3. Журавлев Ю. И. Оценка сложности построения минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики // Дискретный анализ.— Новосибирск, 1964.— Вып. 3.— С. 41—77.
4. Сапоженко А. А., Асратян А. С., Кузюрин Н. Н. Обзор некоторых результатов по задачам о покрытии // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач.— Новосибирск, 1977.— Вып. 30.— С. 46—75.
5. Евдокимов А. А. Цепные коды с произвольным расстоянием // Докл. АН СССР.— 1976.— Т. 228, № 6.— С. 1273—1276.
6. Klee V. The use of circuit codes in analog-digital conversion // Graph theory and its appl — N. Y.: Acad. Press.— 1970.— P. 121—131.
7. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н. Комбинаторные алгоритмы, теория и практика.— М.: Мир, 1980.— 476 с.
8. Preparata F. P., Nievergelt J. Dufference-preserving codes // IEEE Trans.— IT-20.— 1974.— P. 643—649.
9. Зыков А. А. Теория конечных графов.— Новосибирск: Наука, 1969.— 542 с.
10. Харари Ф. Теория графов.— М.: Мир, 1973.— 300 с.
11. Тылкин М. Е. О реализуемости матриц расстояний в единичных кубах // Проблемы кибернетики.— 1962.— Вып. 7.— С. 31—42.
12. Имрих В., Стоцкий Э. Об оптимальных вложениях метрик в графы // Докл. АН СССР.— 1971.— Т. 200, № 2.— С. 279—281.
13. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.— М.: Мир, 1982.— 416 с.
14. Евдокимов А. А. Полные множества слов и их числовые характеристики // Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур.— Новосибирск, 1983.— Вып. 39.— С. 7—19.
15. Евдокимов А. А. О нумерации подмножеств конечного множества // Методы дискретного анализа в решении комбинаторных задач.— Новосибирск, 1980.— Вып. 34.— С. 8—26.

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ И ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

*А. А. КАПЛАН*

С развитием методов оптимизации возрастает роль вариационного подхода в решении ряда важных в прикладном отношении нелинейных задач математической физики (теории упругости, гидродинамики и т. д.). Теоретическое исследование соответствующих вариационных постановок определило класс бесконечномерных экстремальных задач, обладающих удобной для использования оптимизационных методов структурной спецификой. В общих чертах задача состоит в минимизации непрерывного коэрцитивного (или слабо коэрцитивного) квадратичного функционала на выпуклом замкнутом множестве относительно простой структуры. Решение таких задач обычно базируется на сочетании средств конечномерной аппроксимации и методов выпуклого программирования, и эффективность вычислительного процесса в значительной степени зависит от согласования параметров дискретизации и управляющих параметров выбранного оптимизационного алгоритма.

В данной работе развитие и исследование методов выпуклого программирования ориентировано на их последующее использование для решения вариационных задач указанного типа.

Построение системы аппроксимирующих задач на последовательности сеток, осуществленное в § 3, не увязано с конкретным алгоритмом их решения: при конструировании таких задач мы добиваемся улучшения тех их характеристик, которые важны для большинства оптимизационных методов (обусловленность минимизируемого функционала, простота ограничений и т. д.). При разработке модифицированного варианта метода штрафов, предназначенного для решения вспомогательных конечномерных задач (§ 4), согласование параметров управления с избранной схемой аппроксимации и конкретный выбор функции штрафа играют определяющую роль.

Основная часть утверждений приводится без доказательства. Исключение сделано лишь для наиболее существенных из неопубликованных результатов.

## § 1. О КОРРЕКТНОСТИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ЗАДАЧ ВЫПУКЛОЙ ОПТИМИЗАЦИИ. РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА МЕТОДА ШТРАФОВ

Учитывая некоторую неоднозначность в трактовке корректности экстремальных задач (ср., например, [7] и [34]), уточним, какой смысл соответствующим понятиям придается в данной работе.

Пусть $V$ — гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|_V$, $U_0 \subset V$ — выделенное связное множество; $J$, $g^j$: $U_0 \to \mathbf{R}$ — заданные непрерывные функционалы ($j = \overline{1, m}$), $g = (g^1, \ldots, g^m)$. Рассматривается задача

$$J(u) \to \min! \tag{1}$$

при ограничениях

$$u \in U_0, \tag{2}$$

$$g(u) \leqslant 0, \tag{3}$$

множество $U^*$ решений которой непусто. В дальнейшем эти предположения считаются выполненными на протяжении всей работы.

Сопоставим фиксированному $\delta > 0$ множество

$$\Phi_\delta = \{(J_\delta, g_\delta^1, \ldots, g_\delta^m)\colon\ J_\delta \in C(U_0),\ g_\delta^j \in C(U_0),$$
$$\|J - J_\delta\|_{C(U_0)} \leqslant \delta,\ \|g^j - g_\delta^j\|_{C(U_0)} \leqslant \delta,\ j = \overline{1, m}\} \tag{4}$$

и свяжем с элементом $\varphi_\delta \in \Phi_\delta$ задачу

$$J_\delta(u) \to \min! \tag{5}$$

при ограничениях

$$u \in U_0, \tag{6}$$

$$g_\delta(u) \leqslant 0. \tag{7}$$

Пусть $U(\varphi_\delta) = \{u \in U_0\colon\ g_\delta(u) \leqslant 0\}$, $U^*(\varphi_\delta) = \left\{u^* \in U(\varphi_\delta)\colon\ J_\delta(u^*) = \inf\limits_{u \in U(\varphi_\delta)} J_\delta(u)\right\}$. В приведенных ниже определениях слабой корректности и корректности предполагается, что для $\delta \in (0, \delta_0]$ при любом $\varphi_\delta \in \Phi_\delta$ задача (5)—(7) разрешима.

Придерживаясь терминологии работы [21], будем называть задачу (1)—(3) *слабо корректной*, если при любом выборе $\varphi_\delta \in \Phi_\delta$ имеет место

$$\lim_{\delta \to +0} \sup_{u \in U^*(\varphi_\delta)} \inf_{v \in U^*} \|u - v\|_V = 0, \tag{8}$$

и *корректной*, если

$$\lim_{\delta \to +0} \sup_{u, u' \in U^*(\varphi_\delta) \cup U^*} \|u - u'\|_V = 0. \tag{9}$$

Если же (i) нарушено условие (9) либо (ii) для любого $\delta \in (0, \delta_0]$ при некотором $\varphi_\delta \in \Phi_\delta$ задача (5)—(7) не имеет решения, то говорят, что задача (1)—(3) *некорректна*. В случае (ii) следует считать, что (1)—(3) не является и слабо корректной.

Введенные понятия зависят от выбора пространства $V$ и множества $\Phi_\delta$. Определяя $\Phi_\delta$ относительно нормы пространства непрерывных функционалов, мы исходили из дальнейшей конкретизации задачи (1)—(3) в данной работе. Однако при задании $\Phi_\delta$ зачастую следует учитывать и характер «искажения» исходной информации, связанного с избранным алгоритмом ее решения (например, с применяемым в алгоритме способом аппроксимации искомого решения). В определение $\Phi_\delta$ могут быть включены также дополнительные требования о характере возмущенных задач, например условие выпуклости (линейности) функционалов $J_\delta$, $g_\delta^i$. Для расширения множества рассматриваемых вариаций иногда полезно заменить $U_0$ его подмножеством $\tilde{U}_0$ при условии, что $U^* \cap \tilde{U}_0$ непусто. Аналогичный эффект в других определениях корректности (см., например, [7, 34]) достигается за счет ослабления неравенств в (4):

$$|J(u) - J_\delta(u)| \leqslant \delta(1 + \omega(u)), \quad |g^j(u) - g_\delta^j(u)| \leqslant \delta(1 + \omega(u)),$$

где $u \in U_0$, $\omega$ — неотрицательный функционал, возрастающий с ростом $\|u\|$.

Замечание 1. В § 3.4 изучаются задачи, в которых допустимое множество определено условиями

$$V = U_0 = \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega), \quad \psi - u \leqslant 0 \text{ п.в. на } \Omega \tag{10}$$

либо

$$V = U_0 = W_2^1(\Omega), \quad \psi - \gamma u \leqslant 0 \text{ п.в. на } \Gamma, \tag{11}$$

где $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — область с границей $\Gamma$, $\psi$ — заданная соответственно на $\Omega$ или $\Gamma$ достаточно гладкая функция, $\gamma u \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ — след функции $u$ на $\Gamma$. Вводя оператор $Au = \psi - u$, $A$: $U_0 \to \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ (соответственно $Au = \psi - \gamma u$, $A$: $U_0 \to W_2^{1/2}(\Gamma)$), естественно определить $\Phi_\delta$ следующим образом:

$$\Phi_\delta = \left\{(J_\delta, A_\delta)\colon \|J - J_\delta\|_{C(\tilde{U}_0)} \leqslant \delta, \sup_{u \in \tilde{U}_0} \|Au - A_\delta u\|_Q \leqslant \delta\right\}, \tag{12}$$

где $J_\delta \in C(\tilde{U}_0)$, $A_\delta$: $\tilde{U}_0 \to Q$ — аффинный оператор, $Q$ есть $W_2^1(\Omega)$ (соответственно $W_2^{1/2}(\Gamma)$), $\tilde{U}_0$ — подходящим образом *) выделенное подмножество $U_0$, $\tilde{U}_0 \cap U^* \neq \varnothing$. Такое определение $\Phi_\delta$, как будет ясно из дальнейшего, хорошо согласовано с применяемыми в § 3,4 методами конечноэлементной аппроксимации. Замена неравенства (11) или (12) «функциональным» неравенством $g(u) \leqslant 0$ с целью воспользоваться первоначальной схемой анализа корректности задачи (1)—(3) может привести к нежелательным результатам. Так, при дополнительном условии коэрцитивности $J$ на $V$ указанные задачи будут корректными, если $\Phi_\delta$ определено по формуле (12). Если же заменить ограничение (10) (соответственно (11)) эквивалентным

$$g(u) = \int_\Omega \max[0, \psi - u]\, d\Omega \leqslant 0,$$

(соответственно

$$g(u) \equiv \int_\Gamma \max[0, \psi - \gamma u]\, d\Gamma \leqslant 0),$$

то, как нетрудно видеть, при сколь угодно малых (в норме $C(U_0)$ или $C(\tilde{U}_0)$) вариациях функционала $g$ неравенство $g_\delta(u) \leqslant 0$ может не иметь решения, т. е. задача не является корректной или хотя бы слабо корректной в смысле исходного определения. Применение более подходящих функционалов

$$g(u) = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} (\psi(x) - u(x)), \tag{13}$$

$$g(u) = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Gamma} (\psi(x) - \gamma u(x)) \tag{14}$$

существенно затрудняет исследование корректности ввиду отсутствия

---

*) Например, при определении $\tilde{U}_0$ можно учесть более высокую гладкость решения.

вложений пространств $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ в $L_\infty(\Omega)$, $W_2^{1/2}(\Gamma)$ в $L_\infty(\Gamma)$. (В действительности, используя дополнительную информацию о гладкости искомых решений для выделения $\tilde{U}_0$ и развитую И. Нитше [48] технику весовых норм, удается показать, что при использовании (13), (14) рассматриваемые задачи будут корректными, если определить $\Phi_\delta$ относительно нормы пространства $L_\infty(\tilde{U}_0)$.)

Конкретный характер приложений позволил существенно сузить в данной работе круг вопросов, обычно связываемых с исследованием корректности экстремальных задач. Следует вновь указать на монографию [7], в которой соответствующая проблематика изучается в широком аспекте, приведено и исследовано большое количество интересных примеров.

Обозначим $U=\{u\in U_0\colon\ g(u)\leqslant 0\}$, $J_{\min}=\min\limits_{u\in U} J(u)$, $\bar{g}(u)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} g^j(u)$, $\rho(u,\ Q)=\inf\limits_{v\in Q}\|u-v\|$.

**Лемма 1.** *Пусть $U_0$ — замкнутое выпуклое множество, $J$, $g^j$ — выпуклые функционалы; существует $u^0\in U_0$ такое, что $g(u^0)<0$ (условие Слейтера); функционалы $J_\delta$, $g_\delta^j$ слабо полунепрерывны снизу; $U^*$ ограничено,* $\lim\limits_{\delta\to+0}\sup\limits_{u\in W_\delta}\rho(u,\ U^*)=0$, *где* $W_\delta=\{u\in U_0\colon\ J(u)\leqslant J_{\min}+\delta,$ $\bar{g}(u)\leqslant\delta\}$. *Тогда задача* (1)—(3) *слабо корректна.*

Доказательство. Легко видеть, что при $\delta\to+0$ величина $\tilde{J}_\delta=\inf\{J(u)\colon\ u\in U_0,\ \bar{g}(u)\leqslant-\delta\}$ стремится к $J_{\min}$. Фиксируем $\delta_0>0$, при котором $W_{\delta_0}$ ограничено, и выберем $\tilde{\delta}<\delta_0$ таким образом, чтобы $\tilde{J}(\tilde{\delta})-J_{\min}+3\tilde{\delta}<\delta_0$, $\tilde{\delta}\in\left(0,\ \min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}|g^j(u^0)|\right)$. При $0<\delta<\tilde{\delta}$ и любом $\varphi_\delta\in\Phi_\delta$ множество $\{u\in U_0\colon\ g_\delta(u)\leqslant 0\}$ непусто и содержится в $\{u\in U_0\colon\ \bar{g}(u)\leqslant\delta\}$. С учетом выбора $\tilde{\delta}$ нетрудно проверить, что система

$$J_\delta(u)\leqslant\tilde{J}(\delta)+2\delta,\ g_\delta(u)\leqslant 0,\ u\in U_0,$$

совместна и множество ее решений содержится в $\tilde{U}_\delta\in\{u\in U_0\colon\ J(u)\leqslant\tilde{J}(\delta)+3\delta,\ \bar{g}(u)\leqslant\delta\}$, причем $\tilde{U}_\delta\subset W_{\delta_0}$ и, следовательно, $\tilde{U}_\delta$ ограничено. С учетом свойств $J$, $g^j$ заключаем, что $\tilde{U}_\delta$ слабо компактно. Тем самым

$$\inf\{J_\delta(u)\colon\ u\in U_0,\ g_\delta(u)\leqslant 0\}=\inf\{J_\delta(u)\colon\ u\in\tilde{U}_\delta,\ g_\delta(u)\leqslant 0\}$$

и, так как функционалы $J_\delta$, $g_\delta^j$ слабо полунепрерывны снизу, то инфимум справа (а значит, и слева) достигается, т. е. $U^*(\varphi_\delta)\neq\varnothing$, $U^*(\varphi_\delta)\subset\tilde{U}_\delta$. Ввиду непустоты $U^*(\varphi_\delta)$ и вложения $U^*(\varphi_\delta)\subset\tilde{U}_\delta\subset W_{\delta_0}$ из последнего условия леммы следует $\lim\limits_{\delta\to+0}\sup\limits_{u\in U^*(\varphi_\delta)}\rho(u,\ U^*)=0$. □

Укажем, что при несколько ином определении слабой корректности (в частности, предполагается выпуклость $J_\delta$, $g_\delta^j$) аналогичный результат для конечномерных задач установлен в [14]. Когда $V$ конечномерно, последнее условие леммы является следствием остальных. В общем случае нетрудно проверить, что если $U_0$ выпукло и замкнуто, $J$, $g^j$ — выпуклые функционалы, выполнено условие Слейтера и множество $W_{\delta_0}$ ограничено при некотором $\delta_0>0$, то $\lim\limits_{\delta\to+0}\sup\limits_{u\in W_\delta}\rho(u,\ U)=0$, и точно также при $\inf\limits_{u\in U_0} J(u)<J_{\min}$ справедливо $\lim\limits_{\delta\to+0}\sup\limits_{u\in W_\delta}\rho(u,\ S)=0$, где $S=\{u\in U_0\colon J(u)\leqslant J_{\min}\}$. Однако, как показывает следующий пример, это отнюдь не означает, что $\lim\limits_{\delta\to+0}\sup\limits_{u\in W_\delta}\rho(u,\ U^*)=0$.

