triangle_M(N) = \left\{\Delta = (\Delta^i)_N \in M^N \,\middle|\, \sum_N \Delta^i = 0\right\}$, $w = (w^1, \ldots, w^n)$.

Доказательство. Если $x \in M_{\mathscr{E}}(N)$, то $x = x(\mathscr{V}) = w + \Delta(\mathscr{V})$ для некоторого $\mathscr{V} \in \mathscr{W}_M$, где $\Delta(\mathscr{V}) = (\Delta_i(\mathscr{V}))_N$. Непосредственно из определения M-договора вытекают искомые соотношения $\Delta_i(\mathscr{V}) \in M$, $\sum_N \Delta_i(\mathscr{V}) = 0$.

Пусть теперь $x = w + \Delta$, где $\Delta \in \Delta_M(N)$. Покажем, что существует $\mathscr{V} \in \mathscr{W}_M$ такой, что $\Delta = \Delta(\mathscr{V})$. Доказательство проведем индукцией по $|N|$. Для $|N| = 2$ искомая система состоит из одного договора $\{v_{12}, v_{21}\}$, где $v_{12} = \Delta^1$, $v_{21} = -\Delta^1$. Пусть утверждение установлено для всех случаев, когда число участников экономики не превышает m. Рассмотрим ситуацию, когда $|N| = m+1$. Если $N \in \sigma$, то искомая система состоит из одного договора v, определяемого по формуле $v_{i,i+1} = \sum_{k=1}^{i} \Delta^k$ $(i = 1, \ldots, m)$, $v_{ij} = 0$ $(j - i > 1)$*). Если же $N \notin \sigma$, не уменьшая общности, будем считать, что найдется $S = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \sigma$, для которой $i_1, \ldots, i_{k-1}$ не входят ни в какую другую коалицию $S' \in \sigma$ (иначе заменяем σ подходящим вписанным в него покрытием σ', состоящим из двухэлементных множеств). Построим договор v^1, отвечающий коалиции S, по формуле $v_{i_s i_{s+1}} = \sum_{r=1}^{s} \Delta^{i_r}$ $(s = 1, \ldots, k-1)$, $v_{ij} = 0$ для остальных значений $i < j$, $i, j \in S$.

Далее, рассмотрим модель $\widetilde{\mathscr{E}} = \langle \widetilde{N}, \{\widetilde{X}_i, w^i, \widetilde{\alpha}_i\}_{\widetilde{N}}, \widetilde{\sigma} \rangle$, где $\widetilde{N} = (N \setminus S) \cup \{i_k\}$, $\widetilde{X}_i = X_i$, $\widetilde{w}^i = w^i$, $\widetilde{\alpha}_i = \alpha_i$ $(i \in \widetilde{N})$, а $\widetilde{\sigma} = \{K \cap \widetilde{N} | K \in \sigma\}$. Ясно, что $\widetilde{\sigma}$ неразложима. Поскольку векторы $\widetilde{\Delta}^i = \Delta^i$ $(i \in N \setminus S)$, $\widetilde{\Delta}^{i_k} = \sum_{r=1}^{k} \Delta^{i_r}$, принадлежащие M, удовлетворяют условию $\sum_{\widetilde{N}} \widetilde{\Delta}^i = 0$, на основании индукционного предположения существует система M-договоров $\mathscr{V} = \{v^r\}_{r=2}^{s}$ такая, что $\widetilde{\Delta} = \Delta(\mathscr{V})$. Тогда, как нетрудно проверить, $\Delta = \Delta(\mathscr{V} \cup \{v^1\})$, что и требовалось установить.

