МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВЛОЖЕНИЙ И КОДЫ, СОХРАНЯЮЩИЕ РАССТОЯНИЯ

А. А. ЕВДОКИМОВ

Вводится класс отображений дискретных метрических пространств, обладающих следующими свойствами:

(а) расстояния, не превышающие некоторого значения, называемого *радиусом изометричности*, сохраняются при отображении;

(б) расстояния, превышающие некоторое значение, называемое *порогом различимости*, не могут сжиматься отображением ниже этого порога.

Определяются вложения в классе таких отображений и исследуются их свойства. Для некоторых множеств, с определенными на них метриками, приведены конструкции вложений, даны оценки их метрических характеристик и параметров вкладываемых объектов.

Отображения указанного типа возникают в различных разделах дискретного анализа и математической кибернетики, главным образом связанных с изучением таких преобразований дискретных систем, которые сохраняют определенную информацию о их метрическом строении, близости элементов, связности, отделимости и т. п.

Укажем некоторые задачи, послужившие источником интереса к вопросам вложений. В теории минимизации булевых функций это задача о наибольшей протяженности дизъюнктивных нормальных форм функций, зависящих от n переменных [1—3]. Задача интересна также в связи с общими вопросами эффективности локального поиска в дискретных метрических пространствах. В случае, когда пространством является связный граф, она приводит к задаче такого вложения простой цепи, порог различимости которого равен двум. Максимальная длина цепи с этим свойством равна наибольшему диаметру порожденных подграфов. Более общие вопросы вложений геометрических комплексов в граф n-мерного куба часто возникают в задачах оценивания экстремальных значений параметров функций алгебры логики и конструирования их дизъюнктивных нормальных форм [4].

Если множеством, в которое осуществляется отображение, является множество слов заданной длины, например с метрикой Хемминга, то вложение, удовлетворяющее свойствам (а) и (б), можно считать таким кодированием объектов исходного множества, при котором малые изменения в кодируемых объектах приводят к малым же изменениям в их кодах. Это важное свойство используется при кодировании непрерывных данных в аналого-цифровых преобразователях для повышения скорости и надежности кодирования, при противогоночном кодировании состояний автоматов и других описанных в литературе кодированиях [5, 6].

Особо отметим возможность делать вывод о метрической близости исходных кодируемых объектов по кодам, что существенно, например, при работе с кодами в ЭВМ. Так, в распознавании образов это ускоряет процедуры сравнения при установлении факта или меры похожести объектов, или их признаковых векторов [7].

Кодирования, удовлетворяющие свойствам (а) и (б), естественно называть кодированиями, сохраняющими расстояния, хотя они обладают, вообще говоря, лишь локальной изометрией, зависящей от параметров отображения. Последними можно управлять, меняя тип отображения, его свойства и характеристики. Кодами, сохраняющими расстояния, являются цепные коды [5, 8], классу которых принадлежат так называемые коды «змея в ящике». Этот класс кодов интенсивно исследовался в связи с различными вопросами математической кибернетики.

Конструкции вложений из § 3 и оценки их метрических характеристик приведены для порога различимости, равного единице. Объясняется это тем, что при больших значениях порога решения экстремальных задач вложения зависят от конструкций цепных кодов [5] и качества оценки их параметров, что требует привлечения иных методов.

§ 1. МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЙ

Здесь мы введем необходимые понятия, определим вложения с помощью $\langle p, q\rangle$-отображений и рассмотрим их свойства.

Пусть X — конечное множество, ρ_X: $X \times X \to Z^+$ — функция расстояния на X, которая принимает целые неотрицательные значения и удовлетворяет обычным аксиомам расстояния. Будем называть ρ_X *метрикой* на X. Пусть $p > 0$ и $q > 0$ — числа, принадлежащие области значения метрики. Элементы x_1, x_2 множества X назовем

соседними, если $\rho_X(x_1, x_2) = 1$,

p-близкими, если $\rho_X(x_1, x_2) \leqslant p$,

q-различимыми, если $\rho_X(x_1, x_2) \geqslant q$.

Пусть Y — множество, ρ_Y — метрика на Y и f: $X \to Y$ — однозначное отображение множества X в множество Y.

Определение. *Отображение f назовем p-изометрическим, если для любых p-близких элементов x_1, x_2 множества X справедливо равенство*

$$\rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(f(x_1), f(x_2)). \tag{1}$$

Поскольку $p > 0$, то p-изометрическое отображение соседние в X элементы переводит в соседние же в Y.

Определение. *Отображение f сохраняет q-различимость, если для любых q-различимых элементов x_1, x_2 множества X выполнено неравенство*

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \geqslant q, \tag{2}$$

т. е. любые q-различимые в X элементы переходят при отображении f в q-различимые в Y.

Таким образом, отображение сохраняет 1-различимость, если оно обратимо; сохраняет 2-различимость, если в Y 1-близкими образами являются только образы соседних в X элементов, и т. д. Расстояния между q-различимыми элементами при этом отображении могут как увеличиваться (растяжение), так и уменьшаться (сжатие), но «степень сжатия» ограничена снизу порогом q.

Пример 1.1. $X = \{0, 1, 2, 5\}$, $\rho_X(m, n) = |m - n|$, $Y = \{4, 7, 8, 9\}$, $\rho_Y = \rho_X$. Отображение f: $X \to Y$ определим следующим образом: $f(i) = 9 - i$ при $i = 0, 1, 5$; $f(2) = 9$. Тогда f является 1-изометрическим, так как

$$f\colon \begin{array}{l} (0, 1) \to (9, 8), \\ (1, 2) \to (8, 9), \end{array}$$

f сохраняет 3-различимость,

$$f\colon \begin{array}{l} (0, 5) \to (9, 4), \\ (1, 5) \to (8, 4), \\ (2, 5) \to (9, 4), \end{array}$$

но не сохраняет 2-различимость и не является обратимым, поскольку $\rho_Y(f(0), f(2)) = 0$.

Справедливо

Предложение 1.1. *Если отображение f является p-изометрическим и сохраняет q-различимость для некоторого $q \leqslant p + 1$, то f обратимо.*

Действительно, пусть $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $\rho_X(x_1, x_2) = k > 0$. Если $k \leqslant p$, то $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) > 0$ по условию p-изометричности отображения f. Если $k > p$, то элементы x_1 и x_2 будут q-различимыми, поскольку $p \geqslant q - 1$. Из (2) тогда следует $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \geqslant q > 0$.

Для $q > p + 1$ утверждение, аналогичное предложению 1.1, уже неверно. Так, отображение f из примера 1 является 1-изометрическим и сохраняет 3-различимость, но обратимым не будет.

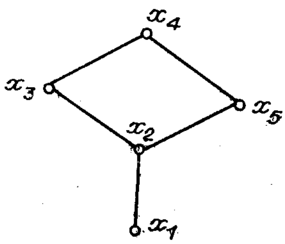

Рис. 1.

Обозначим через $S_k(x)$ шар с центром в $x \in X$ и радиусом k. При $k=0$ имеем $S_0(x)=\{x\}$. Пусть $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $\rho_X(x_1, x_2)=k \geqslant 0$.

Определение. *Пара элементов $\{x_1, x_2\}$ удовлетворяет свойству продолжения метрики, если из двух включений $S_1(x_1) \subseteq S_k(x_2)$, $S_1(x_2) \subseteq S_k(x_1)$ хотя бы одно не имеет места.*

Из этого определения непосредственно следует, что для $\{x_1, x_2\}$ либо существует элемент $x \in S_1(x_1)$ такой, что $\rho_X(x, x_2)=k+1$, либо существует элемент $y \in S_1(x_2)$ такой, что $\rho_X(y, x_2)=k+1$. При $k=1$ это равносильно $S_1(x_1) \neq S_1(x_2)$, а при $k=0$ означает существование элемента соседнего с $x_1 = x_2$.

Определение. *Множество X с метрикой ρ_X удовлетворяет свойству q-продолжения метрики, если любая пара его элементов $\{x_1, x_2\}$ такая, что $0 \leqslant \rho_X(x_1, x_2) < q$ удовлетворяет свойству продолжения метрики.*

Если X удовлетворяет свойству q-продолжения метрики, то X удовлетворяет и свойству $(q-1)$-продолжения метрики. Обратное неверно, как показывает следующий пример. Пусть $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, а $\rho_X(x_i, x_j)$ равно наименьшей длине цепи, соединяющей вершины x_i и x_j в графе, изображенном на рис. 1. Множество X удовлетворяет свойству 2-продолжения метрики, поскольку граф связный и для любых соседних элементов x_i и x_j справедливо $S_1(x_i) \neq S_1(x_j)$. Но X не удовлетворяет свойству 3-продолжения метрики, поскольку пара вершин $\{x_3, x_5\}$ не удовлетворяет свойству продолжения метрики и $\rho_X(x_3, x_5) < 3$.

Обозначим через $d(X)$ диаметр множества X, т. е.

$$d(X) = \max_{\{i,j\}} \rho_X(x_i, x_j).$$

Определение. *Множество X удовлетворяет свойству продолжения метрики, если X удовлетворяет свойству q-продолжения метрики при $q=d(X)$.*

Множество $X=\{x_1, \ldots, x_n\}$ с простейшей метрикой $\rho_X(x_i, x_j)=1$ при $i \neq j$, $\rho_X(x_i, x_i)=0$ при $i=1, \ldots, n$ удовлетворяет свойству продолжения метрики, поскольку $d(X)=1$, и у каждого элемента есть соседний с ним элемент.