Пример. Пусть $V=U_0=l_2$, $J(u)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_i^2/i$, $g(u)=\max\{g_1(u),$

$g_2(u)\}$, где $g_1(u)=u_1+1$, $g_2(u)=\sum_{i=1}^{\infty} u_i^2-2$. Тогда в задаче (1)—(3), очевидно, $U^*=\{(-1, 0, \ldots, 0, \ldots)\}$, условия леммы (исключая последнее) выполнены, множество $W_\delta$ ограничено при любом $\delta>0$, $\inf_{u\in U_0} J(u)= =0<J_{\min}$. Вместе с тем для последовательности точек $u^i=\Big(-1, 0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots\Big)\in W_{\delta_i}$ при $\delta_i=1/i$, как легко видеть, $\lim_{i\to\infty}\rho(u^i, U^*)=1$.

Следует отметить, что проверка последнего условия леммы 1 — традиционный этап исследования характера сходимости обобщенных минимизирующих последовательностей. Отсылая в этой связи читателя к работам [6, 23], остановимся здесь лишь на одном достаточном признаке, важном для исследования слабой корректности задач, рассматриваемых в § 3.

Пусть $V_1\subset V$ — конечномерное подпространство, $Q_1$ — ортопроектор на $V_1$, $Q_2=I-Q_1$, $I$ — тождественный оператор на $V$; функционал $J$ при любых $u_1, u_2\in V$ удовлетворяет условию

$$J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}J(u_1)+\frac{1}{2}J(u_2)-q(\|Q_2u_1-Q_2u_2\|), \tag{15}$$

где $q$ — монотонно возрастающая функция, $q(0)=0$. Если, кроме того, $W_{\delta_0}$ ограничено при некотором $\delta_0>0$, то последнее условие леммы 1 является следствием остальных. Действительно, пусть $\delta_k\to+0, u^k\in W_{\delta_k}$, $\{u^k\}$ слабо сходится к $z$. С учетом свойств функции $\rho(\cdot, U)$ и соотношения $\lim_{\delta\to+0}\sup_{u\in W_\delta}\rho(u, U)=0$ нетрудно вывести $\varlimsup_{k\to\infty}\rho((u_k+z)/2, U)= =\varlimsup_{k\to\infty}\rho\left(u^k, U\right)=\rho(z, U)=0$, откуда $J(z)\geqslant J_{\min}$, и ввиду слабой полунепрерывности снизу $J$ имеем $\varliminf_{k\to\infty}J\left(u^k\right)\geqslant J(z)$, $\varliminf_{k\to\infty}J\left(\left(u^k+z\right)/2\right)\geqslant J(z)$, а на основании определения $W_{\delta_k}$ справедливо $\varlimsup_{k\to\infty}J\left(u^k\right)\leqslant J_{\min}$. Таким образом $J(z)=J_{\min}$, и из (15) получаем $\|Q_2u^k-Q_2z\|\to 0$, а $\|Q_1u^k- -Q_1z\|\to 0$ ввиду конечномерности $V_1$.

Лемма 2. *Пусть* $\varphi_k$: $\mathbf{R}^m\to\bar{\mathbf{R}}\equiv\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ — *выпуклые функции,*

$$\lim_{k\to\infty}\varphi_k(z)=\begin{cases}0, & \text{если } \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} z_i<0,\\ +\infty, & \text{если } \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} z_i>0.\end{cases}$$

*Тогда при любых* $\alpha_1<\alpha_2<0$, $\alpha_3>0$, $\beta>0$ *справедливо:* $\varphi_k\rightrightarrows 0$ *на множестве* $\{z\colon \alpha_1\leqslant z_i\leqslant\alpha_2,\ i=\overline{1, m}\}$, $\varphi_k\rightrightarrows+\infty$ *на множестве* $\{z\colon \max\limits_{1\leqslant i\leqslant m} z_i\geqslant\alpha_3\}\cap S_\beta$.

Здесь $S_\beta$ — шар с радиусом $\beta$ и центром в нуле, $\rightrightarrows$ — символ равномерной сходимости, $\varphi_k\rightrightarrows+\infty$ на $\Pi$ означает, что для любого $N$, начиная с некоторого номера, на $\Pi$ имеет место $\varphi_k(z)>N$. Утверждение леммы легко проверить, используя соответствующую часть доказательства теоремы 1 из [16].

Предположим, что относительно исходной задачи выполнены условия леммы 1. Определим $V_k(u)=\varphi_k(g(u))$, $F_k=J+V_k$, $\overset{0}{U}=\{u\in U_0\colon g(u)<0\}$, $U_\tau^*=\{u\in U_0\colon J(u)\leqslant J_{\min}+\tau, \bar{g}(u)\leqslant\tau\}$, где $\tau>0$ фиксировано.

**Теорема 1.** *Пусть* $\varphi_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ — *непрерывные функции, удовлетворяющие условиям леммы 2, причем* $V_k$ *выпуклы и неотрицательны на* $U_0$; *функции* $\tilde{F}_k$: $U_\tau^*\to\mathbf{R}$ *непрерывны и*

$$\left\|\tilde{F}_k-F_k\right\|_{C\left(U_\tau^*\right)}\leqslant\mu_k,\quad \lim\mu_k=0. \tag{16}$$

*Тогда для точек* $u^k \in U_\tau^*$, *удовлетворяющих условию*

$$\widetilde{F}_k(u^k) \leqslant \inf_{u \in U_\tau^*} \widetilde{F}_k(u) + \varepsilon_k, \ \lim \varepsilon_k = 0, \tag{17}$$

*имеет место* $\lim \rho(u^k, U^*) = 0$.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\tau' \in (0, \tau)$, $\tau' < \delta_0$ ($\delta_0$ введено в лемме 1). Множество $U_{\tau'}^*$ слабо компактно. Выберем $\bar{u} \in \overset{0}{U}$ так, чтобы $J(\bar{u}) < J_{\min} + \tau'/2$. Пусть $U_{\tau'} = \{u \in U_{\tau'}^* \colon J(u) = J_{\min} + \tau'$ либо $\bar{g}(u) = \tau'\}$. Функционалы $J$, $g^j$ слабо полунепрерывны снизу и потому достигают минимума на $\underline{U_{\tau'}^*}$. При дополнительном условии $\bar{g}(u) = \tau'$ имеем $\tau' \geqslant g^j(u) \geqslant q$, $j = \overline{1, m}$, где $q > -\infty$ — const. На основании леммы 2 отсюда следует, что, начиная с некоторого $K = K(\tau')$, для точек $u \in U_{\tau'}^*$, удовлетворяющих равенству $\bar{g}(u) = \tau'$,

$$F_k(u) \geqslant J_{\min} + \tau', \tag{18}$$

$$F_k(\bar{u}) < J_{\min} + \tau'/2. \tag{19}$$

Для точек $u \in U_{\tau'}^*$ таких, что $J(u) = J_{\min} + \tau'$, неравенство (18) имеет место ввиду неотрицательности $V_k$. Ввиду (19) и выпуклости $F_k$ на $U_0$ неравенство $F_k(u) \geqslant J_{\min} + \tau'$ при $k \geqslant K$ должно выполняться и на $U_0 \setminus U_{\tau'}^*$. Из соотношений (16), (17), в свою очередь, имеем

$$F_k(u^k) \leqslant \inf_{u \in U_\tau^*} F_k(u) + 2\mu_k + \varepsilon_k \leqslant$$
$$\leqslant \min_{u \in U_{\tau'}^*} F_k(u) + 2\mu_k + \varepsilon_k \leqslant F_k(\bar{u}) + 2\mu_k + \varepsilon_k.$$

Но при больших $k$ ($k \geqslant K' > K$) справедливо $J_{\min} + \tau'/2 + 2\mu_k + \varepsilon_k < J_{\min} + \tau'$, откуда в силу (18), (19) вытекает, что $u^k$ не может принадлежать $U_0 \setminus U_{\tau'}^*$ и, следовательно, принадлежит $U_{\tau'}^*$. Остается сослаться на произвол в выборе $\tau'$ и соотношение $\lim\limits_{\tau' \to +0} \sup\limits_{v \in U_{\tau'}^*} \rho(v, U^*) = 0$. □

Более удобный для практического применения результат получается из следующего утверждения.

**Теорема 1'.** *Теорема* 1 *остается справедливой, если заменить* $U_\tau^*$ *на* $U_0$. *При этом, если* $\widetilde{F}_k$ *выпуклы на* $U_0$, *условие* (16) *можно сохранить прежним.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Замечание 2. Можно убрать предположение о непрерывности $\varphi_k$, одновременно заменив (16) условиями

(i) $\widetilde{F}_k = J_k + \widetilde{V}_k$, $V_k \leqslant \widetilde{V}_k$ на dom $V_k$;

(ii) для всякого $u \in \overset{0}{U}$ справедливо $\lim\limits_{k \to \infty} (\widetilde{F}_k(u) - F_k(u)) = 0$;

(iii) $\|J - J_k\|_{C(U_\tau^*)} \leqslant \mu_k$, $\lim \mu_k = 0$.

Такая замена позволяет распространить вывод теоремы 1 на так называемые барьерные функции $V_k$ [11, 36].

Если точки $u^k$ определяются на основе градиентного критерия, то имеет место

**Теорема 2.** *Пусть в дополнение к условиям теоремы* 1 $U_0 = V$, $\varphi_k \in C^1(\mathbf{R}^m)$; $J$, $g^j$, $\widetilde{F}_k$ *непрерывно дифференцируемы по Фреше на* $U_\tau^*$ *и* (*вместо* (16))

$$\|\widetilde{F}_k - F_k\|_{C^1(U_\tau^*)} \leqslant \mu_k, \ \lim \mu_k = 0. \tag{16'}$$

*Тогда при заданной последовательности* $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k > 0$, $\lim \varepsilon_k = 0$, *начиная с некоторого номера, множества* $\{u\colon \|\nabla \tilde{F}_k(u)\|_V \leqslant \varepsilon_k\}$ *непусты и для точек* $u^k$, *удовлетворяющих неравенствам*

$$\|\nabla \tilde{F}_k(u^k)\|_V \leqslant \varepsilon_k, \tag{17'}$$

*справедливо* $\lim\limits_{k\to\infty} \rho\left(u^k,\ U^*\right) = 0$.

Как следует из теорем 1, 1′, 2, для широкого класса задач выпуклого программирования (в конечномерном случае ограничительным является разве лишь условие Слейтера) согласование параметров функций штрафа и параметров, характеризующих допустимое искажение точной информации, обеспечивает сходимость вырабатываемой методом штрафов итерационной последовательности к множеству решений этой задачи. Если, например, взять

$$\varphi_k(z) = r_k \sum_{j=1}^{m} \max{}^2 [0,\ z_j] \tag{20}$$

либо $\varphi_k(z) = \sum\limits_{j=1}^{m} \exp(r_k z_j)$ (в обоих случаях $\lim r_k = +\infty$), $\tilde{F}_k(u) = J_{\delta_k}(u) + \varphi_k\left(g_{\delta_k}(u)\right)$, где $\left(J_{\delta_k},\ g_{\delta_k}\right) \in \Phi_{\delta_k}$, то при $\sup\limits_{u\in U^*_\tau} \max\limits_{1\leqslant j\leqslant m} |g^j(\ddot{u})| < c < +\infty$ для справедливости соотношения (16) (а следовательно, и теорем 1, 1′) достаточно подчинить выбор $\{r_k\}$, $\{\delta_k\}$ соответственно условию

$$\lim_{k\to\infty} r_k\delta_k = 0 \tag{21}$$

либо $\lim\limits_{k\to\infty} \delta_k r_k \exp(r_k c) = 0$.

Теоремы 1, 1′ остаются верными и в случае, когда выполнение условия Слейтера для задачи (1)—(3) не гарантировано, но в качестве $\varphi_k$ взяты функции (20). Этот факт весьма важен: он означает, что при правильной организации вычислительного процесса *) применение метода штрафов к задачам, не являющимися слабо корректными так же, как и в случае слабо корректных задач, дает $\lim \rho(u^k,\ U^*) = 0$.

Пример. Минимизировать $J(u) = u_2$ при условиях $u \in U_0 = \{(u_1,\ u_2)\colon |u_1| \leqslant 2,\ |u_2| \leqslant 2\}$, $u_1 + u_2 - 1 = 0$, $(1+\sigma)u_1 + u_2 - 1 = 0$, $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$. Значение $\sigma = 0$ отвечает исходной задаче (ограничение $u_1 + u_2 - 1 = 0$ в ней повторено дважды), а при $\sigma \neq 0$ имеем специальным образом возмущенные задачи. Мы опускаем формальное приведение примера к виду (1)—(3), отмечая, что при использовании функций (20) учет пары неравенств $\psi(u) \leqslant 0$, $-\psi(u) \leqslant 0$ порождает «штрафное» слагаемое $r_k\psi^2(u)$.

Ввиду

$$\max_{u\in U_0} |u_1 + u_2 - 1 - [(1+\sigma)u_1 + u_2 - 1]| = 2|\sigma| \underset{\sigma\to 0}{\to} 0 \tag{22}$$

возмущенные задачи можно рассматривать в классе $\Phi_\delta$.

Исходная задача, очевидно, не является слабо корректной. Ее решением будет точка (1, 0), а решением возмущенной задачи при любом $\sigma \neq 0$ — точка (0, 1). Иными словами, если считать, что мы допустили указанную малую ($|\sigma| \leqslant \sigma_0$) погрешность в исходной информации и решаем задачу точно, то в результате должна быть получена точка (0, 1).

Если же решать задачу методом штрафов с использованием функций (20), то при согласованном изменении параметров $r_k$ и $\delta_k$ (в силу (4), (22) должно быть $2|\sigma_k| \leqslant \delta_k$) приходим к следующим результатам.

---

*) Как и выше, должно быть $\lim\limits_{k\to\infty} r_k\delta_k = 0$.

При $\delta_k^2 r_k \to 0$ для больших $k$

$$\tilde{u}_1^k = \frac{\left(1+\frac{1}{2r_k}\right)(2+\sigma_k)}{2+2\sigma_k+2\sigma_k^2}, \quad \tilde{u}_2^k = 1-\left(1+\frac{1}{2r_k}\right)\frac{2+2\sigma_k+\sigma_k^2}{2+2\sigma_k+2\sigma_k^2},$$

а при $\sigma_k^2 r_k \to \infty$ —

$$\tilde{u}_1^k = \frac{\sigma_k+2}{2\sigma_k^2 r_k}, \quad \tilde{u}_2^k = 1-\frac{1}{4r_k}-\frac{(\sigma_k+2)^2}{4\sigma_k^2 r_k},$$

где $\tilde{u}^k = \arg\min\limits_{u\in U_0} \tilde{F}_k(u)$, $\tilde{F}_k = J + \tilde{V}_k$, $\tilde{V}_k$ — функция штрафа для возмущенной задачи с $\sigma = \sigma_k$.