Важной характеристикой стратегических возможностей коалиций $S \in \sigma$ по блокированию того или иного распределения из $M_{\mathscr{E}}(N)$ является тот факт, что указанные возможности инварианты как относительно текущего состояния x, так и относительно конкретного выбора системы $\mathscr{V} \in \mathscr{W}(x)$. Опишем сначала множество доступных коалиции S приращений начального суммарного запаса $\sum_S w^i$, обеспечиваемых разрывами договоров некоторой системы $\mathscr{V} \in \mathscr{W}_M$. Положим

$$\mathscr{A}(\mathscr{V}, \mathscr{R}', S) = \bigcup_{w | S(w) = S} A(\mathscr{V}, \mathscr{R}', \mathscr{E}_w), \quad \mathscr{A}(\mathscr{V}, S) = \bigcup_{\mathscr{R}' \subseteq \mathscr{R}^S} \mathscr{A}(\mathscr{V}, \mathscr{R}', S).$$

Тогда упомянутое множество состоит из векторов вида $\Delta_S(\mathscr{V}') = \sum_S \Delta_i(\mathscr{V}')$, $\mathscr{V}' \in \mathscr{A}(\mathscr{V}, S)$. Из определения $\mathscr{A}(\mathscr{V}, S)$ вытекает, что $\sum_S w^i + \Delta_S(\mathscr{V}') \in \sum_S X_i$.

Таким образом, множество распределений из $\prod_S X_i$, достижимых усилиями коалиции S при разрыве договоров системы $\mathscr{V}$, имеет вид

$$\mathscr{X}_{\mathscr{V}}(S) = \left\{ x \in \prod_S X_i^M \,\middle|\, \exists \mathscr{V}' \in \mathscr{A}(\mathscr{V}, S) \left[\sum_S x^i = \sum_S w^i + \Delta_S(\mathscr{V}') \right] \right\},$$

где $X_i^M = X_i \cap \{w^i + M\}$, $i \in N$. Для характеристики возможностей S по блокированию состояния $x \in M_{\mathscr{E}}(N)$ следует учитывать уже объединение множеств $\mathscr{X}_{\mathscr{V}}(S)$ по всем $\mathscr{V} \in \mathscr{W}(x)$. Покажем, что такие объединения $Z_x(S) = \bigcup_{\mathscr{V} \in \mathscr{W}(x)} \mathscr{X}_{\mathscr{V}}(S)$ не зависят от класса эквивалентности $\mathscr{W}(x)$.

Предложение 3.2. *Для любых* $x, \widetilde{x} \in M_{\mathscr{E}}(N)$ *и* $S \in \sigma$ *справедливо равенство* $Z_x(S) = Z_{\widetilde{x}}(S)$.

---

*) Для определения договора v достаточно указать величины v_{ij} для $i < j$.

Доказательство. Зафиксируем $S \in \sigma$, x, $\tilde{x} \in M_{\mathscr{E}}(N)$ и покажем, что $Z_x(S) = Z_{\tilde{x}}(S)$. Рассмотрим произвольные системы договоров $\mathscr{V} \in \mathscr{W}(x)$ и $\mathscr{V}_0 = \{\mathrm{v}_0^r\}_{\mathscr{R}_0} \in A(\mathscr{V}, \mathscr{R}', \mathscr{E}_{\mathrm{w}}) \subseteq \mathscr{A}(\mathscr{V}, S)$, где w — некоторый M-договор коалиции S. Покажем, что найдется система $\mathscr{V}' \in \mathscr{W}(\tilde{x})$, надлежащий разрыв которой приводит к приращению величины $\sum_S w^i$, равному $\Delta_S(\mathscr{V}_0)$. Выберем какую-либо систему $\tilde{\mathscr{V}} = \{\tilde{\mathrm{v}}^r\}_{\tilde{\mathscr{R}}} \in \mathscr{W}(\tilde{x})$. Поскольку ненулевые элементы M имеют компоненты разных знаков, можно, не уменьшая общности, считать, что $\tilde{\mathscr{R}} = \mathscr{R}_0$, причем $S(\mathrm{v}_0^r) = S(\tilde{\mathrm{v}}^r)$ и $(\mathrm{v}_0^r)_{ij} \neq \tilde{\mathrm{v}}_{ij}^r$ для всех $r \in \mathscr{R}_0$, $i, j \in S(\mathrm{v}_0^r)$. Рассмотрим систему договоров $\mathscr{V}' = \{\mathrm{v}^{(r,0)}\}_{r \in \mathscr{R}_0} \cup \{\mathrm{v}^{(r,1)}\}_{r \in \mathscr{R}_0}$, где $\mathrm{v}_{ij}^{(r,0)} = (\mathrm{v}_0^r)_{ij}$, $\mathrm{v}_{ij}^{(r,1)} = \tilde{\mathrm{v}}_{ij}^r - (\mathrm{v}_0^r)_{ij}$.