Множество $X=\{0, 1, \ldots, l-1\}$ с метрикой $\rho_X(m, n)=|m-n|$ удовлетворяет свойству продолжения метрики, а множество $X \backslash x$ при любом $0<x<l-1$ этому свойству не удовлетворяет. Если метрику на X определить иначе: $\rho'_X(m, n)=\min\{|m-n|, l-|m-n|\}$, то $d(X)=[l/2]$, и как X, так и $X \backslash x$ при любом x удовлетворяют свойству продолжения метрики ρ'_X.

Пусть ρ_X и ρ_Y — метрики на множествах X и Y, и

$$\rho_{X\times Y}(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}) = \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2).$$

Тогда $\rho_{X\times Y}$ удовлетворяет всем аксиомам метрики, а декартово произведение $X \times Y$ сохраняет свойство продолжения метрики $\rho_{X\times Y}$.

Лемма 1.1. *Пусть X удовлетворяет свойству q_X-продолжения метрики ρ_X, а Y — свойству q_Y-продолжения метрики ρ_Y. Тогда $X \times Y$ удовлетворяет свойству (q_X+q_Y)-продолжения метрики $\rho_{X\times Y}$.*

Доказательство. Пусть элементы $\{x_1, y_1\}$ и $\{x_2, y_2\}$ таковы, что $\rho_{X\times Y}(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}) < q_X + q_Y$. Тогда справедливо хотя бы одно из двух неравенств $\rho_X(x_1, x_2) < q_X$, $\rho_Y(y_1, y_2) < q_Y$. Предположим, что верно первое (для второго аналогично). По свойству q_X-продолжения метрики ρ_X существуют $i \in \{1, 2\}$ и $j \neq i$ такие, что $S_1(x_i) \nsubseteq S_k(x_j)$, где $k=\rho_X(x_1, x_2)$. Пусть $i=1$, $j=2$ (случай $j=1$, $i=2$ симметричен) и x — соседний с x_1 элемент, для которого $\rho_X(x, x_2)=\rho_X(x_1, x_2)+1$. Тогда $\{x, y_1\} \in S_1(\{x_1, y_1\})$ и $\rho_{X\times Y}(\{x, y_1\}, \{x_2, y_2\}) = \rho_X(x_1, x_2)+\rho_Y(y_1, y_2)+1$, т. е. $S_1(\{x_1, y_1\}) \nsubseteq S_r(\{x_2, y_2\})$, где $r=\rho_{X\times Y}(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\})$. Лемма доказана.

При $q_X = d(X)$, $q_Y = d(Y)$ из леммы 1.1 вытекает продолжимость метрики $\rho_{X\times Y}$, поскольку $d(X)+d(Y)=d(X\times Y)$.

Следующая теорема связывает свойство продолжения метрики на X со свойством отображения $f\colon X\to Y$ сохранять q-различимость для $q = 1, 2, \ldots$.

Теорема 1.1. *Пусть X удовлетворяет свойству q-продолжения метрики ρ_X, а f — произвольное отображение $X\to Y$, сохраняющее q-различимость и 1-изометрическое. Тогда, если $q\geqslant 2$, то отображение f обратимо и сохраняет q'-различимость для любого $q'<q$.*

Доказательство. Поскольку X удовлетворяет свойству $(q-i)$-продолжения метрики для любого $i\geqslant 1$, то достаточно доказать теорему для $q'=q-1$ и применить «спуск» по q. Пусть отображение f не сохраняет $(q-1)$-различимость и элементы $x_1\in X$, $x_2\in X$ таковы, что $\rho_X(x_1, x_2)=q-1$, но при этом

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2))<q-1. \tag{3}$$

Так как $\rho_X(x_1, x_2)<q$, то по свойству q-продолжения метрики ρ_X существуют $i\in\{1, 2\}$ и $j\neq i$ такие, что $S_1(x_i)\nsubseteq S_{q-1}(x_j)$. Пусть x — элемент, соседний с x_i, для которого $\rho_X(x, x_j)=q$. Поскольку f сохраняет q-различимость, то

$$\rho_Y(f(x), f(x_j))\geqslant q. \tag{4}$$

Но $\rho_X(x, x_i)=1$, и по свойству 1-изометричности отображения f

$$\rho_Y(f(x), f(x_i))=1. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $f(x_i)\neq f(x_j)$, так как $q\geqslant 2$. Для элементов $f(x_i)$, $f(x_j)$ и $f(x)$ множества Y тогда из (3) и (5) получим

$$\rho_Y(f(x_i), f(x_j))+\rho_Y(f(x), f(x_i))<q.$$

Откуда ввиду (4)

$$\rho_Y(f(x), f(x_j))>\rho_Y(f(x_i), f(x_j))+\rho_Y(f(x), f(x_k)),$$

что противоречит неравенству треугольника для метрики ρ_Y.

Итак, отображение f сохраняет $(q-i)$-различимость для $i=1$ и (после спуска) для любого $q'=q-i$. В частности, f обратимо, так как сохраняет 1-различимость при $i=q-1$. Теорема доказана.

Если X не удовлетворяет свойству q-продолжения метрики ρ_X, то можно привести пример отображения $f\colon X\to Y$, которое является 1-изометрическим, сохраняет q-различимость, но не сохраняет q'-различимость при $1<q'<q$. В § 2 будет дан пример обратимого отображения, удовлетворяющего этим условиям при $q=3$, $q'=2$. Подобный пример несложно построить и для произвольного значения $q>2$.

Определение. *Обратимое отображение $f\colon X\to Y$ назовем $\langle p, q\rangle$-вложением множества X в множество Y, если f является p-изометрическим и сохраняет q-различимость.*

Ниже, говоря о p-изометричности и сохранении q-различимости отображением f^{-1}, обратным к f, имеем в виду отображение $f^{-1}\colon \operatorname{Im} f\to X$ области значений отображения f на множество X и метрику, индуцированную на $\operatorname{Im} f$ множеством Y, а p и q принадлежащими области значений этой метрики.

Выделим случай $\langle p, q\rangle$-вложения при $p=q$.

Теорема 1.2. *Пусть $f\colon X\to Y$ есть $\langle p, p\rangle$-вложение. Элементы x_1 и x_2 являются $(p-1)$-близкими в X тогда и только тогда, когда $f(x_1)$ и $f(x_2)$ являются $(p-1)$-близкими в Y, причем f и f^{-1} сохраняют q-различимость при любом $q\leqslant p$.*

Доказательство. При $p=1$ теорема верна, так как отображение f однозначно и обратимо, поскольку сохраняет 1-различимость. При $p>1$ первое утверждение теоремы следует непосредственно из определения вложения. Действительно, по условию p-изометричности вложения f

$$\rho_X(x_1, x_2) \leqslant p-1 \Rightarrow \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant p-1, \tag{6}$$

а из условия сохранения p-различимости имеем

$$\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \leqslant p-1 \Rightarrow \rho_X(x_1, x_2) \leqslant p-1. \tag{7}$$

Пусть $\rho_X(x_1, x_2) = k$ и $k \geqslant q > 0$, где q — любое целое, не превосходящее p. Если $k \geqslant p$, то по свойству сохранения p-различимости $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) \geqslant p$. Так как $p \geqslant q$, то из этого следует, что $f(x_1)$ и $f(x_2)$ q-различимы. Если же $k < p$, то по свойству p-изометричности $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = k \geqslant q$, и опять $f(x_1)$ и $f(x_2)$ q-различимы.

Для f^{-1} пусть $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = k$ и $k \geqslant q > 0$. Если $k \geqslant p$, то в силу (6) $\rho_X(x_1, x_2) \geqslant p \geqslant q$, т. е. x_1 и x_2 q-различимы. Если $k \leqslant p-1$, то из (7) следует $\rho_X(x_1, x_2) \leqslant p-1$. По свойству p-изометричности f это влечет $\rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(f(x_1), f(x_2)) = k \geqslant q$, и опять x_1 и x_2 q-различимы. Теорема доказана.

Заметим, что в теореме 1.2 отображение f^{-1}, вообще говоря, не является $\langle p, p\rangle$-вложением, так как может не быть p-изометрическим (см. пример 2 в § 2). Отметим также, что если X не удовлетворяет свойству q-продолжения метрики, но $\langle p, q\rangle$-вложение f таково, что $p \geqslant q$, то f сохраняет q'-различимость для любого $q' < q$.

Пусть A^n — множество слов длины n в алфавите A и ρ_{A^n}— метрика Хемминга на A^n (см. § 2). Всякое вложение $f\colon X \to A^n$ можно рассматривать как кодирование элементов множества X словами множества A^n. При этом $\operatorname{Im} f$ является кодом, а f и f^{-1} — кодирующей и декодирующей функциями. Как указано в введении, параметры p и q определяют свойства таких кодирований, которые важны для разнообразного их применения. В частности, $\langle p, p\rangle$-кодирования на основании свойств, указанных в теореме 1.2, позволяют по кодам делать вывод о метрической близости объектов исходного кодируемого множества, а свойство сохранения «малых» расстояний используется, например, для исправления ошибок граничного считывания при кодировании аналоговой информации [5, 6].