В первом случае и при больших $k$ параметр $r_k$ мал для того, чтобы искажение коэффициента при $u_1$ в пределах величины $\delta_k/2$ оказывало ощутимое влияние на решение вспомогательной задачи минимизации функции $\tilde{F}_k$ на $U_0$, и точка $\tilde{u}^k$ мало отличается от $u^k=(1+1/2r_k, -1/2r_k)$, доставляющей минимум $F_k$ на $U_0$ и на $\mathbf{R}^2$. Ясно, что $\lim \tilde{u}^k = \lim u^k = (1, 0)$. При более жестком требовании, $\delta_k r_k \to 0$, этот результат является следствием теоремы 1′. Если же $\sigma_k^2 r_k \to \infty$, то влияние искажения при больших $k$ велико и последовательность $\{\tilde{u}^k\}$ сходится к единственной допустимой точке $(0, 1)$ возмущенной задачи.

Отмеченное обстоятельство существенно повышает престиж метода штрафов, когда речь идет о решении экстремальных задач, не обладающих свойством слабой корректности. Интересно проанализировать на данном примере, как ведут себя в аналогичной ситуации другие методы линейного и выпуклого программирования.

При доказательстве теоремы 1 вместо (17) фактически использовалось неравенство

$$F_k(u^k) \leqslant \min_{u\in U_\tau^*} F_k(u) + \varepsilon_k', \quad \varepsilon_k' = 2\mu_k + \varepsilon_k, \tag{23}$$

вытекающее из (16), (17). При этом $u^k$ рассматривалась как произвольная точка множества $U_\tau^*$, удовлетворяющая (23). В дальнейшем, опуская подобный переход, мы будем анализировать решение задачи при условии, что исходная информация является точной, а вспомогательные задачи решаются приближенно. В изучаемых ниже вопросах это не уменьшает общности результатов.

Построение минимизирующей последовательности, сильно сходящейся к некоторому элементу оптимального множества, когда рассматриваемая задача не корректна, требует существенной модификации основных (базовых) оптимизационных методов. В настоящее время в этом направлении сделан переход от приводящей к усложнению итерационного процесса регуляризации исходной задачи к так называемой итеративной регуляризации избранного базового метода, при которой сохраняется его исходная структура. В рассматриваемых в данной работе методах итеративная регуляризация осуществлена с использованием prox-отображения. С методами, построенными на основе регуляризации Тихонова, читатель может познакомиться по работам [3—5, 7, 33].

Принцип итеративной prox-регуляризации*) в общих чертах состоит в следующем. Если на $k$-м шаге базового метода решается задача вида $\Phi_k(u) \to \min!$ $u \in U_k$, то в методе с регуляризацией ей отвечает задача

$$\Phi_k(u) + \tau_k\|u - u^{k-1}\|^2 \to \min! \tag{24}$$

$$u \in U_k. \tag{25}$$

*) В дальнейшем, как правило, пишем «регуляризация».

Здесь $u^{k-1}$ — результат предыдущей итерации, $\{\tau_k\}$ — фиксированная последовательность, $0 < \tau_k < d$, $k = 1, 2, \ldots$, норма в (24) согласована с выбором $U_k$. Далее $u^k$ определяется в виде

$$u^k = u^{k-1} - \gamma_k (u^{k-1} - \tilde{u}^k), \tag{26}$$

где $\tilde{u}^k$ — приближенное решение задачи (24)—(25), $\gamma_k > 0$ — управляющий параметр. Если вспомогательная задача состоит в отыскании седловой точки выпуклой по $u$ и вогнутой по $v$ функции, аналогичная регуляризация может быть осуществлена по одному или обоим аргументам (по $v$ — с отрицательным коэффициентом).

Итерационный процесс

$$u^{k+1} = \operatorname{prox} u^k, \tag{27}$$

где

$$\operatorname{prox} v = \arg\min_{u \in Q} \{J(u) + \|u - v\|^2\}, \tag{28}$$

$J$: $V \to \mathbf{R}$ — выпуклый функционал, $Q$ — выпуклое замкнутое множество гильбертова пространства $V$, был изучен Мартине [45, 46], установившем, в частности (при ограниченном $Q$) слабую сходимость $\{u^k\}$ к решению задачи $\{J(u) \to \min!;\ u \in Q\}$ и сходимость $J(u^k)$ к $\min\limits_{u \in Q} J(u)$. Отображение prox ввел и исследовал Моро [47]. Вопрос о сильной сходимости $\{u^k\}$ в бесконечномерном случае, по-видимому, до сих пор остается открытым. Однако при естественных (выполненных во многих конкретных приложениях) дополнительных условиях или за счет некоторой модификации процесса может быть обеспечена и более квалифицированная сходимость.

Методы итеративной регуляризации, развитые на основе принципа Тихонова, формально получаются заменой в (24)—(25) целевого функционала на $\Phi_k(u) + \tau_k\Omega(u)$, где $\Omega$ — стабилизирующий (по Тихонову) функционал, например, $\Omega(u) = \|u\|^2$. При этом необходимо $\tau_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \tau_k = 0$, а в (26) берется $\gamma_k = 1$. Сопоставление указанных подходов применительно к задачам выпуклой оптимизации будет приведено в следующих параграфах. Здесь мы отметим лишь, что, несмотря на формальную схожесть, методы существенно различаются как по качеству вспомогательных задач, так и техникой исследования. При подходящем выборе управляющей последовательности $\{\tau_k\}$ в методах итеративной prox-регуляризации существенно улучшаются (по сравнению с базовым методом) обусловленность минимизируемых функционалов и реальная устойчивость вспомогательных задач, и с этой точки зрения они представляют интерес и для решения корректных задач.

## § 2. ИТЕРАТИВНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ В КОНЕЧНОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В данном разделе предполагается, что в задаче (1)—(3) $V = \mathbf{R}^n$, $J$, $g^j$: $U_0 \to \mathbf{R}$ — выпуклые функции $(j = \overline{1, m})$. Для простоты изложения будем считать, что $U_0 = \mathbf{R}^n$.

Первым методом решения экстремальных задач с ограничениями, в котором фактически реализована схема итеративной prox-регуляризации, является, по-видимому, метод линеаризации, предложенный Б. Н. Пшеничным в работе [27] и существенно развитый им в последующих публикациях [28, 29]. Близкие в идейном плане алгоритмы позднее были построены в [44, 49].

Метод линеаризации. Пусть $J$, $g^j \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $u^0$ — начальная точка, $\varepsilon > 0$ — фиксированное число. Обозначим

$$I_k = \{j:\ g^j(u^k) \geqslant \max[0, \max_{1 \leqslant i \leqslant m} g^i(u^k)] - \varepsilon\}. \tag{29}$$

Строится последовательность $\{u^k\}$ такая, что

$$u^k = u^{k-1} + \alpha_k(\widehat{u}^k - u^{k-1}), \tag{30}$$

где $\widehat{u}^k$ — решение задачи:

$$\psi_k(u) = \nabla J(u^{k-1})^{\mathrm{T}}(u - u^{k-1}) + \frac{1}{2}\|u - u^{k-1}\|^2 \to \min! \tag{31}$$

при ограничениях

$$g^j(u^{k-1}) + \nabla g^j(u^{k-1})^{\mathrm{T}}(u - u^{k-1}) \leqslant 0, \quad j \in I_{k-1}, \tag{32}$$

$\alpha_k$ выбирается некоторым специальным способом ($\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора).

Замечание 3. Формально отвечающий (29)—(32) базовый процесс, в котором на итерациях вместо (31) использованы аффинные функции $\Phi_k(u) = \nabla J(u^{k-1})^{\mathrm{T}}(u - u^{k-1})$, как правило, оборвется (чаще всего, на первом же шаге) из-за неограниченности решения вспомогательной задачи, даже если исходная задача является корректной и $\varepsilon = +\infty$. При отсутствии ограничений и подходящих способах выбора $\alpha_k$ процесс (29)—(32) превращается в известные варианты градиентного метода безусловной минимизации.

Метод линеаризации относится к числу наиболее эффективных средств решения задач нелинейного программирования. Приведенный ниже результат А. С. Антипина [2] свидетельствует о том, что для выпуклых задач при некотором способе выбора $\alpha_k$ (вообще говоря, отличном от рекомендуемых в [29]) и соответствующем контроле за точностью исходной информации этот метод обеспечивает сходимость минимизирующей последовательности к элементу оптимального множества.

Пусть $\bar{u}_k$ — точное, а $\widehat{u}^k$ — приближенное решения задачи (31)—(32), причем

$$\|\nabla\psi_k(\widehat{u}^k) - \nabla\psi_k(\bar{u}^k)\| \leqslant \mu_k, \tag{33}$$

где $\{\mu_k\}$ — заданная последовательность.

**Теорема 3** [2]. *Предположим, что ограничения исходной задачи удовлетворяют условию Слейтера, а градиенты функций $J$, $g^1, \ldots, g^m$ — условию Липшица (с константами $L_0, L_1, \ldots, L_m$ соответственно); при всех $k$ имеет место $0 < q_0 \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha(1 - q_1)$, где $q_1 > 0$, $\alpha = 2\left(L_0 + 2\sum_{j=1}^{m} L_j y_j^*\right)^{-1}$, $y^*$ — некоторый вектор Лагранжа; ряд $\Sigma\mu_k$ сходится; $\varepsilon = +\infty$ в (29). Тогда последовательность $\{u^k\}$, построенная по методу (29)—(32), при любом начальном $u^0$ сходится к некоторому элементу $u^* \in U^*$. Если, кроме того, функция $J$ сильно выпукла, $\widehat{u}^k$ — точное решение (31)—(32) и $\alpha_k$ — const, то $\|u^k - u^*\| \leqslant cq^k$, где $0 < q < 1$.*

В [26] указано, что аналог теоремы 3 справедлив и при любом $\varepsilon > 0$. Таким образом, метод линеаризации устойчив относительно малых искажений функций $J$, $g^j$ в метрике $C^1(\mathbf{R}^n)$. Для задачи квадратичного программирования (31)—(32) существуют (см., например, [29]) эффективные точные и приближенные методы, так что неконструктивный характер критерия (33) здесь не является серьезной помехой.

Рассмотрим итерационный процесс, получающийся в результате регуляризации метода штрафных оценок. В названном методе минимизирующая последовательность строится следующим образом:

$$u^k = \arg\min_{u \in \mathbf{R}^n} \Phi_k(u), \tag{34}$$

где

$$\Phi_k(u) = M(u, \lambda^k), \tag{35}$$

$$\lambda^k = \lambda^{k-1} + \gamma\nabla_\lambda M(u^{k-1}, \lambda^{k-1}) \quad (\gamma > 0 - \mathrm{const}), \tag{36}$$

$M$: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m_+ \to \mathbf{R}$ — модифицированная функция Лагранжа, $\lambda^1 \geqslant 0$ — произвольный начальный вектор. Задача, двойственная к (1) — (3), может быть записана в виде

$$\psi(\lambda) \equiv \inf_{u \in \mathbf{R}^n} M(u, \lambda) \to \max!, \quad \lambda \in \mathbf{R}^m_+,$$

так что при обычных предположениях относительно модифицированной функции Лагранжа [9, п. 9] процесс (34) — (36) естественно интерпретировать как градиентный метод максимизации вогнутой дифференцируемой функции $\psi$ [10]. Ниже, как и в большинстве работ, метод (34) — (36) рассматривается с функцией

$$M(u, \lambda) = J(u) + \frac{1}{2\gamma} \| \max [0, \lambda + \gamma g(u)] \|^2 - \frac{1}{2\gamma} \| \lambda \|^2. \qquad (37)$$

В этом случае градиент $\psi$ удовлетворяет условию Липшица с константой $1/\gamma$ [35], соотношение (36) приобретает вид

$$\lambda^k = \max [0, \lambda^{k-1} + \gamma g(u^{k-1})]. \qquad (36')$$

Следует отметить, что использование функций (37) в схеме метода (34) — (36) можно рассматривать как частичную регуляризацию известного метода Удзавы [15, гл. 10, § 4, 5], обеспечивающую реализуемость и сходимость итераций в условиях, когда «чистый» процесс Удзавы, по существу, не определен. В предположении, что множество $U^* \times \Lambda^*$ седловых точек функции (37) непусто и ограничено, в [35, 50] установлена сходимость последовательности $\{(u^k, \lambda^k)\}$ к $U^* \times \Lambda^*$, причем в [50] метод исследован*) в условиях неточной минимизации функций (35) и, кроме того, показано, что $\lim_{k \to \infty} \lambda^k = \lambda^* \in \Lambda^*$. Более сильные результаты о сходимости метода установлены [35] при так называемых «сильных достаточных условиях второго порядка», весьма существенно сужающих класс рассматриваемых задач.

Регуляризация метода штрафных оценок по схеме (24) — (26) обеспечивает сходимость соответствующей последовательности $\{(u^k, \lambda^k)\}$ к некоторому элементу $(u^*, \lambda^*) \in U^* \times \Lambda^*$ для широкого класса задач выпуклой оптимизации и в условиях, когда $(u^k, \lambda^k)$ определяются приближенно. В данной ситуации это означает и устойчивость процесса к малым в норме $C^1$ искажениям исходной информации при соответствующем ее уточнении с увеличением номера $k$.

Исследование регуляризованного метода штрафных оценок проведено А. С. Антипиным [1, 2] и Рокафелларом [52], получившими весьма сходные результаты (в [52] — при более слабых предположениях о гладкости $J$ и $g^j$).

В указанном методе минимизирующая последовательность $\{u^k\}$ строится по формуле

$$u^k \approx \arg \min_{u \in \mathbf{R}^n} \Psi_k(u), \qquad (38)$$

где

$$\Psi_k(u) = M(u, \lambda^k) + \frac{1}{2\beta_k} \| u - u^{k-1} \|^2, \qquad (39)$$

$M$, $\lambda^k$ определены согласно (37), (36′), $0 < \beta \leqslant \beta_k$ (в [1] допускается также, что $\lambda^k$ найдены приближенно).

**Теорема 4** [52, теорема 7]. *Пусть выполнено условие Слейтера, $u^k$ определена по критерию*

$$\rho(0, \partial \Psi_k(u^k)) \leqslant \varepsilon_k / \beta_k \qquad (40)$$

*и* $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$. *Тогда итерационный процесс* (40), (36′) *вырабатывает после-*

*) Для невыпуклых задач см. [51].

*довательность* $\{(u^k, \lambda^k)\}$, *сходящуюся к некоторой точке* $(u^*, \lambda^*)\in U^*\times$ $\times\Lambda^*$, *причем*

$$J(u^k)-J_{\min}\leqslant\beta_k^{-1}\|u^k-u^*\|(\varepsilon_k+\|u^k-u^{k-1}\|)-\lambda^{k^\top}g(u^k),$$
$$\lim_{k\to\infty}\lambda^{k^\top}g(u^k)=0. \tag{41}$$

Здесь $\partial\Psi_k(u)$ — субдифференциал $\Psi_k$, вычисленный в точке $u$.