Непосредственно из построения $\mathscr{V}'$ вытекает равенство $\Delta(\mathscr{V}') = \Delta(\mathscr{V})$, поэтому $\mathscr{V}' \in \mathscr{W}(\tilde{x})$. Положим $\mathscr{R} = \{(r, 1) \mid r \in \mathscr{R}_0^S\}$ и обозначим через $\mathscr{R}_1$ некоторую максимальную (быть может, и пустую) часть $\mathscr{R}_0 \setminus \mathscr{R}_0^S$, для которой множество договоров $\tilde{\mathscr{V}}_0 = \{\mathrm{v}^{r,0)}\}_{r \in \mathscr{R}_0} \cup \{\mathrm{v}^{(r,1)}\}_{r \in \mathscr{R}_1}$ принадлежит $A(\mathscr{V}', \mathscr{R}, \mathscr{E}_{\mathrm{w}})$. Непосредственно из построения имеем $\Delta_S(\tilde{\mathscr{V}}_0) = \Delta_S(\mathscr{V}_0)$. Но это и означает, что разрыв договоров системы $\mathscr{V}' \in \mathscr{W}(\tilde{x})$ с номерами из $\mathscr{R}$ позволяет S получить такое же приращение начального суммарного запаса $\sum_S w^i$, как и реализация $\mathscr{V}_0 \in A(\mathscr{V}, \mathscr{R}', \mathscr{E}_{\mathrm{w}})$.

Ввиду произвольности x, $\tilde{x}$, $\mathscr{V}$, $\mathscr{V}_0$ и w, приведенные аргументы и доказывают предложение 3.2.

Замечание 3.1. Как видно из доказательства, предложение 3.2 (в надлежащей модификации) справедливо и для случая несовпадающих подпространств M_S, содержащих элементы с компонентами разных знаков.

Итак, распределения, достижимые усилиями коалиций $S \in \sigma$, в текущем состоянии $x \in M_{\mathscr{E}}(N)$ не зависят ни от x, ни от $\mathscr{V} \in \mathscr{W}(x)$ и определяются кооперативной игрой (в стратегической форме): $S \mapsto G_{\mathscr{E}}^M(S)$, где $G_{\mathscr{E}}^M(S) = \mathrm{Pr}_S M_{\mathscr{E}}(N)$ для всех $S \in \sigma \cup \{N\}$.

Определение 3.5. *Будем говорить, что состояние* $x \in M_{\mathscr{E}}(N)$ *M-блокируется состоянием* $y \in M_{\mathscr{E}}(N)$, *если существует коалиция* $S \in \sigma$ *такая, что* $x^i \alpha_i y^i$ *для всех* $i \in S$, *причем* $y^k \in \mathscr{P}_k(x^k)$ *для некоторого* $k \in S$.

Ядро введенного бинарного отношения M-блокирования обозначим через $C_0(\mathscr{E}) = C_0^M(\mathscr{E})$. Справедливо

Предложение 3.3. *Множество вполне договорных состояний* $D_0^M(\mathscr{E})$ *совпадает с ядром* $C_0^M(\mathscr{E})$ *кооперативной игры* $G_{\mathscr{E}}^M$.

3.2. Редукция, осуществляемая предложением 3.3, позволяет в традиционных рамках теории кооперативных игр находить условия, обеспечивающие существование и характеризацию вполне договорных состояний для широкого класса моделей экономического обмена.

