Из (16.2) и лемм 16.1, 16.3, 16.4 следует, что

$$|H(n)| < \psi(n) \sum_{r=2}^{[1/4 \log_2 n]} 2^{2^{n-1} - 2^{n-r-1}} +$$

$$+ \psi(n) \sum_{r=[1/4 \log_2 n]+1}^{n} 2^{2^{n-1} - c_{10} 2^n \log_2 n / \sqrt{n}} = o\left(2^{2^{n-1}}\right) = o\left(\left|F_8^\infty(n)\right|\right).$$

Тем самым справедливость (16.1) установлена.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Post E. L.** Two-valued iterative systems of mathematical ligic.— Princeton: Princeton Univ. Press, 1941.— 122 p.
2. **Яблонский С. В., Гаврилов Г. И., Кудрявцев В. Б.** Функции алгебры логики и классы Поста.— М.: Наука, 1966.— 119 с.
3. **Эрдеш П., Клейтмен Д. Дж.** Экстремальные задачи о подмножествах конечного множества // Вероятностные методы в комбинаторике.— М.: Мир, 1976.— С. 115—130.
4. **Коршунов А. Д.** О мощности некоторых замкнутых классов из диаграммы Поста // 5 Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики: Тез. докл.— Новосибирск, 1980.— С. 107—108.
5. **Коршунов А. Д.** О мощности некоторых замкнутых классов Поста // Всесоюзная конференция по прикладной логике: Тез. докл.— Новосибирск, 1985.— С. 107—109.
6. **Коршунов А. Д.** Решение проблемы Дедекинда о числе монотонных булевых функций // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 233, № 4.— С. 543—546.
7. **Коршунов А. Д.** О числе монотонных булевых функций // Проблемы кибернетики.— 1980.— Вып. 38.— С. 5—108.
8. **Феллер В.** Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— Т. 1.— М.: Мир, 1967.— 498 с.
9. **Katona G. O. H.** The Hamming-sphere has minimum boundary // Stud. sci. math.— 1975.— V. 10, N 1-2.— P. 131—140.

О ВЕРХНИХ ОЦЕНКАХ ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ГРАФОВ

А. В. КОСТОЧКА

Задачи раскраски графов интересны не только сами по себе, но и ввиду многочисленных приложений. Они возникают при исследовании различных вопросов теории расписаний, теории кодирования, теоретического программирования, диагностики неисправностей и др. (см., например, [1—5]). В то же время даже задача распознавания по данному графу, можно ли его вершины окрасить в три цвета, является *NP*-полной [6]. Эти факты объясняют интерес к нахождению верхних оценок хроматического числа через другие характеристики графов. Естественной оценкой снизу для хроматического числа является плотность. Верхней оценки для хроматического числа в терминах плотности нет. Более того, существуют графы любого обхвата со сколь угодно большим хроматическим числом. Тем не менее для многих интересных классов графов удается найти нетривиальные верхние оценки хроматического числа графов, принадлежащих этим классам, через плотность или обхват. К таковым относятся, например, реберные графы [7], тотальные графы [8], графы пересечений дуг окружности [9], графы с ограниченной максимальной степенью вершин [10—13], графы ограниченного рода, с ограниченным числом вершин, с запрещенными подграфами определенного вида [14] и т. п. Для перечисленных и некоторых других классов графов удается находить оценки для $\varphi(\mathfrak{G}, k)$ и $f(\mathfrak{G}, g)$, где $\varphi(\mathfrak{G}, k)$ (соответственно $f(\mathfrak{G}, g)$) — наибольшее хроматическое число, которое могут иметь графы из класса $\mathfrak{G}$ с плотностью k (соответственно обхватом $g+1$). Такого же рода вопросы изучаются в настоящей работе. В частности, улучшена для больших n известная [15] нижняя оценка функции $f(n, g)$, где $f(n, g)$ — наибольшее хроматическое число, которое может иметь n-вершинный граф обхвата $g+1$. Далее, рассматривается вопрос: сколь велико может быть хроматическое число $\chi(G)$ n-вершинного графа G без всесмежных вершин, если в его дополнении найдется не более h ребер, никакие два из которых не входят в общую клику? Несколько неожиданным оказывается факт, что при $h \leqslant 5$ имеем $\chi(G) \leqslant h$, а при $h=6$ уже нельзя оценить сверху $\chi(G)$ только через h. Во второй части работы, § 4, изучаются оценки хроматического числа через плотность для интересных с теоретической и прикладной точек зрения классов графов — класса $\mathfrak{X}$ графов пересечений хорд окружности и класса $\overline{\mathfrak{X}}$ — их дополнений [4, гл. 11; 16]. Показано, в частности, что $\varphi(\overline{\mathfrak{X}}, k) \sim k \ln k$ для больших k.

§ 1. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В определениях мы следуем в основном [17]. Через $V(G)$, $E(G)$ и $\overline{G}$ будем обозначать, соответственно, множество вершин, множество ребер и дополнение графа G. Если $V_0 \subset V(G)$, то $G(V_0)$ (соответственно $G \setminus V_0$) — это подграф графа G, порожденный множеством вершин V_0 (соответственно $V(G) \setminus V_0$). Для $v \in V(G)$ обозначим $N_G(v) = \{w \in V(G) \mid (v, w) \in E(G)\}$, $d_G(v) = |N_G(v)|$. Скажем, что *вершина* $v \in V(G)$ *изолированная*, если $d_G(v)=0$. *Суграфом, порожденным множеством* $E_0 \subset E(G)$ графа G, назовем часть G_0 графа G с $E(G_0)=E_0$. Подмножество V_0 вершин графа G называется *неплотным*, если $G(V_0)$ не имеет ребер. *Кликой графа* G будем называть любой максимальный по включению полный подграф графа G. *Плотностью* $\omega(G)$ (*неплотностью* $\alpha(G)$) графа G называется число вершин в наибольшем полном подграфе (наибольшем неплотном множестве вершин) в G. *Обхват* $g(G)$ — это длина кратчайшего цикла в G. Следуя [18], определим *случайный граф* $\mathbf{G}_{n,p}$ для $0 \leqslant p \leqslant 1$ так: $\mathbf{G}_{n,p}$ есть случайная величина, чьи значения — все графы с n нумерованными вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Причем для каждого $e=(v_i, v_j)$ имеем $\mathbf{P}[e \in E(\mathbf{G}_{n,p})]=p$ и для различных ребер эти вероятности независимы. Таким образом, для любого графа G с n нумерованными вершинами

$$\mathbf{P}\,[\mathbf{G}_{n,p} = G] = p^{|E(G)|}(1-p)^{\binom{n}{2}-|E(G)|}.$$

Наименьшее число неплотных множеств (полных подграфов) в G, покрывающих $V(G)$, называется *хроматическим* (*кликоматическим*) *числом* графа G и обозначается $\chi(G)$ ($\sigma(G)$). Очевидно, $\sigma(G)=\chi(\overline{G})$. Через $[x]$ ($\lceil x \rceil$) обозначается ближайшее снизу (сверху) к x целое число.

§ 2. ГРАФЫ С БОЛЬШИМ ХРОМАТИЧЕСКИМ ЧИСЛОМ И ЗАДАННЫМ ОБХВАТОМ

Поскольку для любого натурального $l \geqslant 3$ есть графы обхвата l со сколь угодно большим хроматическим числом, то естествен вопрос: сколь малое число вершин может иметь граф обхвата l с хроматическим числом k? Двойственная форма этого вопроса такова: как растет функция $f(n, l)$, где $f(n, l)$ — наибольшее хроматическое число, которое может иметь n-вершинный граф с обхватом $l+1$? Этот вопрос также связан с рамсеевскими задачами на графах. Легко убедиться, что $f(n, l) \leqslant n^{1/[l/2]}+2$ [18, с. 60]. Лучшую из известных нам нижних оценок для $f(n, l)$ дает следующая

Теорема (Эрдеш [15]). *Если l и η — фиксированные числа, $0<\eta<1/2l$, то для достаточно большого n найдется n-вершинный граф G без циклов длины, не превосходящей l такой, что $\chi(G) \geqslant n^{\eta}$.*

Таким образом, при любом фиксированном l для каждого $0<\varepsilon<1/2l$ при достаточно больших n

$$f(n,\ l)>n^{(1/2l)-\varepsilon}. \qquad (1)$$

В этом параграфе мы улучшим оценку (1).

Теорема 2.1. *Пусть $l\geqslant 3$ — фиксированное целое число. Тогда для каждого достаточно большого n существует такой n-вершинный граф G без циклов длины, не превосходящей l, что $\chi(G_n)>(1/\ln n)n^{1/l}$.*

Доказательство. Пусть $l\geqslant 3$ фиксировано, n велико по сравнению с l, $m=[(l+1)n/l]$. Рассмотрим для $p=m^{(1/l)-1}$ случайный граф $\mathrm{G}_{m,p}$. Вероятность того, что найдется неплотное множество мощности $k=[(3/4)m^{1-1/l}\ln(m/2)]$, не превосходит

$$\binom{m}{k}(1-p)^{\binom{k}{2}}\leqslant\frac{m^k}{k!}\exp\{-pk(k-1)/2\}\leqslant\left(\frac{me}{k}\exp\left\{-p\frac{k-1}{2}\right\}\right)^k.$$

Но

$$\frac{me}{k}\exp\left\{-p\frac{k-1}{2}\right\}\leqslant\frac{4me}{3\ln(m/2)}m^{1/l-1}\exp\left\{-m^{1/l-1}\frac{(3/4)m^{1-1/l}\ln(m/2)(1+o(1))}{2}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{\ln(m/2)}m^{1/l}\exp\left\{-\frac{1}{3}\ln\frac{m}{2}\right\}=\frac{4m^{1/l}}{\ln(m/2)}\left(\frac{m}{2}\right)^{-1/3}=o(1).$$

Таким образом, $\mathrm{P}[\alpha(\mathrm{G}_{m,p})\geqslant k]=o(1)$.

Пусть $c(i)$ — случайная величина, равная числу циклов длины i в $\mathrm{G}_{m,p}$. Тогда математическое ожидание $\mathrm{E}(c(i))$ не больше, чем

$$\binom{m}{i}\frac{(i-1)!}{2}p^i\leqslant\frac{m^i}{2i}(m^{(1/l)-1})^i=\frac{1}{2i}m^{i/l}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=3}^{l}c(i)\right)\leqslant\sum_{i=3}^{l}\frac{1}{2i}m^{i/l}=\frac{1}{2l}m(1+o(1)).$$

Поэтому вероятность того, что $\sum\limits_{i=3}^{l}c(i)\geqslant\frac{2m}{3l}$, меньше 0,8. Таким образом, с положительной вероятностью $\mathrm{G}_{m,p}$ обладает свойствами

(а) $\alpha(\mathrm{G}_{m,p})<k$,

(б) число циклов длины, не превосходящей l, в $\mathrm{G}_{m,p}$ меньше $2m/(3l)$.

Следовательно, существует m-вершинный граф G', удовлетворяющий (а), (б). Выберем в G' в каждом из циклов c_j $(j=1,\ \ldots,\ t)$ длины, меньшей $l+1$, какую-нибудь вершину v_j (возможно, $v_j=v_{j'}$ при $j\neq j'$). Рассмотрим $G''=G'\setminus\{v_1,\ \ldots,\ v_t\}$. Поскольку, согласно свойству (б), $t<2m/(3l)$, то $|V(G'')|\geqslant m-t\geqslant m-2m/3l=[(l+1)n/l](1-2/3l)\geqslant n$. Удалив из G'' любые $|V(G'')|-n$ вершин, получим такой n-вершинный граф G без циклов длины, не превосходящей l, что $\alpha(G)<k=[(3/4)m^{1-1/l}\ln(m/2)]<(3/4)(1+1/l)^{1-1/l}n^{1-1/l}\ln n<n^{1-1/l}\ln n$. Таким образом, $\chi(G)\geqslant n/\alpha(G)>n^{1/l}/\ln n$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Пусть l, k — натуральные числа и k велико по сравнению с l. Тогда существует граф обхвата $l+1$ с хроматическим числом, бо́льшим k, число вершин которого менее $((l+1)k\ln k)^l$.*

§ 3. ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО ГРАФА И РАЗРЕЖЕННОСТЬ ЕГО ДОПОЛНЕНИЯ

3.1. Обсуждение задачи. Подмножество ребер E' графа G называется *разреженным*, если любая клика в G содержит не более одного ребра из E'. *Разреженностью* $h(G)$ назовем мощность наибольшего разреженного множества ребер в G. Разреженность графа G является оценкой снизу для $cc(G)$ — наименьшего числа клик, покрывающих все ребра графа G. Величина $cc(G)$ интересна, в частности, тем, что она равна минимально возможной мощности множества M, для которого G — граф пересечений некоторой системы подмножеств M (некоторые подмножества M могут входить в эту систему несколько раз) [19].