§ 2. ПРОДОЛЖЕНИЕ МЕТРИКИ И $\langle p, q\rangle$-ВЛОЖЕНИЯ ГРАФОВ

Вначале приведем примеры дискретных множеств и метрик на них.

1. Эквидистантное множество $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ произвольных элементов со стандартной метрикой ρ_M, определяемой следующим образом: $\rho_M(x_i, x_j) = d \geqslant 1$ при любых $i \neq j$, $\rho_M(x_i, x_i) = 0$ при $i = 1, \ldots, n$.

2. Множество $Z_{m,n}$ целых чисел x таких, что $m \leqslant x \leqslant n$, с расстоянием $\rho_Z(x, y) = |x - y|$.

3. Множество Z^n векторов $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ с целыми координатами и расстоянием $\rho_{Z^n}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$,где $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\tilde{y} = (y_1, \ldots, y_n)$. Будем Z^n называть *решеткой размерности* n, а ρ_{Z^n}— *метрикой решетки*. Множество $Z_{0,l_1-1} \times \ldots \times Z_{0,l_n-1}$ с метрикой решетки будем называть *конечной n-мерной решеткой* или *параллелепипедом со сторонами* Z_{0,l_i-1} и обозначать R^n. Когда необходимо указать длины сторон решетки R^n, будем писать $R^n(l_1, \ldots, l_n)$. По лемме 1.1 решетка R^n удовлетворяет свойству продолжения метрики. Из определения R^n следуют равенства

$$d(R^n) = \sum_{i=1}^{n} (l_i - 1), \quad |R^n| = \prod_{i=1}^{n} l_i.$$

4. Определим на конечной решетке расстояние иначе:

$$\rho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \sum_{i=1}^{n} \min\{|x_i - y_i|, l_i - |x_i - y_i|\}.$$

Множество векторов $\tilde{x}=(x_1, \ldots, x_n)$ с так определенной метрикой будем обозначать T^n и называть n-мерным тором, а метрику обозначать ρ_{T^n} и называть *метрикой тора*. Когда требуется указать длины «сторон» тора, будем писать $T^n(l_1, \ldots, l_n)$. По лемме 1.1 n-мерный тор удовлетворяет свойству продолжения метрики, поскольку множество $Z_{0,l-1}$ с расстоянием $\rho_{Z_{0,l-1}}=\min\{|x-y|,\ l-|x-y|\}$ этому свойству удовлетворяет. Из определения тора T^n следуют равенства

$$d(T^n)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{l_i}{2}\right],\quad |T^n|=|R^n|=\prod_{i=1}^{n} l_i.$$

5. Множество A^n всех слов длины n в конечном алфавите A, $|A|\geqslant 2$. Расстояние между двумя словами полагают равным числу номеров мест, на которых в этих словах стоят различные буквы. Другими словами, расстояние равно числу позиций, в которых слова различаются между собой. Так определенное на A^n расстояние ρ_{A^n} называют *метрикой Хемминга*.

Предложение 2.1. *Множество A^n с метрикой Хемминга удовлетворяет свойству продолжения метрики.*

Действительно, если $A=\{a_1, \ldots, a_m\}$, то введем на A простейшую метрику ρ_A, полагая $\rho_A(a_i, a_j)=1$ при $i\neq j$, и $\rho_A(a_i, a_i)=0$ при $i=1, \ldots, m$. Тогда

$$\rho_{A^n}(\tilde{x}, \tilde{y})=\sum_{i=1}^{n}\rho_A(x_i, y_i),$$

где $\tilde{x}=x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $\tilde{y}=y_1, y_2, \ldots, y_n$ — слова длины n в алфавите A. Так как множество A с простейшей метрикой удовлетворяет свойству продолжения метрики, то применение леммы 1.1 доказывает предложение 2.1.

Пусть $|A|=2$. Двоичный алфавит будем обозначать $I=\{0, 1\}$, а элементы множества I^n называть *булевыми векторами*. То же самое расстояние Хемминга тогда можно определить равенством $\rho_{I^n}(\tilde{x}, \tilde{y})=\|\tilde{x}\oplus\tilde{y}\|$, где $\oplus$ — операция сложения булевых векторов по модулю два и $\|\tilde{x}\|=\rho_{I^n}(\tilde{0}, \tilde{x})=\sum_{i=1}^{n}x_i$. Множество I^n с метрикой Хемминга ρ_{I^n} будем называть *n-мерным единичным кубом* или *гиперкубом*. Легко видеть, что в двоичном случае метрика Хеминга ρ_{I^n} совпадает с метрикой ρ_{R^n} конечной n-мерной решетки $R^n(2, \ldots, 2)$ и с метрикой ρ_{T^n} n-мерного тора $T^n(2, \ldots, 2)$. Поэтому естественные взаимно-однозначные соответствия между множеством I^n и каждым из множеств R^n, T^n и A^n при $|A|=2$ можно рассматривать как $\langle n, n\rangle$-вложения $I^n\to R^n$, $I^n\to T^n$, $I^n\to A^n$. Каждое из этих вложений является n-изометрическим и сохраняет q-различимость при любом $q=1, \ldots, n$.

6. Пусть V — множество вершин связного графа $G(V, E)$, не содержащего петель и кратных ребер. Расстояние $\rho_V(v_1, v_2)$ между вершинами v_1 и v_2 равно наименьшей из длин цепей в графе G, соединяющих v_1 и v_2. Метрику графа часто обозначают ρ_G, указывая сам граф G вместо множества его вершин $V(G)$. Цепь в графе G, расстояние между концами которой равно ее длине, называют *кратчайшей*. Если это расстояние равно диаметру $d(G)$ графа G, то цепь назовем *диаметральной*. Из определения следует, что участок — подцепь кратчайшей цепи — также является кратчайшей цепью между своими концами *).

Не всякий связный граф удовлетворяет свойству продолжения метрики. Справедлива следующая

*) Вопросы связности и отображений графов в связи с их метрическими свойствами наиболее полно изложены в [9].

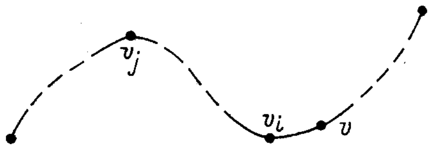

Рис. 2.

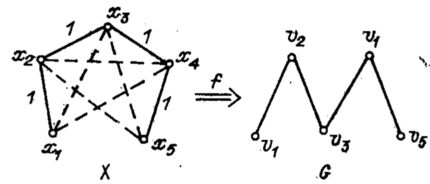

Рис. 3.

Теорема 2.1. *Связный граф удовлетворяет свойству q-продолжения метрики тогда и только тогда, когда любая пара $\{v_i, v_j\}$ его вершин такая, что $\rho_G(v_i, v_j) < q$, принадлежит некоторой кратчайшей цепи длины q.*

Доказательство. Пусть C — кратчайшая цепь, соединяющая вершины v_i и v_j, и $\rho_G(v_i, v_j) < q$. Будем последовательно применять свойство продолжения метрики к концам цепи C, увеличивая ее длину на 1 и сохраняя следующее свойство: расстояние между концами новой цепи равно ее длине. Поскольку G удовлетворяет свойству q-продолжения метрики, то этот процесс закончится не раньше, чем будет построена цепь C' длины q. По построению C' — кратчайшая цепь и содержит вершины v_i и v_j.

Обратно, если вершины v_i и v_j лежат на некоторой кратчайшей цепи C длины q и $\rho_G(v_i, v_j) < q$, то хотя бы одна из вершин v_i и v_j (пусть v_i) не является концом цепи C (рис. 2). Но тогда та вершина v из двух смежных с v_i, что расположена на C дальше от v_j, удовлетворяет необходимому для продолжения метрики равенству $\rho_G(v, v_j) = \rho_G(v_i, v_j) + 1$, поскольку иначе участок цепи C от v_j до v не является кратчайшей цепью между v_j и v, что противоречит тому, что C — кратчайшая цепь.

Наконец заметим, что рассмотрение v_i и v_j как различных вершин предполагает, что $q \geqslant 2$. Однако и при $q = 1$ утверждение теоремы верно, так как свойство 1-продолжения метрики равносильно тому, что каждая вершина графа G имеет соседнюю. Теорема доказана.

Следствие. *Связный граф удовлетворяет свойству продолжения метрики тогда и только тогда, когда любые две его вершины принадлежат некоторой диаметральной цепи.*

Свойством продолжения метрики обладают цепь, цикл, дерево при условии, что расстояние между любой парой висячих вершин равно диаметру дерева. По лемме 1.1 свойству продолжения метрики удовлетворяют декартовы произведения любых этих графов. Если W_d^q — класс всех графов, обладающих свойством q-продолжения метрики и имеющих диаметр не более d, то $W_d^{i+1} \subset W_d^i$, $i = 1, 2, \ldots, d-1$. Каждому множеству X с метрикой ρ_X можно сопоставить граф $G(V, E)$, если элементу $x_i \in X$ сопоставлена вершина $v_i \in V(G)$ и $\{v_i, v_j\} \in E \Leftrightarrow \rho_X(x_i, x_j) = 1$. Это сопоставление определяет отображение $f\colon X \to V(G)$, которое является 1-изометрическим и несжимающим, поскольку из неравенства треугольника для метрики ρ_X следует $\rho_X(x_i, x_j) \leqslant \rho_V(v_i, v_j)$.*) Поэтому f сохраняет q-различимость для любого $q \leqslant d(X)$, т. е. является $\langle 1, q\rangle$-вложением.