Ограничимся характеризацией множества $D_0^M(\mathscr{E})$ для случая, когда M является гиперподпространством $\mathbf{R}^l$ $(\dim M = l - 1)$. В этой ситуации в естественных условиях регулярности вполне договорные состояния оказываются равновесными и, наоборот, каждое равновесное состояние — вполне договорным при подходящем выборе M. Напомним [3], что состояние $\bar{x} \in X(N)$ называется *равновесным* (*по Вальрасу*), если найдется вектор $\bar{p} \in \mathbf{R}^l$ такой, что $\bar{x}^i \in B_i(\bar{p})$ и $\mathscr{P}_i(\bar{x}^i) \cap B_i(\bar{p}) = \varnothing$ для всех $i \in N$, где $B_i(\bar{p})$ — бюджетное множество участника i:

$$B_i(\bar{p}) = \{x^i \in X_i \mid \bar{p} \cdot x^i \leqslant \bar{p} \cdot w^i\}.$$

Вектор $\bar{p}$, фигурирующий в определении равновесного состояния $\bar{x}$, называют *равновесными ценами*, отвечающими $\bar{x}$. Вполне договорность распределений из множества $W(\mathscr{E})$ равновесных состояний модели $\mathscr{E}$ определяется лишь наличием равновесных цен, согласованных с условием (3.1).

Теорема 3.1. *Пусть* $\bar{x} \in W(\mathscr{E})$. *Если среди отвечающих ему равновесных цен существует строго положительный вектор* $\bar{p}$, *то* $\bar{x} \in D_0^M(\mathscr{E})$ *при* $M = \{x \in \mathbf{R}^l | \bar{p} \cdot x = 0\}$.

Доказательство. Из того, что $\bar{x}$ содержится в множестве $X(N) \cap \prod_N B_i(\bar{p})$, вытекают включения $\Delta_i = \bar{x}^i - w^i \in M$, $i \in N$. Поскольку σ неразложима, на основании предложения 3.1 имеем $\bar{x} = w + \Delta \in M_{\mathscr{E}}(N)$. Допустим, что $\bar{x}$ M-блокируется некоторым состоянием $x \in M_{\mathscr{E}}(N)$. Тогда найдутся коалиция $S \in \sigma$ и элемент $k \in S$ такие, что $x^k \in \mathscr{P}_k(\bar{x}^k)$. В силу определения для равновесного состояния $\bar{x}$ должно выполняться соотношение $\mathscr{P}_k(\bar{x}^k) \cap B_k(\bar{p}) = \varnothing$. Но тогда $\bar{p} \cdot x^k > \bar{p} \cdot w^k$, что противоречит включению $x^k \in X_k^M$, влекущему равенство $\bar{p} \cdot x^k = \bar{p} \cdot w^k$.

Итак $\bar{x} \in C_0^M(\mathscr{E})$. В силу предложения 3.3 это и означает, что $\bar{x}$ — вполне договорное состояние модели $\mathscr{E}$, что и требовалось установить.

Справедливость обратного вложения $D_0^M(\mathscr{E}) \subseteq W(\mathscr{E})$ наряду со стандартными условиями выпуклости потребительских множеств и отношений предпочтения требует определенной согласованности структуры σ с остальными параметрами модели $\mathscr{E}$.

Ниже рассматриваются модели обмена, в которых для всех $i \in N$ выполняются следующие условия:

(а) X_i выпуклые;

(б) α_i рефлексивные;

(в) для каждого $x^i \in \tilde{X}_i = \mathrm{Pr}_{\{i\}}\, X(N)$ существует $u \in \operatorname{int} R_+^l$ такой, что $x^i + u \in \mathscr{P}_i(x^i)$;

(г) $\mathscr{P}_i(x^i)$ выпуклые, причем $(x^i, y^i] \subseteq \mathscr{P}_i(x^i)$ для всех $x^i \in X_i$, $y^i \in \mathscr{P}_i(x^i)$, где $(x^i, y^i] = \{tx^i + (1-t)y^i | t \in (0, 1)\}$.