Для каждого графа G без изолированных вершин очевидны неравенства $\alpha(\bar{G})\leqslant h(G)\leqslant cc(G)$, $\alpha(\bar{G})\leqslant\chi(\bar{G})\leqslant cc(G)$. Партасарати и Чоудум [20] предполагали, что для любого графа G без изолированных вершин верно

$$\chi(\bar{G})\leqslant h(G), \tag{2}$$

и, таким образом, $\alpha(\bar{G})\leqslant\chi(\bar{G})\leqslant h(G)\leqslant cc(G)$. Бригхэм и Даттон [21] доказали справедливость (2) для графов G с $h(G)\leqslant 2$. Однако Эрдеш [22] показал, что (2) не выполняется для почти всех n-вершинных графов. Более того [22], для каждого h, начиная с некоторого h_0, существует такая положительная константа c_h, что для любого $n\geqslant n_0(c_h)$ найдется n-вершинный граф G_n без изолированных вершин, удовлетворяющий условиям

$$h(G_n)\leqslant h, \quad \chi(\bar{G}_n)\geqslant n^{c_h}. \tag{3}$$

В связи с этим возникают [22, 23] следующие вопросы.

1. Чему равно h_1 — наибольшее целое такое, что для графов G с $h(G)\geqslant h_1$ выполняется (2)?

2. Чему равно h_0, определенное выше?

3. Как можно оценить сверху $\chi(\bar{G})$ через $h(G)$ и число вершин, если $h(G)>h_1$? В частности, как ведет себя c_h при $h\geqslant h_0$?

Мы покажем ниже, что $h_1=5$, $h_0=6$, $c_6>1/8$, $1-2\sqrt{2}/(\sqrt{h}-2)<c_h\leqslant 1-1/\sqrt{h}$ при $h\geqslant 7$.

3.2. Оценки сверху для $\chi(\bar{G})$ через $h(G)$.

Теорема 3.1. *Если граф G не имеет изолированных вершин и $\chi(\bar{G})\leqslant 6$, то $\chi(\bar{G})\leqslant h(G)$.*

Доказательство. Пусть $G=(V, E)$ — контрпример к теореме с наименьшим числом вершин, $\bar{G}=(V, \bar{E})$. Тогда

$$h(G)+1\leqslant\chi(\bar{G})\leqslant 6. \tag{4}$$

Очевидно, $|V|\geqslant 4$. Покажем, что

$$\alpha(G(N_G(v)))\geqslant 2 \quad \forall v\in V. \tag{5}$$

Действительно, допустим, что $G(N_G(v_1))$ — полный граф. Пусть $G_1=G\backslash N_G(v_1)$ и $V_1=\{v_1, \ldots, v_s\}$ — множество изолированных вершин в G_1. Тогда граф $G_2=G_1\backslash V_1$ не имеет изолированных вершин, и $\chi(\bar{G}_2)\leqslant h(G_2)$ в силу минимальности G. Выберем в G_2 для $r=h(G_2)$ какое-нибудь разреженное множество ребер $\{e_1, \ldots, e_r\}$. Поскольку G не имеет изолированных вершин, то для $i=1, \ldots, s$ можно выбрать $e_{r+i}\in E$, инцидентное v_i. Так как V_1 — неплотное множество в G, то e_{s+i} и e_{s+j} не входят в общую клику при $i\neq j$. Учитывая, что при $j\in\{1, \ldots, r\}$ оба конца e_j не смежны с вершинами из V_1, получаем

$$h(G)\geqslant r+s=h(G_2)+s\geqslant\chi(\bar{G}_2)+s. \tag{6}$$

С другой стороны, так как подграф $G(N_G(v_1)\cup\{v_1\})$ есть клика, имеем $\chi(\bar{G})\leqslant\chi(\bar{G}_2)+s$. Учитывая (6), получаем $h(G)\geqslant\chi(\bar{G}_2)+s\geqslant\chi(\bar{G})$; противоречие с (4). Итак, (5) верно.

Пусть $\alpha(G)=k$ и $\{v_1, \ldots, v_k\}$ — неплотное множество в G. Согласно (5) для каждого $i=1, \ldots, k$ найдутся такие вершины $x_i, y_i\in N_G(v_i)$, что $(x_i, y_i)\notin E$. Следовательно, $\{(v_i, x_i), (v_i, y_i)\,|\,i=1, \ldots, k\}\subset E$ — разреженное множество и $h(G) \geqslant 2\alpha(G)$. Сравнивая с (4), получаем

$$2 \geqslant \alpha(G) = \omega(\overline{G}), \tag{7}$$

$$\chi(\overline{G}) \geqslant 5. \tag{8}$$

Выберем в $\overline{G}$ такое ребро (v_1, v_2), что

$$d_{\overline{G}}(v_1) + d_{\overline{G}}(v_2) = \max\{d_{\overline{G}}(u) + d_{\overline{G}}(w) \mid (u, w) \in \overline{E}\}. \tag{9}$$

Пусть $V_j = N_{\overline{G}}(v_{3-j})$, $j = 1, 2$. В силу (7) V_j — неплотное множество в G, $j = 1, 2$. Обозначим $H = \overline{G} \setminus (V_1 \cup V_2)$. Тогда, учитывая (8), получаем, что $\chi(H) \geqslant 3$ и в H есть нечетный цикл $C = (x_1, \ldots, x_{2s+1})$ без хорд. Благодаря (7) $s \geqslant 2$. Рассмотрим кратчайшую из цепей, соединяющих в $\overline{G}$ множества $\{v_1, v_2\}$ и $\{x_1, \ldots, x_{2s+1}\}$. Можно считать, что это цепь $(w_1, \ldots, w_r)$, где $w_1 = x_1$, $w_r = v_2$. Так как $x_1 \notin V_1 \cup V_2$, то $r \geqslant 3$. Заметим, что $w_{r-2} \in N_{\overline{G}}(w_{r-1}) \setminus N_{\overline{G}}(v_1)$, и поэтому вложение $N_{\overline{G}}(v_1) \subset \subset N_{\overline{G}}(w_{r-1})$ противоречило бы (9). Следовательно, существует $v_0 \in \in N_{\overline{G}}(v_1) \setminus N_{\overline{G}}(w_{r-1})$. Обозначим $w_{r+1} = v_1$, $w_{r+2} = v_0$, $E_0 = \{(x_4, x_1), (x_3, w_3), (x_2, w_3), (x_3, w_4), (x_2, w_4), (w_2, w_5)\}$. Поскольку w_i при $3 \leqslant \leqslant i \leqslant r+1$ не смежна в $\overline{G}$ с вершинами цикла C, то $\{(x_3, w_3), (x_2, w_3), (x_3, w_4), (x_2, w_4)\} \subset E$. Так как C не имеет хорд, то $(x_4, x_1) \in E$. Цепь $(w_1, \ldots, w_r)$ не имеет хорд, поэтому, учитывая выбор w_5 при $r = 3$, имеем $(w_2, w_5) \in E$. Следовательно, $E_0 \subset E$. Поскольку ребра цепи $(x_4, x_3, x_2, x_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ принадлежат $\overline{E}$, то E_0 — разреженное множество в G, и $h(G) \geqslant 6$; противоречие с (4). Теорема доказана.

Теорема 3.2. *Пусть $n \geqslant 10$, $h \geqslant 6$, $l = [\sqrt{h}]$ — целые числа. Тогда для любого n-вершинного графа G без изолированных вершин такого, что $h(G) \leqslant h$, имеем $\chi(\overline{G}) \leqslant 3hn^{1-1/l}$.*

Доказательство. Допустим, что теорема неверна, $G(V, E)$ — наименьший по числу вершин контрпример к теореме, $|V| = n$, $h(G) = h$, $i = [\sqrt{h}]$. Поскольку при $n \leqslant (3h)^l$ имеем $3hn^{1-1/l} \geqslant n$, то $n \geqslant (3h)^l$. По теореме 3.1 $h \geqslant 6$. Покажем, что

$$\omega(G) < n^{1/l}/h. \tag{10}$$

Допустим, что в G найдется полный подграф $G(V_1)$, $|V_1| = k = [n^{1/l}/h]$. Обозначим $G_1 = G \setminus V_1$, $V_2 = \{v \in V(G_1) \mid d_{G_1}(v) = 0\}$, $G_2 = G_1 \setminus V_2$. Если $V_2 = \{u_1, \ldots, u_r\}$, то $|V(G_2)| = n - k - r$. Так как в G нет изолированных вершин, то для каждого $i = 1, \ldots, r$ найдется вершина u_i', смежная в G с u_i. Для любого разреженного множества $E' \subset E(G_2)$ множество $E' \cup \{(u_i, u_i') \mid i = 1, \ldots, r\}$ будет разреженным в G. Следовательно, $h = h(G) \geqslant h(G_2) + r$. Ввиду минимальности G имеем $\chi(\overline{G}_2) \leqslant \leqslant 3h(G_2)(n-k-r)^{1-1/l}$. Поскольку V_1 — клика в G, то $\chi(\overline{G}) \leqslant 1 + r + + \chi(\overline{G}_2)$. Таким образом,

$$\chi(\overline{G}) \leqslant 1 + r + 3h(G_2)(n-k-r)^{1-1/l} \leqslant$$
$$\leqslant 1 + r + 3(h-r)(n-k-r)^{1-1/l}. \tag{11}$$

Так как $h \geqslant h(G_2) + r \geqslant r$, то при $n - k - r = 0$ теорема верна. При $n - - k - r \geqslant 1$ из (11) получаем

$$\chi(\overline{G}) \leqslant 1 + 3h(n-k)^{1-1/l} = 3hn^{1-1/l}\left(\frac{n^{-1+1/l}}{3h} + \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{1-1/l}\right) \leqslant$$
$$\leqslant 3hn^{1-1/l}\left(\frac{n^{-1+1/l}}{3h} + 1 - \frac{k(1-1/l)}{n}\right).$$

Но по выбору k и l

$$\frac{n^{-1+1/l}}{3h} + 1 - \frac{k(1-1/l)}{n} \leqslant \frac{1}{3hn^{1-1/l}} + 1 - \frac{n^{1/l}}{2nh} < 1$$

и $\chi(\overline{G}) \leqslant 3hn^{1-1/l}$; противоречие с выбором G. Следовательно, (10) верно.

Для чисел Рамсея $R(k, l)$ известно [18, с. 24] соотношение $R(k, l) \leqslant \binom{k+l-2}{k-1}$. Другими словами, для любого графа G

$$\binom{\omega(G)+\alpha(G)}{\alpha(G)} > |V(G)|. \qquad (12)$$

Легко видеть, что при $n \geqslant (3h)^l$

$$\binom{l+[n^{1/l}/h]}{l} \leqslant \max\left\{\binom{2l}{l}, \binom{[2n^{1/l}/h]}{l}\right\} \leqslant \max\{(2l)^l, 4n/h^2\}/l! < n/h.$$

Учитывая (10) и (12), для любого $V' \subset V$, $|V'| \geqslant n/h$, имеем

$$\alpha(G(V')) \geqslant l+1. \qquad (13)$$

Пусть $Q_0 = \{v_1, \ldots, v_q\}$ — наибольшее неплотное множество в G и $Q_i = \{w_{i1}, \ldots, w_{is_i}\}$—наибольшее неплотное множество в $G(N_G(v_i))$, $i = 1, \ldots, q$. Обозначим $E' = \{(v_i, w_{ij}) | i = 1, \ldots, q;\ j = 1, \ldots, s_i\}$. Рассмотрим произвольные два ребра (v_i, w_{ij}), $(v_{i'}, w_{i'j'}) \in E' \subset E$. Если $i \neq i'$, то $(v_i, v_{i'}) \notin E$, поскольку Q_0 — неплотное множество. Если $i = i'$, то $(w_{ij}, w_{i'j'}) \notin E$, поскольку Q_i — неплотное множество. Таким образом, E' — разреженное множество и $h \geqslant |E'|$. Так как в G нет изолированных вершин, то $s_i \geqslant 1$, $i = 1, \ldots, q$, и $h \geqslant q$. Можно считать, что $|N_G(v_i)| \geqslant |N_G(v_j)|$ при $1 \leqslant i < j \leqslant q$. Согласно (13) $q \geqslant l+1$. Если $|N_G(v_{l+1})| \geqslant n/h$, то из (13) получаем $s_i \geqslant l+1$, $i = 1, 2, \ldots, l+1$, и

$$h \geqslant |E'| \geqslant \sum_{i=1}^{l+1} s_i \geqslant (l+1)^2 > h,$$

что невозможно. Следовательно, $|N(v_{l+1})| < n/h$.

Обозначив $V_0 = V \diagdown \left(\bigcup_{i=l+1}^{q} (N\ (v_i) \cup \{v_i\})\right)$, имеем $|V_0| > n - (q-l)((n/h)+1) \geqslant n-(h-l)(1+n/h) = (ln/h) - h + l > n/h$. Ввиду (13) $\alpha(G(V_0)) \geqslant l+1$. По построению вершины из V_0 не смежны в G с $v_{l+1}, v_{l+2}, \ldots, v_q$, поэтому в G есть неплотное множество мощности $\alpha(G(V_0)) + q - l \geqslant l+1+q-l = 1+q$. Противоречие с максимальностью Q_0 завершает доказательство теоремы.