Пример 2.1. Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, метрика $\rho_X(x_i, x_j)$ задана матрицей расстояний

$$(\rho_{i,j}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Определим отображение $f\colon X \to V(G)$ следующим образом: $f(x_i) = v_i$,

*) Если вершины v_i и v_j в графе G не связаны цепью, то полагают $\rho_G(v_i, v_j) = \infty$.

$i = 1, 2, 3, 4, 5$. На рис. 3 в X пунктиром отмечены все расстояния, равные двум. Отображение f есть $\langle 1, q\rangle$-вложение, сохраняющее q-различимость при $q = 1, 2, 3$; f не является 2-изометрическим, поскольку $\rho_X(x_1, x_4) < \rho_G(v_1, v_4)$. Обратное отображение f^{-1}: $V(G) \to X$ является здесь $\langle 2, 2\rangle$-вложением. Этот пример показывает, в частности, что отображение, обратное к $\langle p, p\rangle$-вложению, может и не быть p-изометрическим. Действительно, отображение f, будучи обратным к $\langle 2, 2\rangle$-вложению f^{-1}, не является 2-изометрическим.

Пример 2.1 легко обобщить, определив $\langle p, q\rangle$-вложение с наименьшим значением p, равным 1, и любым заданным значением q.

Отметим, что множество X из примера 2.1 не удовлетворяет свойству продолжения метрики, так как этому свойству не удовлетворяет, например, пара его элементов $\{x_1, x_3\}$. Но граф G удовлетворяет свойству продолжения метрики, так как является цепью. Причина в том, что метрика на X не является внутренней. Так, $d(X) = 3$, но в X нет диаметральной «цепи», образованной парами соседних элементов.

В дальнейшем не рассматриваются множества, заданные произвольными матрицами расстояний, поскольку мы интересуемся вложениями множеств с естественной метрической структурой. Вопросы реализации произвольных метрик в графах различного типа рассмотрены в работах [10—12].

Если каждому из множеств X, перечисленных в пунктах 1—5, сопоставить граф $G(V, E)$, то каждая из метрик ρ_X совпадает с метрикой соответствующего графа ρ_G. Эквидистантному множеству M при $d = 1$ соответствует полный n-вершинный граф. Множество $Z_{m,n}$ с метрикой решетки ρ_{Z1} является цепью длины $n - m$, а с метрикой тора ρ_{T1} — циклом. Аналогично и другие множества можно отождествлять с их графами, пользуясь обозначениями и понятиями теории графов.

Отметим некоторые свойства вложений графов, которые несложно получить из общих свойств $\langle p, q\rangle$-вложений.

Предложение 2.2. *Пусть $G_1(V_1, E_1)$ — связный граф, а отображение f: $G_1 \to G_2$ является $\langle p, q\rangle$-вложением. Тогда*

1) $f(G_1)$ — связная часть графа G_2;

2) f — нерастягивающее отображение, т. е. $\rho_{G_1}(v_i, v_j) \geqslant \rho_{G_2}(f(v_i), f(v_j))$ для любых $i \neq j$;

3) если $p = q = 1$, то $G_1 \sim f(G_1)$, т. е. G_1 изоморфен подграфу $f(G_1)$ графа G_2 с множеством вершин $f(V_1)$ и ребер $f(E_1)$;

4) если $p = q = 2$, то $G_1 \sim f(G_1)$, где $f(G_1)$ — порожденный подграф G_2, т. е. содержащий все ребра графа G_2, оба конца которых принадлежат $f(V_1)$;

5) если $p = q = 1$ и G_1 — цепь или цикл длины $|V_2|$, то $f(G_1)$ — гамильтонова цепь или цикл графа G_2;

6) если G_1 — цепь наибольшей длины l, для которой существует $\langle 2, 2\rangle$-вложение $G_1 \to G_2$, то $l = \max\limits_{G'} d(G')$, где G' — порожденный подграф графа G_2.

Следующее свойство вложений графов является достаточно общим и будет использоваться в дальнейшем.

Лемма 2.1. *Пусть связный граф $G_1(V_1, E_1)$ удовлетворяет свойству p-продолжения метрики. Если отображение f: $G_1 \to G_2$ является 1-изометрическим и сохраняет p-различимость, то оно — $\langle p, p\rangle$-вложение. Если G_2 — двудольный граф, то f является и $(p + 1)$-изометрическим.*

Доказательство. При $p = 1$ первое утверждение леммы верно, поскольку сохранение 1-различимости влечет обратимость отображения. Второе утверждение также верно, так как образы вершин, находящихся на расстоянии 2 в G_1, не могут оказаться соседними в G_2 ввиду отсутствия в двудольном графе треугольников.

Пусть $p \geqslant 2$. Тогда по теореме 1.1 отображение f сохраняет $(p - i)$-различимость для любого $i = 1, 2, \ldots, p - 1$ и является обратимым. Поэтому для любых p-близких в G_1 вершин v_1 и v_2 справедливо $\rho_{G_1}(v_1, v_2) = p - i \mapsto \rho_{G_2}(f(v_1), f(v_2)) \geqslant p - i$. Поскольку f — нерастягивающее отображение, то это влечет $\rho_{G_2}(f(v_1), f(v_2)) = p - i$, для любого $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Следовательно, f является p-изометрическим и первая часть леммы доказана.

Пусть G_2 — двудольный граф, v_1, $v_2 \in V_1$ и $\rho_{G_1}(v_1, v_2) = p+0$. Так как f — нерастягивающее отображение и сохраняет p-различимость, то $\rho_{G_2}(f(v_1), f(v_2))$ равно либо p, либо $p+1$. Покажем, что оно не равно p. Тогда f будет $(p+1)$-изометрическим, поскольку p-изометричность f уже доказана в первой части. Действительно, цепь C_1 длины $p+1$ между вершинами v_1 и v_2 перейдет при отображении f в цепь C_2 длины $p+1$ в G_2. Если расстояние между ее концами $f(v_1)$ и $f(v_2)$ равно p, то в G_2 существует цепь C_3 длины p между $f(v_1)$ и $f(v_2)$. Но тогда две цепи C_2 и C_3 образуют замкнутый путь в G_2 нечетной длины $2p+1$, что противоречит двудольности графа G_2. Лемма доказана.

Приведем простой пример, показывающий, насколько существенно в лемме 2.1 свойство продолжения метрики. Пусть G — произвольный связный граф диаметра $d(G) > 2$ и v_1 — некоторая его вершина, принадлежащая диаметральной цепи. Подвесим к v_1 две новые вершины v_2 и v_3 (рис. 4). Обозначим полученный таким образом граф через G_1. Очевидно, $d(G_1) = d(G) + 1 > 3$ и вершины v_2 и v_3 не принадлежат (одновременно) никакой кратчайшей цепи длины 3. По теореме 2.1 граф G_1 не удовлетворяет свойству 3-продолжения метрики. Пусть G_2 отличается от G_1 лишь одним новым ребром $\{v_2', v_3'\}$ (рис. 4). Штрихом помечены соответствующие вершины графа G_2 при отображении $f\colon G_1 \to G_2$, которое определяется естественным образом: $f(v_i) = v_i'$ для любой вершины v_i графа G_1.

По построению отображение f обратимое, 1-изометрическое и сохраняет q-различимость для любого $q = 3, 4, \ldots, d(G_1)$. Несохранение 2-различимости в этом примере является следствием нарушения условия 3-продолжения метрики на графе G_1. Несложно понять, как, действуя аналогично этому примеру, и в общем случае (при невыполнении свойства q-продолжения метрики) построить отображение, для которого заключение леммы 2.1 уже неверно.

Из утверждений 3—6 предложения 2.2 непосредственно следует, что на языке $\langle p, q\rangle$-вложений можно сформулировать некоторые известные задачи теории графов, которые являются NP-полными [7]. Выделим из них задачу «индуцированный путь». В известном перечне [13] NP-полных задач ее код — ТГ23.

Условие. *Заданы граф $G(V, E)$ и положительное целое число $k \leqslant |V|$.*

Вопрос. *Существует ли подмножество $V' \subseteq V$ такое, что $|V'| \geqslant k$, и подграф, порожденный множеством V', является простым путем на $|V'|$ вершинах?*

В терминах $\langle p, q\rangle$-вложений это эквивалентно вопросу: существует ли $\langle 2, 2\rangle$-вложение цепи длины k в данный граф $G(V, E)$.

