47. **Moreau J. J.** Proximité et dualité dans un espace Hilbertien // Bull. Soc. Math. France.— 1965.— V. 93.— P. 273—299.
48. **Nitsche J. A.** L_∞-convergence of finite element approximations // Proceedings of the Symposium on the mathematical aspects of the finite element methods.— Rome, Dec. 1975.— Lecture Notes in Mathematics.— 1977.— V. 606.— P. 261—274.
49. **Pironneau O., Polak E.** Rate of convergence of a class of methods of feasible directions // SIAM J. numer. anal.— 1973.— V. 10, N 1.— P. 161—174.
50. **Rockafellar R. T.** The multiplier method of Hestenes and Powell applied to convex programming // J. optim. theory and appl.— 1973.— V. 12, N 6.— P. 555—562.
51. **Rockafellar R. T.** Augmented Lagrange multiplier functions and duality in nonconvex programming // SIAM J. contr.— 1974.— V. 12, N 2.— P. 268—285.
52. **Rockafellar R. T.** Augmented Lagrangians and applications of the proximal point algorithm in convex programming // Math. oper. res.— 1976.— V. 1, N 2.— P. 97—116.
53. **Williams M. L.** Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension // J. appl. mech.— 1952.— V. 19, N 4.— P. 526—528.

О МОЩНОСТИ И СТРУКТУРЕ ЗАМКНУТЫХ КЛАССОВ ПОСТА (СЕМЕЙСТВ ПОДМНОЖЕСТВ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА)

А. Д. КОРШУНОВ

В работе установлены асимптотические формулы для числа булевых функций из наиболее сложных замкнутых классов Поста, а также выяснена структура типичных функций из этих классов.

Некоторые результаты естественным образом переформулируются на языке семейств подмножеств конечного множества и в результате получаются асимптотические формулы для количества и сведения о структуре типичных k-неразделенных семейств, а также для k-неразделенных шпернеровых семейств, $k = 2, 3, \ldots$.

§ 1. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Э. Пост [1] описал все замкнутые (относительно операции суперпозиции) классы булевых функций, впоследствии нашедшие применения в теоретических и прикладных исследованиях. Наряду с [1] описание этих классов содержится в книге [2], обозначениями из которой мы и пользуемся.

Многие свойства замкнутых классов Поста легко переформулируются как свойства семейств подмножеств конечного множества, удовлетворяющих тем или иным ограничениям. Приведем пример. Пусть S — конечное n-элементное множество. Среди простейших ограничений, которые можно наложить на семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств множества S, является отсутствие двух непересекающихся членов в $\mathfrak{F}$. Даже одного этого ограничения достаточно для постановки многих вопросов, например, следующих:

(а) Из какого максимального числа членов может состоять семейство $\mathfrak{F}$?

(б) Семейство $\mathfrak{F}$ называется *тупиковым*, если не существует подмножества множества S, добавление которого к $\mathfrak{F}$ не повлекло бы нарушения рассматриваемого ограничения. Сколько существует тупиковых $\mathfrak{F}$ заданного объема?

(в) Каково общее число семейств $\mathfrak{F}$?

Потребность в изучении систем подмножеств конечного множества, удовлетворяющих различным ограничениям, возникает при решении многих задач дискретной математики. Некоторые задачи сводятся к исследованию соответствующих систем подмножеств, а другие непосредственно формулируются на языке таких систем. Более подробные сведения о проблематике систем подмножеств см., например, в [3].

В настоящей работе мы интересуемся только мощностью и структурой довольно сложных замкнутых классов Поста, а следовательно, мощностью и структурой соответствующих семейств подмножеств конечного множества. Для мощностей этих классов мы устанавливаем асимптотические формулы (правда, не для всех классов). Краткая формулировка этих результатов имеется в [4, 5]. Мощности большинства замкнутых классов Поста давно известны. Исключение составляет лишь класс монотонных булевых функций. Для мощности этого класса асимптотические формулы были найдены в последнее время [6, 7].

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. РАССМАТРИВАЕМЫЕ КЛАССЫ

Пусть $\tilde{\alpha}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — различные двоичные наборы. Говорят, что $\tilde{\alpha}$ *предшествует* $\tilde{\beta}$ (обозначение: $\tilde{\alpha}\prec\tilde{\beta}$), если $\alpha_s\leqslant\beta_s$ при $1\leqslant s\leqslant n$. По отношению к предикату $\prec$ множество всех двоичных наборов заданной длины является частично упорядоченным множеством.

Булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется

монотонной, если для любых двух наборов $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ таких, что $\tilde{\alpha}\prec\tilde{\beta}$, имеет место соотношение $f(\tilde{\alpha})\leqslant f(\tilde{\beta})$;

самодвойственной, если $f(x_1, \ldots, x_n)=\bar{f}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$, т. е. на противоположных наборах значений переменных f принимает различные значения.

Говорят, что булева функция f удовлетворяет условию:

$\langle a^\infty\rangle$, если все наборы, на которых f равна нулю, имеют общую нулевую компоненту;

$\langle a^\mu\rangle$, если у любых μ наборов, на которых f равна нулю, имеется общая нулевая компонента;

$\langle A^\infty\rangle$, если все наборы, на которых f равна единице, имеют общую единичную компоненту;

$\langle A^\mu\rangle$, если у любых μ наборов, на которых f равна единице, имеется общая единичная компонента.

Мы рассматриваем следующие замкнутые классы:

$F_3^\infty(F_3^\mu)$ — множество всех монотонных булевых функций, удовлетворяющих условию $\langle a^\infty\rangle$ (условию $\langle a^\mu\rangle$, $\mu\geqslant 2$);

$F_4^\infty(F_4^\mu)$ — множество всех булевых функций, удовлетворяющих условию $\langle a^\infty\rangle$ (условию $\langle a^\mu\rangle$, $\mu\geqslant 2$);

$F_7^\infty(F_7^\mu)$ — множество всех монотонных булевых функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\infty\rangle$ (условию $\langle A^\mu\rangle$, $\mu\geqslant 2$);

$F_8^\infty(F_8^\mu)$ — множество всех булевых функций, удовлетворяющих условию $\langle A^\infty\rangle$ (условию $\langle A^\mu\rangle$, $\mu\geqslant 2$);

D_2 — множество всех самодвойственных монотонных булевых функций.

Для произвольного множества булевых функций H через $H(n)$ обозначим совокупность всех функций из H от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Теперь укажем на связь между введенными классами булевых функций n переменных и семействами подмножеств n-элементного множества. Пусть S — произвольное упорядоченное n-элементное множество и каждому семейству $\mathfrak{F}$ подмножеств множества S сопоставлена булева функция f — характеристическая для семейства $\mathfrak{F}$, т. е. $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)=1$ тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{F}$ имеется член $S'\subseteq S$ такой, что

$$\alpha_r=\begin{cases}1, & \text{если } r\text{-й элемент из } S \text{ входит в } S',\ 1\leqslant r\leqslant n,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Таким образом, пересечение членов семейства $\mathfrak{F}$ непусто тогда и только тогда, когда характеристическая функция семейства $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию $\langle A^{\infty}\rangle$.

Семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств множества S называется *μ-неразделенным*, $\mu \geqslant 2$, если любые μ членов из $\mathfrak{F}$ имеют непустое пересечение.

Из приведенных определений следует, что семейство $\mathfrak{F}$ является μ-неразделенным, $\mu \geqslant 2$, тогда и только тогда, когда характеристическая функция семейства $\mathfrak{F}$ удовлетворяет условию $\langle A^{\mu}\rangle$.

Семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств множества S называется *шпернеровым*, если ни один член семейства $\mathfrak{F}$ не содержится в другом члене.

Между множеством шпернеровых семейств $\mathfrak{F}$ подмножеств упорядоченного n-элементного множества S и множеством монотонных булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно установить следующее взаимно-однозначное соответствие. Пусть подмножество $S' \subseteq S$ является членом $\mathfrak{F}$ и $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — характеристический набор (функция) для S'. Тогда полагаем $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$ и $f(\beta_1, \ldots, \beta_n) = 1$ на любом наборе $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ таком, что $\tilde{\beta} \succ \tilde{\alpha}$. Если же набор $\tilde{\beta}$ не характеристический и не существует набора $\tilde{\alpha} \prec \tilde{\beta}$, характеристического для некоторого члена из $\mathfrak{F}$, то полагаем $f(\tilde{\beta}) = 0$. Поэтому асимптотические формулы из [7] для числа монотонных булевых функций n переменных являются одновременно асимптотическими формулами и для числа шпернеровых семейств подмножеств n-элементного множества.

Очевидно, что пересечение всех членов шпернерова семейства непусто тогда и только тогда, когда сопоставленная ему монотонная булева функция удовлетворяет условию $\langle A^{\infty}\rangle$ (такие шпернеровы семейства назовем *сильно неразделенными*). Далее, шпернерово семейство является μ-неразделенным, $\mu \geqslant 2$, тогда и только тогда, когда сопоставленная ему монотонная булева функция удовлетворяет условию $\langle A^{\mu}\rangle$.

Из сказанного вытекают следующие факты.

Мощность множества $F_7^{\infty}(n)$ (соответственно $F_7^{\mu}(n)$, $\mu \geqslant 2$) совпадает с числом сильно неразделенных (соответственно μ-неразделенных) шпернеровых семейств, состоящих из подмножеств n-элементного множества.

Мощность множества $F_8^{\infty}(n)$ (соответственно $F_8^{\mu}(n)$, $\mu \geqslant 2$) совпадает с числом сильно неразделенных (соответственно μ-неразделенных) семейств, состоящих из подмножеств n-элементного множества.

§ 3. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Нетрудно видеть, что при любых допустимых n и μ справедливы соотношения

$$|F_3^{\infty}(n)| = |F_7^{\infty}(n)|, \ |F_3^{\mu}(n)| = |F_7^{\mu}(n)|, \ |F_4^{\infty}(n)| = |F_8^{\infty}(n)|,$$

$$|F_4^{\mu}(n)| = |F_8^{\mu}(n)|.$$

В самом деле, с каждой булевой функцией $f(x_1, \ldots, x_n)$ свяжем булеву функцию $(f(x_1, \ldots, x_n))^*$ такую, что $(f(\tilde{\alpha}))^* = 1$ тогда и только тогда, когда $f(\tilde{\bar{\alpha}}) = 1$. Тогда $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $F_3^{\infty}(n)$ (соответственно $F_3^{\mu}(n)$, $F_4^{\infty}(n)$, $F_4^{\mu}(n)$) тогда и только тогда, когда $(\bar{f}(x_1, \ldots, x_n))^*$ принадлежит $F_7^{\infty}(n)$ (соответственно $F_7^{\mu}(n)$, $F_8^{\infty}(n)$, $F_8^{\mu}(n)$). Поэтому ниже мы будем рассматривать только классы $F_7^{\infty}(n)$, $F_7^{\mu}(n)$, $F_8^{\infty}(n)$, $F_8^{\mu}(n)$, $D_2(n)$.

Теорема 1. *При нечетных $n \to \infty$*

$$|F_7^{\infty}(n)| \sim n 2^{\binom{n-1}{(n-1)/2}} \exp\left\{\binom{n-1}{(n-3)/2}\left(2^{-(n-1)/2} + n^2 2^{-n-4} - n 2^{-n-2}\right)\right\},$$

а при четных $n \to \infty$

$$|F_7^\infty(n)| \sim 2n2^{\binom{n-1}{n/2}} \exp\left\{\binom{n-1}{n/2+1}\left(2^{-n/2-1} - n^2 2^{-n-5} - 3n2^{-n-4}\right) + \right.$$
$$\left. + \binom{n-1}{n/2-1}\left(2^{-n/2} + n^2 2^{-n-3} - n2^{-n-2}\right)\right\}.$$

Теорема 2. *При нечетных* $n \to \infty$

$$|F_7^2(n)| \sim 2^{\binom{n}{(n+1)/2}} \exp\left\{\binom{n}{(n-1)/2}\left(2^{-(n+3)/2} + n2^{-n-5}\right) + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{(n+3)/2}\left(2^{-(n+3)/2} + n^2 2^{-n-6}\right)\right\},$$

а при четных $n \to \infty$

$$|F_7^2(n)| > 2^{\binom{n}{n/2+1}} \exp\left\{\binom{n}{n/2}\left(2^{-n/2} + 3n^2 2^{-n-5} + n2^{-n-4}\right) + \right.$$
$$\left. + \binom{n}{n/2+2}\left(2^{-n/2-2} + n^2 2^{-n-7}\right)\right\}(1 - o(1)).$$

Теорема 3. *При* $n \to \infty$

$$|F_8^\infty(n)| \sim n2^{2^{n-1}}.$$

Теорема 4. *При любом нечетном* $n \geqslant 3$

$$2^{2^{n-1}}(3/2)^{\binom{n}{(n-1)/2}} \leqslant |F_8^2(n)| < 2^{2^{n-1}}\psi(n),$$

а при любом четном n

$$2^{2^{n-1}}(3/2)^{1/2\binom{n}{n/2}} < |F_8^2(n)| < 2^{2^{n-1}}\psi(n),$$

где $\psi(n)$ — *число монотонных булевых функций* n *переменных.*

Теорема 5. *При любом фиксированном* $\mu \geqslant 3$ *и* $n \to \infty$

$$|F_8^\mu(n)| \sim |F_8^\infty(n)| \sim n2^{2^{n-1}}.$$

Теорема 6. *При любом фиксированном* $\mu \geqslant 3$ *и* $n \to \infty$

$$|F_7^\mu(n)| \sim |F_7^\infty(n)|,$$

т. е. при нечетных $n \to \infty$

$$|F_7^\mu(n)| \sim 2n2^{\binom{n-1}{(n-1)/2}} \exp\left\{\binom{n-1}{(n-3)/2}\left(2^{-(n-1)/2} + n^2 2^{-n-4} - n2^{-n-2}\right)\right\},$$

а при четных $n \to \infty$

$$|F_7^\mu(n)| \sim 2n2^{\binom{n-1}{n/2}} \exp\left\{\binom{n-1}{n/2+1}\left(2^{-n/2-1} - n^2 2^{-n-5} - 3n2^{-n-4}\right) + \right.$$
$$\left. + \binom{n-1}{n/2-1}\left(2^{-n/2} + n^2 2^{-n-3} - n2^{-n-2}\right)\right\}.$$

Теорема 7. *При четных* $n \to \infty$

$$|D_2(n)| \sim 2^{1/2\binom{n}{n/2}} \exp\left\{\binom{n}{n/2-1}\left(2^{-n/2} + n^2 2^{-n-5} - n2^{-n-4}\right)\right\},$$

а при нечетных $n \to \infty$

$$|D_2(n)| > n2^{\binom{n-1}{(n-3)/2}}.$$

Теперь приведем некоторые сведения о структуре типичных функций из классов $F_7^\infty(n)$, $F_7^\mu(n)$ и $D_2(n)$. Все двоичные наборы длины n будем рассматривать как вершины единичного n-мерного куба E^n. Совокупность тех двоичных наборов длины n, в которых содержится в точности по k единиц, $0 \leqslant k \leqslant n$, будем называть k-м *слоем в кубе* E^n и обозначать $E^{n,k}$.

Вершина $\tilde{\alpha} \in E^n$ называется *нижней единицей монотонной булевой функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$, если $f(\tilde{\alpha}) = 1$ и $f(\tilde{\beta}) = 0$ на любом наборе $\tilde{\beta}$ таком, что $\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$.

Класс $F_7^\infty(n)$. В случае нечетных n нижние единицы почти каждой функции из $F_7^\infty(n)$ располагаются в слоях $E^{n,(n-1)/2}$, $E^{n,(n+1)/2}$, $E^{n,(n+3)/2}$, причем число нижних единиц в слое $E^{n,(n+1)/2}$ асимптотически равно $\frac{1}{2}\binom{n-1}{(n-1)/2}$, а в остальных двух слоях их содержится не более, чем по $\binom{n-1}{(n-1)/2}2^{-n/2}$. В случае четных n множество почти всех функций из $F_7^\infty(n)$ распадается на два подмножества $M_1(n)$ и $M_2(n)$ таких, что все нижние единицы каждой функции из $M_1(n)$ расположены в слоях $E^{n,n/2-1}$, $E^{n,n/2}$, $E^{n,n/2+1}$, а все нижние единицы каждой функции из $M_2(n)$ — в слоях $E^{n,n/2}$, $E^{n,n/2+1}$, $E^{n,n/2+2}$. При этом число нижних единиц в слое $E^{n,n/2}$ для каждой функции из $M_1(n)$ асимптотически равно $\frac{1}{2}\binom{n-1}{n/2}$, а в остальных двух слоях содержится не более, чем по $\binom{n-1}{n/2}2^{-n/2}$ нижних единиц. Далее, число нижних единиц в слое $E^{n,n/2+1}$ для каждой функции из $M_2(n)$ асимптотически равно $\frac{1}{2}\binom{n-1}{n/2}$, а в остальных двух слоях содержится не более, чем по $\binom{n-1}{n/2}2^{-n/2}$ нижних единиц.

Класс $F_7^2(n)$. В случае нечетных n нижние единицы почти каждой функции из $F_7^2(n)$ располагаются в слоях $E^{n,(n-1)/2}$, $E^{n,(n+1)/2}$, $E^{n,(n+3)/2}$, причем число нижних единиц в слое $E^{n,(n+1)/2}$ асимптотически равно $\frac{1}{2}\binom{n}{(n+1)/2}$, а в остальных двух слоях их содержится не более, чем по $\binom{n}{(n-1)/2}2^{-n/2}$. В случае четных n нижние единицы почти каждой функции из $F_7^2(n)$ располагаются в слоях $E^{n,n/2-1}$, $E^{n,n/2}$, $E^{n,n/2+1}$, $E^{n,n/2+2}$, $E^{n,n/2+3}$.

Класс $F_7^\mu(n)$ при $\mu \geqslant 3$. При любом фиксированном $\mu \geqslant 3$ почти каждая функция из $F_7^\mu(n)$ принадлежит $F_7^\infty(n)$. Поэтому нижние единицы почти каждой функции из $F_7^\mu(n)$ при $\mu \geqslant 3$ располагаются по слоям так же, как и нижние единицы почти каждой функции из $F_7^\infty(n)$.

Класс $D_2(n)$. В случае четных n нижние единицы почти каждой функции из $D_2(n)$ расположены в слоях $E^{n,n/2-1}$, $E^{n,n/2}$, $E^{n,n/2+1}$, причем число нижних единиц в слое $E^{n,n/2}$ асимптотически равно $\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}$, а в остальных двух слоях их содержится не более, чем по $\binom{n}{n/2}2^{-n/2}$. В случае нечетных n нижние единицы почти каждой функции из $D_2(n)$ расположены в слоях $E^{n,(n-3)/2}$, $E^{n,(n-1)/2}$, $E^{n,(n+1)/2}$, $E^{n,(n+3)/2}$ (возможно, что на самом деле нижние единицы располагаются не на всех этих слоях).

На языке семейств подмножеств конечного n-элементного множества указанные свойства классов $F_7^\infty(n)$ и $F_7^\mu(n)$ при $\mu \geqslant 2$ переформулируются следующим образом.

1. В случае нечетных n почти каждое сильно неразделенное шпернерово семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств n-элементного множества S состоит из членов, в которых содержится не менее, чем по $(n-1)/2$, и не более, чем по $(n+3)/2$ элементов из S. Причем число членов из $\mathfrak{F}$, в которых содержится по $(n+1)/2$ элементов, асимптотически равно $\frac{1}{2}\binom{n-1}{(n+1)/2}$, а число остальных членов не превосходит $\binom{n-1}{(n+1)/2}2^{-n/2+1}$. В случае четных n совокупность почти всех сильно неразделенных шпернеровых семейств $\mathfrak{F}$ подмножеств из S распадается на два подмножества $V_1(n)$ и $V_2(n)$ таких, что в каждом члене из $\mathfrak{F} \in V_1(n)$ содержится не менее $n/2-1$ и не более $n/2+1$ элементов из S, а в каждом члене семейства $\mathfrak{F} \in V_2(n)$ содержится не менее $n/2$ и не более $n/2+2$ элементов из S. При этом если $\mathfrak{F} \in V_1(n)$, то число членов в $\mathfrak{F}$, содержащих по $n/2$ элементов из S, асимптотически равно $\frac{1}{2}\binom{n-1}{n/2}$, а число остальных членов не превосходит $\binom{n-1}{n/2}2^{-n/2+1}$. Если же $\mathfrak{F} \in V_2(n)$, то число членов семейства $\mathfrak{F}$, содержащих по $n/2+1$ элементов из S, асимптотически равно $\frac{1}{2}\binom{n-1}{n/2}$, а число остальных членов в $\mathfrak{F}$ не превосходит $\binom{n-1}{n/2}2^{-n/2+1}$.

2. В случае нечетных n почти каждое 2-неразделенное шпернерово семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств из S состоит из таких членов, в которых содержится не менее, чем по $(n-1)/2$, и не более, чем по $(n+3)/2$ элементов из S, причем число членов семейства $\mathfrak{F}$, содержащих по $(n+1)/2$ элементов из S, асимптотически равно $\frac{1}{2}\binom{n}{(n+1)/2}$, а число остальных членов в $\mathfrak{F}$ не превосходит $\binom{n}{(n+1)/2}2^{-n/2+1}$. В случае четных n почти каждое 2-неразделенное шпернерово семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств n-элементного множества S состоит из членов, в которых содержится не менее, чем по $n/2-1$, и не более, чем по $n/2+3$ элементов из S.

Мы предполагаем, что на самом деле при четных n почти каждое 2-неразделенное шпернерово семейство $\mathfrak{F}$ подмножеств n-элементного множества S состоит из членов, в которых содержится не менее, чем по $n/2$, и не более, чем по $n/2+2$ элементов из S. Причем число членов из $\mathfrak{F}$, в которых содержится по $n/2+1$ элементов из S, асимптотически равно $\frac{1}{2}\binom{n}{n/2+1}$, а число остальных членов в $\mathfrak{F}$ не превосходит $\binom{n}{n/2}2^{-n/2+1}$. Если это предположение верно, то выражение из правой части второго утверждения теоремы 2 является асимптотикой для мощности множества $F_7^2(n)$.

3. При любом фиксированном $\mu \geqslant 3$ почти каждое μ-неразделенное шпернерово семейство подмножеств n-элементного множества S является сильно неразделенным семейством. Поэтому при $\mu \geqslant 3$ почти каждое μ-неразделенное шпернерово семейство подмножеств из S имеет такую же структуру, как и сильно неразделенные шпернеровы семейства подмножеств из S.