Следствие 3.1. *Для константы c_h, определенной в* (3), *при $h \geqslant 6$ справедливо неравенство $c_h \leqslant 1 - 1/[\sqrt{h}]$.*

3.3. Графы с малой разреженностью дополнения и высоким хроматическим числом. Напомним, что через $g(G)$ обозначается обхват, т. е. длина кратчайшего цикла в G. Очевидна

Лемма 3.1. *Пусть $G = (V, E)$ и $|E| \geqslant |V| + 1$. Тогда $g(G) \leqslant 2(|V|+1)/3$, причем если $|E| \geqslant |V| + 2$, то $g(G) \leqslant 1 + |V|/2$.*

Лемма 3.2. *Если $g(G) \geqslant 4$, то для любого разреженного множества ребер $\bar{E}$ в $\bar{G}$ каждой вершине из $\bar{G}$ инцидентно не более двух ребер из $\bar{E}$.*

Доказательство. Если множество ребер $\{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3)\}$ разреженное в $\bar{G}$, то графу G должны принадлежать ребра (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1), образующие 3-цикл.

Лемма 3.3. *Пусть $g(G) \geqslant 5$ и ребра двух непересекающихся цепей (v_1, v_2, v_3) и (v_4, v_5, v_6) образуют разреженное множество в $\bar{G}$. Тогда v_2 смежна в G с какой-нибудь вершиной из $\{v_4, v_5, v_6\}$. Более того, если $(v_2, v_5) \notin E(G)$, то множества $\{v_1, v_2, v_3\}$ и $\{v_4, v_5, v_6\}$ соединяют в G ровно три ребра.*

Доказательство. Поскольку множество $\bar{E} = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_4, v_5), (v_5, v_6)\}$ — разреженное в $\bar{G}$, то $(v_1, v_3) \in E(G)$, $(v_4, v_6) \in E(G)$ и каждый из подграфов графа G на множествах вершин $\{v_i, v_{i+1}, v_j, v_{j+1}\}$ для $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{4, 5\}$ должен содержать хотя бы одно ребро.

С другой стороны, так как $g(G) \geqslant 5$ и $(v_1, v_3) \in E(G)$, $(v_4, v_6) \in E(G)$, то не более, чем по одному ребру каждого из множеств $E_1 = \{(v_2, v_4), (v_2, v_6)\}$, $E_2 = \{(v_1, v_5), (v_3, v_5)\}$, $E_3 = \{(v_1, v_4), (v_1, v_6), (v_3, v_4), (v_3, v_6)\}$ принадлежит $E(G)$. Нетрудно убедиться, что для этого при условии $(v_2, v_5) \notin E(G)$ необходимо, чтобы $E(G)$ принадлежало по одному ребру из множеств E_1, E_2, E_3. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть $g(G) \geqslant 8$ и в $\bar{G}$ есть разреженное множество $\tilde{E}$, $|\tilde{E}| = 7$. Тогда любое паросочетание, состоящее из ребер $\tilde{E}$, содержит не более четырех ребер.*

Доказательство. Допустим, что множество $\{\tilde{e}_i = (v_{2i-1}, v_{2i}) \mid i = 1, \ldots, 5\}$, содержащееся в $\tilde{E}$, является паросочетанием в $\bar{G}$. Обозначим $V_1 = \{v_1, \ldots, v_{10}\}$. Можно считать, что паросочетание выбрано среди всех паросочетаний, состоящих из пяти ребер, принадлежащих $\tilde{E}$, так, чтобы наибольшее возможное число ребер из $\tilde{E}$ содержалось в $\bar{G}(V_1)$. Поскольку наше паросочетание разреженное, то для каждых $1 \leqslant i < j \leqslant 5$ множества $\{v_{2i-1}, v_{2i}\}$ и $\{v_{2j-1}, v_{2j}\}$ соединяет в G хотя бы одно ребро. Следовательно,

$$d_{G(V_1)}(v_{2i-1}) + d_{G(V_1)}(v_{2i}) \geqslant 4, \quad i = 1, \ldots, 5. \tag{14}$$

Таким образом, $|E(G(V_1))| \geqslant 10$. Если $|E(G(V_1))| \geqslant 11$, то по лемме 3.1 $g(G) \leqslant 7$; противоречие с условием леммы. Поэтому

$$|E(G(V_1))| = 10, \tag{15}$$

и каждое из соотношений (14) является равенством. Допустим, что в $\tilde{E}$ есть ребро e_6, оба конца которого принадлежат V_1, например $e_6 = (v_1, v_3)$. Тогда (v_1, v_4), $(v_2, v_3) \in E(G)$ и $|E(G(\{v_1, v_2, v_3, v_4\}))| \geqslant 2$; противоречие с (15). Следовательно, ввиду леммы 3.2 каждая компонента связности суграфа $H = (\tilde{V}, \tilde{E})$ графа $\bar{G}$, порожденного $\tilde{E}$, есть или изолированная вершина, или ребро, или цепь длины два. Если в $\tilde{E}$ есть ребро $\tilde{e}_6 = (v_{11}, v_{12})$, где $\{v_{11}, v_{12}\} \cap V_1 = \varnothing$, то $\{v_{11}, v_{12}\}$ соединяет в G с каждым из $\{v_{2i-1}, v_{2i}\}$, $i = 1, \ldots, 5$, не менее одного ребра. Значит, $|E(G(V_1 \cup \{v_{11}, v_{12}\}))| \geqslant 15$ и по лемме 3.1 $g(G) \leqslant 7$. Таким образом, в H есть две цепи длины 2, (v_{11}, v_1, v_2) и (v_{12}, v_3, v_4), и три ребра (v_{2i-1}, v_{2i}), $i = 3, 4, 5$.

Если $d_{G(V_1)}(v) = 0$ для некоторой вершины $v \in V_1$, то согласно (15) $|E(G(V_1 \setminus \{v\}))| = 10$ и по лемме 3.1 $g(G) \leqslant 6$. Следовательно, $d_{G(V_1)}(v_1) = 4 - d_{G(V_1)}(v_2) \leqslant 3$, $d_{G(V_1)}(v_3) \leqslant 3$. Поэтому, заменив в нашем исходном паросочетании (v_1, v_2) на (v_1, v_{11}), получаем, что v_{11} соединяет в G с $V_1 \setminus \{v_1, v_2\}$ хотя бы одно ребро. Аналогично v_{12} соединяет в G с $V_1 \setminus \{v_3, v_4\}$ хотя бы одно ребро. Кроме того, (v_{11}, v_2), $(v_{12}, v_4) \in E(G)$. Следовательно, $|E(G(V_1 \cup \{v_{11}, v_{12}\}))| \geqslant 14$ и по лемме 3.1 $g(G) \leqslant 7$; противоречие. Лемма доказана.

Теорема 3.3. *Если $g(G) \geqslant 8$, то $h(\bar{G}) \leqslant 6$.*

Доказательство. Допустим, что для некоторого $G = (V, E)$ теорема неверна и найдется разреженное множество $\tilde{E} \subset E(\bar{G})$, $|\tilde{E}| = 7$. По лемме 3.2 компонентами связности суграфа $H = (\tilde{V}, \tilde{E})$, порожденного в $\bar{G}$ множеством $\tilde{E}$, являются циклы и цепи.

Допустим, что в H есть цикл $(v_1, \ldots, v_k)$. По определению разреженных множеств $k > 3$. Так как $|\tilde{E}| = 7$, то $k \leqslant 7$. Поскольку $(v_i, v_{i+2}) \in E(G)$ для $i = 1, \ldots, k$, то при $5 \leqslant k \leqslant 7$ мы имели бы $|E(G(\{v_1, \ldots, v_k\}))| \geqslant k$, что противоречит $g(G) \geqslant 8$. Следовательно, $k = 4$. По лемме 3.4 оставшиеся три ребра $\tilde{E}$ не образуют паросочетания. Поэтому в H есть цепь (v_5, v_6, v_7), не пересекающаяся с $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Очевидно, $\{(v_1, v_3), (v_2, v_4), (v_5, v_7)\} \subset E$. Применяя лемму 3.3 к парам цепей (v_5, v_6, v_7), (v_i, v_{i+1}, v_{i+2}) для $i = 1, 2, 3, 4$ $(4 + 1 \equiv 1)$, получим, что каждая из вершин v_1, v_2, v_3, v_4 смежна хотя бы с одной вершиной из $\{v_5, v_6, v_7\}$. Отсюда $|E(G(\{v_1, \ldots, v_7\}))| \geqslant 7$; противоречие с $g(G) \geqslant 8$. Таким образом, компонентами связности H являются цепи.

Пусть $(v_1, \ldots, v_t)$ — длиннейшая цепь в H.

Случай 1: $t \geqslant 6$. Тогда существует ребро $(w_1, w_2) \in \bar{E}$, не инцидентное ребрам цепи $(v_1, \ldots, v_6)$. Поскольку $\bar{E}$ разреженное, то $\{w_1, w_2\}$ соединяет в G с $\{v_1, \ldots, v_6\}$ не менее трех ребер, т. е. одна из вершин w_1, w_2 (пусть w_1) соединена с $\{v_1, \ldots, v_6\}$ не менее, чем двумя ребрами. Кроме того, $(v_i, v_{i+2}) \in E$ для $i = 1, 2, 3, 4$, и есть ребро $e \in E$, соединяющее $\{v_1, v_2\}$ с $\{v_5, v_6\}$. Следовательно, $|E(G(\{v_1, \ldots, v_6, w_1\}))| \geqslant 7$; противоречие с $g(G) \geqslant 8$.

Случай 2: $t = 5$. По лемме 3.4 остальные три ребра из $\bar{E}$ не образуют паросочетания. Поэтому в H есть цепь (v_6, v_7, v_8), не пересекающаяся с $\{v_1, \ldots, v_5\}$. Очевидно, $(v_i, v_{i+2}) \in E$ для $i = 1, 2, 3, 6$. Поэтому v_7 не смежна в G либо с v_2, либо с v_4. Пусть $(v_2, v_7) \notin E$. Тогда по лемме 3.3 $\{v_1, v_2, v_3\}$ с $\{v_6, v_7, v_8\}$ соединяют в G ровно три ребра. Кроме того, по той же лемме v_4 смежна с $\{v_6, v_7, v_8\}$. Следовательно, $|E(G(\{v_1, \ldots, v_4, v_6, v_7, v_8\}))| \geqslant 7$; противоречие с $g(G) \geqslant 8$.

Случай 3: $t \leqslant 4$. По лемме 3.4 только одна из компонент связности H является цепью нечетной длины. Поэтому возможные наборы длин цепей в H суть 3, 2, 2 и 2, 2, 2, 1. Во всяком случае, в H есть три непересекающиеся цепи длины два $(v_{3i-2}, v_{3i-1}, v_{3i})$ для $i = 1, 2, 3$. Понятно, что $(v_{3i-2}, v_{3i}) \in E$ для $i = 1, 2, 3$. Поскольку в G нет 3-циклов, то $|E \cap \{(v_2, v_5), (v_2, v_8), (v_5, v_8)\}| \leqslant 2$. Пусть $(v_2, v_5) \notin E$. Тогда по лемме 3.3. множества $V_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ и $V_2 = \{v_4, v_5, v_6\}$ соединяют в G три ребра. Если (v_2, v_8), $(v_5, v_8) \in E$, то $|E(G(V_1 \cup V_2 \cup \{v_8\}))| \geqslant 7$; противоречие с $g(G) \geqslant 8$. Пусть $(v_2, v_8) \notin E$. По лемме 3.3 множества V_1 и $V_3 = \{v_7, v_8, v_9\}$ соединяют в G три ребра. Учитывая, что в G есть ребро, соединяющее V_2 с V_3, имеем $|E(G(V_1 \cup V_2 \cup V_3))| \geqslant 10$. По лемме 3.1 $g(G) \leqslant 7$, что невозможно. Теорема доказана.

Следствие 3.2. *Для величин h_0, h_1, определенных в* п. 3.1, *имеет место соотношение $h_1 + 1 = h_0 = 6$. Кроме того, $c_6 \geqslant -\varepsilon + 1/7$ для любого $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. По теореме 2.1 для каждого $\varepsilon > 0$ при любом $n \geqslant n_0(\varepsilon)$ найдется такой граф G_n, что $|V(G_n)| = n$, $g(G_n) \geqslant 8$ и $\chi(G_n) > n^{-\varepsilon+1/7}$. Поскольку $g(G_n) > 3$, то в $\bar{G}_n$ нет изолированных вершин. По теореме 3.3 $h(\bar{G}_n) \leqslant 6$. Следовательно, $h_0 \leqslant 6$, $c_6 \geqslant -\varepsilon + 1/7$. С другой стороны, по теореме 3.1 $h_1 \geqslant 5$. Но $h_1 + 1 \leqslant h_0$. Следствие доказано.

Теорема 3.4. *Для любого $h \geqslant 7$ справедливо неравенство $c_h \geqslant 1 - 2\sqrt{2}/(\sqrt{h} - 2)$.*

Доказательство. Пусть n велико по сравнению с h, $k =. [\sqrt{h/2} - 1/4]$, $p = n^{-2/k}/\ln n$, $x =. [n^{2\sqrt{2}/(\sqrt{h}-2)}]$. Заметим, что $k/2 > (\sqrt{h} - 2)/2\sqrt{2}$ и

$$x > (\ln^2 n)/p \tag{16}$$

при больших n.