Представляется интересным метод, использующий функцию Лагранжа, модифицированную по двойственным переменным [2, гл. 4]. Для него при достаточной гладкости функций $J$, $g^j$ и подходящем выборе управляющих параметров сходимость $\{(u^k, \lambda^k)\}$ к точке множества $U^*\times\Lambda^*$ установлена и в случае нарушения условия Слейтера, когда множество $\Lambda^*$ может быть неограниченным. Итерационная последовательность строится по формулам

$$\lambda^k\approx\arg\max_{\lambda\in\mathbf{R}_+^m}\left\{-\frac{1}{2}\|\lambda-\lambda^{k-1}\|^2+D(u^{k-1},\lambda)\right\},$$
$$u^k=u^{k-1}-\alpha_k(\nabla J(u^{k-1})+\nabla g(u^{k-1})^\top\lambda^k),$$

где $D(u,\lambda)=J(u)+\lambda^\top g(u)-(\alpha/2)\|\nabla J(u)+\nabla g(u)^\top\lambda\|^2$, $\alpha>0$, $\alpha_k$ выбирается так, как указано в теореме 3. Функция $D(\mathbf{u}^{k-1},\lambda)$ вогнутая квадратичная, так что для определения $\lambda^k$ требуется решить простейшую задачу квадратичного программирования.

Роль prox-регуляризации существенно повышается, если в базовом процессе целевые функции вспомогательных задач имеют овражный характер. Как уже отмечалось, введение регуляризирующей добавки позволяет существенно улучшить обусловленность целевых функций. Это относится к методу штрафных оценок (попытка ускорить сходимость внешнего итерационного процесса за счет наращивания параметра $\gamma$ приводит к увеличению овражности функций $\Phi_k$) и в значительно большей степени к методу штрафов, где использование гладкого штрафа почти неизбежно связано с ухудшением обусловленности во вспомогательных задачах. В методе штрафов за счет регуляризации может быть достигнута и более высокая точность результата — в ситуациях, когда базовый процесс преждевременно обрывается из-за плохой устойчивости (обусловленности). Если регуляризация осуществляется с использованием стабилизирующего функционала, указанные эффекты проявляются слабо ввиду того, что $\lim\tau_k=0$.

Метод штрафов с регуляризацией. Пусть для задачи минимизации выпуклой функции $J\in C^1(\mathbf{R}^n)$ на выпуклом замкнутом множестве*) $U$ построена система выпуклых функций штрафа $\{V_k\}$, $V_k\in C^1(\mathbf{R}^n)$. Выберем последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_k\}$ и $\{s_k\}$ такие, что $\lim\varepsilon_k=0$, $0<\underline{s}\leqslant s_k<\overline{s}$, и элемент $u^0\in\mathbf{R}^n$. В методе штрафов с регуляризацией минимизирующая последовательность $\{u^k\}$ строится следующим образом: $u^k\approx\arg\min\limits_{u\in\mathbf{R}^n}\{J(u)+V_k(u)+(s_k/2)\times$ $\times\|u-u^{k-1}\|^2\}$. В данной работе приближенное решение $u^k$ определяется по градиентному критерию

$$\|\nabla J(u^k)+\nabla V_k(u^k)+s_k(u^k-u^{k-1})\|\leqslant\varepsilon_k. \tag{42}$$

**Теорема 5** [17, 18]. *Пусть множество $U$ телесно, $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k<\infty$ и функции $V_k$ удовлетворяют условиям*

1) $\lim\limits_{k\to\infty}V_k(u)=\begin{cases}0, & \text{если } u\in\operatorname{int}U,\\ +\infty, & \text{если } u\notin U,\end{cases}$

---

*) До определенного момента нам безразличен способ задания $U$. Предположение, что $U^*$ непусто и ограничено, сохраняется.

2) $\|\nabla V_k(u)\| \Rightarrow +\infty$ *на* $\partial U$,

3) $V_{k+1}(u) \leqslant V_k(u)$ *для* $u \in U$.

*Тогда последовательность* $\{u^k\}$ *ограничена; начиная с некоторого номера,* $u^k \in \operatorname{int} U$; $\lim\limits_{k\to\infty} J(u^k) = J_{\min}$. (*Здесь* $\partial U$ — *граница* $U$.)

Замечание 4. Утверждение теоремы 5 сохраняет силу, если $V_k$: $\mathbf{R}^n \to \tilde{\mathbf{R}}$ выпуклы и полунепрерывны снизу, $\operatorname{dom} V_k = \operatorname{int} U$, $V_k$ дифференцируемы в $\operatorname{int} U$ и вместо условий 1, 2 требуется $\lim\limits_{k\to\infty} V_k(u) = 0$ при $u \in \operatorname{int} U$. Естественно, в этом случае $u^0 \in \operatorname{int} U$.

**Теорема 6.** *Пусть* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ *и функции* $V_k$ *удовлетворяют условиям*

1′) $\lim\limits_{k\to\infty} V_k(u) = \begin{cases} 0, & \text{если } u \in U, \\ +\infty, & \text{если } u \notin U, \end{cases}$

2′) $\|\nabla V_k(w^k)\| \to \infty$, *если* $\lim\limits_{k\to\infty} w^k = u \in U$,

3′) *существует такая постоянная* $c$, *что* $V_{k+1}(u) \leqslant cV_k(u)$ *для всех* $u \in \mathbf{R}^n$.

*Тогда последовательность* $\{u^k\}$ *ограничена; любая ее предельная точка принадлежит* $U$; $\lim\limits_{k\to\infty} \|u^k - u^{k-1}\| = 0$; $\lim\limits_{k\to\infty} J(u^k) = J_{\min}$.

Доказательство. Ограниченность последовательности $\{u^k\}$ устанавливается подобно тому, как в теореме 1 [18]. Из (42) получаем, что

$$\|\nabla V_k(u^k)\| \leqslant \varepsilon_k + \|s_k(u^k - u^{k-1})\| + \|\nabla J(u^k)\|,$$

и тем самым $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \|\nabla V_k(u^k)\| < +\infty$. В силу 2′ это означает, что $\lim \rho(u^k, U) = 0$.

На основании условий 1′, 3′ имеем $V_k(u) \geqslant 0$ для всех $u \in \mathbf{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$ . Проверим, что $\lim\limits_{k\to\infty} V_k(u^k) = 0$. Если это не так, то ввиду неотрицательности функций $V_k$ при некотором $\sigma > 0$ для бесконечной подпоследовательности $\{u^k\}_{\tilde{\mathfrak{N}}}$ должно быть $V_k(u^k) \geqslant \sigma$. Можно при этом считать, что $\lim\limits_{k\in\tilde{\mathfrak{N}}} u^k = \bar{u}$, $\lim\limits_{k\in\tilde{\mathfrak{N}}} u^{k-1} = \bar{\bar{u}}$, $\lim\limits_{k\in\tilde{\mathfrak{N}}} s_k = s > 0$. Но из (42) и сильной выпуклости функции $\eta_k(u) = J(u) + V_k(u) + (s_k/2)\|u - u^{k-1}\|^2$ следует $\eta_k(\bar{u}) \geqslant \eta_k(u^k) - \varepsilon_k^2/s_k$. Переход в последнем неравенстве к нижнему пределу при $k \to \infty$, $k \in \tilde{\mathfrak{N}}$, ввиду $\bar{u} \in U$ приводит к противоречию: $J(\bar{u}) + (s/2)\|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|^2 \geqslant J(\bar{u}) + \sigma + (s/2)\|\bar{u} - \bar{\bar{u}}\|^2$. Из соотношения $\lim\limits_{k\to\infty} V_k(u^k) = 0$, неотрицательности $V_k$ и условия 3′ получаем $\lim\limits_{k\to\infty} V_{k+1}(u^k) = 0$.

Покажем, что $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} J(u^k) = J_{\min}$. Предполагая противное, имеем $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} J(u^k) - J_{\min} = d > 0$. Выберем $\tau = d/3$, $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll \tau$, и пусть $l$ — такой номер, что $J(u^{l-1}) \geqslant J_{\min} + \tau$ и при всех $k \geqslant l$ выполняется $V_k(u^{k-1}) < \varepsilon$, $V_k(u^*) < \varepsilon$, $\varepsilon_k^2/s_k < \varepsilon$ ($u^* \in U^*$ — фиксированный элемент). При $u_\lambda^l = \lambda u^* + (1-\lambda)u^{l-1}$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, справедливо $J(u_\lambda^l) + V_l(u_\lambda^l) + (s_l/2)\|u_\lambda^l - u^{l-1}\|^2 < \lambda(J(u^*) - J(u^{l-1})) + (\lambda^2 s_l/2)\|u^* - u^{l-1}\|^2 + J(u^{l-1}) + \varepsilon \equiv \psi_l(\lambda)$. Нетрудно проверить, что минимум $\psi_l$ на отрезке $[0, 1]$ достигается в точке

$$\lambda_l = \min\left\{\frac{J(u^{l-1}) - J(u^*)}{s_l\|u^* - u^{l-1}\|^2},\ 1\right\},$$

причем

$$\psi_l(\lambda_l) = J(u^{l-1}) - \frac{(J(u^{l-1}) - J(u^*))^2}{2s_l\|u^* - u^{l-1}\|^2} + \varepsilon,$$

если $\lambda_l < 1$, и $\psi_l(\lambda_l) \leqslant J(u^{l-1}) - (J(u^{l-1}) - J(u^*))/2 + \varepsilon$, если $\lambda_l = 1$. Отсюда следует, что

$$\psi_l(\lambda_l) \leqslant \begin{cases} J(u^{l-1}) - \dfrac{\tau^2}{2sL} + \varepsilon, & \text{если} \quad \lambda_l < 1, \\ J(u^{l-1}) - \dfrac{\tau}{2} + \varepsilon, & \text{если} \quad \lambda_l = 1, \end{cases} \tag{43}$$

где $L = \sup\limits_{k \geqslant l} \|u^* - u^k\|^2 < +\infty$. Но по определению последовательности $\{u^k\}$ при любом $\lambda \in [0, 1]$ справедливо $J(u^l) + V_l(u^l) + (s_l/2)\|u^l - u^{l-1}\|^2 \leqslant$ $\leqslant J(u_\lambda^l) + V_l(u_\lambda^l) + (s_l/2)\|u_\lambda^l - u^{l-1}\|^2 + \varepsilon_l^2/s_l$. Отсюда с учетом (43) и неотрицательности $V_l$ имеем неравенство $J(u^l) < \max\{J(u^{l-1}) - \tau^2/2sL,$ $J(u^{l-1}) - \tau/2\} + \varepsilon + \varepsilon_l^2/s_l$, справедливое при замене $l$ на $l_1 > l$, если только $J(u^{l_1 - 1}) \geqslant J_{\min} + \tau$. Предполагая $\varepsilon \ll \tau^2/2sL$, из него нетрудно получить, что через конечное число шагов мы придем в точку $u^p$ $(p > l)$, в которой $J(u^p) < J_{\min} + \tau$. Но из соотношения

$$\eta_k(u^k) \leqslant \eta_k(u^{k-1}) + \varepsilon_k^2/s_k, \tag{44}$$

в свою очередь следует $J(u^{p+1}) < J(u^p) + \varepsilon + \varepsilon_{p+1}^2/s_{p+1}$, а значит, $J(u^{p+1}) < J_{\min} + 2\tau$. Легко видеть, что неравенство $J(u^k) < J_{\min} +$ $+ 2\tau$ справедливо при $k \geqslant p + 1$ вопреки исходному предположению. Так как $\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} J(u^k) \geqslant J_{\min}$, то окончательно $\lim\limits_{k\to\infty} J(u^k) = J_{\min}$. Соотношение $\lim\limits_{k\to\infty} \|u^k - u^{k-1}\| = 0$ теперь получается непосредственно из (44). □

Если множество $U$ задано в виде $U = \{u\colon g^j(u) \leqslant 0,\ j = \overline{1, m}\}$, где $g^j \in C^1(\mathbf{R}^n)$ — выпуклые функции, и выполнено условие Слейтера, справедлив следующий результат.

**Теорема 7** [18]. *Пусть $\varphi_k \in C^1(\mathbf{R}^m)$, $V_k(u) = \varphi_k(g(u))$ и выполнены* ***условия теоремы*** *5* ***или*** *6;* ***функции*** $\xi_k^j(u) = \dfrac{\partial \varphi_k(g(u))}{\partial g^j}$ *неотрицательны на $\mathbf{R}^n$, и если $g^j(v^k) \geqslant \mu > -\infty$, $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\, g^j(v^k) < 0$, то $\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k^j(v^k) = 0$; точки $u^k$ определены согласно (42). Тогда при $\lambda_j^k = \xi_k^j(u^k)$, $\lambda^k = (\lambda_1^k, \ldots, \lambda_m^k)$ последовательность $\{(u^k, \lambda^k)\}$ ограничена; любая ее предельная точка доставляет решение двойственной задачи; при $u^k \in U$ имеет место оценка*

$$J(u^k) \geqslant J_{\min} \geqslant J(u^k) + \lambda^{k^{\mathrm{T}}} g(u^k) - (\varepsilon_k + s_k\|u^k - u^{k-1}\|)\,\rho(u^k, U^*). \tag{45}$$

Теорема 7 во многих случаях представляет удобный критерий окончания внешнего итерационного процесса. Отметим, что оценка типа (45) может быть получена и если $u^k \notin U$.

Ввиду теорем 5 и 6 (см. также замечание 4) сходимость построенной по методу (42) минимизирующей последовательности $\{u^k\}$ к оптимальному множеству $U^*$ имеет место при использовании большинства дифференцируемых штрафных функций.

Обозначим $\widehat{U} = \{u \in U\colon J(u) \leqslant N\}$, где $N$ — достаточно большое число, $U_k = \{u \in \widehat{U}\colon V_k(u) \leqslant \delta_k\}$ ($\delta_k > 0$ — фиксировано), $\Theta_k = \min\limits_{u \in U_k} \{J(u) +$ $+ (s_k/2)\|u - u^{k-1}\|^2\} - \min\limits_{u \in \widehat{U}} \{J(u) + (s_k/2)\|u - u^{k-1}\|^2\}$.

**Теорема 5'.** *Пусть выполнены условия теоремы 5, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k^{1/2} < \infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \Theta_k^{1/2} < \infty$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} u^k = u^* \in U^*$.*

Доказательство. Обозначим $w^k = \arg\min\limits_{u \in U} \{J(u) + (s_k/2) \times$

$\|u-u^{k-1}\|^2\}$; $z^k=\arg\min\limits_{u\in R^n}\eta_k(u)\,(\eta_k(u)=J(u)+V_k((u)+(s_k/2)\|u-u^{k-1}\|^2)$.