Доказательства теорем 1, 3 и 4 весьма просты; они приводятся в следующем параграфе. Основная же часть настоящей статьи посвящена доказательству теорем 2 и 5, а также выяснению структуры типичных функций из классов $F_7^2(n)$, $F_8^{\mu}(n)$ при $\mu \geqslant 3$. При этом мы существенно используем методику и результаты работы [7]. Более длинным является доказательство теоремы 2. Оно содержится в § 5—15. Справедливость теоремы 5 устанавливается в § 16. Схема доказательства теоремы 2 такова. В § 5 из множества $F_7^2(n)$ выделяется специальное подмножество $G^0(n)$. Для мощности этого подмножества находятся асимптотики в случае нечетных и четных n. В случае нечетных n асимптотики устанавливаются в § 7, а в случае четных n — в § 8. При установлении этих асимптотик используются вспомогательные факты из § 6. Далее, в § 9 — 15 изучается множество $F_7^2(n)$. Сначала в § 9 это множество разбивается на $[(n-1)/2]+1$ непересекающихся классов $G(n, 0)$, $G(n, 1)$, ..., $G(n, [(n-1)/2])$, причем все функции из $G^0(n)$ входят в класс $G(n, [(n-1)/2])$. Затем с использованием вспомогательных фактов из § 11 в § 10—13 показывается (доказательство леммы 9.1), что почти все функции из $F_7^2(n)$ принадлежат только $G(n, [(n-1)/2])$. После этого в $G(n, [(n-1)/2])$ выделяется специальное подмножество $G^3(n)$, обладающее следующими свойствами:

(а) все функции из $G^0(n)$ входят в $G^3(n)$;

(б) почти все функции из $F_7^2(n)$ входят в $G^3(n)$;

(в) в случае нечетных n число функций из $G^3(n)$ асимптотически равно числу функций из $G^0(n)$.

Доказательство свойства (б) содержится в § 14, а доказательство свойства (в) — в § 15. Таким образом, при нечетных n справедливо соотношение $|F_7^2(n)| \sim |G^0(n)|$, а в случае четных n — $|F_7^2(n)| > |G^0(n)|$.

§ 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ТЕОРЕМ 1, 3 И 4

Доказательство теоремы 1. С одной стороны, при любом фиксированном r, $1 \leqslant r \leqslant n$, число функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $F_7^{\infty}(n)$, представимых в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_r f(x_1, \ldots, x_{r-1}, 1, x_{r+1}, \ldots, x_n), \tag{4.1}$$

в точности равно $\psi(n-1)$, где $\psi(n-1)$ — число монотонных булевых функций от $n-1$ переменных. Поэтому

$$|F_7^{\infty}(n)| < n\psi(n-1). \tag{4.2}$$

С другой стороны, привлекая принцип включения и исключения, а также неравенство Бонферрони [8], имеем

$$|F_7^{\infty}(n)| > n\psi(n-1) - \binom{n}{2}\psi(n-2). \tag{4.3}$$

Пользуясь (4.2), (4.3) и асимптотическими формулами из [7] для числа монотонных булевых функций, после элементарных преобразований получаем утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 1. В самом деле, при любом фиксированном r, $1 \leqslant r \leqslant n$, число функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из $F_8^{\infty}(n)$, представимых в виде (4.1), в точности равно $2^{2^{n-1}}$. Поэтому

$$|F_8^{\infty}(n)| < n 2^{2^{n-1}}. \tag{4.4}$$

Вместе с тем пользуясь принципом включения и исключения, а также неравенством Бонферрони, имеем

$$|F_8^\infty(n)| > n2^{2^{n-1}} - \binom{n}{2} 2^{2^{n-2}} = (1 - o(1))\, n2^{2^{n-1}}. \tag{4.5}$$

Из (4.4) и (4.5) следует утверждение теоремы 3.

Доказательство теоремы 4. Нижние оценки. При нечетных n рассмотрим булевы функции f от n переменных, удовлетворяющие следующим ограничениям.

(а) В каждой вершине любого слоя, начиная с $E^{n,0}$ и кончая $E^{n,(n-3)/2}$, функция f равна нулю.

(б) В вершинах любого слоя, начиная с $E^{n,(n+3)/2}$ и кончая $E^{n,n}$, f принимает произвольные значения. Число таких возможностей равно $2^{2^{n-1}-\binom{n}{(n-1)/2}}$.

(в) Функция f не может принимать значение «1» одновременно на любых двух противоположных наборах, расположенных в слоях $E^{n,(n-1)/2}$ и $E^{n,(n+1)/2}$. Число таких способов определения функции f в этих двух слоях равно $3^{\binom{n}{(n-1)/2}}$.

Поскольку все рассматриваемые функции принадлежат $F_8^2(n)$, то

$$|F_8^2(n)| > 2^{2^{n-1}-\binom{n}{(n-1)/2}}\, 3^{\binom{n}{(n-1)/2}} = 2^{2^{n-1}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\binom{n}{(n-1)/2}}. \tag{4.6}$$

При четных n рассмотрим булевы функции f от n переменных, удовлетворяющие следующим ограничениям.

(а′) В каждой вершине любого слоя, начиная с $E^{n,0}$ и кончая $E^{n,n/2-1}$, f равна нулю.

(б′) В вершинах любого слоя, начиная с $E^{n,n/2+1}$ и кончая $E^{n,n}$, f принимает произвольные значения. Число таких способов задания функций равно $2^{2^{n-1}-\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}}$.

(в′) Функция f не может принимать значение 1 одновременно на любых двух противоположных наборах, расположенных в слое $E^{n,n/2}$. Число таких способов определения функции в слое $E^{n,n/2}$ равно $3^{\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}}$. Так как все рассматриваемые функции принадлежат классу $F_8^2(n)$, то

$$|F_8^2(n)| > 2^{2^{n-1}-\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}}\, 3^{\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}} = 2^{2^{n-1}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}}. \tag{4.7}$$

Из (4.6) и (4.7) вытекают нижние оценки для $|F_8^2(n)|$.

Верхняя оценка. Пусть f — произвольная булева функция от n переменных. Двоичный набор $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ назовем *нижней единицей функции* f, если $f(\tilde{\alpha}) = 1$ и $f(\tilde{\beta}) = 0$ для любого $\tilde{\beta} \prec \tilde{\alpha}$. Очевидно, по заданной f множество нижних единиц определяется единственным образом и состоит из попарно несравнимых наборов. Следовательно, число таких множеств не превосходит числа монотонных булевых функций от n переменных, т. е. $\psi(n)$. Далее, если $f \in F_8^2(n)$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ является нижней единицей для f и набор $\tilde{\beta}$ противоположен набору $\tilde{\alpha}$, то $f(\tilde{\gamma}) = 0$ для любого $\tilde{\gamma} \preccurlyeq \tilde{\beta}$. Поэтому каждая функция из $F_8^2(n)$ может быть получена следующим способом.

I. В E^n выбирается произвольная система R попарно несравнимых вершин такая, что если $\tilde{\alpha} \in R$, то $\tilde{\tilde{\alpha}} \notin R$. Имеется менее $\psi(n)$ возможностей.

II. Отобранные вершины назначаются нижними единицами функции f.

III. Пусть $E^n(R)$ — совокупность тех вершин из E^n, в которых f может принимать только нулевое значение. Тогда в вершинах из $E^n \setminus E^n(R)$ функция f определяется произвольным образом. Поскольку $|E^n(R)| \geqslant 2^{n-1}$, то имеется не более $2^{2^{n-1}}$ возможностей.

Из I — III следует верхняя оценка для $F_8^2(n)$, и теорема 4 доказана.

§ 5. ТИПИЧНЫЕ И НЕТИПИЧНЫЕ ФУНКЦИИ ИЗ $F_7^2(n)$

Будем использовать следующее обозначение: $G(n) = F_7^2(n)$. Пусть $A = \{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_r\}$ — произвольное r-элементное подмножество из $E^{n,k}$. Множество всех вершин из A иногда разбивается на *связки*: две вершины $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\alpha}_j$ из A включаются в одну связку тогда и только тогда, когда в A имеются вершины $\tilde{\alpha}_{v_1}, \ldots, \tilde{\alpha}_{v_s}$ такие, что расстояние Хемминга $\rho\left(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{v_1}\right) = \rho\left(\tilde{\alpha}_{v_s}, \tilde{\alpha}_j\right) = 2$ и $\rho\left(\tilde{\alpha}_{v_w}, \tilde{\alpha}_{v_{w+1}}\right) = 2$ при любом $w, 1 \leqslant w \leqslant s-1$.

Произвольную совокупность $S = \{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v\}$ вершин из $E^{n,k}$ назовем *псевдосвязкой*, если для любых двух вершин $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j \in S$ имеется последовательность вершин $\tilde{\alpha}_{r_1}, \ldots, \tilde{\alpha}_{r_w}$ из S такая, что $\rho\left(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{r_1}\right) \leqslant 4$, $\rho\left(\tilde{\alpha}_{r_w}, \tilde{\alpha}_j\right) \leqslant 4$ и $\rho\left(\tilde{\alpha}_{r_s}, \tilde{\alpha}_{r_{s+1}}\right) \leqslant 4$ при любом s, $1 \leqslant s \leqslant w-1$.

При нечетных n через $G^0(n)$ обозначим множество функций из $G(n)$, обладающих следующими свойствами.

1. Все нижние единицы функции f располагаются в слоях $E^{n,(n-1)/2}$, $E^{n,(n+1)/2}$, $E^{n,(n+3)/2}$.

2. В $E^{n,(n-1)/2}$ имеется не менее $\left[\binom{n}{(n-1)/2}/(n2^{n/2})\right]$ и не более $\left[2\binom{n}{(n-1)/2}2^{-n/2}\right]$ нижних единиц функции f.

3. В $E^{n,(n+3)/2}$ имеется не более $\left[2\binom{n}{(n+3)/2}2^{-n/2}\right]$ и не менее $\left[\binom{n}{(n+3)/2}/(n2^{n/2})\right]$ нижних единиц функции f.

4. Множество нижних единиц из $E^{n,(n-1)/2}$ функции f распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, и среди этих единиц имеется не более n^6 таких единиц $\tilde{\alpha}$, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\tilde{\beta}}) \leqslant 3$, где $\tilde{\tilde{\beta}}$ — некоторая (зависящая от $\tilde{\alpha}$) нижняя единица из $E^{n,(n-1)/2}$.

5. Число двухэлементных связок в $E^{n,(n-1)/2}$ не превосходит n^4.

6. Множество нижних единиц из $E^{n,(n+3)/2}$ функции f распадается на одноэлементные и двухэлементные связки.

7. Число двухэлементных связок в $E^{n,(n+3)/2}$ не превосходит n^4.

8. Если вершина $\tilde{\alpha}$ из $E^{n,(n+3)/2}$ — нижняя единица функции f, $\tilde{\beta}$ — произвольная вершина из $E^{n,(n+1)/2}$ такая, что $\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$ и $\tilde{\tilde{\beta}}$ является нижней единицей в $E^{n,(n-1)/2}$, то $\tilde{\alpha}$ принадлежит одноэлементной связке во множестве всех нижних единиц из $E^{n,(n+3)/2}$.

9. В $E^{n,(n+8)/2}$ содержится не более n^4 нижних единиц $\tilde{\alpha}$ таких, что в $E^{n,(n+1)/2}$ имеется вершина $\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$, а $\tilde{\tilde{\beta}}$ — нижняя единица в $E^{n,(n-1)/2}$.

10. В $E^{n,(n-1)/2}$ нет псевдосвязок мощности не менее 3, а число двухэлементных псевдосвязок не превосходит n^6.

В § 7 будет показано, что при нечетных $n \to \infty$

$$|G^0(n)| \sim 2^{\binom{n}{(n+1)/2}} \exp\left\{\binom{n}{(n-1)/2}\left(2^{-(n+3)/2} + n2^{-n-5}\right) + \right.$$

$$\left. + \binom{n}{(n+3)/2}\left(2^{-(n+3)/2} + n^2 2^{-n-6}\right)\right\}, \qquad (5.1)$$

а в § 9—13 мы убедимся в том, что

$$|G(n)\setminus G^0(n)| = o(|G^0(n)|). \qquad (5.2)$$

Из (5.1) и (5.2) следует утверждение теоремы 2 при нечетных n.

При четных n обозначим через $G^0(n)$ множество функций f из $G(n)$, обладающих следующими свойствами.

1′. Все нижние единицы функции f располагаются только в слоях $E^{n,\,n/2}$, $E^{n,\,n/2+1}$, $E^{n,\,n/2+2}$.

2′. В $E^{n,\,n/2}$ имеется не менее $\left[\binom{n}{n/2}\Big/(n2^{n/2})\right]$ и не более $\left[2\binom{n}{n/2}2^{-n/2}\right]$ нижних единиц функции f.

3′. В $E^{n,\,n/2+2}$ имеется не менее $\left[\binom{n}{n/2+2}\Big/(n2^{n/2})\right]$ и не более $\left[2\binom{n}{n/2+2}2^{-n/2}\right]$ нижних единиц функции f.

4′. Множество нижних единиц из $E^{n,\,n/2}$ функции f распадается на одноэлементные и двухэлементные связки.

5′. Число двухэлементных связок в $E^{n,\,n/2}$ не превосходит n^4.

6′. Множество нижних единиц из $E^{n,\,n/2+2}$ функции f распадается на одноэлементные и двухэлементные связки.

7′. Число двухэлементных связок в $E^{n,\,n/2+2}$ не превосходит n^4.

8′. В $E^{n,\,n/2}$ нет псевдосвязок мощности не менее 3, а число двухэлементных псевдосвязок не превосходит n^6.

В § 8 будет показано, что при четных $n\to\infty$

$$|G^0(n)| \sim 2^{\binom{n}{n/2+1}} \exp\left\{\binom{n}{n/2}(2^{-n/2}+3n^2 2^{-n-5}+ n2^{-n-4}) + \binom{n}{n/2+2}(2^{-(n+4)/2}+n^2 2^{-n-7})\right\}. \qquad (5.3)$$

Из (5.3) следует справедливость теоремы 2 при четных n.

Функции из $G(n)$, которые входят в $G^0(n)$, назовем *типичными*, а остальные функции из $G(n)$ — *нетипичными*.

§ 6. УТВЕРЖДЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПРИ ДОКАЗАТЕЛЬСТВЕ (5.1) И (5.3)

При четных n пусть $K(n, r)$ — совокупность всех r-элементных подмножеств A из $E^{n,\,n/2}$ таких, что в A нет противоположных наборов, а $K_1(n, r)$ — совокупность элементов $A\in K(n, r)$ таких, что A распадается на одноэлементные связки.

Лемма 6.1. *При четных $n\to\infty$ и r таком, что $1\leqslant r\leqslant 2\binom{n}{n/2}2^{-n/2}$, выполняется соотношение*

$$|K_1(n, r)| \sim \frac{1}{r!}\binom{n}{n/2}^r \exp\left(-r^2n^2/8\binom{n}{n/2}\right).$$

Доказательство. Пусть $\vec{K}_1(n, r)$ — совокупность всех упорядоченных выборок $\vec{A}$ из $E^{n,\,n/2}$ таких, что $\vec{A}\in K_1(n, r)$ (две выборки, отличающиеся только порядком элементов, считаются различными). Любая выборка из $\vec{K}_1(n, r)$ может быть получена путем последовательного отбора вершин из $E^{n,\,n/2}$. В качестве $\tilde{\alpha}_1$ можно брать любую вершину из $E^{n,\,n/2}$ (имеется $\binom{n}{n/2}$ возможностей). В качестве $\tilde{\alpha}_2$ — любую вершину из $E^{n,\,n/2}$ такую, что $\rho(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2) \geqslant 4$ и $\tilde{\alpha}_2$ не является противоположной для $\tilde{\alpha}_1$. Таким образом, для выбора $\tilde{\alpha}_2$ имеется $\binom{n}{n/2} - 1/4n^2 - 2$ возможностей. Третью вершину $\tilde{\alpha}_3$ можно выбирать только из множества тех вершин, каждая из которых находится на расстоянии, не меньшем четырех как от $\tilde{\alpha}_1$, так и от $\tilde{\alpha}_2$, и отлична от $\tilde{\tilde{\alpha}}_1$, $\tilde{\tilde{\alpha}}_2$. Поэтому $\tilde{\alpha}_3$ может быть выбрана не менее, чем $\binom{n}{n/2} - \frac{2}{4}n^2 - 4$ способами. Продолжая этот процесс, получаем

$$|\vec{K}_1(n, r)| \geqslant \prod_{s=0}^{r-1}\left(\binom{n}{n/2} - \frac{1}{4}sn^2 - 2s\right) = \binom{n}{n/2}^r \prod_{s=0}^{r-1}\left(1 - s(n^2+8)/4\binom{n}{n/2}\right) \sim$$

$$\sim \left(\text{ибо } r \leqslant 2\binom{n}{n/2}2^{-n/2}\right) \sim \binom{n}{n/2}^r \exp\left(-r^2(n^2+8)/8\binom{n}{n/2}\right) \sim$$

$$\sim \binom{n}{n/2}^r \exp\left(-r^2n^2/8\binom{n}{n/2}\right).$$

Отсюда с использованием очевидного тождества $|K_1(n, r)| = |\vec{K}_1(n,r)|/r!$ имеем

$$|K_1(n, r)| \geqslant \frac{1}{r!}\binom{n}{n/2}^r \exp\left(-r^2n^2/8\binom{n}{n/2}\right)(1 - o(1)). \tag{6.1}$$

Нижняя оценка (6.1) может оказаться асимптотически неточной по той причине, что если уже отобрана последовательность $\vec{A}' = \tilde{\alpha}_1 \ldots \tilde{\alpha}_s$ длины $s < r$, то для выбора вершины $\tilde{\alpha}_{s+1}$ может быть не $\binom{n}{n/2} - \frac{s}{4}n^2 - 2s$, а больше возможностей. Легко видеть, что такая ситуация может возникнуть в следующих случаях:

(i) имеется по крайней мере одна вершина $\tilde{\alpha}$ такая, что $\tilde{\tilde{\alpha}} \in \vec{A}'$ (т. е. $\tilde{\alpha}$ является дополнительной для $\tilde{\tilde{\alpha}}$) и $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 2$ для некоторой вершины $\tilde{\beta} \in \vec{A}'$;

(ii) в $\vec{A}'$ имеется по крайней мере две вершины $\tilde{\alpha}_i$, $\tilde{\alpha}_j$ такие, что $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) = 4$.

Убедимся в том, что случаи (i) и (ii) асимптотически не влияют на правую часть из (6.1). Действительно, число вершин, о которых говорится в (i), не превосходит r. Рассмоторим (ii). Пусть $K_1^1(n, r)$ — совокупность элементов $A \in K_1(n, r)$, обладающих свойством: в A имеется три вершины $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ такие, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) = 4$. Покажем, что

$$|K_1^1(n, r)| = o(|K_1(n, r)|). \tag{6.2}$$

В самом деле, в условиях леммы

$$|\vec{K}_1^1(n, r)| \sim |\vec{K}_1(n, r-2)| \binom{n}{n/2}^2.$$

Поэтому

$$|K_1(n, r-2)| \sim |\vec{K}_1(n, r-2)|/(r-2)| \sim$$

$$\sim |\vec{K}_1(n, r)| \Big/ \left((r-2)!\binom{n}{n/2}^2\right). \tag{6.3}$$

Вместе с тем все элементы из $K_1^1(n, r)$ можно получить следующим способом. Сначала отбирается элемент $A' \in K_1(n, r-2)$. Затем отбираются две вершины, которые находятся на расстоянии 4 от некоторой фиксированной вершины из A' (имеется не более $\binom{\binom{n/2}{2}^2}{2} < n^8$ возможностей). Таким образом,

$$|K_1^1(n, r)| < |K_1(n, r-2)|\, rn^8. \tag{6.4}$$

Подставляя (6.3) в (6.4), получаем

$$|K_1^1(n, r)| < |\vec{K}_1(n, r)| \cdot rn^8 \Big/ \left((r-2)!\binom{n}{n/2}^2\right) <$$

$$< |K_1(n, r)|\, r^3 n^8 \Big/ \binom{n}{n/2}^2 = \left(\text{ибо } r \leqslant 2\binom{n}{n/2} 2^{-n/2}\right) = o(|K_1(n, r)|), \tag{6.5}$$

т. е. имеет место (6.2). Из (6.2) следует, что почти все элементы $A \in K_1(n, r)$ обладают следующим свойством: в A нет трех вершин $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$ таких, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) = 4$.

Пусть $K_1^*(n, r, v)$ — совокупность таких элементов $A \in K_1(n, r) \setminus K_1^1(n, r)$, что в A имеется точно v пар вершин $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1), \ldots, (\tilde{\alpha}_v, \tilde{\beta}_v)$, удовлетворяющих равенствам $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i) = 4$, $1 \leqslant i \leqslant v$. Очевидно, что все элементы из $K_1^*(n, r, v)$ можно получить следующим способом.

I. В $E^{n, n/2}$ отбираются v произвольных вершин $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v$. Имеется $\binom{\binom{n}{n/2}}{v}$ возможностей.

II. Каждой вершине $\tilde{\alpha}_i$, $1 \leqslant i \leqslant v$, сопоставляется вершина $\tilde{\beta}_i \in E^{n, n/2}$ такая, что $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i) = 4$. Имеется менее n^{4v} возможностей.

III. Среди остальных вершин из $E^{n, n/2}$ отбирается $r - 2v$ вершин. Имеется не более $\binom{\binom{n}{n/2} - 2v}{r - 2v}$ возможностей.

Таким образом,

$$|K_1^*(n, r, v)| < \binom{\binom{n}{n/2}}{v}\binom{\binom{n}{n/2} - 2v}{r - 2v} n^{4v}.$$

Поскольку

$$\binom{\binom{n}{n/2}}{v} < \binom{n}{n/2}^v \Big/ v!, \quad \binom{\binom{n}{n/2} - 2v}{r - 2v} = \binom{\binom{n}{n/2}}{r} \prod_{s=0}^{2v-1} \frac{r-s}{\binom{n}{n/2} - s} <$$

$$< \binom{\binom{n}{n/2}}{r} \left(r \Big/ \binom{n}{n/2}\right)^{2v},$$

то

$$|K_1^*(n, r, v)| < \binom{\binom{n}{n/2}}{r} (r^2 n^4)^v \left(\binom{n}{n/2}^v v!\right)^{-1}.$$

Поэтому при больших n и $r \leqslant 2 \binom{n}{n/2} 2^{-n/2}$

$$\sum_{v=n^4}^{r/2} |K_1^*(n, r, v)| < 2 \binom{\binom{n}{n/2}}{r} (r^2 n^4)^{n^4} \left(\binom{n}{n/2}^{n^4} (n^4)! \right)^{-1} =$$

$$= (\text{см. } (6.1)) = o(|K_1(n, r)|). \qquad (6.6)$$

Из (6.2), (6.5) и (6.6) следует, что почти во всех элементах $A \in K_1(n, r)$ содержатся не более, чем по n^4 пар вершин таких, что вершины одной пары находятся на расстоянии 4 друг от друга. Вместе с тем, если $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 4$ и $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E^{n, n/2}$, то в $E^{n, n/2}$ имеется точно четыре вершины $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\gamma}_4$, удовлетворяющие равенствам $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}_i) = \rho(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}_i) = 2$ при $i = 1, 2, 3, 4$. Таким образом,

$$|K_1(n, r)| < \frac{1}{r!} (1 + o(1)) \prod_{s=0}^{r-1} \left(\binom{n}{n/2} - 2s + r + 4n^4 - s(n^2 + 8)/4 \right) <$$

$$< (\text{см. } (6.1)) < \frac{1}{r!} \binom{n}{n/2}^r \exp\left(- r^2 n^2 / 8 \binom{n}{n/2} \right) (1 + o(1)). \qquad (6.7)$$

Из (6.1) и (6.7) следует утверждение леммы.