Скажем, что *n-вершинный граф G обладает свойством*

A если в G нет изолированных вершин,

B если $\omega(G) \leqslant k$,

C если $\alpha(G) < x$,

D_i $(i = k+1, k+2, \ldots, 2k+1)$ если каждый подграф графа G на $2i$ вершинах содержит менее ki ребер.

Рассмотрим случайный граф $\mathrm{G}_{n,p}$. Пусть a, b, c, d_{k+1}, d_{k+2}, ..., d_{2k+1} — вероятности того, что $\mathrm{G}_{n,p}$ обладает свойствами, соответственно, A, B, C, D_{k+1}, D_{k+2}, ..., D_{2k+1}. Тогда

$$1 - a \leqslant np^{n-1} = o(1),$$

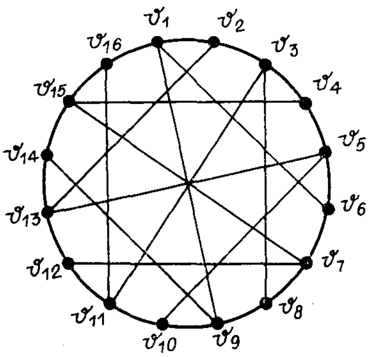
$$1 - b \leqslant \binom{n}{k+1} p^{\binom{k+1}{2}} \leqslant n^{k+1} n^{-\frac{2}{k}\frac{(k+1)k}{2}} \Big/ \ln n = 1/\ln n,$$

$$1-d_i \leqslant \binom{n}{2i} 2^{(2i)^2} p^{ki} \leqslant 2^{(2i)^2} n^{2i} n^{-\frac{2}{k}ki} \Big/ \ln^k n = o\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

$$1-c \leqslant \binom{n}{x} (1-p)^{\binom{x}{2}} \leqslant \exp\left\{x \ln n - \frac{px(x-1)}{2}\right\} = \exp\left\{x\left(\ln n - \frac{p(x-1)}{2}\right)\right\},$$

и согласно (16) $1-c=o(1)$. Поскольку k фиксировано, то при достаточно больших n вероятность того, что $G_{n,p}$ обладает каждым из свойств A, B, C, D_{k+1}, D_{k+2}, ..., D_{2k+1}, положительна. Следовательно, существует n-вершинный граф G, обладающий всеми этими свойствами. Из С следует, что $\chi(G) \geqslant n/\alpha(G) > n/x > n^{1-2\sqrt{2}/(\sqrt{k}-2)}$. Пусть $\tilde{E}$ — наибольшее разреженное множество ребер в $\bar{G}$. Рассмотрим $H=(\tilde{V}, \tilde{E})$ — суграф графа $\bar{G}$, порожденный ребрами из $\tilde{E}$. Если бы в H нашлась вершина, смежная с m $(m \geqslant k+1)$ вершинами $w_1, \ldots, w_m$, то подграф $G(\{w_1, \ldots, w_m\})$ был бы полным, что противоречит свойству В. Следовательно, $d_H(v) \leqslant k$ для каждой вершины $v \in V'$. Напомним, что из-за разреженности $\tilde{E}$ граф H не имеет треугольников.

Пусть $\{(v_{1,j}, v_{2,j})\}_{j=1}^{t}$ — наибольшее паросочетание в H. Поскольку $\tilde{E}$ — разреженное множество, то для любых $j \neq j'$ множества $\{v_{1,j}, v_{2,j}\}$ и $\{v_{1,j'}, v_{2,j'}\}$ соединяет в G хотя бы одно ребро. Таким образом, при $t \geqslant 2k+1$ в подграфе графа G, порожденном множеством $\{v_{1,j}, v_{2,j} \mid j=1, \ldots, 2k+1\}$, не менее $k(2k+1)$ ребер, что противоречит свойству D_{2k+1}. Следовательно, $t \leqslant 2k$.



Граф G_0.

Обозначим $V_i = \{v_{i,j} \mid j=1, \ldots, t\}$ для $i=1, 2$. Из-за максимальности выбранного паросочетания и отсутствия треугольников в H для любого $j \in \{1, \ldots, t\}$ либо $v_{1,j}$, либо $v_{2,j}$ не смежна в H с вершинами из $V(G) \setminus (V_1 \cup V_2)$. Можно считать, что $v_{2,j}$ не смежна в H с вершинами $V(G) \setminus (V_1 \cup V_2)$ для каждого $i \in \{1, \ldots, t\}$. Кроме того, каждое ребро графа H инцидентно какой-нибудь вершине из $V_1 \cup V_2$. Следовательно,

$$|\tilde{E}| \leqslant \sum_{j=1}^{t} d_H(v_{1,j}) + |E(H(V_2))|. \tag{17}$$

Как уже отмечалось, из-за разреженности $\tilde{E}$ для любых $j \neq j'$ множества $\{v_{1,j}, v_{2,j}\}$ и $\{v_{1,j'}, v_{2,j'}\}$ соединяет в G хотя бы одно ребро. Более того, если $(v_{2,j}, v_{2,j'}) \in \tilde{E}$, то $(v_{1,j}, v_{2,j'}) \in E(G)$, $(v_{1,j'}, v_{2,j}) \in E(G)$. Таким образом, граф $G(V_1 \cup V_2)$ имеет не менее $\binom{t}{2} + |E(H(V_2))|$ ребер. При $k+1 \leqslant t \leqslant 2k$ согласно свойству D_t $\binom{t}{2} + |E(H(V_2))| < kt$. Отсюда и из (17) получаем

$$|\tilde{E}| \leqslant \sum_{j=1}^{t} d_H(v_{1,j}) + kt - t(t-1)/2 \leqslant$$

$$\leqslant 2kt - t(t-1)/2 = t(4k-t+1)/2 \leqslant k(2k+1).$$

Если же $t \leqslant k$, то из (17) следует, что $|\tilde{E}| \leqslant kt + t(t-1)/2 \leqslant k^2 + k(k-1)/2 < k(2k+1)$. Поскольку $k = [\sqrt{h/2} - 1/4]$, то $|\tilde{E}| \leqslant (\sqrt{h/2} - 1/4)(2\sqrt{h/2} - 1/2 + 1) = h - \sqrt{h/2}/2 + \sqrt{h/2}/2 - 1/8 < h$. Теорема доказана.

3.4. Замечания. Условие $g(G) \geqslant 8$ в теореме 3.3 нельзя ослабить, так как $h(\bar{C}_7) = 7$. Аналогично теореме 3.3 можно доказать неравенство $h(\bar{G}) \leqslant 7$ для любого графа G с обхватом $g(G) \geqslant 6$. Применив после этого теорему 2.1, легко получить, что $c_7 > 1/6$. Для графа G_0 (см. рисунок) имеем $g(G_0) = 5$, $h(\bar{G}_0) \geqslant 8$ (разреженным множеством в G_0 является $\{(v_i, v_{i+3}) \mid i = 1, 5, 9, 13\} \cup \{(v_j, v_{j+5}) \mid j = 2, 6, 10, 14\}$.

Развивая идеи доказательства теоремы 3.4, можно, по-видимому, улучшить нижнюю оценку для c_h до величины вида $1 - 2/\sqrt{h}$. Дальнейшее улучшение оценок для c_h связано скорее всего с уточнением оценок для чисел Рамсея $R(k, l)$.

§ 4. ВЕРХНИЕ ОЦЕНКИ ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ГРАФОВ ХОРД И ИХ ДОПОЛНЕНИЙ

4.1. Обсуждение задачи. Граф G такой, что $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, называется *графом пересечений хорд* (или просто *графом хорд*), если для некоторого семейства $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$ хорд окружности вершины v_i и v_j смежны тогда и только тогда, когда h_i и h_j пересекаются (т. е. имеют общую точку, не принадлежащую окружности).

Графы пересечений хорд возникают при рассмотрении различных комбинаторных задач — от проблем сортировки до исследования плоских графов или цепных дробей [4, 24]. В частности, задача определения наименьшего числа стеков, необходимого для реализации заданной перестановки чисел, сводится к нахождению хроматического числа соответствующего графа хорд [4, 16].

Граф G с $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$ называется *графом зацеплений*, если для некоторого семейства $F = \{h_1, \ldots, h_n\}$ отрезков прямой вершины v_i и v_j смежны тогда и только тогда, когда отрезки h_i и h_j зацепляются, т. е. пересекаются и $h_i \not\subset h_j$, $h_j \not\subset h_i$. С помощью стереографической проекции легко убедиться, что G является графом хорд тогда и только тогда, когда он является графом зацеплений [4].

Плотность и неплотность графа хорд можно найти за полиномиальное от числа его вершин время [4, 25]. Но не известны такие алгоритмы для нахождения кликоматического числа (т. е. хроматического числа дополнения) графов хорд, а задача нахождения хроматического числа графов хорд NP-трудна [26]. Тем важней и интересней нахождение $\varphi(\mathfrak{X}, k)$ и $\varphi(\bar{\mathfrak{X}}, k)$, определенных во введении, где $\mathfrak{X}$ — класс графов хорд, а $\bar{\mathfrak{X}}$ — класс их дополнений.

В этом направлении известны следующие результаты. Карапетян [27] доказал, что $4 \leqslant \varphi(\mathfrak{X}, 2) \leqslant 8$, $\varphi(\mathfrak{X}, k) \leqslant k(k+1)/2$. Второй из этих результатов позднее опубликован в [28]. Дьярфаш [29] предложил доказательство утверждения $\varphi(\mathfrak{X}, k) \leqslant 2^k k^2 (k-1)$. К сожалению, лемма 2 [29] неверна. Тем не менее из [29] следует оценка $\varphi(\mathfrak{X}, k) \leqslant 2^k(2^k - 2)k^2$. Ниже мы дадим асимптотически точную при $k \to \infty$ оценку для $\varphi(\mathfrak{X}, k)$. Оказывается, $\varphi(\bar{\mathfrak{X}}, k) \sim k \ln k$. Кроме того, используя идею доказательства Дьярфаша [29], мы покажем, что $\varphi(\mathfrak{X}, k) \leqslant 2^k(k+2)k$, а также что $\varphi(\mathfrak{X}, 2) \leqslant 5$. Отметим, что последний результат анонсируется, но не доказывается в [28, 30]. В п. 4.4 мы покажем, что $\varphi(\mathfrak{X}, k) \geqslant (k/2)(\ln k - 2)$.

Полученные результаты говорят о том, что в $\mathfrak{X}$ есть графы, устроенные более «сложно», чем графы из $\mathfrak{D}$ — класса всех графов пересечений дуг окружности. Известно [4, 9, 31], что $\varphi(\mathfrak{D}, k) = [3k/2]$, $\varphi(\bar{\mathfrak{D}}, k) = k + 1$ (если $k > 1$).

Нетрудно убедиться [4], что для каждого семейства H хорд окружности найдется семейство H', граф пересечений хорд которого совпадает с аналогичным графом для H, но различные хорды которого не имеют общих концов. Поэтому при доказательстве верхних оценок мы рассматриваем только семейства хорд или интервалов, разные элементы которых не имеют общих концов.

Чтобы не нагромождать обозначений, для семейства H хорд (отрезков) через $\alpha(H)$, $\chi(H)$ и т. п. будем обозначать неплотность, хроматическое число и т. п. для соответствующего графа пересечений хорд (графа зацеплений). Везде рассматриваются только конечные семейства хорд или отрезков. Условимся еще о некоторых обозначениях. Хорду, соединяющую точки a и b, будем обозначать как открытый отрезок $]a, b[$. Если a и b — точки окружности, то через $[a, b]$ обозначим ту из дуг, соединяющих a и b, что при движении по ней от a к b мы обходим окружность против часовой стрелки. Будем писать $]c, d[\subset [a, b]$, если оба конца хорды $]c, d[$ принадлежат дуге $[a, b]$. В частности, $]a, b[\subset [a, b]$.

4.2. Верхняя оценка для $\varphi(\overline{\mathfrak{X}}, k)$.