На основании теоремы 5 существует такой номер $K$, что при $k\geqslant K-1$ имеет место $u^k\in\operatorname{int}\widehat{U}$, $z^k\in\operatorname{int}\widehat{U}$. В дальнейшем считаем $k\geqslant K$. Ввиду очевидного неравенства $J(w^k)+(s_k/2)\|w^k-u^{k-1}\|^2\leqslant J(z^k)+(s_k/2)\|z^k-u^{k-1}\|^2$ и выбора $\Theta_k$ справедливо $\min\limits_{u\in U_k}\{J(u)+(s_k/2)\|u-u^{k-1}\|^2\}\leqslant J(z^k)+$ $+(s_k/2)\|z^k-u^{k-1}\|^2+\Theta_k$. Замечая, что из условий 1, 3 теоремы 5 следует неотрицательность $V_k$ на $U$, с учетом определения $U_k$ для $y^k=\arg\min\limits_{u\in U_k}\eta_k(u)$ имеем $\eta_k(y^k)\leqslant J(z^k)+(s_k/2)\|z^k-u^{k-1}\|^2+\delta_k+\Theta_k\leqslant\eta_k(z^k)+\delta_k+\Theta_k$ и $J(y^k)+$ $+(s_k/2)\|y^k-u^{k-1}\|^2\leqslant J(w^k)+(s_k/2)\|w^k-u^{k-1}\|^2+\delta_k+\Theta_k$. На основании сильной выпуклости $J(u)+(s_k/2)\|u-u^{k-1}\|^2$, $\eta_k(u)$ и выбора $z^k$, $w^k$ с учетом $y^k\in U_k\subset\widehat{U}$ из последних неравенств следует $\|y^k-z^k\|\leqslant\sqrt{2(\delta_k+\Theta_k)/s_k}$, $\|y^k-w^k\|\leqslant\sqrt{2(\delta_k+\Theta_k)/s_k}$. Но так как отображение $\operatorname{prox} v=$ $=\arg\min\limits_{u\in\widehat{U}}\{J(u)+(s_k/2)\|u-v\|^2\}$ является нерастягивающим и при $u^*\in U^*$ справедливо $\operatorname{prox} u^*=u^*$ [38], то $\|w^k-u^*\|\leqslant\|u^{k-1}-u^*\|$ и тем самым $\|u^k-u^*\|\leqslant\|u^k-z^k\|+\|z^k-y^k\|+\|y^k-w^k\|+\|w^k-u^*\|\leqslant$ $\leqslant\varepsilon_k/s_k+2\sqrt{2(\delta_k+\Theta_k)/s_k}+\|u^{k-1}-u^*\|$. Ввиду теоремы 5 любая предельная точка последовательности $\{u_k\}$ принадлежит $U^*$. Полагая $u^*=\lim\limits_{j\to\infty}u^{k_j}$, из последнего неравенства при $k\geqslant k_j$ имеем $\|u^k-u^*\|<\|u^{k_j}-u^*\|+$ $+\sum\limits_{l=k_j+1}^{\infty}(\varepsilon_l/s_l+4\sqrt{\delta_l/s_l}+4\sqrt{\Theta_l/s_l})$, откуда с учетом сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\delta_k^{1/2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Theta_k^{1/2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k$ и выбора $\{s_k\}$ получаем $\lim\limits_{k\to\infty}u^k=u^*$. □

Вывод теоремы нетрудно обобщить в плане замечания 4.

Условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Theta_k^{1/2}<\infty$ может быть удовлетворено за счет подходящего выбора параметров функции штрафа. Если ограниченное множество $U$ задано, как в теореме 7, а в качестве $V_k$ рассматриваются, например, функции штрафа вида $V_k(u)=\sum\limits_{j=1}^{m}e^{r_kg^j(u)}$ $(\lim r_k=+\infty)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\Theta_k^{1/2}$ сходится при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}(r_k^{-1}|\ln\delta_k|)^{1/2}<\infty.$$

Аналогичным образом можно обосновать и более квалифицированную сходимость в следующем варианте теоремы 6. Обозначим через $\xi^k$ точку пересечения отрезка $[\tilde{u}, z^k]$ с множеством $\widehat{U}$, ближайшую к $z^k$ ($\tilde{u}$ — точка Слейтера).

**Теорема 6′.** *Пусть в дополнение к условиям теоремы* 6 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sigma_k^{1/2}<\infty$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\tau_k^{1/2}<\infty$, *где* $\sigma_k=\sup\limits_{u\in\widehat{U}}V_k(u)$, $\tau_k=\|\xi^k-z^k\|$. *Тогда* $\lim\limits_{k\to\infty}u^k=u^*\in U^*$.

Пусть, например, $V_k(u)=r_k\sum\limits_{j=1}^{m}\max^2[0, g^j(u)]$. Используя теорему 7, нетрудно проверить, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\tau_k^{1/2}<\infty$, если $\sum\limits_{k=1}^{\infty}r_k^{-1/2}<\infty$.

Ниже рассматривается вариант регуляризированного метода штрафов с применением гладкой аппроксимации точных функций штрафа, в котором также обеспечена сходимость $\{u^k\}$ к элементу множества $U^*$.

Как известно, рассматриваемая задача выпуклого программирования эквивалентна безусловной минимизации функции $F(u)=J(u)+$

$+\sum_{j=1}^{m} a_j \max\left[0, g^j(u)\right]$, если $a > \lambda^*$, где $\lambda^*$ — некоторый вектор Лагранжа. Недифференцируемая функция $F$ может быть равномерно на любом компакте аппроксимирована последовательностью выпуклых функций

$$F_k(u) = J(u) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} a_j^k\left(g^j(u) + \sqrt{g^{j^2}(u) + r_k}\right)(\lim a^k = a, r_k > 0, \lim r_k = 0), \tag{46}$$

гладкость которых, как легко видеть, определяется гладкостью $J$, $g^j$. Функции

$$V_k(u) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} a_j^k\left(g^j(u) + \sqrt{g^{j^2}(u) + r_k}\right), \tag{47}$$

введенные в [19], в отличие от ранее известных дифференцируемых функций штрафа, обладают медленным ростом вне допустимой области; для них имеют место неравенства

$$0 < \frac{\partial V_k(u)}{\partial g^j} < c, \quad k = 1, 2, \ldots$$

(обычно же $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\partial V_k(u)}{\partial g^j} = +\infty$, если $g^j(u) > 0$, и с этим обстоятельством связана, в частности, потеря точности при определении направлений спуска в алгоритмах безусловной минимизации).

Обоснование регуляризированного метода (42) с использованием функций штрафа (47) базируется на следующем утверждении, представляющем и самостоятельный интерес.

**Лемма 3** [19]. *Пусть* $\zeta$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — *выпуклая функция; множество* $U^\zeta = \left\{u\colon \zeta(u) = \inf\limits_{v\in\mathbf{R}^n} \zeta(v)\right\}$ *непусто и ограничено;* $\zeta_k$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — *выпуклые дифференцируемые функции;* $\{\delta_k\}$, $\{\varepsilon_k\}$ — *последовательности неотрицательных чисел такие, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sqrt{\delta_k} + \varepsilon_k\right)$ *сходится;* $0 < \bar{s} < s_k < \bar{\bar{s}} < \infty$, $\Omega = \left\{u\colon \zeta(u) \leqslant \zeta(u^0) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(2\delta_k + \varepsilon_k/\sqrt{s_k}\right)\right\}$, где $u^0$ — *фиксированный вектор. Если выполнены неравенства*

$$\|\zeta - \zeta_k\|_{C(\Omega)} \leqslant \delta_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{48}$$

*то последовательность* $\{u^k\}$, *удовлетворяющая соотношению* $\|\nabla\zeta_k(u^k) + s_k(u^k - u^{k-1})\| \leqslant \varepsilon_k$, *сходится к некоторой точке* $\bar{u} \in U^\zeta$.

С помощью легко проверяемого неравенства

$$|F(u) - F_k(u)| \leqslant \frac{1}{2} r_k^{1/2}\sum_{j=1}^{m} a_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} |a_j^k - a_j|\left(g^j(u) + \sqrt{g^{j^2}(u) + r_k}\right)$$

результат леммы 3 легко распространяется на итерационный процесс (46), (42) при $a_j^k \equiv a_j$, $j = \overline{1, m}$, а если получена оценка снизу величины $\inf\limits_{u\in\Omega} J(u)$, — и на исходный вариант. Выбор $r_k$, $a_j^k$ определяется условием (48). Справедлив также вывод теоремы 7 с

$$\lambda_j^k = \frac{1}{2} a_j^k\left(1 + g^j(u^k)\Big/\sqrt{g^{j^2}(u^k) + r_k}\right),$$

причем, если $a > 2\lambda^*$, то, начиная с некоторого номера, включение $u^k \in U$ гарантировано.

Следует отметить, что методы итеративной prox-регуляризации более просты в практической реализации, чем аналогичные методы, использующие стабилизирующий функционал: в последних несколько управляющих последовательностей должны с разной скоростью стремиться к нулю, и это весьма затрудняет оценку качества приближенного решения. С другой стороны, в методах второго типа определяется решение, ближайшее к заранее фиксированной точке, что во многих задачах имеет реальный смысл. При использовании prox-регуляризации предельная точка, вообще говоря, не обладает указанным свойством, а характер зависимости определяемого решения от начальной точки не выяснен.

Рассматривая задачу выпуклого программирования без каких-либо дополнительных предположений относительно функций (кроме гладкости) и характеристики решения, мы не останавливались на вопросе об оценке скорости сходимости минимизирующей последовательности. Это и понятно, ибо, как известно, такие оценки не могут быть получены в общем случае даже для задач безусловной минимизации сколь угодно гладких выпуклых функций (см., например, [21]). В предположении сильной выпуклости функции $J$ вопрос об оценке скорости сходимости изучался в [1, 2]. Для метода штрафов с регуляризацией подобного рода результаты могут быть достаточно просто получены на основе соответствующих исследований базового метода [11].

## § 3. О РЕШЕНИИ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ СО СЛАБО КОЭРЦИТИВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Исследование метода конечных элементов применительно к вариационным неравенствам эллиптического типа, как правило, проводится в предположении, что дифференциальный оператор является коэрцитивным в исходном гильбертовом пространстве $V$. При этом существование и единственность слабого решения задачи гарантированы (см., например, [31, 39]) ввиду непрерывности соответствующего вариационного функционала $J$, замкнутости и выпуклости допустимого множества $U$, а сходимость (в норме пространства $V$) последовательности решений аппроксимирующих задач к искомому элементу является следствием предельной плотности конечноэлементных аппроксимаций множества $U$.

Однако для ряда практически важных вариационных неравенств выполняется лишь ослабленное условие коэрцитивности. Так что вопрос о существовании и единственности решения требует специального исследования, а при построении минимизирующей последовательности, как правило, приходится применять специальные меры, обеспечивающие ее квалифицированную сходимость. Ниже приводятся три задачи такого рода, для которых эффективные алгоритмы решения строятся на основе использования итеративной prox-регуляризации в сочетании с конечноэлементной аппроксимацией на последовательности сеток. Мы ограничиваемся вариационными постановками рассматриваемых задач: их интерпретацию и соответствующие краевые постановки можно найти, например, в [13, 41, 43].

Задача 1. *Требуется минимизировать квадратичный функционал*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} fu d\Omega$$

*на выпуклом замкнутом множестве* $U\{u \in W_2^1(\Omega)\colon\ \psi - \gamma u \leqslant 0$ *п. в. на* $\Gamma\}$. Здесь $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ — область с достаточно гладкой*) границей $\Gamma$; $f \in L_2(\Omega)$, $\psi \in L_2(\Gamma)$ — фиксированные функции, $\gamma u$ — след функции $u$ на $\Gamma$. Случай $m = 3$ (а при определенных условиях симметрии — и $m = 2$) соответствует задаче об установившемся течении жидкости в области $\Omega$, ог-

*) См., например, [32]: соответствующие определения гладкой и непрерывной по Липшицу границы, в частности, предполагают ограниченность $\Omega$ и выполнение условия конуса.

раниченной полупроницаемой мембраной: $\psi$ — заданное давление жидкости на границе (жидкость может втекать в $\Omega$, если $u(x) \leqslant \psi(x)$, и не может вытекать ни при каких условиях), $f$ — поток жидкости в $\Omega$, $u$ — искомое распределение давления. Очевидно, что функции $u = \mathrm{const}$ принадлежат ядру соответствующей билинейной формы $A(u, v) = \int\limits_\Omega \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$.

Как показано в [39], при естественном предположении $\int\limits_\Omega f d\Omega < 0$, которое ниже считается выполненным, решение задачи 1 существует и единственно.

Задача 2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — *область с непрерывной по Липшицу границей* $\Gamma$. *Для* $u = (u_1, u_2) \in [W_2^1(\Omega)]^2$ *определим тензор*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad i, j = 1, 2.$$

*При фиксированном разбиении границы* $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ *и фиксированных функциях* $c_{ijpl} \in L_\infty(\Omega)$ $(i, j, p, l = 1, 2;\ c_{ijpl} = c_{jipl} = c_{plij})$, $F \in [L_2(\Omega)]^2$, $T \in [L_2(\Gamma_2)]^2$ *требуется минимизировать квадратичный функционал* $J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega c_{ijpl}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{pl}(u)\, d\Omega - \int\limits_\Omega F_i u_i\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma_2} T_i u_i d\Gamma$ *на множестве* $U = \{u \in W\colon u_n \leqslant 0$ *на* $\Gamma_1\}$, *где* $W = \{u \in [W_2^1(\Omega)]^2\colon u_n = 0$ *на* $\Gamma_0\}$, $u_n = u_i n_i$, $n = (n_1, n_2)$ — *единичный вектор внешней нормали к* $\Gamma$.

Здесь и ниже применяется правило суммирования по повторяющимся индексам в пределах их изменения. Если существует константа $c_0 > 0$, при которой $c_{ijpl}(x)\sigma_{ij}\sigma_{pl} \geqslant c_0\sigma_{ij}\sigma_{ij}$ п. в. на $\Omega$ ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ — произвольные), то билинейная форма $A(u, v) = \int\limits_\Omega c_{ijpl}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{pl}(v)\, d\Omega$ слабо коэрцитивна.

Задачу 2 можно интерпретировать как плоский вариант задачи о равновесии упругого тела, естественная форма которого поддерживается жесткой поверхностью без трения. Ядро $\mathfrak{R}$ билинейной формы $A(u, v)$ состоит из вектор-функций $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, где $\rho_1(x) = a_1 - bx_2$, $\rho_2(x) = a_2 + bx_1$, $a_1$, $a_2$, $b$ — произвольные фиксированные числа. Множество $\widetilde{\mathfrak{R}} = W \cap \mathfrak{R}$ — подпространство виртуальных жестких перемещений (т. е. перемещений $\Omega$ как абсолютно твердого тела, при сохранении строгих ограничений). Когда $\dim \widetilde{\mathfrak{R}} > 1$ (а в определенных условиях — и при $\dim \widetilde{\mathfrak{R}} = 1$), единственности решения нет.

Задача 3. *Пусть* $\Omega = \Omega' \cup \Omega'' \subset \mathbf{R}^2$, *где* $\Omega'$, $\Omega''$ — *области с непрерывными по Липшицу границами* $\partial\Omega'$, $\partial\Omega''$, *причем* $\Omega' \cap \Omega'' = \varnothing$, $\Gamma_c = \partial\Omega' \cap \partial\Omega''$, $\mathrm{mes}\,\Gamma_c > 0$. *Фиксируем разбиения* $\partial\Omega' = \Gamma_u \cup \Gamma_\tau' \cup \Gamma_c$, $\partial\Omega'' = \Gamma_\tau'' \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_c$ $(\mathrm{mes}\,\Gamma_u > 0)$. *При сделанных выше предположениях относительно коэффициентов* $c_{ijpl}$ *и вектор-функции* $F$ *требуется найти минимум функционала* $J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega c_{ijpl}\varepsilon_{ij}(u)\varepsilon_{pl}(u)\, d\Omega - \int\limits_\Omega F_i u_i d\Omega - \int\limits_{\Gamma_\tau' \cup \Gamma_\tau''} T_i u_i d\Gamma$ *на множестве* $U = \{u \in W\colon -u_n' + u_n'' \leqslant 0$ *на* $\Gamma_c\}$, *где* $W = \{u = (u', u'')\colon u \in \widehat{W} \equiv [W_2^1(\Omega')]^2 \times [W_2^1(\Omega'')]^2,\ u' = 0$ *на* $\Gamma_u,\ u_n'' = 0$ *на* $\Gamma_0\}$.