Пусть $K_2(n, r, s)$ — совокупность элементов $A \in K(n, r)$, обладающих следующими свойствами:

(а) A распадается на одноэлементные и двухэлементные связки;

(б) в A имеется точно s двухэлементных связок.

Лемма 6.2. *При четных $n \to \infty$ и r, s таких, что $1 \leqslant r \leqslant 2 \binom{n}{n/2} 2^{-n/2}$, $s \leqslant n^4$, справедливо соотношение*

$$|K_2(n, r, s)| \sim \frac{1}{(r - 2s)!\, s!} (n^2/8)^s \binom{n}{n/2}^{r-s} \exp\left(- r^2 n^2 / 8 \binom{n}{n/2} \right).$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что все элементы множества $K_2(n, r, s)$ можно получить следующим образом.

I. В $E^{n, n/2}$ отбираются $r - 2s$ вершин $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{r-2s}$ таких, что $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j) \geqslant 4$ при любых $1 \leqslant i \neq j \leqslant r - 2s$. Согласно лемме 6.1 число возможностей для выбора таких вершин асимптотически равно величине

$$\frac{1}{(r - 2s)!} \binom{n}{n/2}^{r-2s} \exp\left(- (r - 2s)^2 n^2 / 8 \binom{n}{n/2} \right) \sim (\text{ибо } s \leqslant n^4) \sim$$

$$\sim \frac{1}{(r - 2s)!} \binom{n}{n/2}^{r-2s} \exp\left(- r^2 n^2 / 8 \binom{n}{n/2} \right).$$

II. Среди оставшихся вершин в $E^{n, n/2}$ отбираются s пар вершин $(\tilde{\beta}_1, \tilde{\gamma}_1), \ldots, (\tilde{\beta}_s, \tilde{\gamma}_s)$ таких, что $\rho(\tilde{\beta}_i, \tilde{\gamma}_i) = 2$ при $1 \leqslant i \leqslant s$, $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j) \geqslant 2$ и $\rho(\tilde{\alpha}_i, \gamma_j) > 2$ при $1 < i \leqslant r - 2s$, $1 \leqslant j \leqslant s$, и чтобы не было связок мощности не менее 3. Нетрудно видеть, что число возможностей для выбора s таких пар асимптотически равно

$$\frac{1}{s!} \binom{n}{n/2}^s (n^2/8)^s.$$

Из I, II следует утверждение леммы.

Пусть $K_3(n, r, s, w)$ — совокупность элементов $A \in K_2(n, r, s)$, обладающих следующими свойствами:

(а) в A нет псевдосвязок, содержащих не менее, чем по три вершины;

(б) в A имеется точно w двухэлементных псевдосвязок, не являющихся связками.

Лемма 6.3. *При четных* $n \to \infty$ *и* r, s *таких, что* $r \leqslant 2\binom{n}{n/2} 2^{-n/2}$, $s \leqslant n^4$, *справедливо соотношение*

$$\sum_{w=0}^{n^6} |K_3(n, r, s, w)| \sim |K_2(n, r, s)|.$$

Доказательство. Все элементы из $K_3(n, r, s, w)$ можно получить следующим способом.

I. В $E^{n, n/2}$ отбирается множество A_1 такое, что $A_1 \in K_2(n, r-2w, s)$. Из леммы 6.2 следует, что при больших n число возможностей для выбора A_1 не превосходит

$$\frac{2}{(r-2s-2w)!\, s!} (n^2/8)^s \binom{n}{n/2}^{r-s-2w} \exp\left(-(r-2w)^2 n^2/8 \binom{n}{n/2}\right).$$

II. Среди остальных вершин в $E^{n, n/2}$ отбираются w псевдосвязок $(\tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1), \ldots, (\tilde{\alpha}_w, \tilde{\beta}_w)$ таких, что $\rho(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i) \leqslant 4$, $1 \leqslant i \leqslant w$. Нетрудно видеть, что число возможностей для выбора таких псевдосвязок меньше $\frac{1}{w!}\binom{n}{n/2}^w n^{4w}$.

Таким образом,

$$|K_3(n, r, s, w)| < \frac{2}{(r-2s-2w)!\, s!\, w!} (n^2/8)^s \times$$

$$\times \binom{n}{n/2}^{r-s-w} n^{4w} \exp\left(-(r-2w)^2 n^2/8 \binom{n}{n/2}\right) < (\text{см. лемму } 6.2) <$$

$$< |K_2(n, r, s)| \exp\left(\left(r^2n^2 - (r-2w)^2 \;\; n^2\right)/8 \binom{n}{n/2}\right) \times$$

$$\times 2r^{2w} n^{4m} \Big| \left((w!) \binom{n}{n/2}^w\right).$$

В свою очередь,

$$\exp\left((r^2n^2 - (r-2w)^2 n^2)/8 \binom{n}{n/2}\right) = \exp\left((rw - w^2) n^2/2 \binom{n}{n/2}\right) <$$

$$< \exp\left(rwn^2 \Big| \binom{n}{n/2}\right) < 2^{w-1}.$$

Поэтому при больших n

$$\sum_{w \geqslant n^6} |K_3(n, r, s, w)| < |K_2(n, r, s)| \sum_{w \geqslant n^6} \frac{1}{w!} \left(2r^2n^4 \Big| \binom{n}{n/2}\right)^w <$$

$$< \left(\text{ибо } r \leqslant 2\binom{n}{n/2} 2^{-n/2}\right) < |K_2(n, r, s)| \sum_{w \geqslant n^6} n^{4w}/w! = o(|K_2(n, r, s)|). \tag{6.8}$$

Пусть $K_2^1(n, r, s)$ — совокупность элементов $A \in K_2(n, r, s)$ таких, что в A имеется по крайней мере одна псевдосвязка мощности не менее 3. Из (6.8) следует, что для завершения доказательства леммы остается убедиться в том, что

$$|K_2^1(n, r, s)| = o(|K_2(n, r, s)|). \tag{6.9}$$

Для этого рассмотрим следующий способ получения элементов из $K_2^1(n, r, s)$.

I. В $E^{n,\,n/2}$ отбирается трехэлементная псевдосвязка. Имеется менее $\binom{n}{n/2} n^8$ возможностей.

II. Среди оставшихся вершин в $E^{n,\,n/2}$ отбираются $r-3$ вершины такие, чтобы во множестве всех r отобранных вершин было точно s двухэлементных связок. Пользуясь леммой 6.2, нетрудно видеть, что число возможностей для выбора таких вершин асимптотически равно

$$\frac{1}{(r-2s-3)!\,s!}(n^2/8)^s \binom{n}{n/2}^{r-s-3} \exp\left(-r^2n^2/8\binom{n}{n/2}\right).$$

Отсюда следует справедливость (6.9). Лемма доказана.

Теперь при нечетных n через $K(n, r)$ обозначим совокупность всех r-элементных подмножеств $A \subset E^{n,\,(n-1)/2}$ таких, что в любых двух наборах из A содержится по крайней мере по одной общей единичной компоненте, а $K_1(n, r)$ — совокупность таких $A \in K(n, r)$, которые распадаются на одноэлементные связки и в A имеется не более n^6 вершин $\tilde{\alpha}$ таких, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant 3$, где $\tilde{\beta}$ — некоторая (зависящая от $\tilde{\alpha}$) вершина из A.

Лемма 6.4. *При нечетных* $n \to \infty$ *и* r *таком, что* $1 \leqslant r \leqslant 2\binom{n}{(n-1)/2} 2^{-n/2}$, *выполняется соотношение*

$$|K_1(n, r)| \sim \frac{1}{r!}\binom{n}{(n-1)/2}^r \exp\left(-r^2(n^2+2n)/8\binom{n}{(n-1)/2}\right).$$

Доказательство леммы 6.4 аналогично доказательству леммы 6.1. Отличие состоит лишь в том, что здесь при выборе $(s+1)$-й вершины, $s<r$, имеется не менее $\binom{n}{(n-1)/2} - \frac{1}{4}s(n^2-1) - \frac{1}{2}s(n+1) - s$ возможностей вместо $\binom{n}{n/2} - \frac{1}{4}sn^2 - 2s$ при четных n.

Пусть $K_2(n, r, s)$ — совокупность элементов $A \in K(n, r)$ таких, что A распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, число двухэлементных связок равно s, и в A имеется не более n^6 вершин $\tilde{\alpha}$ таких, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant 3$, где $\tilde{\beta}$ — некоторая вершина из A.

Лемма 6.5. *При нечетных* $n \to \infty$ *и* r, s *таких, что* $1 \leqslant r \leqslant 2 \times \binom{n}{(n-1)/2} 2^{-n/2}$, $s \leqslant n^4$, *справедливо соотношение*

$$|K_2(n, r, s)| \sim \frac{1}{(r-2s)!\,s!}(n^2/8)^s \binom{n}{(n-1)/2}^{r-s} \times$$
$$\times \exp\left(-r^2(n^2+2n)/8\binom{n}{(n-1)/2}\right).$$

Доказательство леммы 6.5 аналогично доказательству леммы 6.2.

Пусть $K_3(n, r, s, w)$ — совокупность элементов $A \in K_2(n, r, s)$, обладающих следующими свойствами:

(а) в A нет псевдосвязок, содержащих не менее, чем по три вершины;

(б) в A имеется точно w двухэлементных псевдосвязок, не являющихся связками.

Лемма 6.6. *При нечетных* $n\to\infty$ *и* r, s *таких, что* $1\leqslant r\leqslant 2\times\times\binom{n}{(n-1)/2}2^{-n/2}$, $s\leqslant n^4$, *справедливо соотношение*

$$\sum_{w=0}^{n^6}|K_3(n, r, s, w)|\sim|K_2(n, r, s)|.$$

Доказательство леммы 6.6 аналогично доказательству леммы 6.3.

§ 7. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СООТНОШЕНИЯ (5.1)

В данном параграфе полагаем $m=\binom{n}{(n-1)/2}$ и $p=\binom{n}{(n+3)/2}$. При нечетных n обозначим через $G(n, r, s, v, w, z)$ множество функций $f\in G^0(n)$, обладающих следующими свойствами:

(а) число нижних единиц в $E^{n,(n-1)/2}$ функции f равно r;

(б) среди нижних единиц в $E^{n,(n-1)/2}$ имеется точно $2s$ единиц, принадлежащих двухэлементным связкам;

(в) число нижних единиц в $E^{n,(n+3)/2}$ функции f равно v;

(г) среди нижних единиц в $E^{n,(n+3)/2}$ имеется точно $2w$ единиц, принадлежащих двухэлементным связкам;

(д) в $E^{n,(n+3)/2}$ содержатся z нижних единиц $\tilde{\alpha}$ таких, что в $E^{n,(n+1)/2}$ имеется вершина $\tilde{\beta}<\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\tilde{\beta}}$ является нижней единицей в $E^{n,(n-1)/2}$.

Тогда

$$|G^0(n)|=\sum_{r=[m/n2^{n/2}]}^{[2m2^{-n/2}]}\ \sum_{s=0}^{n^4}\ \sum_{v=[p/n2^{n/2}]}^{[2p2^{-n/2}]}\ \sum_{w=0}^{n^4}\ \sum_{z=0}^{n^4}|G(n, r, s, v, w, z)|. \qquad (7.1)$$

Любая функция $f\in G(n, r, s, v, w, z)$ может быть получена следующим способом.

I. В $E^{n,(n-1)/2}$ отбираются r вершин, обладающих свойствами (а), (б) из определения множества $G(n, r, s, v, w, z)$. Согласно леммам 6.5 и 6.6, число таких возможностей асимптотически равно величине

$$\frac{m^{r-s}n^{2s}}{(r-2s)!\,s!\,8^s}\exp(-r^2(n^2+2n)/8m).$$

Отобранные вершины объявляются нижними единицами функции f.

II. Обозначим через A_1 совокупность тех вершин из $E^{n,(n+3)/2}$, каждая из которых входит в 1-тень множества вершин из $E^{n,(n+1)/2}$, являющихся дополнительными для нижних единиц из $E^{n,(n-1)/2}$. Через A_2 обозначим совокупность вершин из $E^{n,(n+3)/2}$, каждая из которых входит в 2-тень множества нижних единиц из $E^{n,(n-1)/2}$. Среди вершин из $A_1\backslash A_2$ отбираются z вершин, а среди вершин из $E^{n,(n+3)/2}\backslash(A_1\cup A_2)-v-z$ вершин, обладающих свойствами (в) — (д) из определения множества $G(n, r, s, v, w, z)$. Поскольку $z\leqslant n^4$,

$$(r-s)(n-1)/2\leqslant|A_1|\leqslant r(n-1)/2,$$

$$(r-s-n^6)\binom{(n+1)/2}{2}\leqslant|A_2|\leqslant r\binom{(n+1)/2}{2},$$

то, пользуясь леммами 15.4, 15.7 [7] и п. 4 определения множества $G^0(n)$, при нечетном n получаем, что число способов выбора нижних единиц рассматриваемого вида в $E^{n,(n+3)/2}$ асимптотически равно величине

$$\frac{p^{v-w-z}n^{2w}}{(v-2w-z)!\,w!\,8^w}\binom{|A_1|}{z}\exp(-(v-z)^2(n^2-9)+(v-z)(|A_1|+|A_2|))/8p)\sim$$

$$\sim\frac{p^{v-w-z}n^{2w}}{(v-2w-z)!\,w!\,8^w z!}(r(n-1)/2)^z\exp(-(v^2n^2+rvn^2+4rvn)/8p).$$

III. Если вершина из $E^{n,(n+1)/2}$ не следует ни за одной нижней единицей из $E^{n,(n-1)/2}$, не является дополнительной для таких нижних единиц и не предшествует ни одной нижней единице из $E^{n,(n+3)/2}$, то в этой вершине f определяется произвольно. Поскольку число вершин из $E^{n,(n+1)/2}$, следующих хотя бы за одной нижней единицей из $E^{n,(n-1)/2}$, равно $(1/2)(n+1)r-s$, число вершин из $E^{n,(n+1)/2}$, являющихся дополнительными для нижних единиц из $E^{n,(n-1)/2}$, равно r, а число вершин из $E^{n,(n+1)/2}$, каждая из которых предшествует хотя бы одной нижней единице из $E^{n,(n+3)/2}$, и не является дополнительной для нижних единиц из $E^{n,(n-1)/2}$, равно $(1/2)(n+3)v-w-z$, то число возможностей для определения f в вершинах из $E^{n,(n+1)/2}$, в точности равно величине

$$2^{\binom{n}{(n+1)/2}-\frac{1}{2}(n+1)r-\frac{1}{2}(n+3)v-r+s+w+z}=2^{\binom{n}{(n+1)/2}-\frac{1}{2}(n+3)(r+v)+s+w+z}.$$

Из I — III получаем

$$|G(n,r,s,v,w,z)|\sim\frac{m^{r-s}p^{v-w-z}n^{2s+2w}}{(r-2s)!\,s!\,(v-2w-z)!\,w!\,z!\,8^{s+w}}(r(n-1)/2)^z\times$$
$$\times 2^{\binom{n}{(n+1)/2}-\frac{1}{2}(n+3)(r+v)+s+w+z}\exp\left(-\frac{r^2(n^2+2n)}{8m}-\frac{v^2n^2+rvn^2+4rvn}{8p}\right). \quad (7.2)$$

Воспользовавшись (7.1) и (7.2), имеем

$$|G^0(n)|\sim 2^{\binom{n}{(n+1)/2}}\sum_{r=[m/n2^{n/2}]}^{[2m2^{-n/2}]}\sum_{s=0}^{n^4}\frac{m^{r-s}n^{2s}}{(r-2s)!\,s!\,4^s\,2^{r(n+3)/2}}\times$$
$$\times\exp(-r^2(n^2+2n)/8m)\times\sum_{v=[p/n2^{n/2}]}^{[2p2^{-n/2}]}\sum_{w=0}^{n^4}\sum_{z=0}^{n^4}\varphi(n,r,v,w,z), \quad (7.3)$$

где

$$\varphi(n,r,v,w,z)=\frac{p^{v-w-z}n^{2w}(r(n-1))^z}{(v-2w-z)!\,w!\,z!\,4^w 2^{v(n+3)/2}}\times$$
$$\times\exp(-(v^2n^2+rvn^2+4rvn)/8p). \quad (7.4)$$

Поскольку $(v-2w-z)!\sim v!v^{-2w-z}$ при $w,z\leqslant n^4$, то

$$\sum_{z=0}^{n^4}\varphi(n,r,v,w,z)\sim\frac{p^{v-w}n^{2w}v^{2w}}{v!\,w!\,4^w 2^{v(n+3)/2}}\exp(-(v^2n^2+rvn^2+4rvn)/8p)\times$$
$$\times\sum_{z=0}^{n^4}\left(rv(n-1)^z/(z!\,p^z)\right)\sim\frac{p^{v-w}n^{2w}v^{2w}}{v!\,w!\,4^w 2^{v(n+3)/2}}\exp(-(v^2n^2+rvn^2-$$
$$-4rvn)/8p)\underset{\text{def}}{=}\varphi(n,r,v,w). \quad (7.5)$$

Пусть $v=v_1-t$, где

$$v_1=[p2^{-(n+3)/2}], \quad (7.6)$$

а $t\in[0,\ n\sqrt{v_1}]$. Тогда в силу (7.5)

$$\varphi(n,r,v,w)=\varphi(n,r,v_1,w)\prod_{i=0}^{t-1}(v_1-i)\,2^{t(n+3)/2}p^{-t}\exp((2v_1t-t^2)n^2+$$
$$+rtn^2-4rtn)/8p)\sim\varphi(n,r,v_1,w)\,2^{t(n+3)/2}p^{-t}\prod_{i=0}^{t-1}(v_1-i)\sim$$
$$\sim(\text{см. (7.6)})\sim\varphi(n,r,v_1,w)\exp(-t^2/2v_1). \quad (7.7)$$

Аналогично, если $v=v_1+t$, где $t\in[0,\ n\sqrt{v_1}]$, то

$$\varphi(n,r,v,w)\sim\varphi(n,r,v_1,w)\exp(-t^2/2v_1). \quad (7.8)$$

Поскольку функция $\varphi(n, r, v, w)$ по переменной v возрастает при $v \leqslant \leqslant v_1 - n\sqrt{v_1}$ и убывает при $v \geqslant v_1 + n\sqrt{v_1}$, то, пользуясь (7.5), (7.7) и (7.8), нетрудно видеть, что

$$\sum_{v=[p/n2^{n/2}]}^{[2p2^{-n/2}]} \sum_{w=0}^{n^4} \sum_{z=0}^{n^4} \varphi(n, r, v, w, z) \sim \sum_{v=[v_1-n\sqrt{v_1}]}^{[v_1+n\sqrt{v_1}]} \sum_{w=0}^{n^4} \varphi(n, r, v, w) \sim$$

$$\sim \sum_{v=[v_1-n\sqrt{v_1}]}^{[v_1+n\sqrt{v_1}]} \frac{1}{v!} p^v 2^{-v(n+3)/2} \exp(-(v^2n^2+rvn^2-4rvn)/8p) \sum_{w=0}^{n^4} \frac{n^{2w}v^{2w}}{w!\, p^w 4^w} \sim$$

$$\sim \sum_{v=[v_1-n\sqrt{v_1}]}^{[v_1+n\sqrt{v_1}]} \frac{1}{v!} p^v 2^{-v(n+3)/2} \exp\left(-\frac{v^2n^2+rvn^2-4rvn}{8p} + \frac{n^2v^2}{4p}\right). \quad (7.9)$$

Так как при $v_1 - n\sqrt{v_1} \leqslant v \leqslant v_1 + n\sqrt{v_1}$

$$\exp\left(-\frac{v^2n^2+rvn^2-4rvn}{8p} + \frac{n^2v^2}{4p}\right) \sim \exp\left((v_1^2n^2 - rv_1n^2 + 4rv_1n)/8p\right) \sim$$

$$\sim \exp\left(n^2p2^{-n-6} - rn^2 2^{-(n+9)/2} + rn2^{-(n+5)/2}\right),$$

$$\sum_{v=[v_1-n\sqrt{v_1}]}^{[v_1+n\sqrt{v_1}]} \frac{1}{v!} p^v 2^{-v(n+3)/2} \sim \exp\left(p2^{-(n+3)/2}\right),$$

то

$$\sum_{v=[p/n2^{n/2}]}^{[2p2^{-n/2}]} \sum_{w=0}^{n^4} \sum_{z=0}^{n^4} \varphi(n, r, v, w, z) \sim$$

$$\sim \exp\left(p2^{-(n+3)/2} + n^2p2^{-n-6} - rn^2 2^{-(n+9)/2} + rn2^{-(n+5)/2}\right). \quad (7.10)$$

Подставляя (7.10) в (7.3), получаем

$$|G^0(n)| \sim 2^{\binom{n}{(n+1)/2}} \exp\left(p2^{-(n+3)/2} + n^2p2^{-n-6}\right) \sum_{r=[m/n2^{n/2}]}^{[2m2^{-n/2}]} \sum_{s=0}^{n^4} \psi(n, r, s), \quad (7.11)$$

где

$$\psi(n, r, s) = \frac{m^{r-s}n^{2s}}{(r-2s)!\, s!\, 4^s 2^{r(n+3)/2}} \exp\left(-r^2(n^2+2n)/8m - rn^2 2^{-(n+9)/2} + rn2^{-(n+5)/2}\right). \quad (7.12)$$

Как и при доказательстве (7.9), убеждаемся в том, что

$$\sum_{r=[m/n2^{n/2}]}^{[2m2^{-n/2}]} \sum_{s=0}^{n^4} \psi(n, r, s) \sim \sum_{r=[r_1-n\sqrt{r_1}]}^{[r_1+n\sqrt{r_1}]} \sum_{s=0}^{n^4} \psi(n, r, s), \quad (7.13)$$

где $r_1 = m2^{-(n+3)/2}$. Далее,

$$\sum_{r=[r_1-n\sqrt{r_1}]}^{[r_1+n\sqrt{r_1}]} \sum_{s=0}^{n^4} \psi(n, r, s) \sim \sum_{r=[r_1-n\sqrt{r_1}]}^{[r_1+n\sqrt{r_1}]} \frac{1}{r!} m^r 2^{-r(n+3)/2} \exp\left(-r^2(n^2+2n)/8m - \right.$$

$$\left. - rn^2 2^{-(n+9)/2} + rn2^{-(n+5)/2}\right) \sum_{s=0}^{n^4} \frac{r^{2s}n^{2s}}{s!\, m^s 4^s} \sim \sum_{r=[r_1-n\sqrt{r_1}]}^{[r_1+n\sqrt{r_1}]} \frac{1}{r!} m^r 2^{-r(n+3)/2} \times$$

$$\times \exp\left(-r^2(n^2+2n)/8m - rn^2 2^{-(n+9)/2} + rn2^{-(n+5)/2} + \frac{r^2n^2}{4m}\right). \quad (7.14)$$

Наконец, при $r_1 - n\sqrt{r_1} \leqslant r \leqslant r_1 + n\sqrt{r_1}$ имеем

$$\exp\left(-r^2(n^2+2n)/8m - rn^2 2^{-(n+9)/2} + rn2^{-(n+5)/2} + r^2n^2/4m\right) \sim$$
$$\sim \exp\left(-r_1^2(n^2+2n)/8m - r_1 n^2 2^{-(n+9)/2} + r_1 n 2^{-(n+5)/2} + r_1^2 n^2/4m\right) \sim$$
$$\sim \exp\left(mn2^{-n-5}\right), \tag{7.15}$$

$$\sum_{r=[r_1 - n\sqrt{r_1}]}^{[r_1+n\sqrt{r_1}]} \frac{1}{r!} m^r 2^{-r(n+3)/2} \sim \exp\left(m2^{-(n+3)/2}\right). \tag{7.16}$$

Подставляя (7.15) и (7.16) в (7.14) и пользуясь (7.13), получаем

$$\sum_{r=[m/n2^{n/2}]}^{[2m2^{-n/2}]} \sum_{s=0}^{n^4} \psi(n, r, s) \sim \exp\left(m2^{-(n+3)/2} + mn2^{-n-5}\right). \tag{7.17}$$

Из (7.11) и (7.17) следует (5.1).