Теорема 4.1. *Пусть H — семейство хорд окружности и $\alpha(\mathrm{H}) = k$. Тогда* $\sigma(H) = \chi(\overline{H}) \leqslant \Psi(k) = \sum\limits_{i=1}^{[k/2]}{}' [(k+1)/i] + \varepsilon(k) - |Q(k)|$, *где* $Q(k) = \{m \in \mathbf{Z} \mid 1 < (k+1)/4 < m < (k+1)/3\}$,

$$\varepsilon(k) = \begin{cases} 0, & \textit{если } k \textit{ четно}, \\ 1, & \textit{если } k \textit{ нечетно}. \end{cases}$$

Доказательство. Назовем хорду $h_0 =]a, b[\in H$ *разделяющей в* H, если найдутся такие хорды $h_1, h_2 \in H\setminus\{h_0\}$, что $h_1 \subset [a, b]$, $h_2 \subset [b, a]$. Пусть H_1 — подсемейство неразделяющих хорд в H, и для $i = 2, 3, \ldots$ $\ldots, |H|$ пусть H_i — подсемейство неразделяющих хорд в $H \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} H_j$. По определению H_i, если $h =]a, b[\in H_i$, $i > 1$, то найдутся такие хорды h', $h'' \in H_{i-1}$, что $h' \subset [a, b]$, $h'' \subset [b, a]$. Хорду, соединяющую точки a и b, можно записать $]a, b[$ или $]b, a[$. В дальнейшем такую хорду, принадлежащую H_i, мы будем обозначать $]a, b[$, если дуга $[a, b]$ не содержит хорд из $\bigcup\limits_{j \geqslant i} H_j \setminus \{]a, b[\}$, и $]b, a[$ в противном случае. При такой записи граф пересечений хорд семейства $H_i = \{]a_j^i, b_j^i[\}_{j=1}^{m_i}$ совпадает с графом пересечений дуг семейства $D_i = \{[a_j^i, b_j^i]\}_{j=1}^{m_i}$. Но выше уже отмечалось, что тогда согласно [31]

$$\sigma(H_i) = \sigma(D_i) \leqslant \alpha(D_i) + 1 = \alpha(H_i) + 1. \tag{18}$$

Покажем, что

$$\alpha(H_i) \leqslant k/i. \tag{19}$$

Для $i = 1$ это следует из условия теоремы. Пусть $i > 1$. Выберем в H_i $t = \alpha(H_i)$ непересекающихся хорд $]a_1^i, b_1^i[, \ldots,]a_t^i, b_t^i[$. По определению H_i для каждого $1 \leqslant j \leqslant t$ есть такая хорда $]a_j^{i-1}, b_j^{i-1}[\in H_{i-1}$, что $]a_j^{i-1}, b_j^{i-1}[\subset [a_j^i, b_j^i]$. Аналогично, если $i - 1 > 1$, то для каждого $1 \leqslant$ $\leqslant j \leqslant t$ найдется такая хорда $]a_j^{i-2}, b_j^{i-2}[\in H_{i-2}$, что$]$ $a_j^{i-2}, b_j^{i-2}[\subset$ $\subset [a_j^{i-1}, b_j^{i-1}]$ и т. д. Следовательно, в $\bigcup\limits_{l=1}^{i} H_l$ есть семейство $H' = \{]a_j^l,$ $b_j^l[\mid l = 1, \ldots, i;\ j = 1, \ldots, t\}$ попарно непересекающихся хорд и $k \geqslant$ $\geqslant |H'| \geqslant it$, т. е. (19) верно.

Допустим, что $H_l \neq \varnothing$. Рассмотрим $]a_l, b_l[\in H_l$. Если $l > 1$, то найдутся такие хорды $]a_1^{l-1}, b_1^{l-1}[\in H_{l-1},]$ $a_2^{l-1}, b_2^{l-1}[\in H_{l-1}$, что $]a_1^{l-1}, b_1^{l-1}[\subset$ $\subset [a^l, b^l]$, $]a_2^{l-1}, b_2^{l-1}[\subset [b^l, a^l]$. Аналогично предыдущему получим, что в H есть семейство

$$H'' = \{]a^l, b^l[\} \cup \{]a_j^i, b_j^i[\mid i = 1, \ldots, l-1;\ j = 1, 2\}$$

попарно непересекающихся хорд, т. е. $k \geqslant |H''| = 1 + 2(l-1)$ и $l \leqslant$

$\leqslant (k+1)/2$. Следовательно, $H_i = \varnothing$ для $i > (k+1)/2$ и

$$H = \bigcup_{i=1}^{[(k+1)/2]} H_i. \tag{20}$$

Если k нечетно, то согласно (19) $\alpha(H_{(k+1)/2}) \leqslant 1$ и

$$\sigma(H_{(k+1)/2}) \leqslant 1. \tag{21}$$

Из (18)—(21) следует, что

$$\sigma(H) \leqslant \varepsilon(k) + \sum_{i=1}^{[k/2]} ([k/i]+1) = \varepsilon(k) + \sum_{i=1}^{[k/2]} [(k+1)/i],$$

и при $Q(k) = \varnothing$ теорема доказана. Пусть $Q(k) = \{[(k+1)/4]+1, [(k+1)/4]+2, \ldots, [(k+1)/4]+q\}$. Поскольку $[(k+1)/4]+q < (k+1)/3$ по определению $Q(k)$, то $[k/2]-(q-1) \geqslant (k+1)/3$. Мы покажем, что

$$\sigma(H_{[(k+1)/4]+j} \cup H_{[k/2]+1-j}) \leqslant \left[\frac{k}{[(k+1)/4]+j}\right] + \left[\frac{k}{[k/2]+1-j}\right] + 1 = 6 \tag{22}$$

для $j = 1, \ldots, q$. Из соотношений (22) ввиду (18)—(21) будет следовать справедливость теоремы.

Итак, рассмотрим H_m и H_s, где $m = [(k+1)/4]+j < (k+1)/3$, $s = [k/2]+1-j \geqslant (k+1)/3$. Если $\sigma(H_m) \leqslant 3$, то согласно (18) $\sigma(H_m \cup H_s) \leqslant 3 + \sigma(H_s) \leqslant 3 + [k/s] + 1 = 6$. Пусть $\sigma(H_m) = 4$. Тогда в силу (18), (19) $\alpha(H_m) = 3$. Выберем в H_m три попарно непересекающихся хорды $]a_1, b_1[$, $]a_2, b_2[$, $]a_3, b_3[$ так, чтобы для каждого $]a, b[\in H_m \setminus \{]a_2, b_2[,]a_3, b_3[\}$ точка a не принадлежала ни одной из дуг $[b_1, a_2]$, $[b_2, a_3]$. Окрасим цветом j ($j = 1, 2, 3$) хорды множества $H_m^j = \{]a, b[\in H_m \mid a \in [a_j, b_j]\}$. По определению H_m, H_m^j суть полные подграфы в H_m. Пусть

$$H_m^4 = H_m \Big\backslash \left(\bigcup_{j=1}^{3} H_m^j\right) = \{]a, b[\in H_m \setminus \{]a_1, b_1[\} \mid a \in [b_3, a_1]\}.$$

Поскольку $\sigma(H_m) = 4$, то $H_m^4 \neq \varnothing$. Выберем в H_m^4 хорду $]a_4, b_4[$ так, чтобы $\{]a, b[\in H_m^4 \setminus \{]a_4, b_4[\} \mid a \in [b_3, a_4]\} = \varnothing$. Так как $\alpha(H_m) = 3$, то $b_4 \in [a_1, b_1]$. Окрасим цветом 4 все хорды из H_m^4 и хорды множества $H_s^0 = \{]a, b[\in H_s \mid a \in [a_1, b_4]\}$. Легко понять, что $H_m^4 \cup H_s^0$ — полный подграф H. Кроме того, $\bigcup_{j=1}^{4} H_m^j = H_m$. Пусть хорда $]a_5, b_5[\in H_s$ такова, что $\{]a, b[\in H_s \mid a \in [b_4, a_5]\} = \{]a_5, b_5[\}$. Если $b_5 \in [b_4, a_3]$, то хорды $]a_3, b_3[$, $]a_4, b_4[\in H_m$ и $]a_5, b_5[\in H_s$ не пересекаются и аналогично доказательству (19) получим $\alpha(H) \geqslant 2m + s \geqslant 2[(k+1)/4] + 2j + [k/2] + 1 - j \geqslant 2[(k+1)/4] + [k/2] + 2 > k$, что невозможно. Следовательно, $a_3 \in [b_2, b_5]$. Окрасим цветом 5 хорды множества $H_s^1 = \{]a, b[\in H_s \mid a \in [a_6, b_5]\}$. Если $H_s^2 = H_s \setminus (H_s^0 \cup H_s^1) = \varnothing$, то $\sigma(H_m \cup H_s) \leqslant 5$. Пусть $H_s^2 \neq \varnothing$ и $]a_6, b_6[\in H_s^2$ — такая хорда, что $\{]a, b[\in H_s^2 \mid a \in [b_5, a_6]\} = \{]a_6, b_6[\}$. Если $b_6 \in [a_6, a_1]$, то хорды $]a_1, b_1[$, $]a_2, b_2[$ и $]a_6, b_6[$ не пересекаются и снова $\alpha(H) \geqslant 2m + s > k$, что невозможно. Следовательно, $a_1 \in [a_6, b_6]$ и $H_s^2 = \{]a, b[\in H_s^2 \mid a \in [a_6, b_6]\}$. Окрасив цветом 6 хорды из H_s^2, убеждаемся в справедливости (22). Теорема доказана.

Эта теорема дает точные значения $\varphi(\mathfrak{X}, k)$ при $k \leqslant 7$ и асимптотически точную оценку $\varphi(\mathfrak{X}, k)$ при больших k, в чем мы убедимся ниже.

Отметим также, что из доказательства теоремы 4.1 легко получить алгоритм сложности $O(n^3)$ раскраски любого n-вершинного графа из $\mathfrak{X}$ с плотностью k при помощи не более, чем $\psi(k)$ цветов.

4.3. Нижние оценки для $\varphi(\overline{x}, k)$. Пусть даны натуральные $k \geqslant 2$ и $t \geqslant k-1$. Отметим из окружности $(k+1)t+1$ точек $a_1, \ldots, a_{(k+1)t+1}$. Определим для $i = 1, \ldots, [k/2]$ семейства хорд $H_i(k, t)$ так:

$$H_i(k, t) = \{]a_j, a_{j+it+1}[\mid j = 1, \ldots, t(k+1)+1\},$$

где индексы складываем по $\mathrm{mod}(t(k+1)+1)$. При нечетном k пусть

$$H_{(k+1)/2}(k, t) = \{]a_j, a_{j+(k+1)t/2+1}[\mid j = 1, \ldots, (k+1)t/2\}.$$

При этом левым концом хорды $]a_j, a_{j+k\cdot i+1}[$ считаем a_j. Пусть

$$H(k, t) = \bigcup_{i=1}^{[(k+1)/2]} H_i(k, t).$$

Лемма 4.1. *Рассмотрим дугу $[a_j, a_{j+s}]$, где $s \leqslant (k+1)t$ (индексы складываем по $\mathrm{mod}((k+1)t+1)$). Пусть $H' \subset H(k, t)$ — такое подсемейство попарно непересекающихся хорд, что для каждой хорды $h \in H'$ имеем $h \subset [a_j, a_{j+s}]$ и левый конец h расположен на дуге $[a_j, a_{j+s}]$ левее, чем правый. Тогда $|H'| < s/t$.*

Доказательство. При $s \leqslant t+1$ лемма очевидна. Пусть лемма доказана для всех $s < s_0$. Рассмотрим для произвольного j дугу $[a_j, a_{j+s_0}]$ и семейство H', удовлетворяющее условиям леммы. Пусть l — наименьшее такое число, что существует хорда $h \in H'$, левый конец которой есть a_{j+l}. Если $l > 0$, то, применив лемму к дуге $[a_{j+1}, a_{j+s_0}]$, получим по индукционному предположению $|H'| < (s_0-1)/t < s_0/t$. Среди хорд из H', левый конец которых есть a_j, выберем самую длинную: $h_1 =]a_j, b_1[=]a_j, a_{j+i_1t+1}[$. Если $i_1t+1 < s_0$, то оба конца каждой хорды из H' принадлежат либо $[a_j, b_1]$, либо $]b_1, a_{j+s_0}[$, и по индукционному предположению $|H'| < (i_1t+1)/t + (s_0 - i_1t - 1)/t = s_0/t$. Пусть теперь $i_1t+1 = s_0$. Рассмотрим $H'' = H' \setminus \{h_1\}$. Если в H'' нет хорд, левым концом которых является a_j, то $|H''| < ((s_0+j) - (j+1))/t = (s_0-1)t = i_1t/t = i_1$ и $|H'| = 1 + |H''| \leqslant 1 + (i_1 - 1) < s_0/t$. Пусть теперь $h_2 =]a_j, a_{j+i_2t+1}[$ — самая длинная хорда среди хорд из H'', левый конец которых есть a_j. Тогда оба конца каждой хорды из H'' принадлежат либо $[a_j, a_{j+i_2t+1}[$, либо $[a_{j+i_2t+1}, a_{j+s_0}]$. Следовательно, $|H''| < [(i_2t+1)/t] + (i_1t+1-i_2t-1)/t = i_2 + i_1 - i_2 = i_1$. Поэтому $|H'| = |H''| + 1 \leqslant i_1 < s_0/t$. Лемма доказана.

Лемма 4.2. $\alpha(H(k, t)) \leqslant k$.

Доказательство. Рассмотрим H' — наибольшее по мощности подсемейство попарно непересекающихся хорд в $H(k, t)$. Пусть $h_0 =]a_j, a_m[=]a_j, a_{j+i_0t+1}[$ — самая «длинная» хорда из H', т. е. та, для которой разность $m - j(\mathrm{mod}((k+1)\cdot t+1))$ наибольшая. Тогда оба конца каждой хорды из H' принадлежат или дуге $[a_j, a_m]$, или дуге $[a_m, a_j]$. Причем семейства $H'' = \{]a, b[\in H' \mid]a, b[\subset [a_j, a_m]\}$ и $H''' = H' \setminus H''$ удовлетворяют условиям леммы 4.1. Следовательно, $|H''| < (i_0t+1)/t$, $|H'''| < ((k+1)t+1-i_0t-1)/t = k+1-i_0$, и $|H'| \leqslant i_0 + (k - i_0) = k$. Лемма доказана.