Здесь штрихи «$'$», «$''$» указывают на принадлежность точки соответственно $\overline{\Omega}'$ или $\overline{\Omega}''$, $n$ — единичный вектор нормали к кривой $\partial\Omega''$, внешней относительно $\Omega''$; $T \in [L_2(\Gamma_\tau' \cup \Gamma_\tau'')]^2$ — заданная вектор-функция (в остальном использованы обозначения задачи 2).

В данном случае мы имеем дело с формализацией плоской задачи о контакте двух упругих тел под действием «объемной» силы $F$ и приложенных к участкам границы $\Gamma'_\tau$ и $\Gamma''_\tau$ сил $T$. Решением является вектор-функция $u(x_1, x_2)$, описывающая смещение точек $(x_1, x_2) \in \Omega$ при переходе в деформированное состояние.

Ядро соответствующей билинейной формы $A(u, v) = \int_\Omega c_{ijpl} \varepsilon_{ij}(u) \times \times \varepsilon_{pl}(u)\, d\Omega$ имеет вид $\mathfrak{R} = \{z = (z', z''): z'_1(x) = a'_1 - b'x_2, \ z'_2(x) = a'_2 + b'x_1, \ z''_1(x) = a''_1 - b''x_2, \ z''_2(x) = a''_2 + b''x_1\}$. В силу условия $\operatorname{mes} \Gamma_u > 0$ возможно жесткое перемещение разве лишь второго тела: в случае $\Gamma_0 = \varnothing$ размерность подпространства виртуальных жестких перемещений $\tilde{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} \cap W = \{z = (z', z''): z' = 0, \ z''_1(x) = a''_1 - b''x_2, \ z''_2(x) = a''_2 + b''x_1\}$ равна трем. Как установлено в [37], рассматриваемая задача разрешима, если $L(z) = \int_\Omega F_i z_i d\Omega + \int_{\Gamma'_\tau \cup \Gamma''_\tau} T_i z_i d\Gamma \leqslant 0$ для всех $z \in U \cap \mathfrak{R}$ и $L(z) < 0$ при $z \in \mathfrak{R} \cap W$, $\inf\limits_{x \in \Gamma_c} (z''_n(x) - z'_n(x)) < 0$. Вместе с решением $u$ решением будет также элемент $\tilde{u} = u + z$, если $z \in \mathfrak{R} \cap W$, $L(z) = 0$, $u + z \in U$. С этим обстоятельством связаны серьезные трудности в исследовании сильной сходимости минимизирующих последовательностей при использовании стандартных способов построения аппроксимирующих задач. По существу, некоторые продвижения в этом направлении достигнуты лишь для случая $\dim \tilde{\mathfrak{R}} = 1$, и то в весьма частных ситуациях.

Основная идея рассматриваемого ниже подхода состоит в том, что в процессе построения аппроксимирующих задач на последовательности сеток при переходе на $(k+1)$-м шаге к более мелкой сетке осуществляется prox-регуляризация минимизируемого функционала, причем в регуляризирующей добавке в качестве $u^k$ используется интерполированное соответствующим образом приближенное решение предыдущей задачи. Изложение соответствующих методов применительно к задачам 1 и 3 проведено в данной работе при некоторых дополнительных предположениях, не меняющих структуру ядра билинейной формы и характеристики множества решений. Так, задача 1 изучается при условиях, что $\bar{\Omega} \subset \mathbf{R}^2$ — выпуклый многоугольник, $\psi$ — след на $\Gamma$ некоторой функции $\psi_0 \in W_2^2(\Omega)$, причем $\psi$ выпукла на каждом из прямолинейных участков $\Gamma$. Для построения минимизирующей последовательности используется метод конечных элементов на последовательности нерегулярных сеток при соблюдении стандартных требований триангуляции [39, гл. 1 и приложение 1].

Обозначения: $\Omega_h$ — фиксированная триангуляция области $\Omega$ с наибольшим из ребер длины $h$ (будем, как обычно, говорить о триангуляции и сетке с шагом $h$); $N_h$ — множество узлов $\Omega_h$, $M_h = \Gamma \cap N_h$; $V_h$ — линейная оболочка соответствующих кусочно-аффинных базисных функций; $U_h = \{v \in V_h: \ v(s) \geqslant \psi(s)$ для $s \in M_h\}$. Рассматривается регулярная система триангуляций $\Omega_{h_k}$ с условиями $\lim\limits_{k \to \infty} h_k = 0$ и $N_{h_{k-1}} \subset N_{h_k}$. Регулярность означает, что углы треугольников должны быть ограничены снизу (равномерно по $h$) некоторой величиной $\alpha > 0$.

Минимизирующая последовательность $\{v_{h_k}\}$ определяется из условий

$$\bar{v}_{h_k} = \arg \min_{u \in U_{h_k}} \{J(u) + \alpha_k \|u - v_{h_{k-1}}\|_0^2\}, \tag{49}$$

$$v_{h_k} \in U_{h_k}, \quad \|v_{h_k} - \bar{v}_{h_k}\|_1 \leqslant \varepsilon_k, \tag{50}$$

где $v_{h_0}$ — фиксированный элемент из $U$, $\varepsilon_k \geqslant 0$, $\lim \varepsilon_k = 0$, $0 < \alpha' \leqslant \alpha_k < \alpha'' < \infty$, $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ — нормы соответственно в $L_2(\Omega)$, $W_2^1(\Omega)$.

Обоснование сходимости метода (49), (50) существенно опирается на леммы 4—6 [20, 24], которые могут служить основой при конструировании и исследовании различных алгоритмов решения задачи 1.

**Лемма 4.** *Пусть область $\Omega$ такова, что для функций $u \in W_2^1(\Omega)$ выполнено неравенство Пуанкаре*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Omega + \left(\int_\Omega u d\Omega\right)^2 \geqslant A \|u\|_0^2,$$

*где $A > 0$ — константа, не зависящая от $u$. Тогда любая минимизирующая последовательность $\{u_k\}$, $u_k \in U$, сходится в норме пространства $W_2^1(\Omega)$ к решению задачи 1.*

Аналогичный результат установлен в [20] при более общих условиях: вместо $u_k \in U$ требуется $\lim\limits_{k\to\infty} \inf\limits_{\in} \|u^k - z\|_1 = 0$, что позволяет существенно ослабить предположения относительно $\Omega$ и $\psi$.

**Лемма 5.** *Последовательность $\{z_k\}$, определяемая условиями $u_k = \arg\min\limits_{u \in U} \{J(u) + \|u - z_{k-1}\|_0^2\}$ $\|z_k - u_k\| \leqslant \delta_k$, $z_k \in U$ $(z_0 \in U$ любое$)$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \delta_k^2 < \infty$, является минимизирующей для задачи 1.*

**Лемма 6.** *Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$. Тогда при $v_k = \arg\min\limits_{u \in U} \{J(u) + \|u - v_{h_{k-1}}\|_0^2\}$ справедлива оценка $\|v_k - \bar{v}_{h_k}\| \leqslant c h_k^{3/4}$, $k = 1, 2, \ldots$.*

Условие $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ обеспечивает ограниченность $\{\bar{v}_{h_k}\}$ и выбор $\{\varepsilon_k\}$ может повлиять лишь на величину $c$.

Из лемм 4—6 вытекает

**Теорема 8** [20, 24]. *Пусть решение задачи 1 $u^*$ принадлежит $C(\bar{\Omega}) \cap W_2^1(\Omega)$, $\varepsilon_k \leqslant h_k^{3/2}$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} h_k^{3/2} < \infty$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \|v_{h_k} - u^*\|_1 = 0$.*

Отметим, что на основании леммы 4 можно гарантировать и сильную сходимость последовательности приближенных решений, полученной в результате непосредственного применения метода конечных элементов (такой алгоритм описан в [42]). Однако в методе (49)—(50) без усложнения итерационного процесса мы добиваемся коэрцитивности в $W_2^1(\Omega)$ минимизируемого функционала в вспомогательных задачах и, как следствие, лучшей устойчивости алгоритмов решения этих задач. Устойчивость самого метода (49), (50) легко устанавливается по теореме 8.

Еще более важную роль играет введение prox-регуляризации при решении задач 2, 3, для которых, ввиду неединственности оптимального элемента, не приходится рассчитывать на однозначную разрешимость аппроксимирующих задач при использовании чистого метода конечных элементов и на сильную сходимость их решений.

Ниже рассматривается предложенный и исследованный в [22] метод решения задачи 3. Для упрощения изложения будем считать, что $\Omega'$ и $\Omega''$ многоугольные области (в [22] предполагается лишь, что $\Gamma_c$ — ломаная) и $\Gamma_0 = \varnothing$. Пусть $\{h_k\}$ — фиксированная последовательность положительных чисел $\lim\limits_{k\to\infty} h_k = 0$; $\Omega'_{h_k}$, $\Omega''_{h_k}$ — триангуляции областей $\Omega'$, $\Omega''$ с множествами узлов $N'_k$, $N''_k$, удовлетворяющие стандартным требованиям и такие, что $\Omega'_{h_k} \cup \Omega''_{h_k}$ является аналогичной триангуляцией $\Omega$. Будем считать, что концы участков разбиения границы принадлежат $N_1 = N'_1 \cup N''_1$ и $N'_k \subset N'_{k+1}$, $N''_k \subset N''_{k+1}$. Определим пространства $V_{h_k} \subset \widehat{W}$ непрерывных на $\bar{\Omega}'$, $\bar{\Omega}''$ вектор-функций $v_{h_k}$, аффинных в каждом треугольнике из $\Omega_{h_k}$ и покомпонентно равных нулю на $\Gamma_u$, и множества $U_{h_k} = \{v \in V_{h_k}\colon n(t)(v''(t) - v'(t)) \leqslant 0 \quad \forall t \in N_k \cap \Gamma_c\}$, где $n(t)$ — вектор нормали к $\Gamma_c$, внешней относительно $\Omega''$ (условимся, что в точках излома $\Gamma_c$ нормали выбраны одинаково при всех $k$).

Предложенный в [22] метод вырабатывает последовательность $\{v_{h_k}\}$ такую, что

$$v_{h_k} \in U_{h_k}, \quad \|v_{h_k} - \bar{v}_{h_k}\|_1 \leqslant c h_k^{1/2}, \tag{51}$$

где

$$\bar{v}_{h_k} = \arg \min_{v \in U_{h_k}} J_k(v), \tag{52}$$

$$J_k(v) = J(v) + \frac{1}{2}\|P_1 v - P_1 v_{h_{k-1}}\|_0^2 + \frac{\alpha}{2}\|P_2 v - P_2 v_{h_{k-1}}\|_0^2, \tag{53}$$

$\alpha \geqslant 0$ фиксировано, $P_1$ — линейный (непрерывный) оператор, проектирующий $\widehat{W}$ на $\mathfrak{R}$, $P_2 = I - P_1$, $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$ — нормы в пространствах $[L^2(\Omega)]^2$ и $\widehat{W}$ соответственно.

Обоснование метода существенно базируется на приведенном ниже результате автора, устанавливающем сильную сходимость метода (27), (28) и его модификаций для бесконечномерных задач в случае конечной размерности ядра минимизируемого функционала.

Определение. *Функционал $\varphi$, заданный на выпуклом множестве $M$, называется сильно выпуклым (с константой $\delta > 0$), если для любых $w_1, w_2 \in M$, $\lambda \in (0, 1)$ имеет место*

$$\varphi(\lambda w_1 + (1-\lambda) w_2) \leqslant \lambda\varphi(w_1) + (1-\lambda)\varphi(w_2) - \delta\lambda(1-\lambda)\|w_1 - w_2\|^2.$$

Пусть $H$ — гильбертово пространство, $H_1$ — его конечномерное подпространство, $Q_1$: $H \to H_1$ — линейный проектор, $Q_2 = I - Q_1$, $H_2 = Q_2 H$, $G \subset H$ — фиксированное выпуклое замкнутое множество. Предположим, что функционал $f$: $H \to \mathbf{R}$ представим в виде $f(u) = f_1(Q_1 u) + f_2(Q_2 u)$, где $f_2$ — сильно выпуклый (с константой $\delta > 0$) на $H_2$, а $f_1$ — выпуклый на $H_1$ конечнозначные функционалы. Определим последовательность $\{u^k\} \subset G$ следующим образом:

$$\rho(\nabla \psi_k(u^k),\ \partial\psi_k(\bar{u}^k)) \leqslant \varepsilon_k, \tag{54}$$

где

$$\psi_k(u) = f(u) + \|Q_1 u - Q_1 u^{k-1}\|^2 + \alpha\|Q_2 u - Q_2 u^{k-1}\|^2, \tag{55}$$

$\alpha \geqslant 0$ — const, $\bar{u}^k = \arg\min\limits_{u \in G} \psi_k(u)$, $\partial\psi_k(v)$ — субдифференциал $\psi_k$ в точке $v$, $\nabla\psi_k(u^k)$ — произвольный элемент множества $\partial\psi_k(u^k)$, $\{\varepsilon_k\}$ — последовательность неотрицательных чисел.

**Теорема 9.** *Пусть множество $G^* = \left\{u \in G\colon f(u) = \inf\limits_{z \in G} f(z)\right\}$ непусто, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$. Тогда последовательность $\{u^k\}$ сходится в норме $H$ к некоторому элементу $u^* \in G^*$.*

Доказательство. Легко проверить, что функционал $\psi_k$ является сильно выпуклым (с константой $\delta_1 = \min(1, \delta)$). Тем самым существование точек $\bar{u}^k$ гарантировано. Обозначим $Q_1 u = v$, $Q_2 u = w$ (аналогично $Q_1 u^k = v^k$ и т. п.). Пусть $u^* \in G^*$ фиксировано. Так как $\bar{u}^{k+1}$ — точка минимума функционала $\psi_{k+1}$ на $G$, при некотором $b \in \partial f(\bar{u}^{k+1})$ имеем

$$\begin{gathered} 0 \leqslant (b + 2(\tilde{Q}_1 \bar{u}^{k+1} - \tilde{Q}_1 u^k) + 2\alpha(\tilde{Q}_2 \bar{u}^{k+1} - \tilde{Q}_2 u^k), \\ u^* - \bar{u}^{k+1}) = (b, u^* - \bar{u}^{k+1}) + \\ + 2(\bar{v}^{k+1} - v^k, v^* - \bar{v}^{k+1}) + 2\alpha(\bar{w}^{k+1} - w^k, w^* - \bar{w}^{k+1}), \end{gathered} \tag{56}$$

где $\tilde{Q}_i = Q_i^* Q_i$ $(i = 1, 2)$, $Q_i^*$ — оператор, сопряженный с $Q_i$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $H$.