§ 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СООТНОШЕНИЯ (5.3)

В настоящем параграфе полагаем $m = \binom{n}{n/2}$ и $p = \binom{n}{n/2+2}$. При четных n обозначим через $G(n, r, s, v, w)$ множество функций $f \in G^0(n)$, обладающих следующими свойствами:

(а) число нижних единиц в $E^{n,\,n/2}$ функции f равно r;

(б) среди нижних единиц в $E^{n,\,n/2}$ имеется точно $2s$ единиц, которые принадлежат двухэлементным связкам;

(в) число нижних единиц в $E^{n,\,n/2+2}$ функции f равно v;

(г) среди нижних единиц в $E^{n,\,n/2+2}$ имеется точно $2w$ единиц, которые принадлежат двухэлементным связкам.

Тогда

$$|G^0(n)| = \sum_{r=[m/n2^{n/2}]}^{[2m2^{-n/2}]} \sum_{s=0}^{n^4} \sum_{v=[p/n2^{n/2}]}^{[2p2^{-n/2}]} \sum_{w=0}^{n^4} |G(n, r, s, v, w)|. \tag{8.1}$$

Любая функция $f \in G(n, r, s, v, w)$ может быть получена следующим способом.

I. В $E^{n,\,n/2}$ отбираются r вершин, обладающих свойствами (а), (б). Согласно леммам 6.2 и 6.3 число таких возможностей асимптотически равно величине $m^{r-s}n^{2s}\exp(-r^2n^2/8m)/((r-2s)!s!8^s)$. Отобранные вершины объявляются нижними единицами функции f.

II. Среди вершин из $E^{n,\,n/2+2}$, каждая из которых не входит в 2-тень множества нижних единиц из $E^{n,\,n/2}$, отбираются v вершин, обладающих свойствами (в), (г). Нетрудно видеть, что 2-тень множества нижних единиц из $E^{n,\,n/2}$ состоит не более, чем из $r\binom{n/2}{2}$, и не менее, чем из $(r-s-n^6)\binom{n/2}{2}$ вершин. А поскольку $s \leqslant n^4$, то, привлекая леммы 15.4, 15.7 [7], получаем, что число возможностей для выбора v нижних единиц из $E^{n,\,n/2+2}$ рассматриваемого вида асимптотически равно величине

$$\frac{p^{v-w}n^{2w}}{(v-2w)!\,w!\,8^w} \exp\left(-(v^2(n^2-16) + rvn(n-2))/8p\right).$$

Отобранные вершины объявляются нижними единицами функции f.

III. Если вершина из $E^{n,\,n/2+1}$ не следует ни за одной нижней единицей из $E^{n,\,n/2}$ и не предшествует ни одной нижней единице из $E^{n,\,n/2+2}$ (относительно порядка $\prec$), то f определяется в этой вершине произвольно. Поскольку число вершин из $E^{n,\,n/2+1}$, каждая из которых следует хотя бы за одной нижней единицей из $E^{n,n/2}$, равно $(1/2)nr-s$, а число вершин из $E^{n,n/2+1}$, каждая из которых предшествует хотя бы одной нижней единице из $E^{n,n/2+2}$, равно $v(n/2+2)-w$, то число возможностей для определения f в вершинах из $E^{n,n/2+1}$ в точности равно величине $2^{\binom{n}{n/2+1}-\frac{n}{2}(r+v)-2v+s+w}$.

Из I — III получаем

$$|G(n, r, s, v, w)| \sim \frac{m^{r-s}p^{v-w}n^{2s+2w}}{(r-2s)!\,s!\,(v-2w)!\,w!\,8^{s+w}}\,2^{\binom{n}{n/2+1}-\frac{1}{2}n(r+v)-2v+s+w}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{r^2n^2}{8m}-\frac{v^2(n^2-16)+rvn(n-2)}{8p}\right). \tag{8.2}$$

В силу (8.1) и (8.2)

$$|G^0(n)| \sim 2^{\binom{n}{n/2+1}}\sum_{r=[m/n2^{n/2}]}^{[2m2^{-n/2}]}\ \sum_{s=0}^{n^4}\frac{m^{r-s}n^{2s}2^{-nr/2}}{(r-2s)!\,s!\,4^s}\exp(-r^2n^2/8m)\times$$
$$\times\sum_{v=[p/n2^{n/2}]}^{[2p2^{-n/2}]}\ \sum_{w=0}^{n^4}\varphi(n, r, v, w), \tag{8.3}$$

где

$$\varphi(n, r, v, w)=\frac{p^{v-w}n^{2w}}{(v-2w)!\,w!\,4^w2^{v(n/2+2)}}\exp\left(-\frac{v^2(n^2-16)+rvn(n-2)}{8p}\right). \tag{8.4}$$

Пусть $v=v_1-t$, где

$$v_1=[p/2^{n/2+2}], \tag{8.5}$$

а $t\in[0, n\sqrt{v_1}]$. Тогда, пользуясь (8.4), получаем

$$\varphi(n, r, v, w)=\varphi(n, r, v_1, w)\prod_{i=0}^{t-1}(v_1-2w-i)\,2^{t(n/2+2)}p^{-t}\times$$
$$\times\exp(((2v_1t-t^2)(n^2-16)+rtn(n-2))/8p). \tag{8.6}$$

В свою очередь, при любых $w\in[0, n^4]$ и $t\in[0, n\sqrt{v_1}]$ справедливо соотношение

$$\prod_{i=0}^{t-1}(v_1-2w-i)\sim v_1^t(1-t/2v_1)^t\sim v_1^t\exp(-t^2/2v_1).$$

Поэтому при таких v и w имеем

$$\varphi(n, r, v, w)\sim\varphi(n, r, v_1, w)\,2^{t(n/2+2)}v_1^tp^{-t}\exp(((2v_1t-t^2)(n^2-16)+$$
$$+rtn(n-2))/8p-t^2/2v_1)\sim\varphi(n, r, v_1, w)\exp(-t^2/2v_1). \tag{8.7}$$

Аналогично, если $v=v_1+t$, где v_1 задается (8.5), а $t\in[0, n\sqrt{v_1}]$, то

$$\varphi(n, r, v, w)\sim\varphi(n, r, v_1, w)\exp(-t^2/2v_1).$$

Поскольку функция $\varphi(n, r, v, w)$ по переменной v возрастает при $v<v_1-n\sqrt{v_1}$ и убывает при $v>v_1+n\sqrt{v_1}$, то, пользуясь (8.4) и последней асимптотикой, нетрудно видеть, что

$$\sum_{v=[p/n2^{n/2}]}^{[2p2^{-n/2}]}\ \sum_{w=0}^{n^4}\varphi(n, r, v, w)\sim\sum_{v=[v_1-n\sqrt{v_1}]}^{[v_1+n\sqrt{v_1}]}\ \sum_{w=0}^{n^4}\varphi(n, r, v, w)=$$
$$=\sum_{v=[v_1-n\sqrt{v_1}]}^{[v_1+n\sqrt{v_1}]}p^v2^{-v(n/2+2)}\exp(-(v^2(n^2-16)+rvn(n-2))/8p)\times$$
$$\times\sum_{w=0}^{n^4}n^{2w}/((v-2w)!\,w!\,p^w4^w). \tag{8.8}$$

Так как при $w \in [0, n^4]$ и рассматриваемом v имеем $(v-2w)! \sim v! v^{-2w}$, то

$$\sum_{w=0}^{n^4} \frac{n^{2w}}{(v-2w)!\, w!\, p^w 4^w} \sim \frac{1}{v!} \sum_{w=0}^{n^4} \frac{n^{2w} v^{2w}}{w!\, p^w 4^w} \sim$$

$$\sim \frac{1}{v!} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{n^{2w} v^{2w}}{w!\, p^w 4^w} = \frac{1}{v!} \exp\left(\frac{1}{4} n^2 v^2 p^{-1}\right). \qquad (8.9)$$

Из (8.8) и (8.9) следует, что

$$\sum_{v=[p/n2^{n/2}]}^{[2p2^{-n/2}]} \sum_{w=0}^{n^4} \varphi(n, r, v, w) \sim \sum_{v=[v_1 - n\sqrt{v_1}]}^{[v_1 + n\sqrt{v_1}]} \frac{1}{v!} p^v 2^{-v(n/2+2)} \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{v^2(n^2-16) + rvn(n-2)}{8p} + \frac{1}{4} n^2 v^2 p^{-1}\right).$$

Поскольку при $v_1 - n\sqrt{v_1} \leqslant v \leqslant v_1 + n\sqrt{v_1}$

$$\exp\left(-\frac{v^2(n^2-16) + rvn(n-2)}{8p} + \frac{1}{4} n^2 v^2 p^{-1}\right) \sim$$

$$\sim \exp\left(-\frac{v_1^2 n^2 + rv_1 n(n-2)}{8p} + \frac{1}{4} n^2 v_1^2 p^{-1}\right) \sim$$

$$\sim \exp\left(-pn^2 2^{-n-7} - rn(n-2)\, 2^{-n/2-5} + pn^2 2^{-n-6}\right) =$$

$$= \exp\left(pn^2 2^{-n-7} - rn(n-2)\, 2^{-n/2-5}\right),$$

$$\sum_{v=[v_1 - n\sqrt{v_1}]}^{[v_1 + n\sqrt{v_1}]} \frac{1}{v!} p^v 2^{-v(n/2+2)} \sim \exp\left(p 2^{-n/2-2}\right),$$

то

$$\sum_{v=[p/n2^{n/2}]}^{[2p2^{-n/2}]} \sum_{w=0}^{n^4} \varphi(n, r, v, w) \sim$$

$$\sim \exp\left(pn^2 2^{-n-7} - rn(n-2)\, 2^{-n/2-5} + p 2^{-n/2-2}\right). \qquad (8.10)$$

Подставляя (8.10) в (8.3), получаем

$$|G^0(n)| \sim 2^{\binom{n}{n/2+1}} \exp\left(pn^2 2^{-n-7} + \right.$$

$$\left. + p 2^{-n/2-2}\right) \sum_{r=[m/n2^{n/2}]}^{[2m2^{-n/2}]} \sum_{s=0}^{n^4} \psi(n, r, s), \qquad (8.11)$$

где

$$\psi(n, r, s) = \frac{m^{r-s} n^{2s}}{(r-2s)!\, s!\, 4^s 2^{nr/2}} \exp\left(-\frac{r^2 n^2}{8m} - \frac{rn(n-2)}{2^{n/2+5}}\right). \qquad (8.12)$$

Как и при доказательстве (8.8), убеждаемся в том, что

$$\sum_{r=[m/n2^{n/2}]}^{[2m2^{-n/2}]} \sum_{s=0}^{n^4} \psi(n, r, s) \sim \sum_{r=[r_1 - n\sqrt{r_1}]}^{[r_1 + n\sqrt{r_1}]} \sum_{s=0}^{n^4} \psi(n, r, s), \qquad (8.13)$$

где

$$r_1 = [m 2^{-n/2}]. \qquad (8.14)$$

Далее,

$$\sum_{r=[r_1-n\sqrt{r_1}]}^{[r_1+n\sqrt{r_1}]}\sum_{s=0}^{n^4}\psi(n,r,s)\sim$$

$$\sim\sum_{r=[r_1-n\sqrt{r_1}]}^{[r_1+n\sqrt{r_1}]}\frac{m^r}{r!\,2^{nr/2}}\exp\left(-\frac{r^2n^2}{8m}-\frac{rn(n-2)}{2^{n/2+5}}\right)\sum_{s=0}^{n^4}\left((rn)^{2s}/(s!\,m^s4^s)\right)\sim$$

$$\sim\sum_{r=[r_1-n\sqrt{r_1}]}^{[r_1+n\sqrt{r_1}]}\frac{m^r}{r!\,2^{nr/2}}\exp\left(-\frac{r^2n^2}{8m}-\frac{rn(n-2)}{2^{n/2+5}}+\frac{r^2n^2}{4m}\right). \tag{8.15}$$

Наконец, при $r_1-n\sqrt{r_1}\leqslant r\leqslant r_1+n\sqrt{r_1}$ имеем

$$\exp\left(-\frac{r^2n^2}{8m}-\frac{rn(n-2)}{2^{n/2+5}}+\frac{r^2n^2}{4m}\right)\sim$$

$\sim$ (полагаем $r=r_1$, где r_1 берется из (8.14), и делаем тождественные преобразования) $\sim$

$$\sim\exp(3mn^2 2^{-n-5}+mn2^{-n-4}), \tag{8.16}$$

$$\sum_{r=[r_1-n\sqrt{r_1}]}^{[r_1+n\sqrt{r_1}]} m^r/\left(r!\,2^{nr/2}\right)\sim\exp\left(m2^{-n/2}\right). \tag{8.17}$$

Подставляя (8.16) и (8.17) в (8.15), а (8.15) — в (8.13), получаем

$$\sum_{r=[m/n2^{n/2}]}^{[2m2^{-n/2}]}\sum_{s=0}^{n^4}\psi(n,r,s)\sim\exp\left(m2^{-n/2}+3mn^2 2^{-n-5}+mn2^{-n-4}\right). \tag{8.18}$$

Из (8.11), (8.12) и (8.18) следует (5.3).

§ 9. РАЗБИЕНИЕ МНОЖЕСТВА $G(n)$ НА КЛАССЫ

Нижнюю единицу α монотонной булевой функции f назовем *минимальной*, если в любой другой нижней единице функции f содержится не менее единичных компонент, нежели в $\tilde{\alpha}$.

Пусть $G(n, k)$ — множество таких функций из $G(n)$, у которых минимальные единицы расположены в $E^{n,k}$. Поскольку множества $G(n, k)$ при $k=0, 1, 2, \ldots, n$ не пересекаются, а $G(n, 0)$ и $G(n, n)$ пусты, то

$$|G(n)|=\sum_{k=1}^{n-1}|G(n,k)|. \tag{9.1}$$

Первым этапом доказательства соотношения (5.2) для нечетных n и подобного факта для четных n является установление следующего утверждения.

Лемма 9.1. *Соотношение* $|G(n, k-1)|=o(|G(n, k)|)$ *справедливо при четных* $n\to\infty$ *и любом* $k\leqslant n/2-1$, *а также при нечетных* $n\to\infty$ *и* $k\leqslant(n-1)/2$.

Обозначим через $G^2(n)$ множество таких функций из $G(n)$, у которых нижние единицы расположены не ниже, чем в слое $E^{n,\,n/2-1}$ при четных n, и не ниже, чем в слое $E^{n,\,(n-1)/2}$ при нечетных n. Из леммы 9.1 непосредственно следует, что при $n\to\infty$

$$|G^2(n)|\sim|G(n)|. \tag{9.2}$$

Пусть $G^3(n)$ — множество таких функций из $G^2(n)$, у которых нижние единицы расположены не выше, чем в слое $E^{n,\,n/2+3}$ при четных n, и не выше, чем в слое $E^{n,\,(n+3)/2}$ при нечетных n.

На втором этапе устанавливается следующая

Лемма 9.2. *При* $n \to \infty$

$$|G^3(n)| \sim |G^2(n)|.$$

Из (9.2) и леммы 9.2 непосредственно следует

Лемма 9.3. *Нижние единицы почти каждой функции из* $G(n)$ *располагаются в слоях* $E^{n, n/2-1}$, $E^{n, n/2}$, $E^{n, n/2+1}$, $E^{n, n/2+2}$, $E^{n, n/2+3}$ *при четных* n *и в слоях* $E^{n, (n-1)/2}$, $E^{n, (n+1)/2}$, $E^{n, (n+3)/2}$ *при нечетных* n.

Леммы 9.1 и 9.2 доказываются в следующих параграфах.

§ 10. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9.1 ПРИ $k \leqslant n/7$

Множества $G(n, k-1)$ и $G(n, k)$, введенные в § 9, разобьем на подмножества: функции f и g из $G(n, k)$ (из $G(n, k-1)$) включаются в одно подмножество тогда и только тогда, когда множество нижних единиц функции f, расположенных на $(k+1)$-м, ..., $(n-1)$-м слоях в E^n, совпадает с множеством нижних единиц функции g, расположенных на этих же слоях. Будем считать, что подмножества функций из $G(n, k)$ произвольным образом перенумерованы, а s-е подмножество обозначим через $G_s(n, k)$, $s = 1, 2, \ldots$. Поскольку $G_s(n, k)$ и $G_v(n, k)$ не пересекаются при $s \neq v$, то

$$|G(n, k)| = \sum_s |G_s(n, k)|. \tag{10.1}$$

Далее, будем считать, что подмножества функций из $G(n, k-1)$ перенумерованы так, что если $f \in G_s(n, k)$, а $g \in G_s(n, k-1)$, то множество нижних единиц функции f, расположенных на $(k+1)$-м, ..., $(n-1)$-м слоях, совпадает с множеством нижних единиц функции g, расположенных на тех же слоях. Таким образом,

$$|G(n, k-1)| = \sum |G_s(n, k-1)|, \tag{10.2}$$

где суммирование осуществляется по таким s, что множество $G_s(n, k-1)$ непусто. Такие s будем называть *значащими*.

Обозначим через $G_s(n, k-1, r, t)$ множество функций $f \in G_s(n, k-1)$ таких, что f имеет r нижних единиц в $E^{n, k-1}$, а 1-тень этих единиц состоит из t вершин. В случае непустого $G_s(n, k-1, r, t)$ совокупность функций из этого множества разобьем на подмножества: две функции включаются в одно подмножество тогда и только тогда, когда у них совпадают множества нижних единиц в $E^{n, k-1}$. Будем считать, что эти подмножества перенумерованы, а w-е подмножество обозначим через $G_s(n, k-1, r, t, w)$, $w = 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$|G_s(n, k-1, r, t)| = \sum_w l_s(k-1, r, t, w), \tag{10.3}$$

где

$$l_s(k, r, t, w) = |G_s(n, k, r, t, w)|. \tag{10.4}$$

Пусть $l_s(k-1, r, t) = \max\limits_w l_s(k-1, r, t, w)$, а $l_s(k-1)$ есть такое $l_s(k-1, r, t, w)$, что величина $l_s(k-1, r, t, w)(2^t - 1)$ принимает максимальное значение. Пусть этот максимум достигается при $r = r_0$, $t = t_0$ и $w = w_0$. Если $f \in G_s(n, k-1, r_0, t_0, w_0)$, то в $E^{n, k-1}$ функция f имеет r_0 нижних единиц, а 1-тень этих единиц состоит из t_0 вершин. Совокупность этих вершин обозначим через A_f.

Рассмотрим те функции из $G_s(n, k)$, которые получаются из f удалением нижних единиц из $E^{n, k-1}$, назначением произвольного непустого множества нижних единиц в A_f и назначением допустимых нижних единиц из $E^{n, k} \setminus A_f$. Очевидно, число таких функций равно $l_s(k-1)\left(2^{t_0} - 1\right)$. Следовательно,

$$|G_s(n, k)| \geqslant \left(2^{t_0} - 1\right) l_s(k-1). \tag{10.5}$$

Далее, пользуясь леммой 2.2 [7], получаем, что при любых допустимых r и t число значащих w не превосходит $2(2^t-1)/(n^2r^3)$. Отсюда и из (10.3), (10.4)

$$|G_s(n, k-1, r, t)| < 2(2^t-1)\, l_s(k-1, r, t)/(n^2r^3) \leqslant$$
$$\leqslant 2\left(2^{t_0}-1\right) l_s(k-1)/(n^2r^3) \leqslant (\text{см. } (10.5)) \leqslant 2|G_s(n, k)|/(n^2r^3). \quad (10.6)$$

Поскольку

$$|G_s(n, k-1)| = \sum_{r,t} |G_s(n, k-1, r, t)|,$$

а согласно лемме 1.1 [7] $t > r$, то в силу (10.6)

$$|G_s(n, k-1)| < 2|G_s(n, k)| \sum_r \sum_{r<t<nr} 1/(n^2r^3) = o(|G_s(n, k)|). \quad (10.7)$$

Из (10.1), (10.2) и (10.7) следует справедливость леммы 9.1 при $k \leqslant n/7$.

§ 11. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФАКТЫ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ 9.1 ПРИ $k>n/7$

Воспользуемся разбиением множеств $G(n, k-1)$ и $G(n, k)$ на подмножества $G_s(n, k-1)$ и $G_s(n, k)$, которое было введено в предыдущем параграфе. Обозначим через $G_s(n, k-1, r)$ множество функций из $G_s(n, k-1)$, у которых имеется по r нижних единиц в $E^{n,k-1}$.