Если хорда $]a_j, a_{j+it+1}[$ принадлежит некоторой клике K в $H(k, t)$, то ровно один конец каждой из остальных хорд этой клики принадлежит множеству $\{a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_{j+it}\}$, причем концы разных хорд из K обязательно различны. Отсюда следует

Лемма 4.3. *Число вершин полного подграфа в $H(k, t)$ которому принадлежит хотя бы одна хорда из $H_i(k, t)$, не превосходит $it+1$.*

Определим для $i = 1, \ldots, [k/2]$ рекуррентно числа $u(k, i)$, $r(k, i)$ так:

$$u(k, 1) = k+1, \quad r(k, 1) = 0;$$

для $i=2, \ldots, [k/2]$ —
$u(k, i)=[(k+1-r(k, i-1))/i]$, $r(k, i)=iu(k, i)-(k+1)+r(k, i-1)$.

Пусть $U(k)=\varepsilon(k)+\sum_{i=1}^{[k/2]} u(k, i)$, где

$$\varepsilon(k)=\begin{cases}0, & \text{если } k \text{ четно,}\\ 1, & \text{если } k \text{ нечетно.}\end{cases}$$

Теорема 4.2. $\varphi(\bar{x}, k)\geqslant U(k)$.

Доказательство. Ввиду леммы 4.2 достаточно доказать, что $\sigma(H(k, t))\geqslant U(k)$, если

$$t>k\left(1+\sum_{j=1}^{[k/2]} 1/j\right). \tag{23}$$

При нахождении $\sigma(H(k, t))$ нужно разбить $H(k, t)$ на наименьшее число полных подграфов. Учитывая лемму 4.3, можно сформулировать более легкую задачу.

Даны множества $H_1(k, t), \ldots, H_{[(k+1)/2]}(k, t)$, причем $|H_i(k, t)|=(k+1)t+1$ $(i=1, \ldots, [k/2])$, и, кроме того, $|H_{(k+1)/2}(k, t)|=(k+1)t/2$ при нечетном k. Имеются ящики $[(k+1)/2]$ типов. В ящик типа i $(i=1, \ldots, [k/2])$ можно поместить не более $it+1$ элементов из $H(k, t)=\bigcup_{j=1}^{[(k+1)/2]} H_j(k, t)$. Ящик типа $(k+1)/2$ при нечетном k вмещает любое количество элементов. При этом элементы $H_i(k, t)$ можно помещать лишь в ящики, номер типа которых не превосходит i. В этих условиях требуется разместить все элементы из $H(k, t)$ в наименьшем количестве ящиков.

Пусть нам удалось разместить элементы из $H(k, t)$ в ящики $Я_1, \ldots, Я_m$, и при $1\leqslant q<p\leqslant m$ вместимость $Я_p$ не меньше вместимости $Я_q$. Если элемент $h_1\in H_i(k, t)$ помещен в ящик $Я_p$, элемент $h_2\in H_j(k, t)$ — в ящик $Я_q$, $i<j$, $q<p$, то поменяв местами h_1 и h_2, снова получим правильное размещение элементов $H(k, t)$ в ящики $Я_1, \ldots, Я_m$. Кроме того, если $Я_q$ неполный, то его можно пополнить, добавляя элементы из $Я_p$ для $p>q$. Можно также без ограничения общности считать, что тип ящика равен наименьшему i, для которого есть элемент из $H_i(k, t)$, помещенный в этот ящик. Из вышесказанного следует, что среди правильных оптимальных размещений существует размещение следующего типа. Сначала элементами из $H_1(k, t)$ заполняются ящики типа 1. Если какой-то ящик оказался неполным, его дополняют элементами из $H_2(k, t)$. Затем оставшимися элементами из $H_2(k, t)$ заполняются ящики типа 2 и т. д. Ясно, что ящиков типа 1 потребуется $[((k+1)t+1)/(t+1)]$. При условии (23) это число равно $k+1=u(k, 1)$. В $(k+1)$-й ящик можно поместить еще k элементов из $H_2(k, t)$. Покажем, что вообще на упаковку $\bigcup_{j=1}^{i} H_j(k, t)$ при $i\leqslant[k/2]$ потребуется не менее $\sum_{j=1}^{i} u(k, j)$ ящиков, при этом в первые $\sum_{j=1}^{i} u(k, j)$ ящиков будет помещено не более $r(k, i)t+k\sum_{j=1}^{i} 1/j$ элементов $H_{i+1}(k, t)$. Для $i=1$ это доказано. Пусть это верно для $i\leqslant s-1$. Остались неразмещенными в первые $\sum_{j=1}^{s-1} u(k, j)$ ящиков не менее $(k+1)t+1-tr(k, s-1)-k\sum_{j=1}^{s-1} 1/j$ элементов из $H_s(k, t)$. Размещаем их в ящики типа s. Число требуемых ящиков не меньше

$$\cdot\left[\frac{(k+1)\,t+1-tr\,(k,\,s-1)-k\sum\limits_{j=1}^{s-1}1/j}{s\,(t+1/s)}\right]=$$

$$=\cdot\left[\frac{1}{s}\left(k+1-r\,(k,\,s-1)-\frac{(k+1-r\,(k,\,s-1))/s-1+k\sum\limits_{j=1}^{s-1}1/j}{t+1/s}\right)\right]. \qquad (24)$$

Поскольку при условии (23) дробь $\left((k+1)/s-1+k\sum\limits_{j=1}^{s-1}1/j\right)\Big/(t+1/s)$ меньше 1, то правая часть (24) равна $\cdot[(k+1-r(k,\,s-1))/s]=u(k,\,s)$. При этом число элементов из $H_{s+1}(k,\,t)$, которые можно поместить в последний из $u(k,\,s)$ ящиков, не превосходит

$$u\,(k,\,s)\,(st+1)-(k+1)\,t-1+tr\,(k,\,s-1)+k\sum_{j=1}^{s-1}1/j=$$

$$=t\,(su\,(k,\,s)-k-1+r\,(k,\,s-1))+u\,(k,\,s)-1+k\sum_{j=1}^{s-1}1/j=$$

$$=tr\,(k,\,s)+\cdot[(k+1-r\,(k,\,s))/s]-1+k\sum_{j=1}^{s-1}1/j\leqslant tr\,(k,\,s)+k\sum_{j=1}^{s}1/j.$$

Отсюда следует справедливость теоремы.

Попробуем разобраться, как растут функции $U(k)$ и $\Psi(k)$. В таблице приведены значения этих функций для малых k.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$U(k)$	3	5	8	10	13	16	19	22	26	29	33	36	40
$\Psi(k)$	3	5	8	10	13	16	20	22	26	29	34	36	40

Можно показать, что $\varphi(\overline{\mathfrak{X}},\,8)=19$, $\varphi(\overline{\mathfrak{X}},\,12)=33$. Таким образом, для малых k известны точные значения $\varphi(\overline{\mathfrak{X}},\,k)$. Поскольку $\cdot[(k+1-r(k,i-1))/i]=(k+1-r(k,\,i-1)+r(k,\,i))/i$ при $i>1$, то

$$U\,(k)=\varepsilon\,(k)+\sum_{i=1}^{.[k/2]}\cdot[(k+1-r\,(k,\,i-1))/i]=\varepsilon\,(k)+(k+1)+$$

$$+\sum_{i=2}^{.[k/2]}(k+1-r\,(k,\,i-1)+r\,(k,\,i))/i\geqslant\varepsilon\,(k)+(k+1)\sum_{i=1}^{.[k/2]}1/i.$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}\Psi\,(k)/U(k)=1$. Так как $|Q(k)|\geqslant .[k/12]$, то

$$\Psi\,(k)-U\,(k)\leqslant\sum_{i=1}^{\cdot[k/2]}(\cdot[(k+1)/i]-(k+1)/i)-.[k/12]\leqslant$$

$$\leqslant[k/2]-1-.[k/12]<5k/12,$$

т. е. эти оценки недалеки от истинного значения $\varphi(\overline{\mathfrak{X}},\,k)$. По-видимому, $U(k)$ — более хорошее приближение к $\varphi(\overline{\mathfrak{X}},\,k)$, чем $\Psi\,(k)$.

4.4. Алгоритмы раскраски графов хорд. В этом разделе нам будет удобнее рассматривать графы хорд как графы зацеплений отрезков. При этом мы будем рассматривать такие семейства, различные отрезки из которых не имеют общих концов.

Для каждого семейства отрезков F и любой точки c на прямой обозначим $F^-(c)=\{]a, b[\in F \mid b<c\}$, $F^+(c)=\{]a, b[\in F|a>c\}$, $F^0(c)=\{]a, b[\in F|a<c<b\}$. Понятно, что при $\omega(F)=2$ для каждого $]a, b[\in F$ подсемейства $F^0(b)\setminus F^0(a)$ и $F^0(a)\setminus F^0(b)$ состоят из вложенных друг в друга отрезков.

Лемма 4.4. *Пусть F — такое семейство отрезков прямой, что $\omega(F)=2$, и в F нет отрезков, содержащихся в пересечении зацепляющихся отрезков. Тогда можно так правильно раскрасить отрезки из F в три цвета, что для каждого $]a, b[\in F$ отрезки из $F^0(b)\setminus F^0(a)$ окрашены одним цветом.*

Доказательство. Допустим, что лемма неверна и $F=\{h_i\}_{i=1}^n=\{]a_i, b_i[\}_{i=1}^n$ — наименьшее по числу отрезков семейство, являющееся контрпримером к лемме. Очевидно, граф зацеплений F связен. Пусть $]a_1, b_1[, \ldots,]a_t, b_t[$ — все отрезки из F, не содержащиеся в других отрезках из F, и $a_1<a_2<\ldots<a_t$. Отметим, что $F^-(a_1)=\varnothing$, $F^0(a_1)=\varnothing$. Предположим, что $|F^0(b_1)|\leqslant 1$. Ввиду минимальности F, для $F'=F\setminus\{h_1\}$ есть требуемая в лемме 3-раскраска f'. Понятно, что докрасив h_1 цветом, отличным от цвета элемента из $F^0(b_1)$ (если $F^0(b_1)\neq\varnothing$), получим требуемую раскраску для F. Но это противоречит выбору F. Следовательно,

$$|F^0(b_1)|\geqslant 2 \tag{25}$$

и $t\geqslant 2$. Ввиду связности F отрезок h_i зацепляется с h_{i+1} при $i=1, \ldots, t-1$. Покажем, что для любого $i\in\{1, \ldots, t-1\}$

$$F^-(b_i)=\varnothing \quad \text{или} \quad F^+(a_{i+1})=\varnothing. \tag{26}$$

Допустим, что (26) неверно для некоторого i, $1\leqslant i\leqslant t-1$. Рассмотрим $F_1=F\setminus F^+(a_{i+1})$, $F_2=F\setminus F^-(b_i)$. Заметим, что $F_1\cap F_2=\{h_i, h_{i+1}\}$. Ввиду минимальности F для F_1 и F_2 существуют требуемые в лемме раскраски f_1 и f_2 соответственно при помощи цветов 1, 2 и 3. Можно считать (поскольку h_i и h_{i+1} зацепляются), что $f_1(h_i)=f_2(h_i)=1$, $f_1(h_{i+1})=f_2(h_{i+1})=2$. Положим

$$f(h)=\begin{cases} f_1(h), & \text{если} \quad h\in F_1,\\ f_2(h), & \text{если} \quad h\in F_2.\end{cases}$$

Убедимся, что f — требуемая раскраска для F. Пусть $h'=]a', b'[\in F$, $h''=]a'', b''[\in F$, $a'<a''<b'<b''$. Если $\{h', h''\}\subset F_1$ или $\{h', h''\}\subset F_2$, то $f(h')\neq f(h'')$. Если $h'\in F^-(b_i)$, $h''\in F^+(a_{i+1})$, то, поскольку по условию леммы $h'\not\subset]a_{i+1}, b_i[$, $h''\not\subset]a_{i+1}, b_i[$, необходимо $a'<a_{i+1}<a''<b'<b_i<b''$. В частности, $h''\in F^0(b_i)$, $h'\in F^0(a_{i+1})$. Ввиду правильности раскраски f_2, $f(h'')=f_2(h'')=f_2(h_{i+1})=2$. Так как h' зацепляется с h_{i+1} и $\{h', h_{i+1}\}\subset F_1$, то $f(h')\neq 2=f(h'')$. Нетрудно аналогично убедиться, что для каждого отрезка $]a, b[\in F$ все отрезки из $F^0(b)\setminus F^0(a)$ окрашены одним цветом. Таким образом, f является правильной 3-раскраской F, что противоречит выбору F. Следовательно, (26) верно. В силу (25) $F^+(a_2)\neq\varnothing$, и согласно (26)

$$F^-(b_1)=\varnothing, \quad F^0(a_2)=\{h_1\}. \tag{27}$$

Если $F^0(b_2)=\varnothing$, то ввиду (27) h_2 зацепляется лишь с h_1. Правильно окрасив $F\setminus\{h_2\}$ и докрасив h_2 тем цветом, которым окрашены элементы из $F^0(b_1)\setminus\{h_2\}$, получим требуемую раскраску F, что невозможно. Следовательно, $F^0(b_2)\neq\varnothing$ и $t\geqslant 3$. Применяя (26) для $i=2$, получаем, поскольку $h_1\in F^-(b_2)$, что $F^+(a_3)=\varnothing$, т. е. $t=3$ и $F^0(b_2)=\{h_3\}$.