Обобщенный вариант указанной задачи, связанный с $\langle p, q\rangle$-вложением цепи или цикла наибольшей длины, но в графы специального вида, возникает в различных разделах дискретного анализа: теории дизъюнктивных нормальных форм булевых функций, зависящих от n переменных, теории кодирования, оценках эффективности локального поиска в графах [1, 3, 14]. Некоторые конструкции таких $\langle p, q\rangle$-вложений будут в дальнейшем рассмотрены.

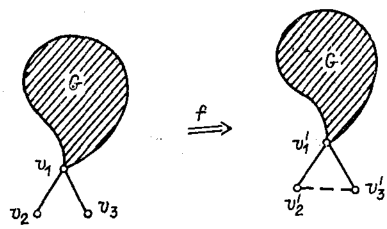

Рис. 4.

§ 3. КОНСТРУКЦИИ ВЛОЖЕНИЙ

Приведем некоторые конструкции вложений дискретных метрических пространств, определенных в § 2, и найдем их метрические характеристики. Пусть отображение f: $X \to Y$ есть p-изометрическое вложение. По определению $0 < p \leqslant \min\{d(X),\ d(Y)\}$. Если $p = d(X)$ и, следовательно, $d(X) \leqslant d(Y)$, то назовем вложение f *полной изометрией*. Если f не является полной изометрией, то по определению p-изометричности отображения существует такое наибольшее $p(f)$, что f является $p(f)$-изометрическим, но не будет $(p(f)+1)$-изометрическим. Назовем $p(f)$ *радиусом изометричности отображения* f. При $d(Y) < d(X)$ полная изометрия, очевидно, невозможна, а $p(f) \leqslant d(Y)$.

Все множества, вложения которых рассматриваются в этом параграфе, удовлетворяют свойству продолжения метрики. Поэтому по теореме 1.1 для любого их вложения f существует такое наибольшее $q(f)$, что f сохраняет q-различимость для любого $q \leqslant q(f)$ и не сохраняет q-различимость для любого $q > q(f)$. Назовем $q(f)$ *порогом различимости вложения* f. По лемме 2.1 $q(f) \leqslant p(f)$. Если f — полная изометрия, то $q(f) = p(f) = d(X)$.

Пусть вложения f_i: $X_i \to Y_i$ имеют радиусы изометричности p_i и пороги различимости $q_i \leqslant p_i$, $i = 1,\ 2$. Определим отображение f: $X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, полагая $f(\{x_1,\ x_2\}) = \{f_1(x_1),\ f_2(x_2)\}$ для любых $x_1 \in X_1$ и $x_2 \in X_2$. Так, определенное отображение f назовем *естественным*. Поскольку метрика на декартовом произведении определена в § 1 как сумма метрик сомножителей, то естественное отображение соседние в $X_1 \times X_2$ элементы переводит в соседние элементы в $Y_1 \times Y_2$. Из обратимости f_1 и f_2 следует обратимость f. Поэтому f — вложение. Его метрические характеристики приводятся в следующей лемме.

Лемма 3.1. *Если каждое вложение f_1 и f_2 является полной изометрией, то естественное вложение f — полная изометрия и $q(f) = p(f) = d(X_1) + d(X_2)$. В противном случае*

$$p(f) = \min_{i \in \mathcal{I}} \{p_i\}, \tag{8}$$

$$q(f) = \min_{i \in \mathcal{I}} \{q_i\}, \tag{9}$$

где $\mathcal{I} = \{i \mid f_i$ не есть полная изометрия$\}$.

Доказательство. По условию полной изометричности вложений f_1 и f_2 для любых $x_1 \in X_1$; $x_1' \in X_1$ и $x_2 \in X_2$, $x_2' = X_2$ справедливы равенства

$$\rho_{X_1}(x_1,\ x_1') = \rho_{Y_1}(f_1(x_1),\ f_1(x_1')), \tag{10}$$

$$\rho_{X_2}(x_2,\ x_2') = \rho_{Y_2}(f_2(x_2),\ f_2(x_2')). \tag{11}$$

Сложив (10) и (11), получим

$$\rho_{X_1 \times X_2}(\{x_1,\ x_2\},\ \{x_1',\ x_2'\}) = \\ = \rho_{Y_1 \times Y_2}(\{f_1(x_1),\ f_2(x_2)\},\ \{f_1(x_1'),\ f_2(x_2')\}). \tag{12}$$

Поскольку (12) верно для любых $\{x_1,\ x_2\}$, $\{x_1',\ x_2'\} \in X_1 \times X_2$, то вложение f является $p(f)$-изометрическим при $p(f) = d(X_1 \times X_2) = d(X_1) + d(X_2)$.

Пусть $\mathcal{I}$ непусто и $\min_{i \in \mathcal{I}}\{p_i\} = p_1$, $\min_{\in \mathcal{I}}\{q_i\} = q_1$. Докажем вначале (8). Пусть

$$\rho_{X_1 \times X_2}(\{x_1,\ x_2\},\ \{x_1',\ x_2'\}) = \rho_{X_1}(x_1,\ x_1') + \rho_{X_2}(x_2,\ x_2') \leqslant p_1. \tag{13}$$

Если $2 \in \mathcal{I}$, то из (13) следуют неравенства $\rho_{X_1}(x_1,\ x_1') \leqslant p_1$ и

$\rho_{X_2}(x_2, x_2') \leqslant p_2$. По условию p_i-изометричности вложений f_i это влечет справедливость равенств (10), (11), а следовательно, и (12). Таким образом, $p(f) \geqslant p_1$. Если же $2 \notin \mathcal{I}$, то (11) верно для любых $x_2 \in X_2$, $x_2' \in X_2$ по условию полной изометричности вложения f_2, и, аналогично предыдущему, $p(f) \geqslant p_1$.

Убедимся теперь, что f не является (p_1+1)-изометрическим. Поскольку $1 \in \mathcal{I}$ и вложение f_1 не является (p_1+1)-изометрическим, то существуют $x_1 \in X_1, x_1' \in X_1$ такие, что $\rho_{X_1}(x_1, x_1') = p_1 + 1$, но при этом равенство (10) не имеет места. Возьмем произвольный элемент $x_2 \in X_2$ и пары $\{x_1, x_2\} \in X_1 \times X_2$, $\{x_1', x_2\} \in X_1 \times X_2$. Тогда $\rho_{X_1 \times X_2}(\{x_1, x_2\}, \{x_1', x_2\}) = p_1 + 1$, но поскольку (10) не выполнено, то и (12) не выполнено. Таким образом, $p(f) \leqslant p_1$, и равенство (8) доказано.

Докажем, что $q(f) \geqslant q_1$, убедившись, что из неравенства

$$\rho_{Y_1 \times Y_2}(\{f_1(x_1), f_2(x_2)\}, \{f_1(x_1'), f_2(x_2')\}) < q_1 \tag{14}$$

следует $\rho_{X_1 \times X_2}(\{x_1, x_2\}, \{x_1', x_2'\}) < q_1$. Если $2 \in \mathcal{I}$, то в силу (14) $\rho_{Y_1}(f_1(x_1), f_1(x_1')) < q_1$ и $\rho_{Y_2}(f_2(x_2), f_2(x_2')) < q_2$. Так как f_i, $i = 1, 2$, сохраняют q_i-различимость, то $\rho_{X_1}(x_1, x_1') < q_1$, $\rho_{X_2}(x_2, x_2') < q_2$ и, следовательно, $\rho_{X_1}(x_1, x_1') \leqslant p_1$, $\rho_{X_2}(x_2, x_2') \leqslant p_2$. По условию p_i-изометричности вложений f_i тогда справедливы (10), (11) и (12). Если же $2 \notin \mathcal{I}$, то (11) верно для любых $x_2 \in X_2$, $x_2' \in X_2$ по условию полной изометричности f_2. Остается заметить, что равенство (12) вместе с (14) влечет $\rho_{X_1 \times X_2}(\{x_1, x_2\}, \{x_1', x_2'\}) < q_1$.

Наконец заметим, что легко доказать неравенство $q(f) \leqslant q_1$, указав, как и ранее в случае (p_1+1)-изометричности, элементы декартова произведения $X_1 \times X_2$, для которых не выполнено свойство сохранения (q_1+1)-различимости. Лемма доказана.