Лемма 11.1. *При любом достаточно большом n и k, r таких, что $n/7 < k \leqslant n/2+1$,*

$$\binom{n}{k-1} 2^{-2/3(n-k+1)} < r \leqslant \binom{n}{k-1} 2^{-6n\log_2 \ln n/\ln n},$$

и любом допустимом s справедливо неравенство

$$|G_s(n, k-1, r)| < |G_s(n, k)|\, 2^{-r/6 \ln n}.$$

Доказательство. Обозначим через $G_s(n, k-1, r, t)$ множество функций $f \in G_s(n, k-1, r)$ таких, что 1-тень нижних единиц функции f из $E^{n,k-1}$ состоит из t вершин. В случае непустого $G_s(n, k-1, r, t)$ совокупность функций из этого множества разобьем на подмножества: две функции включаются в одно подмножество тогда и только тогда, когда у них совпадают множества нижних единиц в $E^{n,k-1}$. Будем считать, что эти подмножества перенумерованы, а w-е подмножество обозначим через $G_s(n, k-1, r, t, w)$, $w = 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$|G_s(n, k-1, r, t)| = \sum_w l_s(k-1, r, t, w), \quad (11.1)$$

где

$$l_s(k-1, r, t, w) = |G_s(n, k-1, r, t, w)|. \quad (11.2)$$

Пусть $l_s(k-1, r, t) = \max_w l_s(k-1, r, t, w)$, а $l_s(k-1, r)$ есть такое $l_s(k-1, r, t)$, что при заданных k, s и r величина $l_s(k-1, r, t, w)(2^t-1)$ принимает максимальное значение. Пусть этот максимум достигается при $t = t_0$, $w = w_0$. Далее, пусть f — произвольная функция из $G_s(n, k-1, r, t_0, w_0)$, S_f — множество нижних единиц из $E^{n,k-1}$ для f, а $A_f = T^1(S_f)$. Рассмотрим теперь те функции из $G_s(n, k)$, которые получаются из f удалением всех нижних единиц из S_f, назначением произвольного непустого множества нижних единиц из A_f и назначением допустимых нижних единиц в $E^{n,k} \setminus A_f$. Очевидно, число таких функций равно

$$(2^{|A_f|}-1)\, l_s(k-1, r) = (2^{t_0}-1)\, l_s(k-1, r).$$

Следовательно,

$$|G_s(n, k)| \geqslant (2^{t_0} - 1)\, l_s(k-1, r). \tag{11.3}$$

Далее, пользуясь леммами*) 7.2, 7.4 и 9.2 из [7], получаем, что при фиксированных n, k, r, t число непустых подмножеств $G_s(n, k-1, r, t, w)$ не превосходит $2^{t(1-1/5 \ln n)}$. Отсюда и из (11.1), (11.2)

$$|G_s(n, k-1, r, t)| < 2^{t(1-1/5\ln n)} l_s(k-1, r, t) \leqslant$$
$$\leqslant 2(2^t - 1)\, l_s(k-1, r, t)\, 2^{-t/5\ln n} \leqslant 2(2^{t_0} - 1)\, l_s(k-1, r)\, 2^{-t/5\ln n} \leqslant$$
$$\leqslant (\text{см. } (11.3)) \leqslant |G_s(n, k)|\, 2^{1-t/5\ln n}.$$

Поэтому при больших n имеем

$$|G_s(n, k-1, r)| \leqslant |G_s(n, k)| \sum_{t \geqslant r} 2^{1-t/5\ln n} < |G_s(n, k)|\, 2^{-r/6\ln n}.$$

Лемма доказана.

Лемма 11.2. *При любом достаточно большом n и k, r таких, что $n/7 < k \leqslant n/2$, $r > \binom{n}{k-1} 2^{-6n \log_2 \ln n/\ln n}$, и любом допустимом s справедливо неравенство*

$$|G_s(n, k-1, r)| < |G_s(n, k)|\, 2^{-rn^{-5}}.$$

Справедливость леммы устанавливается так же, как и леммы 11.1. Отличие состоит лишь в том, что вместо лемм 7.2, 7.4 и 9.2 надо воспользоваться леммами 7.2, 10.3 и 10.8 из [7].

Произвольную связку вершин с одного слоя в E^n назовем *мелкой*, если в ней содержится не более $\ln n$ вершин, и *крупной* в противном случае (определение связки введено в § 5). Обозначим через $G_s^1(n, k-1, r)$ совокупность функций из $G_s(n, k-1)$, которые имеют по r нижних единиц в $E^{n, k-1}$, причем множество этих единиц распадается на крупные связки.

Лемма 11.3. *При любом достаточно большом n и k, n таких, что $n/7 < k \leqslant n/2 + 1$, $\ln n \leqslant r \leqslant \binom{n}{k-1} 2^{-2/3(n-k+1)}$, и любом допустимом s справедливо неравенство*

$$|G_s^1(n, k-1, r)| < |(G_s(n, k)|\, 2^{-\max\{c_1 r,\, c_1 n \ln n\}},$$

где $c_1 > 0$ — подходящая константа.

Доказательство. Повторим рассуждения из доказательства леммы 11.1 с тем лишь отличием, что вместо лемм 7.2, 7.4 и 9.2 воспользуемся леммами 4.5 и 4.7 из [7] при $k \leqslant n/2 + 1$. В результате получим

$$|G_s^1(n, k-1, r)| < |G_s(n, k)| \sum_t 2^{-c_2 t}, \tag{11.4}$$

где $c_2 > 0$. Далее, пусть A — крупная связка из $E^{n, k-1}$ и A' — произвольное подмножество из A такое, что $|A'| = [\ln n] + 1$. Тогда согласно лемме 1.2 [7]

$$|T^1(A')| > (n - k - \ln n) \ln n.$$

Следовательно, при больших n имеем

$$\sum_t 2^{-c_2 t} \leqslant \sum_{t \geqslant (n-k-\ln n)\ln n} 2^{-c_2 t} < 2^{-\max\{c_1 r,\, c_1 n \ln n\}}. \tag{11.5}$$

Из (11.4) и (11.5) следует утверждение леммы 11.3.

---

*) Используемые в настоящем параграфе леммы 4.5, 4.7, 7.2 и 9.2 из [7] остаются в силе, если в них ограничение $k \leqslant n/2$ заменить на следующее: $k \leqslant n/2 + 1$.

Пусть s и множество вершин $\{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v\}$ из $E^{n, k-1}$, распадающееся на мелкие связки, таковы, что в $G_s(n, k-1)$ имеется по крайней мере одна функция с v нижними единицами в $E^{n, k-1}$, и этими единицами являются вершины $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v$. При таких s, $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v$ через $G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, u)$ обозначим совокупность функций $f \in G_s(n, k-1)$ таких, что в $E^{n, k-1}$ функция f имеет $v+u$ нижних единиц, множество этих единиц распадается на такие связки, что мелким связкам принадлежат только вершины $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v$.

Лемма 11.4. *При любом достаточно большом n и k, v, u таких, что $n/7 < k \leqslant n/2+1$, v, $u \geqslant 1$ и $v+u \leqslant \binom{n}{k-1} 2^{-2/3(n-k+1)}$, справедливо неравенство*

$$G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, u)| \leqslant |G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, 0)| \, 2^{-\max\{c_3 u, c_3 n \ln n\}},$$

где $c_3 > 0$ — подходящая константа.

Доказательство. Обозначим через $G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, u, t)$ множество функций $f \in G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, u)$ таких, что 1-тень нижних единиц из $E^{n, k-1}$, принадлежащих крупным связкам, состоит из t вершин. В случае непустого $G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, u, t)$ совокупность функций из этого множества разобьем на подмножества: две функции включаются в одно подмножество тогда и только тогда, когда у них совпадают множества нижних единиц в $E^{n, k-1}$. Будем считать, что эти подмножества перенумерованы, а w-е подмножество обозначим через $G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, u, t, w)$, $w = 1, 2, \ldots$. Поэтому

$$|G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, u, t)| = \sum_w l_s(k-1, u, t, w), \qquad (11.6)$$

где

$$l_s(k-1, u, t, w) = |G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, u, t, w)|. \qquad (11.7)$$

Пусть $l_s(k-1, u, t) = \max\limits_w l_s(k-1, u, t, w)$, а $l_s(k-1, u)$ такое $l_s(k-1, u, t, w)$, что величина $l_s(k-1, u, t, w) 2^t$ принимает максимальное значение. Предположим, что максимум достигается при $t = t_0$ и $w = w_0$. Далее, пусть f — произвольная функция из $G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, u, t_0, w_0)$, S_f — множество нижних единиц из $E^{n, k-1}$ для f, принадлежащих крупным связкам, а $A_f = T^1(S_f)$. Рассмотрим те функции из $G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, 0)$, которые получаются из f удалением всех нижних единиц из S_f, назначением произвольного множества нижних единиц из A_f (это возможно, поскольку $T^1(\tilde{\alpha}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\alpha}_v)$ не пересекается с A_f) и назначением допустимых нижних единиц из $E^{n, k} \setminus (A_f \cup T^1(\tilde{\alpha}_1 \cup \ldots \cup \tilde{\alpha}_v))$. Очевидно, число таких функций равно $2^{|A_f|} l_s(k-1, u) = 2^{t_0} l_s(k-1, u)$. Следовательно,

$$|G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, 0)| \geqslant 2^{t_0} l_s(k-1, u). \qquad (11.8)$$

Пользуясь леммами 4.5, 4.7 [7] при $k \leqslant n/2+1$, получаем, что при фиксированных k, s, $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v$, u, t число непустых подмножеств $G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, u, t, w)$ не превосходит $2^{c_4 t}$, $c_4 < 1$. Отсюда и из (11.6), (11.7) следует, что

$$|G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, u, t)| \leqslant 2^{c_4 t} l_s(k-1, u, t) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{t_0} l_s(k-1, u) 2^{-c_5 t} \leqslant \text{(см. (11.8))} \leqslant |G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, 0)| \, 2^{-c_5 t},$$

где $c_5>0$ — подходящая константа. Поэтому при больших n

$$|G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, u)| \leqslant |G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, 0)| \sum_{t\geqslant u} 2^{-c_5 t} <$$

$$< |G_s(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, 0)| 2^{-\max\{c_3 u, c_3 n \ln n\}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 11.5. *При любом достаточно большом n и k, r таких, что* $n/7<k\leqslant n/2$, $r>\binom{n}{k-1} 2^{-\partial n \log_2 \ln n/\ln n}$, *и любом значащем s справедливо неравенство*

$$|G_s(n, k-1, r)| < |G_s(n, k-1)| 2^{-rn^{-5}+2n}.$$

Доказательство. Обозначим через $G_s(n, k-1, r, t)$ множество функций $f\in G_s(n, k-1, r)$ таких, что 1-тень множества нижних единиц из $E^{n,k-1}$ для f состоит из t вершин. В случае непустого $G_s(n,k-1,r,t)$ совокупность функций из этого множества разобьем на подмножества: две функции включаются в одно подмножество тогда и только тогда, когда у них совпадают множества нижних единиц в $E^{n,k-1}$. Через $G_s(n, k-1, r, t, w)$ обозначим w-е подмножество, $w=1, 2, \ldots$. Поэтому

$$|G_s(n, k-1, r, t)| = \sum_w l_s(k-1, r, t, w), \tag{11.9}$$

где

$$l_s(k-1, r, t) = |G_s(n, k-1, r, t, w)|. \tag{11.10}$$

Пусть $l_s(k-1, r, t) = \max\limits_w l_s(k-1, r, t, w)$, а $l_s(k-1, r)$ такое $l_s(k-1, r, t, w)$, что величина $l_s(k-1, r, t, w)2^t$ принимает максимальное значение при всевозможных допустимых значениях t и w. Пусть максимум достигается при $t=t_0$, $w=w_0$, а f — произвольная функция из $G_s(n, k-1, r, t_0, w_0)$ и $\tilde{\alpha}$ — произвольная единица из $E^{n,k-1}$ для f. Рассмотрим те функции из $G_s(n, k-1)$, которые получаются из f удалением $r-1$ нижних единиц из $E^{n,k-1}$ (за исключением вершины $\tilde{\alpha}$) и назначением таких нижних единиц в $E^{n,k}\setminus T^1(\tilde{\alpha})$, чтобы получились функции из $G_s(n, k-1)$. Очевидно, число этих функций равно $l_s(k-1, r) 2^{t_0-n+k-1}$. Следовательно,

$$|G_s(n, k-1)| \geqslant 2^{t_0-n+k-1} l_s(k-1, r). \tag{11.11}$$

Пользуясь леммами 7.2, 10.3 и 10.8 из [7], получаем, что при рассматриваемом s справедливо неравенство $w\leqslant 2^{t_0-rn^{-5}}$. Отсюда и из (11.9), (11.10)

$$|G_s(n, k-1, r, t)| < 2^{t-rn^{-5}} l_s(k-1, r, t) \leqslant$$

$$\leqslant 2^{t_0-rn^{-5}} l_s(k-1, r) \leqslant (\text{см. } (11.11)) \leqslant |G_s(n, k-1)| 2^{n-k+1-rn^{-5}}. \tag{11.12}$$

В силу (11.12) и соотношения

$$|G_s(n, k-1, r)| = \sum_{t\geqslant r} |G_s(n, k-1, r, t)|,$$

имеем, что если

$$r > \binom{n}{k-1} 2^{-6n \log_2 \ln n/\ln n},$$

то при $n\to\infty$

$$|G_s(n, k-1, r)| < |G_s(n, k-1) \sum_{t\geqslant r} 2^{n-k+1-rn^{-5}} < |G_s(n, k-1)| 2^{2n-rn^{-5}}.$$

Лемма доказана.

Лемма 11.6. *При любом достаточно большом n и k, r таких, что* $n/7 < k \leqslant n/2+1$, $\binom{n}{k-1} 2^{-2/3(n-k+1)} < r \leqslant \binom{n}{k-1} 2^{-6n\log_2 \ln n/\ln n}$, *и любом значащем s справедливо неравенство*

$$|G_s(n, k-1, r)| < |G_s(n, k-1)| 2^{2n-r/5 \ln n}.$$

Доказательство леммы фактически совпадает с доказательством леммы 11.5. Отличие состоит лишь в том, что вместо лемм 7.2, 10.3 и 10.8 надо воспользоваться леммами 7.2 и 9.2 из [7].

Лемма 11.7. *При любом достаточно большом n и k, r таких, что* $n/7 < k \leqslant n/2+1$, $\ln n \leqslant r \leqslant \binom{n}{k-1} 2^{-2/3(n-k+1)}$, *и любом значащем s справедливо неравенство*

$$|G_s^1(n, k-1, r)| < |G_s(n, k-1)| 2^{2n-\max\{c_3 r, c_3 n \ln n\}}.$$

Доказательство леммы фактически совпадает с доказательством леммы 11.5. Отличие состоит лишь в том, что вместо лемм 7.2, 10.3 и 10.8 надо воспользоваться леммами 4.5 и 4.7 из [7].

§ 12. ПРОДОЛЖЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ 9.1

Обозначим через $G^a(n, k)$ совокупность функций $f \in G(n, k)$ таких, что функция f имеет не более $\binom{n}{k} 2^{-2/3(n-k)}$ нижних единиц в $E^{n,k}$ и множество этих единиц распадается на такие связки, среди которых есть мелкие. Пусть $G^b(n, k) = G(n, k) \setminus G^a(n, k)$. Множества $G^b(n, k-1)$, $G(n, k)$ разобьем на подмножества $G_s^b(n, k-1)$ и $G_s(n, k)$ так, как это делалось в § 10 для множеств $G(n, k-1)$ и $G(n, k)$. Каждое непустое $G_s^b(n, k-1)$ представим в виде

$$G_s^b(n, k-1) = G_s^{b,1}(n, k-1) \cup G_s^{b,2}(n, k-1), \tag{12.1}$$

где $G_s^{b,1}(n, k-1)$ — совокупность функций $f \in G_s^b(n, k-1)$ таких, что f имеет более $\binom{n}{k-1} 2^{-2/3(n-k+1)}$ нижних единиц в $E^{n,k-1}$, а $G_s^{b,2}(n, k-1)$ состоит из остальных функций из $G_s^b(n, k-1)$. Пользуясь леммами 11.1, 11.2, при $k \leqslant n/2$ получаем

$$|G_s^{e,1}(n, k-1)| = o(|G_s(n, k)|). \tag{12.2}$$

В силу леммы 11.3 при $k \leqslant n/2$

$$|G_s^{b,2}(n, k-1)| = o(|G_s(n, k)|. \tag{12.3}$$

Далее, пусть

$$G_s^a(n, k-1) = G_s^{a,1}(n, k-1) \cup G_s^{a,2}(n, k-1), \tag{12.4}$$

где $G_s^{a,1}(n, k-1)$ — совокупность функций $f \in G_s^a(n, k-1)$ таких, что множество всех нижних единиц функции f из $E^{n,k-1}$ распадается только на мелкие связки, а $G_s^{a,2}(n, k-1)$ — совокупность остальных функций из $G_s^a(n, k-1)$. Если $G_s^a(n, k-1)$ непусто, то по лемме 11.4 при $k \leqslant \leqslant n/2+1$ имеем

$$|G_s^{a,2}(n, k-1)| = o\left(|G_s^{a,1}(n, k-1)|\right). \tag{12.5}$$

Из определения множеств $G_s^a(n, k-1)$, $G_s^b(n, k-1)$ и (12.1)—(12.5) следует, что для завершения доказательства леммы 9.1 остается убедиться в справедливости соотношения

$$|G_s^{a,1}(n, k-1)| = o(|G_s(n, k)|) \tag{12.6}$$

при четных $n\to\infty$ и $k\leqslant n/2-1$, а также при нечетных $n\to\infty$ и $k\leqslant (n-1)/2$. С этой целью множество $G(n, k)$ разобьем на следующие, более крупные нежели $G_s(n, k)$, подмножества: функции f и g из $G(n,k)$ включаются в одно подмножество тогда и только тогда, когда множество нижних единиц функции f, расположенных в $E^{n,k+2}, \ldots, E^{n,n-1}$, совпадает с множеством нижних единиц функции g, расположенных в тех же слоях. Будем считать, что эти подмножества перенумерованы, а s-е подмножество обозначено через $G_{s,1}(n, k)$, $s=1, 2, \ldots$. Таким образом,

$$|G(n, k)| = \sum_s |G_{s,1}(n, k)|. \tag{12.7}$$

Множество $\bigcup\limits_s G_s^{a,1}(n, k-1)$ разобьем на подмножества $G_{s,1}^a(n, k-1)$ аналогичным образом: функции f и g из $\bigcup\limits_s G_s^{a,1}(n, k-1)$ включаются в одно подмножество тогда и только тогда, когда множество нижних единиц функции f, расположенных в $E^{n,k+2}, \ldots, E^{n,n-1}$, совпадает с множеством нижних единиц функции g, расположенных в тех же слоях. Будем считать, что эти подмножества перенумерованы так, что если $f\in G_{s,1}(n, k)$, а $g\in G_{s,1}^a(n, k-1)$, то множества нижних единиц у f и g, расположенных в $E^{n,k+2}, \ldots, E^{n,n-1}$, совпадают. Таким образом,

$$\sum_s |G_s^{a,1}(n, k-1)| = \sum_s |G_{s,1}^a(n, k-1)|. \tag{12.8}$$

Множество $G_{s,1}^a(n, k-1)$ представим в виде

$$G_{s,1}^a(n, k-1) = \bigcup_{i=1}^{4} G_{s,1}^{a,i}(n, k-1), \tag{12.9}$$

где

$G_{s,1}^{a,1}(n, k-1)$ — совокупность функций $f\in G_{s,1}^a(n, k-1)$ таких, что f принимает значение «1» более, чем в $\binom{n}{k}2^{-2/3(n-k)}$, и не более, чем в $\binom{n}{k}2^{-6n\log_2\ln n/\ln n}$ вершинах из $E^{n,k}$;

$G_{s,1}^{a,2}(n, k-1)$ — совокупность функций $f\in G_{s,1}^a(n, k-1)$ таких, что f принимает значение «1» не более, чем в $\binom{n}{k}2^{-2/3(n-k)}$ вершинах из $E^{n,k}$, и совокупность этих вершин распадается на крупные связки;

$G_{s,1}^{a,3}(n, k-1)$ — совокупность функций $f\in G_{s,1}^a(n, k-1)$ таких, что f принимает значение «1» не более, чем в $\binom{n}{k}2^{-2/3(n-k)}$ вершинах из $E^{n,k}$, и совокупность этих вершин распадается на связки, среди которых есть мелкие;

$G_{s,1}^{a,4}(n, k-1)$ — совокупность остальных функций из $G_{s,1}^a(n, k-1)$, т. е. таких $f\in G_{s,1}^a(n, k-1)$, что f принимает значение «1» более, чем в $\binom{n}{k}2^{-6n\log_2\ln n/\ln n}$ вершинах из $E^{n,k}$.

$G_{s,1}^{a,1}(n, k-1, r)$ — совокупность функций из $G_{s,1}^{a,1}(n, k-1)$, принимающих значение «1» точно в r вершинах из $E^{n,k}$.

Очевидно,

$$|G_{s,1}^{a,1}(n, k-1)| = \sum_{r=\binom{n}{k}2^{-2/3(n-k)}}^{\binom{n}{k}2^{-6n\log_2\ln n/\ln n}} |G_{s,1}^{a,1}(n, k-1, r)|. \tag{12.10}$$

Все функции из $G_{s,1}^{a,1}(n, k-1, r)$ можно получить следующим способом.

I. Порождаются все такие функции из $G_{s,1}(n, k)$, которые содержат по r нижних единиц в $E^{n,k}$.

II. Пусть f — произвольная порожденная функция, A_f — множество нижних единиц функции f в $E^{n,k}$, S_f — совокупность вершин $\tilde{\alpha}\in E^{n,k-1}$ таких, что $T^1(\tilde{\alpha})\subset A_f$. В множестве S_f назначается не более $\binom{n}{k-1}2^{-2/3(n-k+1)}$ нижних единиц, совокупность которых распадается на мелкие связки.

Оценим сверху число введенных функций при $k\leqslant n/2+1$. Во-первых, согласно лемме 11.6, имеется не более $|G_{s,1}(n, k)|2^{-r/5\ln n+2n}$ порожденных функций из $G_{s,1}(n, k)$. Во-вторых, согласно лемме 6.1 [7], при больших n имеем $|S_f|<3|A_f|/n$. Поэтому число способов выбора нижних единиц в $E^{n,k-1}$, распадающихся на мелкие связки, не превосходит

$$\sum_{i=1}^{[3r/n]}\binom{r}{i}<2\binom{r}{[3r/n]}=2^{o(r/\ln^2 n)}.$$

В результате получаем

$$|G_{s,1}^{a,1}(n, k-1, r)|<|G_{s,1}(n, k)|\,2^{-r/5\ln n+2n+o(r/\ln^2 n)}.$$

Отсюда следует, что если $k\leqslant n/2+1$, то

$$|G_{s,1}^{a,1}(n, k-1)|=o(|G_{s,1}(n, k)|). \qquad (12.11)$$

Аналогично доказывается, что при любом $k\leqslant n/2+1$

$$|G_{s,1}^{a,2}(n, k-1)|=o(|G_{s,1}(n, k)|). \qquad (12.12)$$

Отличие состоит лишь в том, что вместо леммы 11.6 надо пользоваться леммой 11.7.