Будем говорить, что множество $T \subseteq N$ является *σ-делимым*, если для любого $i \in N$ существует коалиция $S \in \sigma$, содержащая $\{i\}$ и не содержащая T (т. е. $i \in S$ и $T \not\subseteq S$). Для $x \in M_{\mathscr{E}}(N)$ положим $N_x = \{i \in N | x^i \in \operatorname{int}_M X_i\}$, где $\operatorname{int}_M X_i$ — внутренность X_i^M в подпространстве $w^i + M$. Справедлива

Теорема 3.2. *Пусть* $\bar{x} \in D_0^M(\mathscr{E})$. *Если* $N_{\bar{x}}$ *является σ-делимым множеством, то* $\bar{x}$ *— равновесное состояние.*

Доказательство. Пусть i — произвольный элемент N. Покажем, что $\bar{x}^i$ принадлежит ядру иррефлексивного бинарного отношения α_i^0 на X_i^M, где $x^i \alpha_i^0 y^i \Leftrightarrow y^i \in \mathscr{P}_i(x^i)$. Сначала убедимся, что $\bar{x}^i$ является локально-максимальным элементом в X_i^M. С этой целью выберем некоторую коалицию $S_0 \in \sigma$, включающую i и не содержащую некоторого k из $N_{\bar{x}}$. Существование такой коалиции обеспечивается σ-делимостью $N_{\bar{x}}$. Поскольку $\bar{x}^k \in \operatorname{int}_M X_k$, найдется окрестность нуля U в M такая, что $\bar{x}^k + U \subseteq X_k^M$. Допустим, что существует элемент $u \in U$, для которого $\bar{x}^i + u \in \mathscr{P}_i(\bar{x}^i)$. В силу предложения 3.1 состояние $y \in X(N)$ с компонентами $y^k = \bar{x}^k - u$, $y^i = \bar{x}^i + u$, $y^j = \bar{x}^j$ $(j \neq i, k)$ также принадлежит $M_{\mathscr{E}}(N)$. Непосредственно из построения y и определения M-блокирования $\bar{x} \notin C_0^M(\mathscr{E})$. Действительно, ввиду рефлексивности отношений предпочтения, в качестве коалиции, M-блокирующей $\bar{x}$, можно взять S_0. Однако соотношение $\bar{x} \notin C_0^M(\mathscr{E})$ противоречит предложению 3.3.

Итак, $\mathcal{P}_i(\bar{x}^i)\cap(\bar{x}^i+U)\cap X_i=\varnothing$. Но тогда и пересечение $\mathcal{P}_i(\bar{x}^i)\cap X_i^M$ тоже пусто. В самом деле, пусть $y\in\mathcal{P}_i(\bar{x}^i)\cap X_i^M$. Поскольку при достаточно малом $t\in(0,\ 1)$ элемент $ty+(1-t)\bar{x}^i$ принадлежит окрестности $\bar{x}^i+U$, в силу условия (г) получаем противоречие с локальной максимальностью $\bar{x}^i$.

Таким образом, для каждого $i\in N$ элемент $\bar{x}^i$ принадлежит ядру α_i^0 на X_i^M. Зафиксируем какой-нибудь вектор $\bar{p}\in M^0\cap\operatorname{int}\mathbf{R}_+^l$ и покажем, что $\mathcal{P}_i(\bar{x}^i)\cap B_i(\bar{p})=\varnothing$ для всех $i\in N$, где, как и ранее, $B_i(\bar{p})=\{x^i\in X_i|\bar{p}\cdot x^i\leqslant\bar{p}\cdot w^i\}$. Пусть $y\in\mathcal{P}_i(\bar{x}^i)$. Ввиду того, что $\bar{p}\cdot x^i=\bar{p}\cdot w^i$ для всех $x^i\in X_i^M$, на основании вышесказанного имеем $\bar{p}\cdot y\neq\bar{p}\cdot w^i$. Допустим, что $\bar{p}\cdot y<\bar{p}\cdot w^i$. Поскольку $\bar{x}\in X(N)$, в силу условия (в) существует $u\in\operatorname{int}\mathbf{R}_+^l$ такой, что $z=\bar{x}^i+u\in\mathcal{P}_i(\bar{x}^i)$. Ясно, что $\bar{p}\cdot z>\bar{p}\cdot w^i$. Но тогда найдется $t\in(0,\ 1)$ такое, что элемент $z_t=tz+(1-t)y$ принадлежит X_i^M. С другой стороны, из-за выпуклости $\mathcal{P}_i(\bar{x}^i)$ имеем $z_t\in\mathcal{P}_i(\bar{x}^i)$. А это противоречит установленной ранее оптимальности $\bar{x}^i$ в X_i^M. Таким образом, $\bar{p}\cdot y>\bar{p}\cdot w^i$, что ввиду произвольности выбора $y\in\mathcal{P}_i(\bar{x}^i)$ и означает требуемую равновесность распределения $\bar{x}$.