Вложение решетки R^n в тор T^n. Пусть $R^n(r_1, \ldots, r_n)$ — n-мерный параллелепипед-решетка; $T^n(t_1, \ldots, t_n)$ — n-мерный тор; ρ_{R^n} и ρ_{T^n} — метрики решетки и тора (см. § 2). Пусть $2 \leqslant r_1 \leqslant \ldots \leqslant r_n$, $2 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ и $r_i \leqslant t_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $R^n(r_1, \ldots, r_n) \subseteq T^n(t_1, \ldots, t_n)$ и можно определить отображение $\varphi\colon R^n \to T^n$, полагая, $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{x}$ для любого $\tilde{x} \in R^n$. Отображение $\varphi(\tilde{x})$, очевидно, обратимо и соседние в R^n элементы переводит в соседние элементы в T^n. Поэтому $\varphi(\tilde{x})$ — вложение. Найдем его метрические характеристики. Обозначим через $\widetilde{\mathcal{I}}$ множество тех i, $1 \leqslant i \leqslant n$, для которых справедливы неравенства

$$r_i - 1 > [t_i/2]. \tag{15}$$

Пусть

$$t = \min_{i \in \widetilde{\mathcal{I}}} t_i, \tag{16}$$

$$\delta = \min_{i \in \widetilde{\mathcal{I}}} (t_i - r_i + 1). \tag{17}$$

Теорема 3.1. *Вложение $\varphi\colon R^n(r_1, \ldots, r_n) \to T^n(t_1, \ldots, t_n)$ при $\widetilde{\mathcal{I}} = \varnothing$ является полной изометрией. Если $\widetilde{\mathcal{I}}$ непусто, то радиус изометричности вложения φ равен $[t/2]$, а порог различимости равен δ.*

Доказательство. Вложение φ определяет n вложений φ_i: $Z_{0, r_i-1} \to Z_{0, t_i-1}$ по каждой из координат вектора $\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Поскольку $\varphi_i(x_i) = x_i$, то φ — естественное отображение, и можно применить лемму 3.1. Если $\widetilde{\mathcal{I}} = \varnothing$, то $r_i - 1 \leqslant t_i/2$ для любого i. Поэтому для любых элементов $x_i, x_i' \in Z_{0, r_i-1}$ справедливо $|x_i - x_i'| \leqslant [t_i/2]$ и, следовательно, $\rho_{R^1}(x_i, x_i') = \rho_{T^1}(\varphi_i(x_i), \varphi_i(x_i'))$. Это означает, что каждое φ_i — полная изометрия. Тогда по лемме 3.1 вложение φ — полная изометрия и $p(\varphi)=q(\varphi)=\sum_{i=1}^{n}(r_i-1)$. Если $\widetilde{\mathcal{T}}$ непусто, то $p_i(\varphi_i)=[t_i/2]$, $q_i(\varphi_i)=t_i-r_i+1$ для любого i, и по лемме 3.1 $p(\varphi)=[t/2]$, а $q(\varphi)=\delta$. Теорема доказана.

Из теоремы 3.1 следует, что наименьшее значение порога различимости, $\delta=1$, будет при выполнении двух условий: $\widetilde{\mathcal{T}}\neq\varnothing$ и $t_i=r_i$ для любого $i\in\widetilde{\mathcal{T}}$. В этом случае наибольший радиус изометричности $p(\varphi)=[t/2]$ имеет естественное вложение n-мерного t-значного куба $R^n(t, \ldots, t)$ в тор $T^n(t, \ldots, t)$, причем из условия $\widetilde{\mathcal{T}}\neq\varnothing$ следует, что $t>2$. Это дает пример высоко изометричного вложения с минимально возможным порогом различимости.

При $t_i=r_i=2$ множество $\widetilde{\mathcal{T}}$ пусто, и имеем полную изометрию параллелепипеда $R^n(2, \ldots, 2)$ тора $T^n(2, \ldots, 2)$ и, следовательно, единичного n-мерного куба I^n. Это уже отмечалось в § 2.

Замечание. При $2\leqslant r_1\leqslant\ldots\leqslant r_n$ и $2\leqslant t_1\leqslant\ldots\leqslant t_n$ условие $r_i\leqslant t_i$, $i=1, \ldots, n$, не только достаточно для существования естественного вложения $R^n(r_1, \ldots, r_n)\to T^n(t_1, \ldots, t_n)$, но и необходимо для существования вложения вообще. Действительно, если $r_j>t_j$ для некоторого j, $1\leqslant j\leqslant n$, то $r_n\geqslant\ldots\geqslant r_j>t_j\geqslant t_{j-1}\geqslant\ldots\geqslant t_1$. Следовательно, невозможно вложение подрешетки $R^{n-j+1}(r_j, \ldots, r_n)$ в тор $T^{n-j}(t_{j+1}, \ldots, t_n)$, поскольку размерность последнего меньше размерности подрешетки.

Существование вложений и экстремальные задачи. Обычно при рассмотрении вложений $X\to Y$ множество X зависит от параметров и принадлежит некоторому классу $\{X\}$. То же справедливо для множества Y. Требуется для некоторого класса отображений $\{f\}$ выяснить вопрос существования и построения вложения $f\colon X\to Y$ такого, что $f\in\{f\}$, $X\in\{X\}$, $Y\in\{Y\}$. При этом вложение должно удовлетворять определенным экстремальным свойствам, которые могут быть различны в зависимости от информации о $\{X\}$, $\{Y\}$, конкретной задачи, целей вложения и т. п. Часто они сводятся или к условию максимальности параметров объекта $X\in\{X\}$ при фиксированном Y, или к условию минимальности «размера» (мощности или размерности) множества $Y\in\{Y\}$ при фиксированном X, или к некоторым требованиям экстремальности метрических характеристик самого вложения $f\in\{f\}$.

При вложении параллелепипеда R^n в тор T^n мы использовали лемму 3.1, которая в данном случае сводит исходную задачу к одномерным вложениям $\varphi_i\colon R^1\to T^1$. Полному решению задачи вложения и нахождения метрических характеристик здесь помогает равенство размерностей параллелепипеда R^n и тора T^n. Если же размерность вкладываемого множества меньше, то экстремальные задачи указанного типа редко удается решить точно. Так, непростыми являются уже задачи о вложениях $R^1\to T^2$ и $T^1\to T^2$, когда требуется найти, например, наибольшую мощность вкладываемых множеств в классе всех $\langle p, q\rangle$-вложений в данный двумерный тор $T^2(t_1, t_2)$ или найти наибольшее значение радиуса изометричности в классе всех $\langle p, 1\rangle$-вложений $T^1(t)\to T^2(t_1, t_2)$ при $t=t_1\cdot t_2$.

Другой экстремальной задачей этого типа является задача о наибольшей длине цепи или цикла в единичном n-мерном кубе I^n. Эта задача возникает, как отмечалось в § 2, в связи с различными вопросами дискретного анализа. Уточним вначале свойства $\langle p, q\rangle$-вложений множеств R^1 и T^1 в произвольный граф $G(V, E)$.

Пусть $Z_{0,l}=\{0, 1, \ldots, l\}$, $\rho_{R^1}=\rho_{Z_{0,l}}=|x-y|$, и вложение $f\colon Z_{0,l}\to V(G)$ является p-изометрическим и сохраняет q-различимость, $1\leqslant q\leqslant p\leqslant l$. Как отмечалось в § 2, граф множества $Z_{0,l}$ с метрикой решетки ρ_{R^1} является цепью длины l, а с метрикой тора ρ_{T^1} — циклом длины $l+1$. Вершины образа $f(Z_{0,l})$ определяют тогда в $G(V, E)$ подграф C, который является цепью (или циклом) с множеством ребер $\{f(i),$

$f(i+1)\}$, $i=0, 1, \ldots, l-1$. Для цикла добавляются еще ребро $\{f(l), f(0)\}$ и условие $p \leqslant [l/2]$. Поскольку вложение f обратимо, то C — простая цепь (цикл). Если C' — подцепь цепи C длины не более p, то по свойству p-изометричности отображения f эта подцепь C' является в G кратчайшей цепью. Свойство сохранения q-различимости означает, что цепь C не подходит в G сама к себе ближе, чем на расстояние q. Для $q=2$ это означает, что C в G не имеет хорд, т. е. ребер из $E(G)$, которые не принадлежат C, но соединяют две вершины из C. Удобно и для произвольного $q>2$ это свойство сформулировать, как отсутствие $(q-1)$-хорд, т. е. цепей в G длины $q-1$, соединяющих две вершины цепи C, расстояние между которыми по цепи C больше $q-1$. Таким образом, справедливо

Предложение 3.1. *Если f: $Z_{0,l} \to V(G)$ является $\langle p, q\rangle$-вложением, то образ отображения f определяет подграф C графа $G(V, E)$ такой, что*

1) *C — простая цепь (цикл),*
2) *всякая подцепь длины $i \leqslant p$ в C кратчайшая в G,*
3) *в C нет $(q-1)$-хорд.*

В частности, при $l=|V|-1$ необходимо $q(f)=1$ и отображение f определяет гамильтонову цепь (цикл).

Вложение $Z_{0,l}$ в T^2. Обмотка тора.

Легко построить в $T^2(t_1, t_2)$ гамильтонов цикл, обходя все вершины «змейкой» и при необходимости, возвращаясь по одной из координат к началу. Эта конструкция дает вложение f: $Z_{0,l} \to T^2(t_1, t_2)$, где $l=t_1 \cdot t_2$ и $q(f)=1$, $p(f)=2$. Однако решение экстремальных задач, о которых упоминалось выше, приводит к необходимости исследовать конструкцию вложения, которую будем называть *обмоткой тора.*

Для исследования удобно граф $T^2(t_1, t_2)$ считать декартовым произведением двух ориентированных циклов $\vec{C}_{t_1} \times \vec{C}_{t_2}$ длины t_1 и t_2 соответственно. Каждая цепь или цикл в такой ориентированной решетке $\vec{C}_{t_1} \times \vec{C}_{t_2}$ имеет вид «лестницы», которая «вьется» по поверхности тора, обматывая его. Если прохождение горизонтального ребра (по параллели) записывать буквой a, а вертикального (по меридиану) — буквой b, то цепь-лестница определяет слово в алфавите $\langle a, b\rangle$. Обратно, каждому слову соответствует цепь в $\vec{C}_{t_1} \times \vec{C}_{t_2}$, если выбрать некоторую вершину в качестве начальной. Самопересечение цепи порождает цикл такой, что в соответствующем ему отрезке число букв a кратно t_1, а число букв b кратно t_2. Например, вложение $Z_{3,l} \to T^2(t_1, t_2)$ цепи длины $l=t_1 \cdot t_2 - 1$ можно построить следующим образом. Повторим слово $\underbrace{a \ldots a\, b}_{t_1-1}$ ровно t_2 раз, а в последнем удалим букву b на конце. Получим слово

$$\underbrace{a \ldots ab}_{t_1}\ \underbrace{a \ldots ab}_{t_1} \ldots \ldots \underbrace{a \ldots a}_{t_1-1}$$

длины $t_1 \cdot t_2 - 1$. В любом отрезке этого слова либо число букв a не кратно t_1, либо число букв b не кратно t_2. Следовательно, этому слову соответствует простая цепь. Эта цепь гамильтонова и $q(f)=1$, $p(f)=[t_1/2]$.