Пусть $G_{s,1}(n, k, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, r)$ обозначает множество функций $f\in G_{s,1}(n, k)$ таких, что f имеет $v+r$ нижних единиц в $E^{n,k}$, множество этих единиц распадается на такие связки, что мелким связкам принадлежат только вершины $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v$. Через $G_{s,1}^{a,3}(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, r)$ обозначим совокупность функций $f\in G_{s,1}^{a,3}(n, k-1)$ таких, что f принимает значение «1» в $v+r$ вершинах из $E^{n,k}$, множество этих вершин распадается на такие связки, что мелким связкам принадлежат только вершины $\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v$. Все функции из $G_{s,1}^{a,3}(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, r)$ можно получить следующим способом.

I. Порождаются все функции из $G_{s,1}(n, k, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, r)$ при $v\geqslant 1$, $r\geqslant n-k+1$ и $v+r\leqslant\binom{n}{k}2^{-2(n-k)/3}$. Согласно лемме 11.4 имеется не более

$$|G_{s,1}(n, k, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, 0)|\,2^{-\max\{c_3 r, c_3 n\ln n\}}$$

таких возможностей.

II. Пусть f — произвольная порожденная функция, A_f — множество нижних единиц функции f в $E^{n,k}$, принадлежащих крупным связкам, S — совокупность вершин $\tilde{\alpha}\in E^{n,k-1}$ таких, что $T^1(\tilde{\alpha})\subseteq A$. В S выбирается произвольное подмножество вершин, распадающееся на мелкие связки, и вершины этого подмножества объявляются нижними единицами. Поскольку $|S|<2|A_f|$, а согласно лемме 6.1 [7] число таких нижних единиц в $E^{n,k-1}$ меньше $3r/n$, то число способов выбора нижних единиц в $E^{n,k-1}$ не превосходит величины

$$\sum_{i=1}^{[3r/n]}\binom{2r}{i}=2^{o(r/\ln n)}.$$

Таким образом, при любом $k \leqslant n/2+1$

$$|G_{s,1}^{a,3}(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, r)| < |G_{s,1}(n, k, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, 0)| \times \times 2^{o(r/\ln n)-\max\{c_3 r, c_3 n \ln n\}}.$$

Поэтому

$$\sum_{r \geqslant n-k+1} |G_{s,1}^{a,3}(n, k-1, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, r)| = o(|G_{s,1}(n, k, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v, 0)|). \tag{12.13}$$

В свою очередь,

$$\sum_{v \geqslant 1} \sum_{(\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v)} |G_{s,1}(n, k, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_v)| \leqslant |G_{s,1}(n, k)|. \tag{12.14}$$

Пользуясь (12.13) и (12.14), при $k \leqslant n/2+1$ имеем

$$|G_{s,1}^{a,3}(n, k-1)| = o(|G_{s,1}(n, k)|). \tag{12.15}$$

Наконец, соотношение

$$|G_{s,1}^{a,4}(n, k-1)| = o(|G_{s,1}(n, k)|) \tag{12.16}$$

при $k < n/2$ в случае четных n и при $k < (n-1)/2$ в случае нечетных n устанавливается так же, как и соотношение (12.11). Отличие состоит лишь в том, что вместо леммы 11.6 надо воспользоваться леммой 11.5. Тем самым лемма 9.1 в случае четных n доказана. Вместе с тем из (12.1)—(12.12), (12.15) и (12.16) следует, что для завершения доказательства леммы 9.1 остается убедиться в справедливости соотношения

$$|G_{s,1}^{a,4}(n, (n-3)/2)| = o(|G_{s,1}(n, (n-1)/2)|) \tag{12.17}$$

при нечетных n. Этим мы займемся в следующем параграфе.

§ 13. ЗАВЕРШЕНИЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ЛЕММЫ 9.1

Для $G_{s,1}(n, (n-1)/2)$ обозначим через A_s совокупность вершин $\tilde{\alpha} \in E^{n,(n+1)/2}$ таких, что $\tilde{\alpha}$ не предшествует ни одной нижней единице, расположенной в $E^{n,(n+3)/2}, \ldots, E^{n,n-1}$. Пусть $w = |A_s|$, S — совокупность вершин $\tilde{\beta} \in E^{n,(n-1)/2}$ таких, что $T^1(\tilde{\beta}) \subseteq A_s$. Согласно лемме 1.1 [7] имеем $|S| \leqslant w$. Поскольку нас интересуют непустые $G_{s,1}^{a,4}(n, (n-3)/2)$, то из определения множества $G_{s,1}^{a,4}(n, k-1)$ следует, что достаточно ограничиться рассмотрением случая

$$w \geqslant \binom{n}{(n+1)/2} 2^{-6n \log_2 \ln n / \ln n}.$$

Рассмотрим те функции из $G_{s,1}(n, (n-1)/2)$, которые принимают значение «1» только в одной фиксированной вершине из S (например, в вершине $\tilde{\alpha}$), а в вершинах из $A_s \setminus \{T^1(\tilde{\alpha}) \cup \bar{\tilde{\alpha}}\}$ эти функции принимают произвольные значения. Очевидно, что число таких функций больше 2^{w-n}. Это означает, что

$$|G_{s,1}(n, (n-1)/2)| > 2^{w-n}. \tag{13.1}$$

Обозначим через $G_{s,1}^{a,4}(n, r, t)$ множество функций из $G_{s,1}^{a,4}(n, (n-3)/2)$, которые принимают значение «1» в r вершинах из $E^{n,(n-1)/2}$, а их 1-тень состоит из t вершин. Тогда

$$|G_{s,1}^{a,4}(n, (n-3)/2)| = \bigcup_{r \geqslant \binom{n}{(n-1)/2} 2^{-6n \log_2 \ln n / \ln n}} \bigcup_t G_{s,1}^{a,4}(n, r, t). \tag{13.2}$$

Все функции $f \in G_{s,1}^{a,4}(n, r, t)$ (и некоторые другие) можно получить следующим способом.

(а) Среди вершин из S выбирается r-элементное подмножество S_1 такое, что любые два набора из S_1 имеют не менее одной общей единичной компоненты и $|T^1(S_1)|=t$. В вершинах из S_1 и во всех следующих за ними вершинах функция f полагается равной 1.

(б) В вершинах из $A_s \backslash T^1(S_1)$ нижние единицы назначаются произвольным образом. Имеется 2^{w-t} возможностей.

(в) В $E^{n,(n-3)/2}$ отбирается подмножество S_2 такое, что S_2 распадается на мелкие связки, $T^1(S_2) \subseteq S_1$, а

$$|S_2| \leqslant \binom{n}{(n-3)/2} 2^{-2/3(n-(n-3)/2)} = \binom{n}{(n-3)/2} 2^{-(n+3)/2}$$

(ограничение для $|S_2|$ следует из определения $G_s^{a,1}(n, k-1)$ и (12.8), (12.9)). Вершины из S_2 назначаются нижними единицами. При больших n число возможностей для выбора S_2 не превосходит

$$\sum_{v=1}^{\binom{n}{(n-3)/2}2^{-(n+3)/2}} \binom{\binom{n}{(n-3)/2}}{v} < 2^{rn^{-7}} < 2^{tn^{-7}}. \tag{13.3}$$

Будем различать следующие случаи: 1) $t \geqslant 3r$; 2) $t < 3r$ и $t \leqslant \frac{9}{10}\binom{n}{(n+1)/2}$; 3) $t < 3r$ и $t > \frac{9}{10}\binom{n}{(n+1)/2}$.

Случай 1. Воспользовавшись леммой 7.2 [7], получаем, что число возможностей для выбора r-элементного подмножества из (а) не превосходит $2^{c_5^t}$, где $c_5 < 1$. Отсюда и из (б), (в) при больших n следует, что

$$|G_{s,1}^{a,4}(n, r, t)| < 2^{c_5^t + w - t + tn^{-7}} < 2^{w - c_6^t}, \tag{13.4}$$

где $c_6 > 0$.

Случай 2. Множество $G_{s,1}^{a,4}(n, r, t)$ представим в виде

$$G_{s,1}^{a,4}(n, r, t) = G_{s,1}^{a,4,1}(n, r, t) \cup G_{s,1}^{a,4,2}(n, r, t), \tag{13.5}$$

где $G_{s,1}^{a,4,1}(n, r, t)$ — совокупность функций $f \in G_{s,1}^{a,4}(n, r, t)$ таких, что если S_1 есть множество тех вершин из $E^{n,(n-1)/2}$, в которых f равна «1», то в разложении $T^1(S_1)$ по ярусам относительно вершины $\tilde{\alpha}_0 = (\underbrace{1\ldots1}_{(n-1)/2}\ \underbrace{0\ldots0}_{(n+1)/2})$ (см. [7, § 10]) имеется не более tn^{-2} дефицитных и дополнительных вершин; $G_{s,1}^{a,4,2}(n, r, t)$ — совокупность остальных функций из $G_{s,1}^{a,4}(n, r, t)$. Пусть S_1 таково, что

$$|T^1(S_1)| = t \in \left[\binom{n}{(n+1)/2} 2^{-6n\log_2 \ln n/\ln n}, \frac{9}{10}\binom{n}{(n+1)/2}\right],$$

и в разложении $T^1(S_1)$ по ярусам относительно вершины $\tilde{\alpha}_0$ имеется не более tn^{-2} дефицитных и дополнительных вершин. Представим t в виде $t = \binom{n}{(n+1)/2}\Big/\nu$. Пользуясь неравенством (10.3) из [7], получаем, что при больших n число рассматриваемых t-элементных подмножеств не превосходит $(n^4\nu)^{tn^{-2}}$. Предположим, что такое t-элементное подмножество A задано, а $\nu \in [n, 2^{6n\log_2 \ln n/\ln n}]$. Тогда из лемм 8.1, 8.2 [7] (ввиду неравенства $r \leqslant t$) следует, что число тех вершин $\tilde{\alpha} \in E^{n,(n-1)/2}$, для которых $T^1(\tilde{\alpha}) \subseteq A$, не превосходит величины $t(1-(1/n)\log_2 n + O(1/n))$. Если же $\nu \in [10/9, n]$, то в силу леммы 8.3 [7] число таких вершин $\tilde{\alpha}$ не превосходит $t(1-n^{-3/2})$. Поэтому с учетом (б) и (в) получаем, что если $\nu\in\left[n,\,2^{6n(\log_2\ln n)/\ln n}\right]$, то

$$\left|G_{s,1}^{a,4,1}(n,r,t)\right|<2^{w-t+tn^{-7}+t\left(1-\frac{1}{n}\log_2\nu+O(1/n)\right)}=2^{w+O(t/n)-t\log_2\nu/n}. \quad (13.6)$$

Если же $\nu\in[10/9,\,n]$, то ввиду (б) и (в)

$$\left|G_{s,1}^{a,4,1}(n,r,t)\right|<2^{w-t+tn^{-7}+t\left(1-n^{-3/2}\right)}=2^{w+tn^{-7}-c_7tn^{-5}}. \quad (13.7)$$

Пользуясь леммой 10.8 [7] и (б), (в), имеем

$$\left|G_{s,1}^{a,4,2}(n,r,t)\right|<2^{w-t+tn^{-7}+t\left(1-c_7n^{-5}\right)}=2^{w+tn^{-7}-c_7tn^{-5}}. \quad (13.8)$$

Случай 3. Пусть S' — произвольная совокупность наборов из $E^{n,(n-1)/2}$ таких, что любые два набора из S' имеют не менее одной общей единичной компоненты; $\bar{S}'$ — совокупность тех вершин из $E^{n,(n+1)/2}$, которые являются противоположными для вершин из S'; $\Pi^1(\bar{S}')$ — совокупность вершин $\tilde{\alpha}\in E^{n,(n-1)/2}$ таких, что $\tilde{\alpha}$ предшествует по крайней мере одной вершине из $\bar{S}'$. Очевидно, S' и $\Pi^1(\bar{S}')$ не пересекаются, $|S'|=|\bar{S}'|\leqslant|T^1(\bar{S}')|=|\Pi^1(\bar{S}')|$ и для любой вершины $\tilde{\alpha}\in\Pi^1(\bar{S}')$ найдется вершина $\tilde{\beta}\in S'$ такая, что у $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ нет общих единичных компонент. Это означает, что если к множеству S' требуется добавить еще одну вершину $\tilde{\alpha}$ из $E^{n,(n-1)/2}$ такую, что $\tilde{\alpha}$ и любая вершина из S' имеют не менее одной общей единичной компоненты, то $\tilde{\alpha}$ нельзя выбирать из $\Pi^1(\bar{S}')$. Поэтому число возможностей для выбора r-элементного подмножества S_1 из (а) не превосходит

$$\frac{1}{r!}\prod_{v=0}^{r-1}\left(\binom{n}{(n-1)/2}-2v\right)\underset{\text{def}}{=}\varphi(r). \quad (13.9)$$

Легко видеть, что $\varphi(r)$ принимает максимальное значение либо при $r=\left[\frac{1}{3}\binom{n}{(n-1)/2}\right]$, либо при $r=\left[\frac{1}{3}\binom{n}{(n-1)/2}\right]+1$. Поэтому нетрудно убедиться в том, что

$$\varphi(r)<3^{\frac{1}{2}\binom{n}{(n-1)/2}}=3^{\frac{1}{2}\binom{n}{(n+1)/2}}. \quad (13.10)$$

Из (13.9), (13.10) и (б), (в) следует, что

$$\left|G_{s,1}^{a,4}(n,r,t)\right|<2^{w-t+tn^{-7}}3^{\frac{1}{2}\binom{n}{(n+1)/2}}<2^{c_8w}. \quad (13.11)$$

Суммируя (13.4), (13.6), (13.7), (13.11) по $t\geqslant r$ и

$$r\geqslant\binom{n}{(n-1)/2}2^{-6n\log_2\ln n/\ln n},$$

а также пользуясь (13.2), (13.5), получаем

$$\left|G_{s,1}^{a,4}(n,(n-3)/2)\right|=o\left(2^{w-n}\right).$$

Отсюда и из (13.1) имеем (12.17).

§ 14. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 9.2

Каждой функции $f\in G^2(n)$ сопоставим функцию f^* от переменных $x_1,\ldots,x_n$ такую, что $f^*(\tilde{\alpha})=1$ тогда и только тогда, когда существует вершина $\tilde{\beta}$ такая, что $\tilde{\beta}$ является нижней единицей функции f и $\tilde{\alpha}\succcurlyeq\tilde{\beta}$. Очевидно, f^* является монотонной функцией, и если $\tilde{\alpha}$ — нижняя единица функции f, то $\tilde{\tilde{\alpha}}$ — нижняя единица для f^*. Кроме того, между множествами нижних единиц функций f и f^* имеется взаимно-однозначное соответствие. Функцию f^* назовем *сопряженной с функцией* f. Множество всех функций, сопряженных с функциями из $G^2(n)$, обозначим через $H^2(n)$. Из определения множеств $G^2(n)$ и $H^2(n)$ следует, что у любой функции из $H^2(n)$ нет нижних единиц, расположенных в слоях $E^{n,\, n/2+2}, \ldots, E^{n,\, n}$ при четных n и в слоях $E^{n,\, (n+3)/2}, \ldots, E^{n,\, n}$ при нечетных n.

Множество $G^2(n)$ представим в виде

$$G^2(n) = \begin{cases} \bigcup\limits_{k=n/2-1}^{n-1} G^2(n, k) & \text{при четных } n, \\ \bigcup\limits_{k=(n-1)/2}^{n-1} G^2(n, k) & \text{при нечетных } n, \end{cases}$$

где $G^2(n, k)$ состоит из таких функций $f \in G^2(n)$, что у f имеется по крайней мере одна нижняя единица в $E^{n,\, k}$ и нет нижних единиц в $E^{n,\, v}$ при $v > k$. Через $H^2(n, n-k)$ обозначим множество функций из $H^2(n)$, сопряженных с функциями из $G^2(n, k)$. Таким образом, у любой функции из $H^2(n, n-k)$ нет нижних единиц в $E^{n,\, 0}, \ldots, E^{n,\, n-k-1}$ и имеется по крайней мере одна нижняя единица в $E^{n,\, n-k}$.

Очевидно, для доказательства леммы 9.2 достаточно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 14.1. *Соотношение* $|H^2(n, k-1)| = o(|H^2(n, k)|)$ *справедливо при четных* $n \to \infty$ *и любом* $k \leqslant n/2-3$, *а также при нечетных* $n \to \infty$ *и любом* $k \leqslant (n+3)/2$.

Доказательство. Если у произвольной функции $f \in G^2(n)$ каким-либо способом изменить нижние единицы в слоях $E^{n,\, n/2+2}, \ldots, E^{n,\, n-1}$ при четных n и в слоях $E^{n,\, (n+3)/2}, \ldots, E^{n,\, n-1}$ при нечетных n, то полученная функция будет принадлежать множеству $G^2(n)$. Следовательно, для доказательства леммы 14.1 можно воспользоваться рассуждениями из § 10, 12. При этом при переходе от одних функций к другим нет необходимости следить за соблюдением свойства $\langle A^2 \rangle$.

§ 15. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СООТНОШЕНИЯ (5.2)

В настоящем параграфе полагаем $m = \binom{n}{(n-1)/2}$, $p = \binom{n}{(n+3)/2}$. При нечетных n обозначим через $G^4(n)$ совокупность функций $f \in G(n)$, обладающих следующими свойствами.

(а) Все нижние единицы функции f расположены в слоях $E^{n,\, (n-1)/2}$, $E^{n,\, (n+1)/2}$, $E^{n,\, (n+3)/2}$.

(б) В $E^{n,\, (n-1)/2}$ содержится не более $m2^{-(n+3)/3}$ нижних единиц, и множество этих единиц распадается на мелкие связки.

(в) В $E^{n,\, (n+3)/2}$ содержится не более $p2^{-(n+3)/3}$ нижних единиц, и множество этих единиц распадается на мелкие связки.

При доказательстве лемм 9.1, 9.2 в случае нечетных n попутно было установлено, что почти все функции из $G^3(n)$ обладают свойствами (б), (в). Следовательно,

$$|G^4(n)| \sim |G(n)|. \tag{15.1}$$

Пусть

$$G^5(n) = G^4(n) \setminus G^0(n), \tag{15.2}$$

а $G^6(n)$ — совокупность функций $f \in G^5(n)$ таких, что f имеет не менее $m/(n2^{n/2})$ и не более $2m2^{-n/2}$ нижних единиц в $E^{n,\, (n-1)/2}$, а также не менее $p/(n2^{n/2})$ и не более $2p2^{-n/2}$ нижних единиц в $E^{n,\, (n+3)/2}$.

В силу (15.1), (15.2) для доказательства (5.2) достаточно убедиться в справедливости соотношения

$$|G^5(n)| = o(|G^0(n)|). \tag{15.3}$$

Множество $G^5(n)$ представим в виде

$$G^5(n) = \bigcup_{s=1}^{13} G_s^5(n), \tag{15.4}$$

где $G_s^5(n)$ определяются следующим образом:

$G_1^5(n) = \{f \in G^5(n) \mid f$ имеет в $E^{n,(n-1)/2}$ менее $m/(n2^{n/2})$ нижних единиц$\}$;

$G_2^5(n) = \{f \in G^5(n) \mid f$ имеет в $E^{n,(n+3)/2}$ менее $p/(n2^{n/2})$ нижних единиц$\}$;

$G_3^5(n) = \{f \in G^5(n) \mid f$ имеет в $E^{n,(n-1)/2}$ более $2m2^{-n/2}$ нижних единиц, а в $E^{n,(n+3)/2}$ — не менее $p/(n2^{n/2})$ нижних единиц$\}$;

$G_4^5(n) = \{f \in G^5(n) \mid f$ имеет в $E^{n,(n-1)/2}$ не менее $m/(n2^{n/2})$ нижних единиц, а в $E^{n,(n+3)/2}$ — более $2p2^{-n/2}$ нижних единиц$\}$;

$G_5^5(n) = \{f \in G^6(n) \mid$ множество нижних единиц f как из $E^{n,(n-1)/2}$, так и из $E^{n,(n+3)/2}$ распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, а число двухэлементных связок в $E^{n,(n-1)/2}$ больше $n^4\}$;

$G_6^5(n) = \{f \in G^6(n) \mid$ множество нижних единиц у функции f как в $E^{n,(n-1)/2}$, так и в $E^{n,(n+3)/2}$ распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, а число двухэлементных связок в $E^{n,(n+3)/2}$ больше $n^4\}$;

$G_7^5(n) = \{f \in G^6(n) \mid$ множество нижних единиц функции f как из $E^{n,(n-1)/2}$, так и из $E^{n,(n+3)/2}$ распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, а среди нижних единиц из $E^{n,(n-1)/2}$ имеется более n^6 нижних единиц, принадлежащих псевдосвязкам, содержащим не менее, чем по две вершины$\}$;

$G_8^5(n) = \{f \in G^6(n) \mid$ множество нижних единиц функции f как из $E^{n,(n-1)/2}$, так и из $E^{n,(n+3)/2}$ распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, число двухэлементных связок в $E^{n,(n+3)/2}$ не больше n^4, во множестве нижних единиц в $E^{n,(n-1)/2}$ имеется не более n^6 нижних единиц, принадлежащих неодноэлементным псевдосвязкам, а среди этих псевдосвязок есть такие, которые содержат не менее, чем по три вершины$\}$;

$G_9^5(n) = \{f \in G^6(n) \mid$ множество нижних единиц функции f из $E^{n,(n-1)/2}$ распадается на связки, среди которых есть такие, в которых содержатся не менее, чем по три вершины$\}$;

$G_{10}^5(n) = \{f \in G^6(n) \mid$ множество нижних единиц функции f из $E^{n,(n+3)/2}$ распадается на связки, среди которых есть содержащие не менее, чем по три вершины, а в $E^{n,(n-1)/2}$ множество нижних единиц распадается на одноэлементные и двухэлементные связки$\}$;

$G_{11}^5(n) = \{f \in G^6(n) \mid$ множество нижних единиц функции f как из $E^{n,(n-1)/2}$, так и из $E^{n,(n+3)/2}$ распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, а среди нижних единиц из $E^{n,(n-1)/2}$ имеется более n^6 таких единиц $\tilde{\alpha}$, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant 3$, где $\tilde{\beta}$ — некоторая (зависящая от $\tilde{\alpha}$) нижняя единица из $E^{n,(n-1)/2}\}$;

$G_{12}^5(n) = \{f \in G^6(n) \mid$ множество нижних единиц функции f как из $E^{n,(n-1)/2}$, так и из $E^{n,(n+3)/2}$ распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, а в $E^{n,(n+3)/2}$ содержится более n^4 нижних единиц $\tilde{\alpha}$ таких, что в $E^{n,(n+1)/2}$ имеется вершина $\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ является нижней единицей в $E^{n,(n-1)/2}\}$;

$G_{13}^5(n) = \{f \in G^6(n) \mid$ множество нижних единиц функции f как из $E^{n,(n-1)/2}$, так и из $E^{n,(n+3)/2}$ распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, а среди нижних единиц из $E^{n,(n+3)/2}$ имеется по крайней мере одна нижняя единица $\tilde{\alpha}$ из двухэлементной связки такая, что $\tilde{\alpha} > \tilde{\beta}$, где $\tilde{\beta}$ — подходящая вершина из $E^{n,(n+1)/2}$ и $\tilde{\tilde{\beta}}$ является нижней единицей в $E^{n,(n-1)/2}\}$.