Отметим сразу же, что число относительно внутренних компонент $\bar{x}$ в условиях теоремы 3.2 может быть и небольшим. Ясно, однако, что условие σ-делимости приобретает наиболее простой вид при максимально возможном объеме $N_{\bar{x}}$.

Положим $X_0^M=\prod\limits_N\operatorname{int}_M X_i$, $D_{00}^M=D_0^M\cap X_0^M$. Учитывая, что для элемента $\bar{x}$ из X_0^M множество $N_{\bar{x}}$ совпадает с N, на основании теоремы 3.2 имеем следующую характеризацию вполне договорных состояний из X_0^M.

Следствие 3.1. *Если каждый участник $\mathscr{E}$ принадлежит некоторой коалиции из $\sigma\setminus\{N\}$, то $D_{00}^M(\mathscr{E})\subseteq W(\mathscr{E})$.*

Полученные результаты позволяют выделить широкий класс моделей обмена, в которых уже каждое вполне договорное состояние допускает стоимостную характеристику, и тем самым ядра $C_0^M(\mathscr{E})$ полностью исчерпываются соответствующими подмножествами $W(\mathscr{E})$.

Для каждого $i\in N$ положим $\widehat{X}_i=X_i\diagdown(w^i+\operatorname{int}\mathbf{R}_+^l)$ и введем в рассмотрение следующую характеристику модели $\mathscr{E}$:

$$S_{\mathscr{E}}=\{i\in N\,|\,\alpha_i\text{ — полное, }\alpha_i(w^i)\cap\widehat{X}_i\subseteq\operatorname{int}X_i\},$$

где, как и ранее, $\alpha_i(x^i)=\{y^i\in X_i|\,(x^i,\ y^i)\in\alpha_i\}$.

Комбинируя теоремы 3.1 и 3.2 и учитывая, что M удовлетворяет условию (3.1), убеждаемся в справедливости следующих утверждений.

Теорема 3.3. *Пусть модель $\mathscr{E}$ такова, что множество $S_{\mathscr{E}}$ σ-делимо, и при этом $\{i\}\in\sigma$ для всех $i\in S_{\mathscr{E}}$. Тогда $D_0^M(\mathscr{E})\subseteq W(\mathscr{E})$.*

Следствие 3.2. *Если все одноэлементные коалиции $\mathscr{E}$ принадлежат σ и по крайней мере у двух участников отношения предпочтения полные и удовлетворяют вложениям $\alpha_i(w^i)\cap\widehat{X}_i\subseteq\operatorname{int}X_i$, то $D_0^M(\mathscr{E})\subseteq W(\mathscr{E})$.*

Условия следствия 3.2 выполняются, в частности, для всех моделей обмена, у которых $\sigma=2^N$, и по крайней мере у двух участников $X_i=\mathbf{R}_+^l$, α_i полные и $\alpha_i(w^i)\subseteq\operatorname{int}\mathbf{R}_+^l$.

Обозначим через $\mathscr{M}$ множество всех гиперподпространств $\mathbf{R}^l$, удовлетворяющих (3.1), и положим

$$D_0(\mathscr{E})=\bigcup_{M\in\mathscr{M}}D_0^M(\mathscr{E}).$$

Будем говорить, что отношение α_i *локально-монотонно*, если для каждого $x^i\in\bar{X}_i=\Pr_{\{i\}}X(N)$ существует $\delta(x^i)>0$ такое, что $x^i+u\in$

$\in \mathcal{P}_i(x^i)$ как только $u \in \mathbf{R}^l_+$ и $0 < \|u\| < \delta(x^i)$. Учитывая, что в условиях локальной монотонности равновесные цены строго положительны, на основании установленных результатов получаем следующую характеризацию вполне договорных состояний.