Рассмотрим $F\setminus\{h_2\}$. Ввиду минимальности F найдется правильная раскраска f семейства $F\setminus\{h_2\}$ цветами из множества $\{1, 2, 3\}$. Пусть $h_2'=]a_2', b_2'[$ — самый длинный отрезок в $F^0(b_1)\setminus\{h_2\}$. Такой отрезок найдется в силу (25). Можно считать, что $f(h_1)=1$, $f(h_2')=2$. Если $f(h_3)\neq 2$, то окрасив h_2 цветом 2, получим требуемую раскраску F, что невозможно.

Пусть $f(h_3)=2$. Тогда h_3 не зацепляется с h'_2 и $h_3 \in F^+(b'_2)$. По условию, все отрезки из $F^0(b'_2) \setminus \{h_2\}$ окрашены одним цветом $\gamma \in \{1, 3\}$. Перекрасив все элементы из $F^+(b'_2)$ цвета 2 в цвет $\delta \in \{1, 3\} \setminus \{\gamma\}$, а все элементы из $F^+(b'_2)$ цвета δ — в цвет 2, получим новую правильную раскраску f' семейства $F \setminus \{h_2\}$. Причем $f'(h'_2)=2$, $f'(h_3) \neq 2$. Докрасив h_2 цветом 2, получим раскраску семейства F, противоречащую его выбору. Лемма доказана.

Пусть F — конечное семейство отрезков прямой. Для каждой пары зацепляющихся отрезков $h_1, h_2 \in F$ рассмотрим отрезок $p(h_1, h_2) = h_1 \cap h_2$. Обозначим через $P(F)$ семейство таких пересечений. Выберем в $P(F)$ подсемейство $P_0(F)$ максимальных по включению отрезков.

Лемма 4.5. *Пусть F — семейство отрезков прямой и $\omega(F)=2$. Тогда отрезки из $P_0(F)$ не пересекаются между собой.*

Доказательство. Допустим, что $p_1 = h_1 \cap h_2 \in P_0(F)$, $p_2 = h_3 \cap h_4 \in P_0(F)$ и p_1 зацепляется с p_2. Можно считать, что $h_i =]a_i, b_i[$ для $i=1, 2, 3, 4$; $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$, $a_3 < a_4 < b_3 < b_4$, $p_1 =]a_2, b_1[$, $p_2 =]a_4, b_3[$, $p_1 \cap p_2 =]a_4, b_1[$. Это значит, что

$$a_1 < a_2 < a_4 < b_1 < b_3 < b_4. \tag{28}$$

Если $b_2 < b_4$, то из (28) вытекает наличие в F треугольника с вершинами h_1, h_2, h_4. Следовательно, $b_2 > b_4$. Аналогично $a_3 < a_1$. Таким образом, $p_1 \subset]a_2, b_3[= h_2 \cap h_3$. Это противоречит тому, что $p_1 \in P_0(F)$. Лемма доказана.

Теорема 4.3. *Пусть F — семейство отрезков с $\omega(F)=2$. Тогда $\chi(F) \leqslant 5$.*

Доказательство. Этап 1. Обозначим через F_1 подсемейство отрезков из F, не лежащих в пересечении каких-либо зацепляющихся отрезков из F. По лемме 4.4 существует такая раскраска f_1 семейства F_1 цветами 1, 2 и 3, что для каждого $]a, b[\in F_1$ отрезки семейства $F_1^0(b) \setminus F_1^0(a)$ окрашены одним цветом. По лемме 4.5 отрезки семейства $P_0(F_1)$ не пересекаются. По определению F_1, каждый отрезок из $F \setminus F_1$ лежит в каком-нибудь интервале $p \in P_0(F_1)$.

Этап k $(k \geqslant 2)$. К началу этапа k имеет место следующая ситуация. Окрашены цветами из $\{1, \ldots, 5\}$ отрезки из $\bigcup\limits_{i=1}^{k-1} F_i$ (множества F_i могут иметь непустое пересечение). Отрезки из $F \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{k-1} F_i$ не зацепляются с отрезками из $\bigcup\limits_{i=1}^{k-2} F_i \setminus F_{k-1}$. Каждый отрезок из $F \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} F_i$ содержится в некотором отрезке $p \in P_0(F_{k-1})$. Кроме того, для каждого $p =]c, d[\in P_0(F_{k-1})$ либо для окраски элементов из $F_{k-1}^0(c) \setminus F_{k-1}^0(d)$ использован только один цвет, а для окраски элементов из $F_{k-1}^0(d) \setminus F_{k-1}^0(c)$ использовано не более двух цветов, либо наоборот — для раскраски элементов из $F_{k-1}^0(d) \setminus F_{k-1}^0(c)$ использован только один цвет, а для окраски $F_{k-1}^0(c) \setminus F_{k-1}^0(d)$ использовано не более двух цветов. Покажем, как в этих условиях провести k-й этап раскраски (если, конечно, $F \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} F_i \neq \varnothing$). Рассмотрим некоторый отрезок $p =]c, d[\in P_0(F_{k-1})$, в котором содержится хотя бы один отрезок из $F \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k-1} F_i$. Пусть

$$F_{k-1}^0(c) \setminus F_{k-1}^0(d) = \{h_j\}_{j=1}^{t} = \{]c_j, d_j[\}_{j=1}^{t},$$

$$F_{k-1}^0(d) \setminus F_{k-1}^0(c) = \{h_j\}_{j=t+1}^{s} = \{]c_j, d_j[\}_{j=t+1}^{s},$$

и $p =]c_s, d_s[\cap]c_t, d_t[=]c_s, d_t[$. Как уже отмечалось, каждое из этих семейств состоит из вложенных друг в друга отрезков. Без ограничения общности считаем, что для раскраски элементов $h_{t+1}, h_{t+2}, \ldots, h_s$ использован цвет $\gamma_1 \in \{1, \ldots, 5\}$, а для раскраски элементов $h_1, \ldots, h_t$ — цвета γ_2 и (возможно) γ_3. Обозначим через I_p множество, элементами которого являются отрезки из F, содержащиеся в p, отрезки $h_{t+1}, \ldots, h_s$ и отрезок $]d, d_s+1[$. Пусть $F_{k,p}$ — множество тех отрезков из I_p, которые не содержатся в пересечении каких-либо зацепляющихся отрезков из I_p. Покажем, что отрезки из $I_p \setminus F_{k,p}$ не зацепляются с отрезками из $\bigcup_{i=1}^{k-1} F_i \setminus \{h_{t+1}, \ldots, h_s\}$. По условиям начала k-го этапа они могут зацепляться лишь с $h_1, \ldots, h_{t-1}$. Пусть отрезок $]a_1, b_1[\in I_p$ содержится в пересечении зацепляющихся отрезков $]a_2, b_2[\in I_p$ и $]a_3, b_3[\in I_p$ и при этом зацепляется с $h_j =]c_j, d_j[$ для некоторого j $(1 \leqslant j \leqslant t-1)$. Тогда $a_i > c_s$ $(i = 1, 2, 3)$, $c_j < c_s$, $a_1 < d_j < b_1$. Следовательно, отрезки h_j, $]a_2, b_2[$ и $]a_3, b_3[$ попарно зацепляются, что противоречит условию теоремы.

Легко понять, что если p содержит хотя бы один отрезок (он необходимо принадлежит $F \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} F_i$), то $F_{k,p} \setminus (\{h_{t+1}, \ldots, h_s\} \cup \{]d, d_s+1[\}) \neq \varnothing$. По лемме 4.4 (с заменой в формулировке $F^0(b) \setminus F^0(a)$ на $F^0(a) \setminus F^0(b)$) можно окрасить $F_{k,p}$ цветами из $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{\gamma_2, \gamma_3\}$ так, чтобы для каждого $]a, b[\in F_{k,p}$ отрезки из $F^0_{k,p}(a) \setminus F^0_{k,p}(b)$ окрашивались одним цветом. При этом, поскольку $\{h_{t+1}, \ldots, h_s\} = F^0_{k,p} \times \times (d) \setminus F^0_{k,p}(d_s+1)$, можно потребовать, чтобы $h_{t+1}, \ldots, h_s$ окрасились цветом γ_1. Обозначим $F'_{k,p} = F_{k,p} \setminus \{]d, d_s+1[\}$. Легко видеть, что полученная раскраска $F'_{k,p}$ согласуется с раскраской $\bigcup_{i=1}^{k-1} F_i$. Проведя аналогичные построения и окраску для каждого $p \in P_0(F_{k-1})$, содержащего хотя бы один неокрашенный отрезок из F, положим $F_k = \bigcup_{p \in P_0(F_{k-1})} F'_{k,p}$. Нетрудно убедиться, что после этого будут выполнены условия начала этапа $k+1$. Уже отмечалось, что $\bigcup_{i=1}^{k} F_i \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} F_i \neq \varnothing$. Ввиду конечности F будет окрашено через конечное число шагов. Теорема доказана.

Используя структуру и идеи доказательства Дьярфаша [29], мы докажем несколько лучшую чем в [29] при $k \geqslant 3$ верхнюю оценку для $\varphi(\mathfrak{X}, k)$.

Пусть F — семейство отрезков прямой и $F_1, \ldots, F_m$ — подсемейства F, соответствующие компонентам связности графа зацеплений F. Выберем в каждом из F_i отрезок g_i $(i = 1, \ldots, m)$, левый конец которого самый левый в F_i. Пусть $F_i(j)$ — множество отрезков из F_i, для которых соответствующие им вершины в графе зацеплений семейства F находятся на расстоянии j от g_i. Ясно, что $F_i(0) = \{g_i\}$. Множество $F(j) = \bigcup_{i=1}^{m} F_i(j)$ называется j-м *уровнем* F, а g_i $(i = 1, \ldots, m)$ — *корнями* F.

По определению уровней, для каждого $h \in F_i(j)$ при $j \geqslant 1$ найдется отрезок $d(h) \in F_i(j-1)$, зацепляющийся с h. Если таких отрезков несколько, обозначим через $d(h)$ любой из них.

Лемма 4.6. *Пусть $j \geqslant 1$, I — множество точек прямой, принадлежащих хотя бы одному отрезку из $F_i(j)$ (т. е. $I = \bigcup_{h \in F_i(j)} h$). Тогда для каждого $j' < j$ не существует такого отрезка $h \in F_i(j')$, что $h \subset I$.*

Доказательство. Пусть j' — наименьший индекс, для которого найдется такой отрезок $h_0 \in F_i(j')$, что $h_0 \subset I$. Поскольку левый конец g_i не принадлежит другим отрезкам из F_i, то $j' \geqslant 1$. Пусть $h' = d(h_0)$. По выбору j' отрезок h' не содержится в I. Пусть c — тот из концов h', который принадлежит h_0. Поскольку $c \in h_0 \subset I$, то для некоторого $h \in F_i(j)$

имеем $c \in h$. Так как h' не содержится в I, то h' зацепляется с h и расстояние от g_i до h не превосходит $(j'-1)+1$. Следовательно, $j' \geqslant j$. Лемма доказана.

Из леммы 4.6 следует

Лемма 4.7. *Пусть отрезки* $h_0, h_1, \ldots, h_t$ *принадлежат* $F_i(j)$ $(j \geqslant 1)$ *и* $h_0 \subset \bigcap_{s=1}^{t} h_s$. *Тогда отрезок* $d(h_0) \in F_i(j-1)$ *зацепляется с каждым из* h_j $(j=0, 1, \ldots, t)$.

Ниже для семейства отрезков F через $\nu(F)$ обозначается мощность наибольшего в F подсемейства попарно непересекающихся отрезков. Введем еще одно определение. *Уровнем глубины* 1 будем называть каждый из уровней семейства F. Если определены уровни глубины l, то *уровнем глубины* $l+1$ назовем каждый из уровней в каждом из подсемейств F, являющихся уровнем глубины l.

Лемма 4.8. (ср. с [29, лемма 2]). *Пусть F — семейство отрезков с* $\omega(F)=k$; *H — некоторый уровень глубины l* $(1 \leqslant l \leqslant k)$ *в* F; $K=\{h_1, \ldots, h_{k-l+1}\}$ — *подсемейство H из $k-l+1$ попарно зацепляющихся отрезков и* $\mathcal{T}(K)=\left\{h \in H \mid h \subset \bigcap_{s=1}^{k-l+1} h_s\right\}$. *Тогда* $\nu(\mathcal{T}(K)) \leqslant 2^l-2$.

Доказательство. Пусть $l=1$, K — семейство попарно зацепляющихся отрезков в $H=F_i(j)$, $|K|=k$. Допустим, что $h_0 \subset \bigcap_{h \in K} h$ и $h_0 \in H$. По лемме 4.7 отрезок $d(h_0)$ зацепляется с каждым отрезком из K. Это противоречит условию $\omega(F) \leqslant k$ нашей леммы.