Оценим сверху мощности множеств $G_s^5(n)$ при $1 \leqslant s \leqslant 13$. Рассмотрим $G_1^5(n)$. Обозначим через $G_1^5(n, r, t, v, w)$ совокупность функций $f \in G_1^5(n)$ таких, что

(а) в $E^{n,(n-1)/2}$ функция f имеет r нижних единиц, а 1-тень множества этих единиц состоит из t вершин;

(б) в $E^{n,(n+3)/2}$ функция f имеет v нижних единиц, а 1-проекция*) множества этих единиц состоит из w вершин.

Очевидно,

$$|G_1^5(n)| \leqslant \sum_{r=0}^{[m(n2^{n/2})]} \sum_t \sum_{v=0}^{[p2^{-n+3)/2}]} \sum_w |G_1^5(n, r, t, v, w)|. \tag{15.5}$$

Все функции $f \in G_1^5(n, r, t, v, w)$ можно получить следующим способом.

I. В $E^{n,(n-1)/2}$ отбирается r-элементное подмножество S_1 такое, что $|T^1(S_1)| = t$, и вершины из S_1 назначаются нижними единицами функции f. Число способов выбора S_1 не превосходит $\binom{m}{r} \leqslant m^r/r! < (em/r)^r = \left(\text{полагаем } r = (1/\lambda)\, m2^{-(n+1)/2}\right) = (e\lambda)^r 2^{r(n+1)/2}$. Поскольку множество S_1 состоит из мелких связок, то можно воспользоваться леммой 6.1 [7]. В результате получаем

$$\binom{m}{r} < (e\lambda)^r 2^{t+(1/2)r\ln n} < (\text{ибо } \lambda > n/2) < 2^{t+O(r\ln n)} \leqslant 2^{t+O((m2^{-(n+1)/2}\ln n)/n)}. \tag{15.6}$$

II. В множестве $E^{n,(n+3)/2} \setminus T^2(S_1)$ отбирается v-элементное подмножество S_2 такое, что $|\Pi^1(S_2)| = w$. Для оценки числа способов выбора такого подмножества вместо S_2 будем рассматривать v-элементное подмножество $S_3 = \bar{S}_2$, состоящее из всех вершин, противоположных для вершин из S_2. Очевидно, все вершины из S_3 принадлежат слою $E^{n,(n-3)/2}$, S_3 распадается на мелкие связки и $|T^1(S_3)| = w$. Если $v \leqslant p/(n2^{(n+3)/2})$, то, как и в случае (15.6), убеждаемся в том, что число способов выбора S_3 не превосходит $2^{w+o(p2^{-(n+3)/2}\ln n/n)}$. Если $v \in [p/(n2^{(n+3)/2}, n^2p2^{-(n+3)/2}]$ и $w \leqslant v((n+3)/2 - 1/n)$, то воспользуемся леммой 5.2 [7]. В результате получаем, что число способов выбора S_3 не превосходит $2^w \exp(p2^{-(n+3)/2})$. Если же $v \in [p/(n2^{(n+3)/2}, n^2p2^{-(n+3)/2}]$ и $w > v((n+3)/2 - 1/n)$, то число способов выбора S_3 не превосходит

$$\binom{p}{v} < p^v/v! < (ep/v)^v = \left(\text{полагаем } v = \lambda p2^{-(n+3)/2}\right) = (e/\lambda)^v 2^{v(n+3)/2} \leqslant$$
$$\leqslant (e/\lambda)^v 2^{w+v/n} \leqslant 2^w \exp\left(p2^{-(n+3)/2}(1 + o(1))\right). \tag{15.7}$$

Наконец, если $v \in [n^2p2^{-(n+3)/2}, p2^{-(n+3)/3}]$, то число способов выбора S_3 не превосходит

$$\binom{p}{v} < (\text{см. } (15.7)) < (e/\lambda)^v 2^{v(n+3)/2} < (\text{ибо } \lambda > n^2) <$$
$$< 2^{v(n+3)/2 - 2v\ln n} < (\text{см. лемму 6.1 [7]}) < 2^w.$$

Из сказанного следует, что при любых рассматриваемых v и w число способов выбора подмножества S_2 не превосходит величины

$$2^w \exp(p2^{-(n+3)/2}(1 + o(1))). \tag{15.8}$$

---

*) Пусть A — произвольное подмножество из $E^{n,k}$. Множество вершин $\tilde{\beta} \in E^{n,k-s}$ таких, что $\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$ для некоторой вершины $\tilde{\alpha} \in A$, называется *s-проекцией множества A* и обозначается через $\Pi^s(A)$, $1 \leqslant s \leqslant k$.

III. В вершинах из $E^{n,(n+1)/2}$, не входящих в множество $T^1(S_1)\cup\cup\Pi^1(S_2)$, нижние единицы функции f назначаются произвольно. Поскольку количество таких вершин равно $\binom{n}{(n+1)/2}-t-w$, то число возможностей для определения f в $E^{n,(n+1)/2}$ не превосходит

$$2^{\binom{n}{(n+1)/2}-t-w}. \qquad (15.9$$

Из (15.5), (15.6), (15.8) и (15.9) следует, что

$$|G_1^5(n)|\leqslant\sum_{r=0}^{[m/(n2^{n/2})]}\sum_t\sum_{v=0}^{[p2^{-(n+3)/3}]}\sum_w 2^{O((m2^{-(n+1)/2}\ln n)/n)}\exp\left(p2^{-(n+3)/2}(1+\right.$$
$$\left.+o(1))\right)=o(|G^0(n)|). \qquad (15.10)$$

Аналогично устанавливается справедливость соотношения

$$|G_2^5(n)|=o(|G^0(n)|). \qquad (15.11)$$

Замечание. При пользовании леммой 5.2 [7] ограничение $k=[n/2]-1$ надо заменить на ограничение $k=(n-1)/2$ (при такой замене лемма остается справедливой).

Множество $G_3^5(n)$ представим в виде

$$G_3^5(n)=G_{3,1}^5(n)\cup G_{3,2}^5(n), \qquad (15.12)$$

где $G_{3,1}^5(n)$ — совокупность функций $f\in G_3^5(n)$ таких, что в $E^{n,(n-1)/2}$ функция f имеет не менее $n^2m2^{-n/2}$ нижних единиц, а $G_{3,2}^5(n)$ — совокупность остальных функций из $G_3^5(n)$. Обозначим через $G_{3,1}^5(n,r,t,v,w)$ совокупность функций $f\in G_{3,1}^5(n)$ таких, что

(а) в $E^{n,(n-1)/2}$ функция f имеет r нижних единиц, а 1-тень множества этих единиц состоит из t вершин;

(б) в $E^{n,(n+3)/2}$ функция f имеет v нижних единиц, а 1-проекция множества этих единиц состоит из w вершин.

Будем получать функции из $G_{3,1}^5(n,r,t,v,w)$ так же, как и функции из $G_1^5(n,r,t,v,w)$. Тогда число способов выбора r-элементного подмножества из $E^{n,(n-1)/2}$ не превосходит

$$\binom{m}{r}<(em/r)^r=\left(\text{полагаем } r=\lambda p2^{-(n+3)/2}\right)=(e/\lambda)^r2^{r(n+3)/2}<$$
$$<(\text{ибо } \lambda>n^2/4)<2^{r(n+3)/2-r\ln n}<(\text{см. лемму 6.1 [7]})<2^w, \qquad (15.13)$$

а число способов выбора v-элементного подмножества из $E^{n,(n+3)/2}$ не превосходит

$$2^w\exp(p2^{-(n+3)/2}(1+o(1))). \qquad (15.14)$$

Пользуясь (15.9), (15.13) и (15.14), убеждаемся в том, что

$$|G_{3,1}^5(n)|=o(|G^0(n)|). \qquad (15.15)$$

Теперь оценим сверху мощность множества $G_{3,2}^5(n)$. Обозначим через $G_{3,2}^5(n,r,t,v,w,z)$ совокупность функций $f\in G_{3,2}^5(n)$ таких, что

(а) в $E^{n,(n-1)/2}$ функция f имеет r нижних единиц, а 1-тень множества этих единиц состоит из t вершин;

(б) в $E^{n,(n+3)/2}$ функция f имеет $v+z$ нижних единиц, среди которых v единиц являются такими, что их 1-проекция состоит из w вершин, и в этой проекции нет вершины $\tilde{\alpha}$ такой, что $\tilde{\tilde{\alpha}}$ является нижней единицей из $E^{n,(n-1)/2}$; в 1-проекции каждой из остальных z вершин содержится по крайней мере одна такая вершина $\tilde{\alpha}$, что $\tilde{\tilde{\alpha}}$ является нижней единицей в $E^{n,(n-1)/2}$.

Все функции $f\in G^5_{3,2}(n, r, t, v, w, z)$ можно получить так.

I. В $E^{n,(n-1)/2}$ отбирается r-элементное подмножество S_1 такое, что $|T^1(S_1)|=t$, и вершины из S_1 назначаются нижними единицами функции f. Если $t<r((n+1)/2-1/n)$, то воспользуемся леммой 5.2 [7] с заменой в ней ограничения $k=[n/2]-1$ на $k=(n-1)/2$. В результате получаем, что число способов выбора S_1 не превосходит $2^t\exp(m2^{-(n+1)/2})$. Если же $t>r((n+1)/2-1/n)$, то при больших n это число не превосходит

$$\binom{m}{r}<(em/r)^r=\left(\text{полагаем } r=\lambda m2^{-(n+1)/2}\right)=$$
$$=(e/\lambda)^r2^{r(n+1)/2}<(e/\lambda)^r2^{t+r/n}<\left(\text{ибо } \lambda>2\sqrt{2}\right)<2^t.$$

Таким образом, в любом случае число способов выбора S_1 не превосходит
$$2^t\exp(m2^{-(n+1)/2})=2^t\exp(2m2^{-(n+3)/2}). \qquad (15.16)$$

II. В множестве $E^{n,(n+3)/2}\setminus(T^2(S_1)\cup T^1(\bar S_1))$ отбирается v-элементное подмножество S_2 такое, что $|\Pi^1(S_2)|=w$. Согласно (15.8) число способов выбора не превосходит
$$2^w\exp(p2^{-(n+3)/2}(1+o(1))). \qquad (15.17)$$

III. В множестве $T^1(\bar S_1)$ отбирается z-элементное подмножество S_3. Поскольку $|T^1(\bar S_1)|<r(n-1)/2<n^3m2^{-n/2}$, то число способов выбора S_3 не превосходит
$$\binom{[n^3m2^{-n/2}]}{z}<(n^3m2^{-n/2})^z/z! \qquad (15.18)$$

Далее, так как множество $S_2\cup S_3$ распадается на мелкие связки, то согласно лемме 6.1 [7] $|\Pi^1(S_3)\setminus\Pi^1(S_2)|\geqslant z(n+3)/2-z(\ln n)/2$. А поскольку множество $\bar S_1$ распадается на мелкие связки, то $|\Pi^1(\tilde\alpha)\cap\bar S_1|\leqslant\leqslant\ln n$ для любой вершины $\tilde\alpha\in S_3$. Следовательно,
$$|\Pi^1(S_3)\setminus(\Pi^1(S_2)\cup\bar S_1\cup T^1(S_1))|\geqslant z(n+3)/2-3z(\ln n)/2. \qquad (15.19)$$

IV. В тех вершинах из $E^{n,(n+1)/2}$, которые не входят в $T^1(S_1)\cup\bar S_1\cup\cup\Pi^1(S_2\cup S_3)$, нижние единицы функции f задаются произвольно. Число возможностей не превосходит
$$2^{\binom{n}{(n+1)/2}-r-t-w-z(n+3)/2+3z\ln n/2}. \qquad (15.20)$$

Из (15.16)—(15.20) получаем
$$|G^5_{3,2}(n)|\leqslant 2^{\binom{n}{(n+1)/2}}\exp\left(2m2^{-(n+3)/2}+p2^{-(n+3)/2}(1+\right.$$
$$\left.+o(1))\right)\sum_{r=[2m2^{-n/2}]}^{[m2^{-(n+1)/3}]}2^r\sum_t\sum_{v=0}^{[p2^{-(n+3)/2}]}\sum_w\sum_{z\geqslant0}\frac{1}{z!}(n^3m2^{-n/2})^z\times$$
$$\times 2^{-z(n+3)/2+3z(\ln n)/2}.$$

Пользуясь неравенством
$$\sum_{z\geqslant0}\frac{1}{z!}(n^3m2^{-n/2})^z2^{-z(n+3)/2+3z(\ln n)/2}=\exp\left(n^3m2^{-n/2-(n+3)/2+3(\ln n)/2}<\exp(n^4),\right.$$

нетрудно убедиться, что
$$|G^5_{3,2}(n)|=o(|G^0(n)|).$$

Отсюда и из (15.2), (15.15) получаем
$$|G^5_3(n)|=o(|G^0(n)|). \qquad (15.21)$$

Аналогично устанавливается соотношение

$$|G_4^5(n)| = o(|G^0(n)|). \tag{15.22}$$

Оценим сверху мощность множества $G_5^5(n)$. Обозначим через $G_5^5(n, r, s, v, w, z)$ совокупность функций $f \in G_5^5(n)$, обладающих следующими свойствами:

(а) в $E^{n,(n-1)/2}$ функция f имеет r нижних единиц, а среди этих единиц имеется точно s двухэлементных связок;

б) в $E^{n,(n+3)/2}$ функция f имеет $v+z$ нижних единиц, среди которых v единиц являются такими, что в их 1-проекции нет такой вершины $\tilde{\alpha}$, что $\tilde{\tilde{\alpha}}$ является нижней единицей из $E^{n,(n-1)/2}$, а в множестве этих единиц имеется w двухэлементных связок; в 1-проекции каждой из остальных z вершин содержится по крайней мере одна такая вершина $\tilde{\alpha}$, что $\bar{\alpha}$ является нижней единицей в $E^{n,(n-1)/2}$.

Все функции $f \in G_5^5(n, r, s, v, w, z)$ можно получить следующим способом.

I. В $E^{n,(n-1)/2}$ отбирается r-элементное подмножество S_1 такое, что S_1 распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, а число последних равно s. Вершины из S_1 объявляются нижними единицами. Согласно лемме 15.2 [7] для выбора S_1 имеется не более

$$\binom{m}{r} n^{3s/2}/s! < m^r n^{3s/2}/(r!\, s!) \tag{15.23}$$

возможностей.

II. В $E^{n,(n+3)/2} \setminus (T^2(S_1) \cup T^1(\bar{S}_1))$ отбирается v-элементное подмножество S_2 такое, что S_2 распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, а число последних равно w. Пользуясь леммами 14.2, 15.2 [7], получаем, что для выбора S_2 имеется не более

$$\binom{p}{v} n^{3w/2}/w! \leqslant p^v n^{3w/2}/(v!\, w!) \tag{15.24}$$

возможностей. Вершины из S_2 объявляются нижними единицами.

III. Во множестве $T^1(\bar{S}_1)$ отбирается z-элементное подмножество S_3 такое, что $S_2 \cup S_3$ состоит из одноэлементных и двухэлементных связок. Поскольку $|T^1(\bar{S}_1)| < r(n-1)/2 < nm2^{-n/2}$, то число возможностей для выбора S_3 не превосходит

$$\binom{[nm2^{-n/2}]}{z} < (nm2^{-n/2})^z/z! \tag{15.25}$$

Так как $S_2 \cup S_3$ распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, то

$$|\Pi^1(S_2 \cup S_3)| \geqslant (v+z)(n+3)/2 - w - z$$

и $|\Pi^1(\tilde{\alpha}) \cap \bar{S}_1| \leqslant 2$ для любой вершины $\tilde{\alpha} \in S_3$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |T^1(S_1) \cup \bar{S}_1 \cup \Pi^1(S_2 \cup S_3)| &\geqslant r(n+1)/2 + r + v(n+3)/2 - s - w - 3z = \\ &= (r+v+z)(n+3)/2 - s - w - 3z. \end{aligned} \tag{15.26}$$

IV. В тех вершинах из $E^{n,(n+1)/2}$, которые не входят в $T^1(S_1) \cup \bar{S}_1 \cup \Pi^1(S_2 \cup S_3)$, нижние единицы функции f задаются произвольно. Число возможностей не превосходит

$$2^{\binom{n}{(n+1)/2} - (r+v+z)(n+3)/2 + s + w + 3z}. \tag{15.27}$$

Из (15.23) — (15.27) получаем

$$|G_5^5(n)| \leqslant 2^{\binom{n}{(n+1)/2}} \sum_{s=n^4}^{\infty} (2n^{3/2})^s \frac{1}{s!} \sum_{r=0}^{\infty} m^r/(r!\, 2^{r(n+3)/2}) \times$$

$$\times \sum_{v=0}^{\infty} p^v/(v!\, 2^{v(n+3)/2}) \sum_{w=0}^{\infty} (2n^{3/2})^w/w! \sum_{z=0}^{\infty} \frac{1}{z!} (nm2^{-n/2})^z 2^{-z(n+3)/2+3z} =$$

$$= 2^{\binom{n}{(n+1)/2}} \exp\left(m2^{-(n+3)2} + p2^{-(n+3)/2} + \right.$$

$$\left. + 2n^{3/2} + nm2^{-n+1,5}\right) \sum_{s=n^4}^{\infty} (2n^{3/2})^s/s! = o(|G^0(n)|). \qquad (15.28)$$

Справедливость соотношения

$$|G_6^5(n)| = o(|G^0(n)|) \qquad (15.29)$$

устанавливается аналогичным образом.

Рассмотрим множество $G_7^5(n)$. Обозначим через $G_7^5(n, r, s, v, w, z)$ совокупность функций $f \in G_7^5(n)$, обладающих следующими свойствами:

(а) в $E^{n,(n-1)/2}$ функция f имеет r нижних единиц, среди которых s единиц принадлежат неодноэлементным псевдосвязкам;

(б) в $E^{n,(n+3)/2}$ функция f имеет $v+z$ нижних единиц, среди которых v единиц являются такими, что в их 1-проекции нет такой вершины α, что $\tilde{\tilde{\alpha}}$ является нижней единицей в $E^{n,(n-1)/2}$, а в множестве этих единиц имеется w двухэлементных связок; в 1-проекции каждой из остальных z вершин содержится по крайней мере одна вершина $\tilde{\alpha}$ такая, что $\tilde{\tilde{\alpha}}$ является нижней единицей в $E^{n,(n-1)/2}$.

Функции из $G_7^5(n, r, s, v, w, z)$ получаются так же, как и функции из $G_5^5(n, r, s, v, w, z)$. Поэтому при оценке мощности множества $G_7^5(n, r, s, v, w, z)$ можно воспользоваться теми же рассуждениями. Отличие состоит лишь в том, что вместо (15.23) надо применить неравенство (16.29) из [7]. В результате получаем

$$|G_7^5(n)| = o(|G^0(n)|). \qquad (15.30)$$

Оценим сверху мощность множества $G_8^5(n)$. Пусть $A(s)$ — произвольное s-элементное подмножество в $E^{n,(n-1)/2}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(а) $A(s)$ состоит из одноэлементных и двухэлементных связок;

(б) $A(s)$ состоит из псевдосвязок мощности не менее 3.

Обозначим через $G_8^5(n, A(s))$ совокупность функций $f \in G_8^5(n)$ таких, что все вершины из $A(s)$ являются нижними единицами функции f, а любая нижняя единица из $E^{n,(n-1)/2} \setminus A(s)$ принадлежит либо одноэлементной, либо двухэлементной псевдосвязке. Тогда

$$|G_8^5(n)| \leqslant \sum_{s=3}^{n^6} \sum{}' |G_8^5(n, A(s))|, \qquad (15.31)$$

где $\sum'$ означает суммирование по всем s-элементным подмножествам $A(s)$ рассматриваемого вида. Каждой $f \in G_8^5(n, A(s))$ сопоставим монотонную функцию f' такую, что нижними единицами функции f' являются все нижние единицы функции f, за исключением тех, которые входят в $A(s)$. Множество всех таких функций обозначим через $G_{8,1}^5(n, A(s))$. Так как во всех вершинах из $T^1(A(s))$ все функции из $G_{8,1}^5(n, A(s))$ принимают нулевое значение, то при больших n

$$|G_{8,1}^5(n, A(s))| \leqslant |G^4(n)|\, 2^{-|T^1(A(s))|}. \qquad (15.32)$$

Поскольку $A(s)$ состоит из одноэлементных и двухэлементных связок, то

$$|T^1(A(s))| \geqslant s(n+1)/2 - s/2 = sn/2. \qquad (15.33)$$

Подставляя (15.33) в (15.32), получаем

$$|G^5_{8,1}(n, A(s))| = |G^5_8(n, A(s))| \leqslant |G^4(n)|\, 2^{-ns/2}. \qquad (15.34)$$

Воспользовавшись (16.40) из [7] и (15.31), (15.34), имеем

$$|G^5_8(n)| = o(|G^4(n)|). \qquad (15.35)$$

Пусть $A(s)$ — произвольное s-элементное подмножество в $E^{n,(n-1)/2}$, распадающееся на мелкие связки, в которых содержится не менее, чем по три вершины. Обозначим через $G^5_9(n, A(s))$ совокупность функций $f \in G^5_9(n)$ таких, что все вершины из $A(s)$ являются нижними единицами функции f, а любая нижняя единица из $E^{n,(n-1)/2}\backslash A(s)$ принадлежит либо одноэлементной, либо двухэлементной связке.