На основании теорем о субдифференциалах суммы функций и сложной функции (см., например, [38, предложения 5.6, 5.7]) имеем $\partial f(u) = Q_1^* \partial f_1(Q_1 u) + Q_2^* \partial f_2(Q_2 u)$, т. е. элемент $b$ можно представить в виде

$b = Q_1^* b_1 + Q_2^* b_2$, где $b_1 \in \partial f_1(Q_1 \bar{u}^{k+1})$, $b_2 \in \partial f_2(Q_2 \bar{u}^{k+1})$. Таким образом, $(b, u^* - \bar{u}^{k+1}) = (Q_1^* b_1 + Q_2^* b_2, u^* - \bar{u}^{k+1}) = (b_1, v^* - \bar{v}^{k+1}) + (b_2, w^* - \bar{w}^{k+1})$ и ввиду сильной выпуклости $f_2$ на $H_2$

$$(b, u^* - \bar{u}^{k+1}) \leqslant f_1(v^*) - f_1(\bar{v}^{k+1}) + f_2(w^*) - f_2(\bar{w}^{k+1}) - \\ - \delta \| w^* - \bar{w}^{k+1} \|^2 = f(u^*) - f(\bar{u}^{k+1}) - \delta \| w^* - \bar{w}^{k+1} \|^2, \tag{57}$$

что вместе с (56) дает $2(\bar{v}^{k+1} - v^k, \bar{v}^{k+1} - v^*) + 2\alpha(\bar{w}^{k+1} - w^k, \bar{w}^{k+1} - w^*) \leqslant \leqslant f(u^*) - f(\bar{u}^{k+1}) - \delta \| w^* - \bar{w}^{k+1} \|^2$. Используя последнее неравенство, получаем

$$(\delta + \alpha) \| w^k - w^* \|^2 + \| v^k - v^* \|^2 - (\delta + \alpha) \| \bar{w}^{k+1} - w^* \|^2 - \\ - \| \bar{v}^{k+1} - v^* \|^2 = \| v^k - \bar{v}^{k+1} \|^2 + \alpha \| w^k - \bar{w}^{k+1} \|^2 - \\ - 2(\bar{v}^{k+1} - v^k, \bar{v}^{k+1} - v^*) - 2\alpha(\bar{w}^{k+1} - w^k, \bar{w}^{k+1} - w^*) + \\ + \delta [\| w^k \|^2 - \| \bar{w}^{k+1} \|^2 - 2(w^k, w^*) + 2(\bar{w}^{k+1}, w^*)] \geqslant \\ \leqslant \| v^k - \bar{v}^{k+1} \|^2 + \alpha \| w^k - \bar{w}^{k+1} \|^2 + \delta \| w^k - w^* \|^2 + \\ + f(\bar{u}^{k+1}) - f(u^*). \tag{58}$$

Введем в $H$ новое скалярное произведение $\langle u, q \rangle = (Q_1 u, Q_1 q) + (\delta + \alpha) \times \times (Q_2 u, Q_2 q)$ и соответствующую норму $\mathrm{I} \cdot \mathrm{I}$, которая, как легко видеть, связана с $\| \cdot \|$ соотношением эквивалентности

$$\min \frac{\{1, \delta + \alpha\}}{2} \| u \|^2 \leqslant \mathrm{I} u \mathrm{I}^2 \leqslant 2 \max \{1, \delta + \alpha\} (1 + \| Q_1 \|)^2 \| u \|^2.$$

Поскольку $u^* \in G^*$, из (58) имеем $\mathrm{I} u^k - u^* \mathrm{I} \geqslant \mathrm{I} \bar{u}^{k+1} - u^* \mathrm{I}$, а из (54) ввиду сильной выпуклости $\psi_k$ следует $\mathrm{I} u^{k+1} - \bar{u}^{k+1} \mathrm{I} \leqslant (\sqrt{\max\{1, \delta + \alpha\}} / \sqrt{2\delta_1}) \times \times (1 + \| Q_1 \|) \varepsilon_k \equiv \sigma \varepsilon_k$. Тем самым

$$\mathrm{I} u^k - u^* \mathrm{I} \geqslant \mathrm{I} u^{k+1} - u^* \mathrm{I} - \sigma \varepsilon_k, \tag{59}$$

откуда в силу $\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty$ вытекает ограниченность $\{u^k\}$ (а значит, и $\{\bar{u}^k\}$). Далее, $\mathrm{I} \bar{u}^{k+1} - u^* \mathrm{I}^2 \geqslant \mathrm{I} u^{k+1} - u^* \mathrm{I}^2 - 2 \mathrm{I} u^{k+1} - u^* \mathrm{I} \sigma \varepsilon_k \geqslant \geqslant \mathrm{I} u^{k+1} - u^* \mathrm{I}^2 - c \varepsilon_k$, что вместе с (58) приводит к соотношению

$$\mathrm{I} u^k - u^* \mathrm{I}^2 - \mathrm{I} u^{k+1} - u^* \mathrm{I}^2 \geqslant \| v^k - \bar{v}^{k+1} \|^2 + \alpha \| w^k - \bar{w}^{k+1} \|^2 + \\ + \delta \| w^k - w^* \|^2 + f(\bar{u}^{k+1}) - f(u^*) - c \varepsilon_k. \tag{60}$$

Суммируя неравенства (60) по $k$ от 1 до $s - 1$, получаем

$$\mathrm{I} u^1 - u^* \mathrm{I}^2 - \mathrm{I} u^s - u^* \mathrm{I}^2 \geqslant \sum_{k=1}^{s-1} [f(\bar{u}^{k+1}) - f(u^*)] + \sum_{k=1}^{s-1} \| v^k - \bar{v}^{k+1} \|^2 + \\ + \alpha \sum_{k=1}^{s-1} \| w^k - \bar{w}^{k+1} \|^2 + \delta \sum_{k=1}^{s-1} \| w^k - w^* \|^2 - c \sum_{k=1}^{s-1} \varepsilon_k,$$

откуда $\mathrm{I} v^k - \bar{v}^{k+1} \mathrm{I} \to 0$, $\| w^k - w^* \| \to 0$, $f(\bar{u}^{k+1}) - f(u^*) \to 0$, следовательно, $f(u^{k+1}) - f(u^*) \to 0$.

Пусть $\tilde{u}$ — слабый предел подпоследовательности $\{\bar{u}^{k_j}\}$. В силу замкнутости и выпуклости множество $G$ секвенциально слабо замкнуто, значит, $\tilde{u} \in G$, а так как $\lim_{k \to \infty} f(\bar{u}^k) = \min_{u \in G} f(u)$, то $\tilde{u} \in G^*$. Это позволяет считать, что $u^*$ выбрано равным $\tilde{u}$. Ясно, что $\{u^{k_j}\}$ слабо сходится к $u^*$.

Из (59) при $k+1>k_j$ имеем

$$\mathrm{I}u^{k+1}-u^*\mathrm{I}\leqslant \mathrm{I}u^{k_j}-u^*\mathrm{I}+\sigma\sum_{r=k_j}^{k}\varepsilon_r,$$

$$\mathrm{I}u^{k+1}-u^*\mathrm{I}^2\leqslant 2\left(\mathrm{I}u^{k_j}-u^*\mathrm{I}^2+\sigma^2\left(\sum_{r=k_j}^{k}\varepsilon_r\right)^2\right)=$$

$$=2\left(\|Q_1u^{k_j}-Q_1u^*\|^2+(\delta+\alpha)\|Q_2u^{k_j}-Q_2u^*\|^2+\sigma^2\left(\sum_{r=k_j}^{k}\varepsilon_r\right)^2\right). \quad (61)$$

Но из слабой сходимости $u^{k_j}$ к $u^*$ и сильной сходимости $Q_2u^{k_j}$ к $w^*$ следует слабая сходимость $Q_1u^{k_j}$ к $Q_1u^*$, которая ввиду конечномерности $H_1$ означает, что $\lim\limits_{j\to\infty}\|Q_1u^{k_j}-Q_1u^*\|=0$. Переходя в (61) к верхнему пределу при $j\to\infty$ с сохранением соотношения $k_j<k+1$, получаем $u^{k+1}-u^*\mathrm{I}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$. □

Замечание 5. А. Б. Бакушинским [4] исследован итерационный процесс, близкий к (27), (28):

$$u^{k+1}=\mu_k\operatorname{prox}u^k, \quad (62)$$

где оператор $\operatorname{prox}v$ определен согласно (28), выбор $\mu_k$ подчинен некоторому специальному правилу (например, $\mu_k=1/(1+(1+k)^{-1/2})$). Из соответствующих результатов в [4] следует сильная сходимость последовательности (62) к наименьшему по норме решению задачи минимизации выпуклого непрерывного функционала $J$ на выпуклом замкнутом множестве $Q$ гильбертова пространства ($\operatorname{int}Q\neq\varnothing$). Отметим существенное различие процессов (27)—(28) и (62): любое решение исходной задачи является неподвижной точкой prox-оператора, и ни одно решение, отличное от нуля, не будет неподвижной точкой в (62).

Возвращаясь к рассмотрению задачи 3 и итерационного метода (51)—(53), укажем на следующий результат, установленный в [22]. Обозначим через $L$ дифференциальный оператор, отвечающий [41] задаче 3.

**Лемма 7.** *Пусть элемент* $\overset{*}{u}_k=\arg\min\limits_{u\in U}J_k(u)$ *представим в виде* $\overset{*}{u}_k=\sum\gamma_j\overset{*}{\psi}_j+w^k$, *где функции особенности**) $\overset{*}{\psi}$ *(связанные с изломом границы и изменением характера граничных условий) принадлежит* $\widehat{W}$, $L\overset{*}{\psi}_j\in[L_2(\Omega)]^2$, $w^k\in[W_2^2(\Omega')]^2\times[W_2^2(\Omega'')]^2$. *Тогда существует такая не зависящая от* $k$ *и* $h_k$ *константа* $q=q(F,T)$, *что*

$$\|\overset{*}{u}_k-v_{h_k}\|_1\leqslant qh_k^{1/2}. \quad (63)$$

Ввиду (63) сходимость последовательности $\{v_{h_k}\}$ к некоторому решению $u^*$ задачи 3 в норме пространства $\widehat{W}$ непосредственно следует из теоремы 9 при условии $\sum\limits_{k=1}^{\infty}h_k^{1/2}<\infty$. Соответствующий итерационный процесс для задачи 2 может быть без труда построен по «рецепту» метода (51)—(53), а аналог леммы 7 устанавливается так же, как в [22].

## § 4. СПЕЦИАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА ШТРАФОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ НЕРАВЕНСТВ

В § 2 отмечались свойства функций штрафа (47), обеспечивающие лучшую устойчивость вспомогательных задач безусловной минимизации. При использовании этих функций в методе с итеративной prox-регу-

*) См., например, [8, 53]. Из результатов [8] следует, что $\overset{*}{\Psi}_j$ не зависят от $F$ и $v_{h_{k-1}}$.

ляризацией (42) удалось получить наиболее сильные утверждения о сходимости минимизирующей последовательности. В данном разделе излагаются результаты К. Гроссмана и автора [12], связанные со специальной модификацией метода штрафов для решения некоторых эллиптических вариационных неравенств. В построенном с использованием функций (47) алгоритме за счет подходящего выбора управляющих параметров решение аппроксимирующей конечномерной задачи с точностью, определяемой погрешностью аппроксимации, достигается за один шаг метода штрафов. При этом введение штрафа не увеличивает овражности минимизируемого функционала.

Рассматривается вариационная задача

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega - \int\limits_{\Omega} qu d\Omega \to \min! \tag{64}$$

при условии

$$u \in U \equiv \left\{ w \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega):\ \rho_1 \leqslant w \leqslant \rho_2 \text{ на } \Omega \right\}, \tag{65}$$

именуемая обычно задачей с двумя препятствиями. Здесь $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — область с достаточно гладкой границей $\Gamma$; $\rho_1, \rho_2 \in W^2_\infty(\widehat{\Omega})$, $q \in C(\overline{\Omega})$ — заданные функции, $\rho_1 < \rho_2$ на $\widehat{\Omega}$; $\widehat{\Omega} \supset \{x\colon \rho(x, \Omega) \leqslant \delta\}$ при некотором $\delta > 0$.

В данном случае функционал $J$ коэрцитивен, множество $U$ выпукло и замкнуто, так что существование и единственность решения $u^*$ гарантированы. Будем предполагать, что $u^* \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$ (это заведомо выполнено, если $\Omega$ — выпуклая область с границей класса $C^2$).

Выбирая нерегулярную сетку с шагом $h$, как описано в [25, с. 69], ищем решение задачи (64), (65) в виде $u_h(x) = \sum\limits_{s \in \overset{0}{N}_h} u_s \varphi_s(x)$, где $\varphi_s$ — кусочно-линейная базисная функция, носителем которой является объединение элементов области с вершиной в точке $x^s$, $\overset{0}{N}_h$ — множество индексов внутренних узлов сеточной области $\Omega_h \subset \overline{\Omega}$. Имеем

$$f_h(\underline{u}) = J(u_h) = \frac{1}{2} a(u_h, u_h) - \int\limits_{\Omega} q u_h d\Omega,$$

где $a(u, v) = \int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega$, $\underline{u}$ — вектор с компонентами $u_s$, $s \in \overset{0}{N}_h$.

В [25] показано, что у положительно-определенной матрицы $f_h''(\underline{u}) = \{a(\varphi_s, \varphi_l)\}_{s, l \in \overset{0}{N}_h}$ максимальное собственное число ограничено сверху константой $\nu$, не зависящей от $h$, а минимальное собственное число имеет порядок $h^2$.

Пусть $\rho_i^h = \{\rho_i(x^s)\}_{s \in \overset{0}{N}_h}$, $i = 1, 2$; $G_h = \left\{ \underline{u} \in \mathbf{R}^{|\overset{0}{N}_h|}\colon \rho_1^h \leqslant \underline{u} \leqslant \rho_2^h \right\}$, $\underline{u}^h = \arg\min\limits_{\underline{u} \in G_h} f_h(u)$; $I^i = \{s\colon u_s^h = \rho_i(x^s)\}$, $i = 1, 2$. Справедливы неравенства

$$\frac{\partial f_h(\rho_2^h)}{\partial u_l} \leqslant \frac{\partial f_h(\underline{u}^h)}{\partial u_l} \leqslant 0, \quad \text{если} \quad l \in I^2,$$

$$\frac{\partial f_h(\rho_1^h)}{\partial u_l} \geqslant \frac{\partial f_h(\underline{u}^h)}{\partial u_l} \geqslant 0, \quad \text{если} \quad l \in I^1.$$

Причем, так как $\rho_1, \rho_2 \in W^2_\infty(\Omega)$, то

$$\Big|\sum_{s\in \overset{0}{N}_h} \rho_i(x^s)\, a(\varphi_s, \varphi_l)\Big| \leqslant ch^2 \quad \big(i = 1, 2;\ l \in \overset{0}{N}_h\big),$$

где $c$ не зависит от $h$. На основе этих соотношений установлено, что оптимальные значения $\lambda_s$ множителей Лагранжа для задачи

$$f_h(\underline{u}) \to \min! \tag{66}$$

$$\underline{u} \in G_h \tag{67}$$

удовлетворяют соотношению

$$0 \leqslant \lambda_s \leqslant c_1 h^2, \tag{68}$$

причем величина $c_1$, как правило, может быть эффективно оценена. Тем самым, используя для решения задачи (66) — (67) метод штрафов с функциями штрафа вида (47), естественно взять в (47) $a_j^k \equiv a = dh^2$, где $d > 2c_1$. Параметр $r_k$, как будет ясно из дальнейшего, также следует выбрать не зависящим от $k$, так что функция штрафа приобретает вид

$$V_h(u) = \frac{1}{2} dh^2 \sum_{s\in \overset{0}{N}_h} \left(-u_s + \rho_1(x^s) + \sqrt{(\rho_1(x^s) - u_s)^2 + r}\right) +$$
$$+ \frac{1}{2} dh^2 \sum_{s\in \overset{0}{N}_h} \left(u_s - \rho_2(x^s) + \sqrt{(u_s) - \rho_2(x^s))^2 + r}\right). \tag{69}$$

Обозначим $\tilde{u}^h = \arg \min\limits_{\underline{u}\in \mathbf{R}^{|\overset{0}{N}_h|}} \{f_h(\underline{u}) + V_h(\underline{u})\}$. Матрица $f_h''(\underline{u}) + V_h''(\underline{u})$ имеет ту же структуру, что и $f_h''(\underline{u})$, а для ее максимального и минимального собственных чисел $\gamma_{\max}$ и $\gamma_{\min}$ на основании принципа Рэлея в достаточно широкой окрестности $\tilde{u}^h$ справедливы неравенства

$$\gamma_{\max} \leqslant \nu + dh^2 r^{-1/2}, \quad \gamma_{\min} \geqslant \mu h^2 + d_1 h^2 r, \tag{70}$$

где $\mu h^2$ — нижняя оценка наименьшего собственного числа матрицы $f_h''(\underline{u})$, $\mu$, $d_1$ — положительные константы, не зависящие от $h$.