Всякому вложению цикла длины $l=t_1 \cdot t_2$ в $T^2(t_1, t_2)$ методом обмотки тора соответствует слово C в алфавите $\langle a, b\rangle$ вида $C=$

$$=A_1B_1A_2B_2 \ldots A_sB_s, \text{ где } A_i = \underbrace{a \ldots a}_{n_i},\ B_i = \underbrace{b \ldots b}_{m_i} \text{ и } \sum_{i=1}^{s} (n_i + m_i) = t_1 \cdot t_2.$$

Необходимые и достаточные условия обратимости вложения, определенного словом C, и, следовательно, необходимые и достаточные условия гамильтоновости цикла C дает следующая

Лемма 3.2. *Слово C соответствует гамильтонову циклу в $T^2(t_1, t_2)$ тогда и только тогда, когда последовательности $\{n_i\}_{i=1}^{s}$ и $\{m_i\}_{i=1}^{s}$ периоди-*

ческие *), *сумма* $\sum_{i=1}^{r}(n_i+m_i)$ *равна наибольшему общему делителю* (t_1, t_2), $\sum_{i=1}^{r} n_i$ *взаимно-проста с* t_1, $\sum_{i=1}^{r} m_i$ *взаимно-проста с* t_2, *где* r — *наименьшее общее кратное периодов последовательностей* $\{n_i\}_{i=1}^{s}$ *и* $\{m_i\}_{i=1}^{s}$.

Эта лемма доказывается точно так же, как аналогичная лемма 3 [15].

Отметим, [15], что из леммы 3.2 следует связь конструкции «обмотка тора» с вопросом разрешимости в натуральных числах x и y следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} x+y&=(t_1, t_2),\\ (x, t_1)&=1, \\ (y, t_2)&=1. \end{aligned} \tag{18}$$

Точнее, в $\vec{C}_{t_1}\times\vec{C}_{t_2}$ существует гамильтонов цикл тогда и только тогда, когда разрешима в натуральных числах система (18). Пусть d — наибольший общий делитель t_1, t_2. Тогда решение системы (18) существует при любом d в интервале $2\leqslant d\leqslant 15$, но для $d=16$ решения нет, например, при $t_1=5\cdot 11\cdot 16$, $t_2=3\cdot 7\cdot 13\cdot 16$. В интервале $2\leqslant d\leqslant 100$ существует ровно 18 значений d, для которых система (18) неразрешима: 1, 16, 22, 34, 36, 46, 56, 64, 66, 70, 76, 78, 86, 88, 92, 94, 96, 100. Можно указать различные случаи разрешимости, например, для всех $d=p^\alpha+1$, где p простое. Случаи неразрешимости, по-видимому, редки.

В л о ж е н и е п а р а л л е л е п и п е д а и т о р а в г и п е р к у б. Всякое $\langle p, q\rangle$-вложение $f\colon X\to I^n$ в гиперкуб I^n определяет, как указывалось в § 1, кодирование элементов множества X булевыми векторами длины n, а образ отображения является кодом, сохраняющим расстояния. Параметры этого кода (кроме его размерности n) определяются метрическими характеристиками вложения — радиусом изометричности $p(f)$ и порогом различимости $q(f)$. Для любого вложения параллелепипеда $R^m(l_1, \ldots, l_m)$ или тора $T^m(l_1, \ldots, l_m)$ в I^n из условия обратимости вытекают неравенства $|R^m|\leqslant|I^n|$ и $|T^m|\leqslant|I^n|$. Поскольку $|R^m|=|T^m|=\prod_{i=1}^{m} l_i$, то

$$\sum_{i=1}^{m}\log_2 l_i\leqslant n. \tag{19}$$

Если $m=n$, то из (19) следует $l_1=\ldots=l_m=2$, и естественное отображение φ, определенное ранее (см. теорему 3.1), является полной изометрией параллелепипеда $R^n(2, \ldots, 2)$, тора $T^n(2, \ldots, 2)$ и гиперкуба I^n с параметрами $p(\varphi)=q(\varphi)=n$.

Пусть $m<n$. Вначале рассмотрим случай $m=1$, т. е. вложение множества $Z_{0,l-1}=\{0, 1, \ldots, l-1\}$ с метрикой решетки ρ_{R^1} и метрикой тора ρ_{T^1}. Тогда в силу (19) $l\leqslant 2^n$, и для любого вложения $f\colon Z_{0,2^n-1}\to I^n$ необходимо $q(f)=1$. Нижнюю оценку наибольшего возможного значения радиуса изометричности дает следующая

Теорема 3.2. *Для любого* $n\geqslant 5$ *существует* $\langle p, 1\rangle$-*вложение* $f\colon Z_{0,2^n-1}\to I^n$, *радиус изометричности которого удовлетворяет неравенству* $p(f)\geqslant\,](n+2)/2[$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По предложению 3.1 образ отображения $f\colon Z_{0,2^n-1}\to I^n$, являющегося $\langle p, 1\rangle$-вложением, определяет в I^n простую

*) Период k последовательности $n_1, n_2, \ldots, n_s$ — это такой наименьший делитель числа s, что $n_i=n_{i+k}$, где индексы берутся по модулю s.

цепь C (или цикл при метрике ρ_{T1}), любая подцепь длины k которой есть кратчайшая цепь в I^n для $k \leqslant p$. Последовательные вершины цепи C, т. е. булевы векторы $f(0), f(1), \ldots, f(2^n-1)$, таковы, что $\rho_{I^n}(f(i-1), f(i)) = 1$ при $i = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$.

Следуя, как и ранее, идее представления вложения множества $Z_{0,l}$ в декартово произведение словом в алфавите, сопоставим цепи C слово C в алфавите $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, i-я буква которого есть a_j, если $f(i)$ отличается от $f(i-1)$ в j-й координате, т. е. если

$$f(i) \oplus f(i-1) = \tilde{e}_j, \tag{20}$$

где $\tilde{e}_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Тогда подцепи $f(i), \ldots, f(j)$ цепи C соответствует отрезок длины $j - i$ слова C, и поскольку

$$\rho_{I^n}(f(i), f(j)) = \|f(i) \oplus f(j)\|,$$

то расстояние Хемминга между концами подцепи равно числу букв алфавита, которые входят в соответствующий ей отрезок слова C нечетное число раз. Отсутствие самопересечений цепи C означает тогда, что в слове C нет отрезков с четным числом вхождений каждой буквы, а свойство «любая подцепь длины $k \leqslant p$ является кратчайшей» означает, что в слове C любые p последовательные буквы различны. Обратно, всякое слово длины $2^n - 1$ в алфавите A, удовлетворяющее этим свойствам, определяет в I^n цепь, первая вершина которой $f(0) = \tilde{0}$, и далее $f(i) = f(i-1) \oplus \tilde{e}_j$, если i-я буква слова есть a_j. Эта цепь определяет $\langle p, 1\rangle$-вложение $f\colon Z_{0,2^n-1} \to I^n$. В случае метрики ρ_{T1}, когда C — цикл, а не цепь, аналогичным свойствам должно удовлетворять «круговое» слово C, за последней буквой которого следует первая и т. д. Приведенное соответствие сводит задачу вложения к комбинаторной задаче конструирования слов с указанными свойствами, решенной в работе [15]. Конструкция рекурсивного типа и по $\langle p_1, 1\rangle$-вложению $f_1\colon Z_{0,l_1-1} \to I^{n_1}$ и по $\langle p_2, 1\rangle$-вложению $f_2\colon Z_{0,l_2-1} \to I^{n_2}$ определяет, согласно описанному выше методу обмотки тора, $\langle p, 1\rangle$-вложение $f\colon Z_{0,l-1} \to I^{n_1+n_2}$, где $l = l_1 \cdot l_2$, а $p(f)$ «близко» к $p_1 + p_2$. В частности, при $n_1 = n_2$ справедливо $p(f) = p_1 + p_2 - 1$ (подробности см. в [15]). Из теоремы 3 [15] непосредственно следует оценка радиуса изометричности $p(f) \geqslant \,](n+2)/2[$. Теорема доказана.