Следствие 3.3. *Пусть модель $\mathcal{E}$ удовлетворяет условиям теоремы* 3.3 *или следствия* 3.2. *Если отношение предпочтения кого-либо из участников $\mathcal{E}$ локально-монотонно, то* $D_0(\mathcal{E}) = W(\mathcal{E})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Нейман Дж. фон, Моргенштерн О.** Теория игр и экономическое поведение.— М.: Наука, 1970.— 707 с.
2. **Ауман Р., Шепли Л.** Значения для неатомических игр.— М.: Мир, 1977.— 357 с.
3. **Розенмюллер И.** Кооперативные игры и рынки.— М.: Мир, 1974.— 167 с.
4. **Васильев В. А.** Об одном классе дележей в кооперативных играх // Докл. АН СССР.— 1981.— Т. 256, № 2.— С. 265—268.
5. **Макаров В. Л.** Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства // Современные проблемы математики.— 1982.— Т. 19.— С. 23—59.
6. **Васильев В. А.** Модели экономического обмена и кооперативные игры.— Новосибирск: Новосибирский ун-т, 1984.— 96 с.
7. **Harsanyi J. A.** A bargaing model for the cooperative n-person game // Ann. math. studies.— 1959.— N 40.— P. 325—355.
8. **Васильев В. А.** Об одном классе операторов в пространстве регулярных функций множества // Оптимизация.— 1982.— Вып. 28.— С. 102—111.
9. **Shapley L. S.** Cores of convex games // Int. J. game theory.— 1971.— V. 1.— P. 12—26.
10. **Dubey P., Neyman A., Weber R. J.** Value theory without efficiency // Math. oper. res.— 1981.— V. 6.— P. 122—128.
11. **Макаров В. Л., Васильев В. А., Козырев А. Н., Маракулин В. М.** О некоторых проблемах и результатах современной математической экономики // Оптимизация.— 1982.— Вып. 30.— С. 5—86.
12. **Green J. R.** Stability of Edgeworth's recontracting process // Econometrica.— 1974.— V. 42.— P. 21—34.
13. **Mashler M., Peleg B.** Stable sets and stable points of set-valued dynamics systems with applications to game theory // SIAM J. contr. and optim.— 1976.— V. 14, N 6.— P. 985—995.
14. **Васильев В. А.** Игра Лукаса не имеет НМ-решений в H-дележах // Оптимизация.— 1981.— Вып. 27.— С. 5—20.
15. **Васильев В. А., Жоробеков Р. О.** Достижимость ядер классических кооперативных игр // Оптимизация.— 1985.— Вып. 35.— С. 121—133.
16. **Hildenbrand W.** Core and equilibria in a large economy.— Princeton: Princeton Univ. Press, 1974.— 252 p.

О НЕКОТОРЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ И МЕТОДАХ ПЛАНИРОВАНИЯ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ПРОЕКТОВ

Э. Х. ГИМАДИ

Разработка и исследование ряда крупномасштабных проектов, реализуемых в народном хозяйстве, потребовали изучения таких математических моделей, как задача календарного планирования в условиях ограниченных ресурсов и заданных директивных сроков, задача размещения предприятий на сетях транспортного типа, задача выбора типажа оборудования и т. п. Особую актуальность эти вопросы приобретают при реализации крупномасштабных программ в районах нового освоения, в задачах хозяйственного освоения зоны БАМ, при планировании Западно-Сибирского нефтегазового комплекса и др. [1—4].

Указанные математические модели приводят к необходимости рассмотрения так называемых труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации [5]. Для этих задач оказывается проблематичным построение эффективных точных алгоритмов решения, трудоемкость которых ограничена полиномом от длины записи входных данных. Попытки построе-