При условии, что $\tilde{u}^h \in G_h$, с учетом неотрицательности функции (69) легко получить неулучшаемую по порядку оценку

$$\left\| \tilde{u}_h - u_h \right\|_{\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)} \leqslant \left(\left|\overset{0}{N}_h\right| d\right)^{1/2} hr^{1/4} \leqslant \bar{c} r^{1/4}, \tag{71}$$

где $\bar{c}$ не зависит от $h$, $\tilde{u}_h$ и $u_h$ — кусочно-линейные восполнения $\tilde{u}^h$ и $\underline{u}^h$ соответственно.

Пусть $P$ — число обусловленности матрицы $f_h''(\underline{u}) + V_h''(\underline{u})$. Из (70) вытекает оценка

$$P \leqslant \frac{\nu + dh^2 r^{-1/2}}{\mu h^2 + d_1 h^2 r}, \tag{72}$$

анализируя которую убеждаемся, что при $r \to 0$ величина правой части в (72) по порядку не лучше $h^{-2}$. Если же выбрать $r = h^4$, что обеспечивает первый по $h$ порядок оценки (71), то из (72) получаем $(\nu + dh^2 r^{-1/2}) / (\mu h^2 + d_1 h^2 r) \sim h^{-2}$. Таким образом, при $r = h^4$ порядок близости $\tilde{u}_h$ к $u_h$ (в норме $W_2^1(\Omega)$) совпадает с порядком аппроксимации искомого решения по методу конечных элементов, а введение штрафа не ухудшает характера оценки числа обусловленности. Отметим, что необходимое для (71) включение $\tilde{u}^h \in G_h$ при $r = h^4$ выполнено.

Замечание 6. Оценка (68) справедлива и если вместо $\rho_1, \rho_2 \in W^2_\infty(\Omega)$ потребовать, чтобы $\rho_1(x) = \max_{l \in \mathfrak{L}} g_1^l(x)$, $\rho_2(x) = \min_{l \in \mathfrak{L}} g_2^l(x)$, где $g_1^l, g_2^l \in W^2_\infty(\Omega)$, $\mathfrak{L}$ — конечное множество [40]. Это позволяет без оговорок распространить приведенные результаты на задачу об упруго-пластическом кручении цилиндрического стержня [39] в случае, если, например, $\Omega$ — выпуклый многогранник или выпуклое множество с достаточно гладкой границей. Указанная задача при этом приводится к виду (64), (65) с $\rho_2(x) = \rho(x, \Gamma)$ (ограничение снизу отсутствует).

Замечание 7. Фактически в данном параграфе речь идет о решении аппроксимирующей задачи при фиксированном шаге сетки $h$. Реализация описанного метода на последовательности сеток не встречает принципиальных затруднений и может оказаться более перспективной, чем рассмотренный вариант. Метод можно относительно просто приспособить и для последовательности задач (49), (50), естественно, при соответствующей гладкости функций $f$ и $\psi$ и искомого решения.

В заключение укажем, что описанный подход, существенно менее трудоемкий, чем в случае использования стандартной (итеративной) схемы метода штрафов [39], позволяет избавиться и от следующих трудностей:

1) при малых значениях $h$ в стандартном методе происходит «накопление штрафа» за счет большого числа ограничений, что заставляет весьма медленно менять параметры функции штрафа;

2) независимое изменение параметров функции штрафа и конечноэлементной аппроксимации [39] может привести к сколь угодно плохой обусловленности вспомогательных задач.

Идея согласованного изменения параметра функции штрафа и шага сетки использовалась рядом авторов при аппроксимации первой краевой задачи с помощью третьей краевой задачи, а для решения вариационных неравенств (без достаточного обоснования) — в работе [30].

## ЛИТЕРАТУРА


1. **Антипин А. С.** О методе выпуклого программирования, использующем симметрическую модификацию функции Лагранжа // Экономика и мат. методы.— 1976.— Т. 12, № 6.— С. 1164—1173.
2. **Антипин А. С.** Методы нелинейного программирования, основанные на прямой и двойственной модификации функции Лагранжа.— М., 1979.— 74 с.— (Препринт ВНИИ системных исследований).
3. **Бакушинский А. Б., Поляк Б. Т.** О решении вариационных неравенств // Докл. АН СССР.— 1974.— Т. 219, № 5.— С. 1038—1041.
4. **Бакушинский А. Б.** Методы решения монотонных вариационных неравенств, основанные на принципе итеративной регуляризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1977.— Т. 17, № 6.— С. 1350—1362.
5. **Бакушинский А. Б.** К принципу итеративной регуляризации // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1979.— Т. 19, № 4.— С. 1040—1043.
6. **Вайнберг М. М.** Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1972.— 415 с.
7. **Васильев Ф. П.** Методы решения экстремальных задач.— М.: Наука, 1981.— 400 с.
8. **Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.** Неклассические смешанные задачи теории упругости.— М.: Наука, 1974.— 455 с.
9. **Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В.** Модифицированные функции Лагранжа // Экономика и мат. методы.— 1974.— Т. 10, № 3.— С. 568—591.
10. **Гольштейн Е. Г., Третьяков Н. В.** Градиентный метод минимизации и алгоритмы выпуклого программирования, связанные с модифицированными фукциями Лагранжа // Экономика и мат. методы.— 1975.— Т. 11, № 4.— С. 730—742.
11. **Гроссман К., Каплан А. А.** Нелинейное программирование на основе безусловной минимизации.— Новосибирск: Наука, 1981.— 181 с.
12. **Гроссман К., Каплан А. А.** О решении конечномерных задач, возникающих при аппроксимации вариационных неравенств // Оптимизация.— 1983.— Вып. 32.— С. 5—20.

13. **Дюво Г., Лионс Ж.-Л.** Неравенства в механике и физике.— М.: Наука, 1980.— 383 с.
14. **Еремин И. И., Астафьев Н. Н.** Введение в теорию линейного и выпуклого программирования.— М.: Наука, 1976.— 191 с.
15. **Исследования** по линейному и нелинейному программированию/Под ред. К. Эрроу, Л. Гурвиц, Х. Удзава.— М.: ИЛ, 1962.— 334 с.
16. **Каплан А. А.** К характеристике штрафных функций // Оптимизация.— 1972.— Вып. 8.— С. 13—21.
17. **Каплан А. А.** Об одном методе выпуклого программирования с внутренней регуляризацией // Докл. АН СССР.— 1978.— Т. 241, № 1.— С. 22—25.
18. **Каплан А. А.** Итерационные процессы выпуклого программирования с внутренней регуляризацией // Сиб. мат. журн.— 1979.— Т. 20, № 2.— С. 307—316.
19. **Каплан А. А.** Алгоритмы выпуклого программирования, использующие сглаживание точных функций штрафа // Сиб. мат. журн.— 1982.— Т. 23, № 4.— С. 53—64.
20. **Каплан А. А., Намм Р. В.** К характеристике минимизирующих последовательностей для задачи Синьорини // Докл. АН СССР.— 1983.— Т. 273, № 4.— С. 797—800.
21. **Карманов В. Г.** Математическое программирование.— 2-е изд.— М.: Физматгиз, 1980.— 256 с.
22. **Кустова В. И.** Метод решения контактной задачи со слабо коэрцитивным оператором// Оптимизация.— 1985.— Вып. 36.— С. 31—48.
23. **Левитин Е. С., Поляк Б. Т.** Методы минимизации при наличии ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1966.— Т. 6, № 5.— С. 787—823.
24. **Намм Р. В.** О некоторых алгоритмах для решения задачи Синьорини // Оптимизация.— 1983.— Вып. 33.— С. 63—78.
25. **Оганесян Л. А., Руховец Л. А.** Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений.— Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1979.— 334 с.
26. **Поляк Б. Т.** Введение в оптимизацию.— М.: Наука, 1983.— 384 с.
27. **Пшеничный Б. Н.** Алгоритмы для общей задачи математического программирования // Кибернетика.— 1970.— № 5.— С. 120—125.
28. **Пшеничный Б. Н., Данилин Ю. М.** Численные методы в экстремальных задачах.— М.: Наука, 1975.— 319 с.
29. **Пшеничный Б. Н.** Метод линеаризации.— М.: Наука, 1983.— 136 с.
30. **Ривкинд В. Я.** Метод конечного элемента (МКЭ) для решения задач с ограничениями // Тр. конф./3-я всесоюзная конференция по численным методам решения задач теории упругости и пластичности.— Новосибирск.— 1974.— Ч. 2.— С. 74—82.
31. **Сеа Ж.** Оптимизация. Теория и алгоритмы.— М.: Мир, 1973.— 244 с.
32. **Съярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических систем.— М.: Мир, 1980.— 512 с.
33. **Тихонов А. Н. и др.** О регуляризации задач минимизации на множествах, заданных приближенно // Вестн. МГУ. Сер. вычисл. матем. и киберн.— 1977.— № 1.— С. 4—19.
34. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач.— 2-е изд.— М.: Наука, 1979.— 288 с.
35. **Третьяков Н. В.** Метод штрафных оценок для задач выпуклого программирования // Экономика и мат. методы.— 1973.— Т. 9, № 3.— С. 526—540.
36. **Фиакко А., Мак-Кормик Г.** Нелинейное программирование: методы последовательной безусловной минимизации.—М.: Мир, 1972.— 240 с.
37. **Фикера Г.** Теоремы существования в теории упругости.— М.: Мир, 1974.— 159 с.
38. **Экланд И., Темам Р.** Выпуклый анализ и вариационные проблемы.— М.: Мир, 1979.— 399 с.
39. **Glowinski R., Lions J. L., Trémolières R.** Numerical analysis of variational inequalities.— North-Holland P. C., 1981.— 776 p.
40. **Grossmann Ch., Kaplan A. A.** On the solution of discretized obstacle problems by an adapted penalty method // Computing.— 1985.— V. 35.— P. 295—306.
41. **Haslinger J., Hlaváček I.** Contact between elastic bodies // Apl. mat.— 1980.— V. 25, N 5.— P. 324—347; 1981.— V. 26, N 4.— P. 263—290.
42. **Hlaváček I.** Dual finite element analysis for unilateral boundary value problems // Apl. mat.— 1977.— V. 22, N 1.— P. 14—51.
43. **Hlaváček I., Lovišek J.** Finite element analysis of the Signorini problem in semicoercive cases // Apl. mat.— 1980.— V. 25, N 4.— P. 273—285.
44. **Mangasarian O. L.** Dual feasible direction algorithms // Techniques of optimization.— N. Y.: Acad. Press, 1972.— P. 67—88.
45. **Martinet B.** Regularisation d'inequations variationelles par approximations successives // RIRO.— 1970.— V. 4, N 3.— P. 154—159.
46. **Martinet B.** Determination approchee d'un point fixe d'une application pseudo-contractante // C. r. Acad. sci.— 1972.— V. 274, N 2.— P. 163—165.

47. **Moreau J. J.** Proximité et dualité dans un espace Hilbertien // Bull. Soc. Math. France.— 1965.— V. 93.— P. 273—299.
48. **Nitsche J. A.** $L_\infty$-convergence of finite element approximations // Proceedings of the Symposium on the mathematical aspects of the finite element methods.— Rome, Dec. 1975.— Lecture Notes in Mathematics.— 1977.— V. 606.— P. 261—274.
49. **Pironneau O., Polak E.** Rate of convergence of a class of methods of feasible directions // SIAM J. numer. anal.— 1973.— V. 10, N 1.— P. 161—174.
50. **Rockafellar R. T.** The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming // J. optim. theory and appl.— 1973.— V. 12, N 6.— P. 555—562.
51. **Rockafellar R. T.** Augmented Lagrange multiplier functions and duality in nonconvex programming // SIAM J. contr.— 1974.— V. 12, N 2.— P. 268—285.
52. **Rockafellar R. T.** Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming // Math. oper. res.— 1976.— V. 1, N 2.— P. 97—116.
53. **Williams M. L.** Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. appl. mech.— 1952.— V. 19, N 4.— P. 526—528.

# О МОЩНОСТИ И СТРУКТУРЕ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ ПОСТА (СЕМЕЙСТВ ПОДМНОЖЕСТВ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА)

*А. Д. КОРШУНОВ*

В работе установлены асимптотические формулы для числа булевых функций из наиболее сложных замкнутых классов Поста, а также выяснена структура типичных функций из этих классов.

Некоторые результаты естественным образом переформулируются на языке семейств подмножеств конечного множества и в результате получаются асимптотические формулы для количества и сведения о структуре типичных $k$-неразделенных семейств, а также для $k$-неразделенных шпернеровых семейств, $k = 2, 3, \ldots$.

## § 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Э. Пост [1] описал все замкнутые (относительно операции суперпозиции) классы булевых функций, впоследствии нашедшие применения в теоретических и прикладных исследованиях. Наряду с [1] описание этих классов содержится в книге [2], обозначениями из которой мы и пользуемся.

Многие свойства замкнутых классов Поста легко переформулируются как свойства семейств подмножеств конечного множества, удовлетворяющих тем или иным ограничениям. Приведем пример. Пусть $S$ — конечное $n$-элементное множество. Среди простейших ограничений, которые можно наложить на семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств множества $S$, является отсутствие двух непересекающихся членов в $\mathfrak{F}$. Даже одного этого ограничения достаточно для постановки многих вопросов, например, следующих:

(а) Из какого максимального числа членов может состоять семейство $\mathfrak{F}$?

(б) Семейство $\mathfrak{F}$ называется *тупиковым*, если не существует подмножества множества $S$, добавление которого к $\mathfrak{F}$ не повлекло бы нарушения рассматриваемого ограничения. Сколько существует тупиковых $\mathfrak{F}$ заданного объема?

(в) Каково общее число семейств $\mathfrak{F}$?

Потребность в изучении систем подмножеств конечного множества, удовлетворяющих различным ограничениям, возникает при решении многих задач дискретной математики. Некоторые задачи сводятся к исследованию соответствующих систем подмножеств, а другие непосред-