Применяя к $G^5_9(n, A(s))$ рассуждения из доказательства формулы (15.35) (вместо (16.40) из [7] надо пользоваться леммой 15.1 из [7]), получаем

$$|G^5_9(n)| = o(|G^4(n)|). \qquad (15.36)$$

Пусть $A(s)$ — произвольное s-элементное подмножество в $E^{n,(n+3)/2}$, распадающееся на связки мощности не менее трех, а $G^5_{10}(n, A(s))$ — совокупность функций $f \in G^5_{10}(n)$ таких, что все вершины из $A(s)$ являются нижними единицами f, а нижние единицы из $E^{n,(n-1)/2}\backslash A(s)$ принадлежат либо одноэлементным либо двухэлементным связкам. Применяя к $G^5_{10}(n, A(s))$ рассуждения из доказательства формулы (15.35) (вместо (16.40) из [7] надо пользоваться леммами 14.2 и 15.1 из [7]), получаем

$$|G^5_{10}(n)| = o(|G^4(n)|). \qquad (15.37)$$

Оценим сверху мощность множества $G^5_{11}(n)$. Пусть $A_1(r)$ и $A_2(s)$ — такие непересекающиеся подмножества вершин из $E^{n,(n-1)/2}$, что (а) множество $A_1(r) \cup A_2(s)$ состоит из одноэлементных и двухэлементных связок; (б) $|A_1(r)| = r$, $|A_2(s)| = s$, $r + s \leqslant 2m2^{-n/2}$; (в) для любых вершин $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in A_1(r)$ справедливо соотношение $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\tilde{\beta}}) > 3$; (г) для любой вершины $\tilde{\alpha} \in A_2(s)$ имеется по крайней мере одна вершина $\tilde{\beta} \in A_1(r)$ такая, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\tilde{\beta}}) \leqslant 3$.

Обозначим через $G^5_{11}(n, A_1(r), A_2(s))$ совокупность функций $f \in G^5_{11}(n)$ таких, что все вершины из $A_1(r) \cup A_2(s)$ и только они являются нижними единицами функции f из $E^{n,(n-1)/2}$. Каждой $f \in G^5_{11} \times$ $\times (n, A_1(r), A_2(s))$ сопоставим монотонную функцию f' такую, что нижними единицами функции f' являются все нижние единицы функции f, за исключением тех, которые входят в $A_2(s)$. Множество всех таких функций обозначим через $G^5_{11,1}(n, A_1(r), A_2(s))$. Очевидно, что

$$|G^5_{11}(n)| \leqslant \sum_{r>1} \sum_{A_1(r)} \sum_{s \geqslant n^6} \sum_{A_2(s)} |G^5_{11,1}(n, A_1(r), A_2(s))|. \qquad (15.38)$$

Через $G^5_{11}(n, A_1(r))$ обозначим множество функций $f \in G^5_{11}(n)$ таких, что все вершины из $A_1(r)$, и только они, являются нижними единицами функции f в $E^{n,(n-1)/2}$. Поскольку

$$|T^1(A^2(s)) \backslash T^1(A_1(r))| \geqslant (n+1)s/2 - s = s(n-1)/2,$$

то

$$|G^5_{11}(n, A_1(r))| \geqslant |G^5_{11,1}(n, A_1(r), A_2(s))|\, 2^{s(n-1)/2}.$$

Следовательно,

$$|G^5_{11,1}(n, A_1(r))| \leqslant |G^5_{11}(n, A_1(r))|\, 2^{-s(n-1)/2} \qquad (15.39)$$

В силу условия (г) при заданном $A_1(r)$ число различных $A_2(s)$ не превосходит величины

$$\binom{rn^3}{s} < (rn^3)^s/s! \leqslant (2n^3 m 2^{-n/2})^s/s! \qquad (15.40)$$

Пользуясь (15.38)—(15.40), получаем

$$|G^5_{11}(n)| \leqslant \sum_r \sum_{A_1(r)} |G^5_{11}(n, A_1(r))| \sum_{s\geqslant n^6} (2n^3 m 2^{-n/2})^s 2^{-s(n-1)/2}/s! =$$

$$= o\Big(\sum_r \sum_{A_1(r)} |G^5_{11}(n, A_1(r))| = o(|G^4(n)|). \qquad (15.41)$$

Мощность множества $G^5_{12}(n)$ оценивается сверху следующим образом. Пусть $A_1(r)$ и $A_2(z)$ — такие множества, что

(а) $A_1(r) \subset E^{n,(n-1)/2}$, $|A_1(r)| = r$ и $A_1(r)$ состоит из одноэлементных и двухэлементных связок;

(б) $A_2(z)$ состоит из z вершин в $E^{n,(n+3)/2}$, $A_2(z)$ распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, $A_2(z) \subset T^1(\bar{A}_1(r))$.

Обозначим через $G^5_{12}(n, A_1(r), A_2(z))$ совокупность функций $f \in G^5_{12}(n)$ таких, что все вершины из $A_1(r)$, и только они, являются нижними единицами функции f в $E^{n,(n-1)/2}$, все вершины из $A_2(z)$ являются нижними единицами в $E^{n,(n+3)/2}$, в $E^{n,(n+3)/2}$ множество всех нижних единиц распадается на одноэлементные и двухэлементные связки и в $E^{n,(n+3)/2}$ нет нижней единицы $\tilde{\alpha}$, для которой имеется вершина $\tilde{\beta}$ из $E^{n,(n+1)/2}$, $\tilde{\beta} < \tilde{\alpha}$ и $\bar{\tilde{\beta}} \in A_1(r)$. Каждой $f \in G^5_{12}(n, A_1(r), A_2(z))$ сопоставим монотонную функцию f' такую, что нижними единицами функции f' являются все нижние единицы функции f, за исключением тех, которые входят в $A_2(z)$. Множество всех таких функций обозначим $G^5_{12,1}(n, A_1(r), A_2(z))$. Очевидно, что

$$|G^5_{12}(n)| \leqslant \sum_r \sum_{A_1(r)} \sum_{z\geqslant n^4} \sum_{A_2(z)} |G^5_{12,1}(n, A_1(r), A_2(z))|. \qquad (15.42)$$

При фиксированной совокупности нижних единиц из $E^{n,(n+3)/2}$ обозначим через $\Pi^1_1(A_2(z))$ множество тех вершин $\tilde{\alpha} \in \Pi^1(A_2(z))$, что $\tilde{\alpha} \notin \bar{A}_1(r)$ и $\tilde{\alpha}$ не принадлежит 1-проекции нижних единиц из $E^{n,(n+3)/2} \setminus A_2(z)$. Нетрудно видеть, что

$$|\Pi^1_1(A_2(z))| \geqslant z(n+3)/2 - 3z. \qquad (15.43)$$

Пользуясь (15.25), (15.42), (15.43) и рассуждениями, которые привлекались для получения (15.41), убеждаемся в справедливости соотношения

$$|G^5_{12}(n)| = o(|G^4(n)|). \qquad (15.44)$$

Наконец, оценим сверху мощность множества $G^5_{13}(n)$. Пусть $A_1(r)$ и $A_2(z)$ — такие подмножества, что

(а) $A_1(r) \subset E^{n,(n-1)/2}$, $|A_1(r)| = r$ и $A_1(r)$ состоит из одноэлементных и двухэлементных связок;

(б) $A_2(z)$ состоит из z вершин в $E^{n,(n+3)/2}$, распадается на одноэлементные связки и $A_2(z) \subset T^1(\bar{A}_1(r))$.

Обозначим через $G^5_{13}(n, A_1(r), A_2(z))$ совокупность функций $f \in G^5_{13}(n)$ таких, что все вершины из $A_1(r)$, и только они, являются нижними единицами функции f в $E^{n,(n-1)/2}$, множество всех нижних единиц из $E^{n,(n+3)/2}$ распадается на одноэлементные и двухэлементные связки, все вершины из $A_2(z)$ являются нижними единицами и принадлежат двухэлементным связкам во множестве всех нижних единиц из $E^{n,(n+3)/2}$, и в $T^1(\bar{A}_1(r))$ нет вершин, принадлежащих двухэлементным связкам и не содержащих вершин из $A_2(z)$. Теперь соотношение

$$|G_{13}^5(n)| = o(|G^4(n)|) \tag{15.45}$$

устанавливается так же, как и (15.44), с учетом следующего факта. Если $A_1(r)$ фиксировано, то число подмножеств $A_2(z)$ не превосходит

$$\binom{|\bar{A}_1(r)|(n-1)/2}{z} < (nm2^{-n/2})^z/z!,$$

а при заданном $A_2(z)$ имеется менее n^{2z} двухэлементных связок, в которые входят вершины из $A_2(z)$.

Из (15.4), (15.10), (15.11), (15.21), (15.22), (15.28)—(15.30), (15.35)—(15.37), (15.41), (15.44) и (15.45) следует справедливость (5.2). Тем самым теорема 2 полностью доказана.

§ 16. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5

Поскольку $F_8^3(n) \supseteq F_8^4(n) \supseteq \cdots \supseteq F_8^\infty(n)$, то для доказательства теоремы 5 достаточно показать, что $|F_8^3(n)| \sim |F_8^\infty(n)|$, а это эквивалентно соотношению

$$|F_8^3(n) \setminus F_8^\infty(n)|_{\text{def}} = H(n) = o(|F_8^\infty(n)|). \tag{16.1}$$

Цель настоящего параграфа — доказательство (16.1). Предварительно введем несколько понятий.

Двоичные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\tilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ назовем *r-пересекаемыми*, если имеется точно r компонент $s_1, \ldots, s_r$ таких, что $\alpha_{s_i} = \beta_{s_i} = 1$ при $1 \leqslant i \leqslant r$. Будем говорить, что *булева функция f обладает свойством r-пересекаемости*, если любые два набора, на которых f равна 1, s-пересекаемы, $s \geqslant r$, и существуют по крайней мере два набора $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ такие, что $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}) = 1$ и $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ r-пересекаемы. Наборы, на которых булева функция f равна 1, но которые отличны от нижних единиц функции f, назовем *внутренними наборами функции f*.

Из определения множества $F_8^3(n)$ следует, что любая функция $f \in F_8^3(n)$ обладает свойством r-пересекаемости при $r \geqslant 1$. Вместе с тем нетрудно видеть, что если $f \in H(n)$, то f обладает свойством r-пересекаемости, где $r \geqslant 2$. Действительно, пусть $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ — такие наборы, что $f(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\beta}) = 1$ и $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$ 1-пересекаемы. Пусть для определенности $\tilde{\alpha}$ и $\tilde{\beta}$ пересекаются в первой компоненте и $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ — произвольный набор такой, что $f(\tilde{\gamma}) = 1$. Тогда поскольку f обладает свойством $\langle A^3 \rangle$, то $\gamma_1 = 1$. А это означает, что в первой компоненте всех наборов, на которых f равна единице, находится «1». Следовательно, $f \in F_8^\infty(n)$, что противоречит условию $f \in H(n)$. Таким образом, множество $H(n)$ можно представить в виде

$$H(n) = \bigcup_{r=2}^{n} H_r(n), \tag{16.2}$$

где $H_r(n)$ состоит из функций, обладающих свойством r-пересекаемости.

Обозначим через f_r функцию из $H_r(n)$ такую, что f_r имеет максимальное число внутренних наборов среди всех функций из $H_r(n)$. Очевидно, f_r монотонна. Пусть $\|f_r\|$ — число внутренних наборов функции f_r.

Лемма 16.1. *При любом r, $2 \leqslant r \leqslant n$, справедливо неравенство* $|H_r(n)| < \psi(n) 2^{\|f_r\|}$.

Доказательство. Пусть f — произвольная монотонная функция из $H_r(n)$. Нетрудно видеть, что любая булева функция f', получаемая из f путем изменения ее значений на произвольном подмножестве внутренних наборов, также принадлежит $H_r(n)$. Поэтому из каждой монотонной функции $f \in H_r(n)$ можно получить не более $2^{\|f_r\|}$ функций $f' \in H_r(n)$ таких, что множества нижних единиц функций f и f' совпадают. Кроме того, каждая $f \in H_r(n)$ может быть получена таким образом из подходящей монотонной функции из $H_r(n)$. Пользуясь этими фактами и тем, что число монотонных функций из $H_r(n)$ меньше $\psi(n)$, получаем утверждение леммы.

Лемма 16.2. *При любом r, $2 \leqslant r \leqslant n$, справедливо неравенство* $\|f_r\| < 2^{n-1} - 2^{n-r-1}$.

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha}_0 = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta}_0 = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — двоичные наборы такие, что $f_r(\tilde{\alpha}_0) = f_r(\tilde{\beta}_0) = 1$ и $\tilde{\alpha}_0$, $\tilde{\beta}_0$ являются r-пересекаемыми (такие наборы имеются). Для определенности будем считать, что $\tilde{\alpha}_0$ и $\tilde{\beta}_0$ пересекаются по первым r компонентам, т. е. $\alpha_s = \beta_s = 1$ при $1 \leqslant s \leqslant r$. Тогда любой набор $\tilde{\gamma}$, в котором первые r компонент равны 0, не может быть внутренним набором для f_r, ибо у наборов $\tilde{\alpha}_0$, $\tilde{\beta}_0$, $\tilde{\gamma}$ нет общей единичной компоненты. Пусть $\tilde{\alpha} = (1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — произвольные наборы такие, что $f_r(\tilde{\alpha}) = f_r(\tilde{\beta}) = 1$. Поскольку $f_r \in H_r(n)$, а $r \geqslant 2$, то $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_2, \ldots, \beta_n)$ не могут быть противоположными. Следовательно, имеется не более 2^{n-2} наборов вида $(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, на которых f равна единице. Наконец, при заданных $\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ ($\alpha_2, \ldots, \alpha_r$ фиксированы произвольным образом, но не все равны нулю) рассмотрим совокупность всех тех наборов $\tilde{\alpha} = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, что $f_r(\tilde{\alpha}) = 1$. Из определения $H_r(n)$ следует, что среди наборов вида $(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$ нет противоположных наборов. Следовательно, число таких наборов не превосходит 2^{n-r-1}. Таким образом, общее число наборов, на которых f_r равна единице, не превосходит величины $2^{n-2} + (2^{r-1} - 1)2^{n-r-1} = 2^{n-1} - 2^{n-r-1}$. Лемма доказана.

Пусть A — произвольное подмножество вершин из E^n. Обозначим через $R(A, s)$ совокупность всех тех вершин из $E^n \setminus A$, что для каждой $\tilde{\alpha} \in R(A, s)$ имеется вершина $\tilde{\beta} \in A$ такая, что $\rho(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \leqslant s$.

Лемма 16.3. *Если $A \in E^n$ и* $|A| = \sum_{t=0}^{k} \binom{n}{t} + \delta$, где $0 \leqslant \delta < \binom{n}{k+1}$, *то при любом* $s \geqslant 2$

$$|R(A, s)| \geqslant \sum_{v=k+2}^{k+s} \binom{n}{v}.$$

Доказательство содержится в [9].

Лемма 16.4. *При любом достаточно большом n и $r \geqslant (1/4)\log_2 n$ справедливо неравенство*

$$\|f_r\| < 2^{n-1} - c_{10} 2^n \log_2 n / \sqrt{n},$$

где $c_{10} > 0$.

Доказательство. Пусть $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ — произвольный двоичный набор. При заданных $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ обозначим через $K(f_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ совокупность всех таких наборов $(\alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n)$, что $f_r(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 1$. Рассмотрим множество $K(f_r, 0, \ldots, 0) \cup K(f_r, 1, \ldots, 1)$. Если в $K(f_r, 1, \ldots, 1)$ имеется два 0-пересекаемых набора, то $K(f_r, 0, \ldots, 0)$ пусто. В этом случае

$$|K(f_r, 0, \ldots, 0)| + |K(f_r, 1, \ldots, 1)| \leqslant 2^{n-r}. \qquad (16.3)$$

Если же любые два набора из $K(f_r, 1, \ldots, 1)$ имеют непустое пересечение, то в $K(f_r, 1, \ldots, 1)$ нет противоположных наборов. Поэтому $|K(f_r, 1, \ldots, 1)| \leqslant 2^{n-r-1}$. Вместе с тем любые два набора из $K(f_r, 0, \ldots$

..., 0) должны иметь непустое пересечение, следовательно,

$$|K(f_r,\ 0,\ \ldots,\ 0)| \leqslant 2^{n-r-1}.$$

Значит, и в этом случае имеет место (16.3).

Далее, пусть набор $(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)$ отличен от единичного, а $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i \geqslant$ $\geqslant r/2$. Тогда в $K(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)$ нет противоположных наборов. Поэтому

$$|K(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)| \leqslant 2^{n-r-1}. \tag{16.4}$$

Если же $r > 2n/3$ и $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i < r/2$, то, очевидно, множество $K(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)$ пусто, т. е.

$$|K(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)| = 0. \tag{16.5}$$

Наконец, рассмотрим случай, когда $r \leqslant 2n/3$ и $1 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i < r/2$. Совокупность наборов, противоположных для наборов из $K(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)$, обозначим через $\overline{K}(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)$. Из определения $H_r(n)$ следует, что если $\sum\limits_{i=1}^{r} \alpha_i = s$, то любые два набора из $K(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)$ являются v-пересекаемыми, где $v \geqslant r - s$. Поэтому $K(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)$ и $\overline{K}(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r) \cup$ $\cup\, R(\overline{K}(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r),\ r - s - 1)$ не пересекаются. Следовательно,

$$\begin{gathered}|K(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)| + |\overline{K}(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)| + \\ + |R(\overline{K}(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r),\ r - s - 1)| \leqslant 2^{n-r}.\end{gathered} \tag{16.6}$$

В свою очередь,

$$|K(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)| = |\overline{K}(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r)|, \tag{16.7}$$

$$\begin{gathered}|R(\overline{K}(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r),\ r - s - 1)| = \\ = |R(K(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r),\ r - s - 1)|.\end{gathered} \tag{16.8}$$

Из (16.6) — (16.8) следует, что

$$|K(f_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)| + \frac{1}{2} |R(K(f_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_r), r - s - 1)| \leqslant 2^{n-r-1}. \tag{16.9}$$

Так как $s < r/2$, то

$$\begin{gathered}|R(K(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r),\ r - s - 1)| \geqslant \\ \geqslant |R(K(f_r,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_r),\ [r/2])|.\end{gathered} \tag{16.10}$$

Подставляя (16.10) в (16.9), получаем

$$|K(f_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_r)| + \frac{1}{2} |R(K(f_r, \alpha_1, \ldots, \alpha_r), [r/2])| \leqslant 2^{n-r-1}. \tag{16.11}$$

Пользуясь (16.11), леммой 16.3 и соотношением $(1/4)\log_2 n \leqslant r \leqslant 2n/3$, имеем

$$\begin{gathered}|K(f_r, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_r)| \leqslant 2^{n-r-1} - \sum_{s=0}^{[r/2]-2} \binom{n-r}{[(n-r)/2] - s} \leqslant \\ \leqslant 2^{n-r-1} - \sum_{s=0}^{[1/8 \log_2 n]-2} \binom{n-r}{[(n-r)/2] - s} < 2^{n-r-1} - c_9 2^{n-r} \log_2 n / \sqrt{n},\end{gathered} \tag{16.12}$$

где $c_9 > 0$ — подходящая константа. В силу (16.4), (16.5), (16.12), суммируя по всем наборам $(\tilde{\alpha}_1,\ \ldots,\ \tilde{\alpha}_r)$, получаем

$$\|f_r\| \leqslant 2^{n-1} - c_{10} 2^n \log_2 n / \sqrt{n},\quad c_{10} > 0.$$

Лемма доказана.

Из (16.2) и лемм 16.1, 16.3, 16.4 следует, что

$$|H(n)| < \psi(n) \sum_{r=2}^{[1/4 \log_2 n]} 2^{2^{n-1} - 2^{n-r-1}} +$$

$$+ \psi(n) \sum_{r=[1/4 \log_2 n]+1}^{n} 2^{2^{n-1} - c_{10} 2^n \log_2 n / \sqrt{n}} = o\left(2^{2^{n-1}}\right) = o\left(|F_8^\infty(n)|\right).$$

Тем самым справедливость (16.1) установлена.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Post E. L.** Two-valued iterative systems of mathematical ligic.— Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.— 122 p.
2. **Яблонский С. В., Гаврилов Г. И., Кудрявцев В. Б.** Функции алгебры логики и классы Поста.— М.: Наука, 1966.— 119 с.
3. **Эрдеш П., Клейтмен Д. Дж.** Экстремальные задачи о подмножествах конечного множества // Вероятностные методы в комбинаторике.— М.: Мир, 1976.— С. 115—130.
4. **Коршунов А. Д.** О мощности некоторых замкнутых классов из диаграммы Поста // 5 Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики: Тез. докл.— Новосибирск, 1980.— С. 107—108.
5. **Коршунов А. Д.** О мощности некоторых замкнутых классов Поста // Всесоюзная конференция по прикладной логике: Тез. докл.— Новосибирск, 1985.— С. 107—109.
6. **Коршунов А. Д.** Решение проблемы Дедекинда о числе монотонных булевых функций // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 233, № 4.— С. 543—546.
7. **Коршунов А. Д.** О числе монотонных булевых функций // Проблемы кибернетики.— 1980.— Вып. 38.— С. 5—108.
8. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— Т. 1.— М.: Мир, 1967.— 498 с.
9. **Katona G. O. H.** The Hamming-sphere has minimum boundary // Stud. sci. math.— 1975.— V. 10, N 1-2.— P. 131—140.

О ВЕРХНИХ ОЦЕНКАХ ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ГРАФОВ

А. В. КОСТОЧКА

Задачи раскраски графов интересны не только сами по себе, но и ввиду многочисленных приложений. Они возникают при исследовании различных вопросов теории расписаний, теории кодирования, теоретического программирования, диагностики неисправностей и др. (см., например, [1—5]). В то же время даже задача распознавания по данному графу, можно ли его вершины окрасить в три цвета, является NP-полной [6]. Эти факты объясняют интерес к нахождению верхних оценок хроматического числа через другие характеристики графов. Естественной оценкой снизу для хроматического числа является плотность. Верхней оценки для хроматического числа в терминах плотности нет. Более того, существуют графы любого обхвата со сколь угодно большим хроматическим числом. Тем не менее для многих интересных классов графов удается найти нетривиальные верхние оценки хроматического числа графов, принадлежащих этим классам, через плотность или обхват. К таковым относятся, например, реберные графы [7], тотальные графы [8], графы пересечений дуг окружности [9], графы с ограниченной максимальной степенью вершин [10—13], графы ограниченного рода, с ограниченным числом вершин, с запрещенными подграфами определенного вида [14] и т. п. Для перечисленных и некоторых других классов графов удается находить оценки для $\varphi(\mathfrak{G}, k)$ и $f(\mathfrak{G}, g)$, где $\varphi(\mathfrak{G}, k)$ (соответственно $f(\mathfrak{G}, g)$) — наибольшее хроматическое число, которое могут иметь графы из класса $\mathfrak{G}$ с плотностью k (соответственно обхватом $g+1$). Такого же рода вопросы изучаются в настоящей работе. В частности, улучшена для больших n известная [15] нижняя