Для $n = 1$, 3 и 4 теорема неверна, а наибольшие значения радиусов изометричности соответствующих вложений равны 1, 2 и 2. При $n = 5$ слово C, определяющее $\langle 4, 1\rangle$-вложение $Z_{0,31} \to I^5$ с метрикой ρ_{R1}, может быть задано следующим образом. В алфавите $A = \{a, b, c, d, e\}$ образуем слово $C_1 = abcdabc$ и $C_2 = adcbadc$. Тогда $C = C_1eC_2eC_1eC_2$. В C любые четыре последовательные буквы различны, и нет отрезков с четным числом вхождений каждой буквы, т. е. слову C соответствует $\langle 4, 1\rangle$-вложение $Z_{0,31} \to I^5$. Это вложение порождает серию $\langle p_i, 1\rangle$-вложений $Z_{0,2^{n_i}-1} \to I^{n_i}$ для подпоследовательности $\{n_i\}$ вида $n_i = 5 \cdot 2^i$ со значением радиуса изометричности $p_i \geqslant (3/5)n_i + 1$.

Естественно возникает вопрос о существовании $\langle n_i - 1, 1\rangle$-вложений $Z_{0,2^{n_i}-1} \to I^{n_i}$ для бесконечной подпоследовательности значений n. Этот вопрос пока открыт.

Определим теперь вложение тора $T^m(l_1, \ldots, l_m)$ в I^n при $m > 1$. Ограничимся случаем параметров l_i вида $l_i = 2^{s_i}$, $s_i \geqslant 5$, $i = 1, \ldots, m$, чтобы воспользоваться теоремой 3.2 и не проводить дополнительных построений технического характера.

Теорема 3.3. *Существует вложение $f\colon T^m \to I^n$, которое* (а) *при* $n \geqslant \sum_{i=1}^{m} s_i$ *является* $\langle p, 1\rangle$*-вложением, радиус изометричности которого удовлетворяет неравенству* $p(f) \geqslant](s+2)/2[$, *где* $s = \min_i \{s_i\}$,

(б) *при* $n \geqslant \sum_{i=1}^{m} 2^{s_i-1}$ *является полной изометрией с параметрами* $p(f) = q(f) = \sum_{i=1}^{m} 2^{s_i-1}$.

Доказательство. (а) Пусть f_i: $Z_{0,2^{s_i}-1} \to I^{s_i}$ при $i = 1, \ldots, m$ — те отображения, которые существуют по теореме 3.2. Каждое из них является $\langle p_i, 1\rangle$-вложением с радиусом изометричности $p_i \geqslant](s_i+2)/2[$. Тогда естественное отображение f, переводящее $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \in T^m$ в $f(\tilde{x}) = \{f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m)\} \in I^{s_1} \times \ldots \times I^{s_m}$, определяет по лемме 3.1 $\langle p, 1\rangle$-вложение f: $Z_{0,2^{s_1}-1} \times \ldots \times Z_{0,2^{s_m}-1} \to I^{\Sigma s_i}$, радиус изометричности которого удовлетворяет неравенству $p(f) \geqslant \min_i \{](s_i+2)/2[\}$.

(б) Определим m отображений f_i: $Z_{0,2^{s_i}-1} \to I2^{s_i-1}$ следующим образом. Для любого $i = 1, \ldots, m$ пусть $f_i(0) = \tilde{0}$, $f_i(k) = f_i(k-1) \oplus \tilde{e}_k$, $f_i\left(2^{s_i-1} + k\right) = \overline{f_i(k)}$ при $k = 1, 2, \ldots, 2^{s_i-1}$, где $\overline{f_i(k)}$ — отрицание булева вектора $f_i(k)$. Поскольку для любых $p, q \in Z_{0,2^{s_i}-1}$ справедливо $\rho_{I^{2^{s_i-1}}}(f_i(p), f_i(q)) = \min\{|p-q|, l_i - |p-q|\} = \rho_{T^1}(p, q)$, то f_i — полная изометрия с параметрами $p(f_i) = q(f_i) = 2^{s_i-1}$. Тогда естественное отображение $f(\tilde{x}) = \{f_1(x_1), \ldots, f_m(x_m)\}$ определяет по лемме 3.1 полную изометрию f: $T^m \to I^{\Sigma 2^{s_i-1}}$ с параметрами $p(f) = q(f) = \sum_{i=1}^{m} 2^{s_i-1}$. Теорема доказана.

Заметим, что в случае (а) значение суммы $\sum_{i=1}^{m} s_i$ есть наименьшая размерность n возможного вложения f: $T^m \to I^n$, которое в этом случае взаимно-однозначно. В случае (б) неравенство $n \geqslant \sum_{i=1}^{m} 2^{s_i-1}$ является не только достаточным, но и необходимым условием существования полной изометрии, поскольку последняя невозможна при $d(T^m) > d(I^n)$.

Вложение параллелепипеда $R^m(l_1, \ldots, l_m)$ в гиперкуб определяется композицией уже построенных вложений φ: $R^m \to T^m$ и f: $T^m \to I^n$. При произвольных значениях l_i можно, подобно вложению тора T^m, пользоваться теоремой 3.2 и «усечением» цепи C до необходимой длины. Это полезно, если в гиперкубе цепь с нужным свойством оказывается длиннее цикла.

Вложения в гиперкуб при значениях порога различимости $1 < q < n$ и решения соответствующих экстремальных задач зависят от конструкций цепных кодов и качества оценки их параметров [5]. Исследование этих вложений проводится с привлечением алгебраических методов [14] и выходит за рамки комбинаторно-геометрических конструкций настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Дискретная математика и математические вопросы кибернетики**/Яблонский С. В. и др.— М.: Наука, 1974.— 311 с.
2. **Евдокимов А. А.** О максимальной длине цепи в единичном n-мерном кубе // Мат. заметки.— 1969.— Т. 6, № 3.— С. 309—319.

3. **Журавлев Ю. И.** Оценка сложности построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Дискретный анализ.— Новосибирск, 1964.— Вып. 3.— С. 41—77.
4. **Сапоженко А. А., Асратян А. С., Кузюрин Н. Н.** Обзор некоторых результатов по задачам о покрытии // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач.— Новосибирск, 1977.— Вып. 30.— С. 46—75.
5. **Евдокимов А. А.** Цепные коды с произвольным расстоянием // Докл. АН СССР.— 1976.— Т. 228, № 6.— С. 1273—1276.
6. **Klee V.** The use of circuit codes in analog-digital conversion // Graph theory and its appl — N. Y.: Acad. Press.— 1970.— P. 121—131.
7. **Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.** Комбинаторные алгоритмы, теория и практика.— М.: Мир, 1980.— 476 с.
8. **Preparata F. P., Nievergelt J.** Dufference-preserving codes // IEEE Trans.— IT-20.— 1974.— P. 643—649.
9. **Зыков А. А.** Теория конечных графов.— Новосибирск: Наука, 1969.— 542 с.
10. **Харари Ф.** Теория графов.— М.: Мир, 1973.— 300 с.
11. **Тылкин М. Е.** О реализуемости матриц расстояний в единичных кубах // Проблемы кибернетики.— 1962.— Вып. 7.— С. 31—42.
12. **Имрих В., Стоцкий Э.** Об оптимальных вложениях метрик в графы // Докл. АН СССР.— 1971.— Т. 200, № 2.— С. 279—281.
13. **Гэри М., Джонсон Д.** Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.— М.: Мир, 1982.— 416 с.
14. **Евдокимов А. А.** Полные множества слов и их числовые характеристики // Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур.— Новосибирск, 1983.— Вып. 39.— С. 7—19.
15. **Евдокимов А. А.** О нумерации подмножеств конечного множества // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач.— Новосибирск, 1980.— Вып. 34.— С. 8—26.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

А. А. КАПЛАН

С развитием методов оптимизации возрастает роль вариационного подхода в решении ряда важных в прикладном отношении нелинейных задач математической физики (теории упругости, гидродинамики и т. д.). Теоретическое исследование соответствующих вариационных постановок определило класс бесконечномерных экстремальных задач, обладающих удобной для использования оптимизационных методов структурной спецификой. В общих чертах задача состоит в минимизации непрерывного коэрцитивного (или слабо коэрцитивного) квадратичного функционала на выпуклом замкнутом множестве относительно простой структуры. Решение таких задач обычно базируется на сочетании средств конечномерной аппроксимации и методов выпуклого программирования, и эффективность вычислительного процесса в значительной степени зависит от согласования параметров дискретизации и управляющих параметров выбранного оптимизационного алгоритма.

В данной работе развитие и исследование методов выпуклого программирования ориентировано на их последующее использование для решения вариационных задач указанного типа.

Построение системы аппроксимирующих задач на последовательности сеток, осуществленное в § 3, не увязано с конкретным алгоритмом их решения: при конструировании таких задач мы добиваемся улучшения тех их характеристик, которые важны для большинства оптимизационных методов (обусловленность минимизируемого функционала, простота ограничений и т. д.). При разработке модифицированного варианта метода штрафов, предназначенного для решения вспомогательных конечномерных задач (§ 4), согласование параметров управления с избранной схемой аппроксимации и конкретный выбор функции штрафа играют определяющую роль.