Предположим теперь, что лемма верна для некоторого l $(1 \leqslant l < k)$. Пусть H — уровень глубины $l+1$ и $K \subset H$ — подсемейство из $k-(l+1)+1$ попарно зацепляющихся отрезков в H. Допустим, что в $\mathcal{T}(K)$ найдутся $2^{l+1}-1$ попарно непересекающихся отрезков $h_1, \ldots, h_{2^{l+1}-1}$, где $h_s =]a_s, b_s[$ $(s=1, \ldots, 2^{l+1}-1)$ и $b_s < a_{s+1}$ при $1 \leqslant s \leqslant 2^{l+1}-2$. Пусть H' — тот уровень глубины l, уровнем которого является H. По лемме 4.7 отрезок $h' = d(h_{2^l})$ в семействе H' зацепляется с каждым отрезком из K. Пусть $K' = K \cup \{h'\}$. Тогда в $\mathcal{T}(K')$ лежат отрезки либо $h_1, \ldots, h_{2^l-1}$, либо $h_{2^l+1}, h_{2^l+2}, \ldots, h_{2^{l+1}-1}$. Это противоречит справедливости леммы для уровней глубины l. Лемма доказана.

Лемма 4.9. *Пусть F — семейство отрезков с* $\omega(F) \leqslant k$ *и* $\nu(F) \leqslant 2^l-1$. *Тогда* $\chi(F) \leqslant kl$.

Доказательство. Пусть $l=1$. Поскольку любые два отрезка из F пересекаются, то граф зацеплений F принадлежит классу графов перестановок [4, гл. 11; 25]. Но для любого графа перестановок G имеем $\chi(G)=\omega(G)$ [4, гл. 6].

Пусть теперь лемма доказана для каждого $l \leqslant l_0$ и F — семейство отрезков с $\omega(F) \leqslant k$; $\nu(F) \leqslant 2^{l_0+1}-1$; $x_1, \ldots, x_{2 \cdot n}$ — все точки, являющиеся концами отрезков из F, и $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n}$. Выберем наименьшее такое q, что при $y \in]x_q, x_{q+1}[$ имеет место неравенство $\nu(F^-(y)) \geqslant 2^{l_0}$ (определения $F^-(y)$, $F^+(y)$, $F^0(y)$ см. в начале п. 4.3). Пусть $y_0 \in]x_q, x_{q+1}[$. По выбору q имеем $\nu(F^-(y_0)) = 2^{l_0}$ и x_q является правым концом какого-то отрезка из F. Кроме того, $\nu(F^+(y_0)) \leqslant 2^{l_0}-1$, поскольку $\nu(F^-(y_0)) + \nu(F^+(y_0)) \leqslant 2^{l_0+1}$. Так как x_q — правый конец какого-то отрезка из F, то для $z \in]x_{q-1}, x_q[$ справедливо соотношение $\nu(F^+(z)) = \nu(F^+(y_0)) \leqslant 2^{l_0}-1$. Учитывая выбор q, получаем $\nu(F^-(z)) \leqslant 2^{l_0}-1$. Очевидно, $\chi(F) \leqslant \chi(F^0(z)) + \max\{\chi(F^-(z)), \chi(F^+(z))\}$. Применяя лемму при $l=l_0$ к $F^-(z)$ и $F^+(z)$, а при $l=1$ к $F^0(z)$, заключаем: $\chi(F) \leqslant k + l_0 k = k(l_0+1)$. Лемма доказана.

Лемма 4.10. *Пусть F — семейство отрезков с* $\omega(F) \leqslant k$ *и H — некоторая связная компонента какого-нибудь уровня F глубины k. Тогда* $\chi(H) \leqslant k(k+2)$.

Доказательство. *Пусть* $\{]x_i, y_i[|i=1, \ldots, t\}$ — наибольшее подсемейство попарно непересекающихся отрезков в H (т. е. $t=\nu(H)$ и $x_i<y_i<x_{i+1}$ для $i=1, \ldots, t-1$). Обозначим $r=2^k-1$. В каждом из отрезков $]y_{jr}, x_{jr+1}[$ для $1\leqslant j<t/r$ выберем точку z_j, не совпадающую ни с одним концом отрезков из H. Обозначим $G_1=H^-(z_1)$, $G_{.[t/r]}=H^+(z_{.[(t-1)/r]})$, $G_j=H^+(z_{j-1})\cap H^-(z_j)$, $j=2, 3, \ldots, .[(t-1)/r]$. В силу выбора точек $z_1, \ldots, z_{.[(t-1)/r[}$, имеем $\nu(H)\geqslant\nu(G_j)+(t-r)$ для любого $j\in\{1, \ldots, ^{\cdot}[t/r]\}$. Следовательно, по определению числа t неравенство $\nu(G_j)\leqslant r$ верно при любом $j\in\{1, \ldots, ^{\cdot}[t/r]\}$. Поскольку отрезки из G_j не пересекаются с отрезками из $G_{j'}$ при $j\neq j'$, то

$$\chi\left(\bigcup_{j=1}^{\cdot[t/r]} G_j\right)=\max_{1\leqslant j\leqslant\cdot[t/r]}\chi(G_j),$$

а по лемме 4.9 (так как $r=2^k-1$) $\chi(G_j)\leqslant k^2$ $(j=1, \ldots, ^{\cdot}[t/r])$, т. е.

$$\chi\left(\bigcup_{j=1}^{\cdot[t/r]} G_j\right)\leqslant k^2.$$

Если для некоторого $j\in\{1, \ldots, .[(t-1)/r]-1\}$ нашелся бы отрезок $h_j\in H^0(z_j)\cap H^0(z_{j+1})$, то h_j содержал бы $r=2^k-1$ непересекающихся отрезков $]x_{jr+1}, y_{jr+1}[, \ldots,]x_{(j+1)r}, y_{(j+1)r}[$. Но это противоречит лемме 4.8, поскольку H — это часть уровня глубины k. Следовательно, $H^0(z_j)\cap\cap H^0(z_{j+1})=\varnothing$ и отрезки из $H^0(z_{j-1})$ не пересекаются с отрезками из $H^0(z_{j+1})$ для любого j. Так как $\nu(H^0(z_j))=1$, то по лемме 4.9 $\chi(H^0(z_j))\leqslant\leqslant k$, $j=1, \ldots, .[(t-1)/r]$. Таким образом,

$$\chi\left(\bigcup_{j=1}^{.[(t-1)/r]} H^0(z_j)\right)\leqslant 2\max_{1\leqslant j\leqslant .[(t-1)/r]}\chi(H^0(z_j))\leqslant 2k.$$

Поскольку

$$H=\left(\bigcup_{j=1}^{\cdot[t/r]} G_j\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{.[(t-1)/r} H^0(z_j)\right),$$

то $\chi(H)\leqslant k^2+2k=k(k+2)$. Лемма доказана.

Теорема 4.4. $\varphi(\mathfrak{X}, k)\leqslant 2^k k(k+2)$.

Доказательство. Пусть F — семейство отрезков с $\omega(F)\leqslant k$. Рассмотрим разбиение F на уровни $F(0), F(1), F(2), \ldots$. Если при некотором N_1 для любого j имеем $\chi(F(j))\leqslant N_1$, то $\chi(F)\leqslant 2N_1$, поскольку мы можем первыми N_1 цветами красить отрезки четных уровней, а оставшимися N_1 цветами — нечетных. Аналогично, если при некотором N_2 мы можем окрасить в N_2 цветов отрезки каждого уровня глубины 2, то $\chi(F)\leqslant 4N_2$ и т. д. Следовательно, умея красить в N_k цветов отрезки каждого уровня глубины k, мы сможем окрасить F, используя не более 2^kN_k цветов. Но по лемме 4.10 отрезки каждого уровня глубины k можно окрасить в $k(k+2)$ цветов. Теорема доказана.

4.5. Нижняя оценка для $\varphi(\mathfrak{X}, k)$. Итак, известны лишь экспоненциальные верхние оценки для $\varphi(\mathfrak{X}, k)$. Мы покажем, что $\varphi(\mathfrak{X}, k)>>k(\ln k-2)/2$. Хотя эта оценка и несравнима с 2^k, но все же нелинейная. Это означает, что в $\mathfrak{X}$ есть графы с более сложной структурой, чем в классе дуговых графов $\mathfrak{D}$, для которого $\varphi(\mathfrak{D}, k)=.[3k/2]$ [9].

Рассмотрим для $i=1, \ldots, .[(q+2)/2]$ семейства отрезков

$$F_i(q)=\{]j, j+iq+1[|j=0, i, 2i, \ldots, (.[q(q+2)/i]-q)i\}.$$

Пусть $F(q)=\bigcup_{i=1}^{.[(q+2)/2]} F_i(q)$. Очевидно,

$$|F(q)|=\sum_{i=1}^{1+.[q/2]}(.[q(q+2)/i]-q+1)\geqslant\sum_{i=1}^{1+.[q/2]}(q(q+2)/i-q)\geqslant$$

$$\geqslant q(q+2)\left(-\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{1+.[q/2]}1/i\right).$$

Нетрудно понять, что $F(q)$ является подсемейством семейства отрезков $\tilde{H}(q+1,\ q)$, получающегося из семейства хорд $H(q+1,\ q)$, описанного в п. 4.3, при помощи стереографической проекции. Таким образом, из леммы 4.2 следует

Лемма 4.11. $\alpha(F(q)) \leqslant q+1$.

Обозначим $m = 1 + [q/2]$.

Лемма 4.12. *Пусть подсемейство отрезков*

$$\{h_j\}_{j=1}^r = \{]a_j,\ b_j[\}_{j=1}^r \subset \bigcup_{i=t}^m F_i(q)$$

таково, что каждые два из них зацепляются и $b_j \in]a,\ b]$ *для каждого* $j=1,\ \ldots,\ r$, *где* a *и* b *целые. Тогда* $b-a \geqslant 1+m+t(r-m+t-2)$.

Доказательство. Поскольку каждые два отрезка нашего подсемейства зацепляются, то их можно так перенумеровать, что

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_r < b_1 < \ldots < b_r \leqslant b. \tag{29}$$

Пусть $h_j \in F_{l_j}(q)$. Покажем, что

$$b_j - a_j \geqslant jt + (1-t)(m - l_j + 1). \tag{30}$$

Если (30) верно, то $b-a \geqslant b_r - a \geqslant rt + (1-t)(m-l_r+1) \geqslant rt + (1-t)\times$ $\times(m-t+1) = 1+m+t(r-m+t-2)$, и лемма будет доказана. Докажем (30) индукцией по j. Поскольку $b_1 \in]a,\ b]$, то $b_1 \geqslant a+1$. Пусть теперь доказано, что

$$b_{j-1} - a \geqslant (j-1)t + (1-t)(m - l_{j-1} + 1).$$

Случай 1: $l_j \leqslant l_{j-1} - 1$. Согласно (29) $b_j - a \geqslant 1 + b_{j-1} - a \geqslant 1 +$ $-(j-1)t + (1-t)(m-(l_j+1)+1) = jt + (1-t)(m-l_j+1)$.

Случай 2: $l_j = l_{j-1}$. По определению $F_{l_j}(q)$ число a_j делится на l_j. Следовательно, $b_j - a \geqslant l_j + b_{j-1} - a \geqslant l_j + (j-1)t + (1-t)(m-l_j+1)$. Поскольку $l_j \geqslant t$, имеем

$$b_j - a \geqslant jt + (1-t)(m - l_j + 1).$$

Случай 3: $l_j \geqslant l_{j-1} + 1$. Напомним, что $b_j = a_j + ql_j + 1$. Согласно (29) $a_j \geqslant a_{j-1} + 1$. Следовательно, $b_j - a = (b_j - b_{j-1}) + (b_{j-1} - a) \geqslant a_j + ql_j +$ $+1 - a_{j-1} - ql_{j-1} - 1 + (b_{j-1} - a) \geqslant 1 + q(l_j - l_{j-1}) + (j-1)t + (1-t)(m -$ $- l_{j-1} + 1) = jt + (1-t)(m - l_j + 1) + 1 + (l_j - l_{j-1})(q - t + 1) - t \geqslant jt + (1 -$ $- t)(m - l_j + 1) + q - 2t + 2$. Но $q - 2t + 2 \geqslant q - 2m + 2 \geqslant 0$. Лемма доказана.

Понятно, что после замены в формулировке леммы 4.12 условия $b_j \in]a,\ b]$, $j = 1,\ \ldots,\ r$, на условие $a_j \in]a,\ b]$, $j=1,\ \ldots,\ r$ ее утверждение останется справедливым.

Лемма 4.13. *Если* $q \geqslant 3$, *то* $\omega(F(q)) \leqslant 2q-1$.

Доказательство. Пусть отрезки подсемейства $F_0 \subset F(q)$ порождают максимальную клику в $F(q)$. Выберем в F_0 отрезок наименьшей длины $h_0 =]a_0,\ b_0[=]a_0,\ a_0 + tq + 1[$. По определению клики, $F_0 \setminus \{h_0\}$ разбивается на два подмножества $F' = \{]a, b[\in F_0 | a \notin h_0,\ b \in h_0\}$ и $F'' =$ $= \{]a, b[\in F_0 | a \in h_0,\ b \notin h_0\}$. Причем, если $\max\{a |]a,\ b[\in F''\} = c$, то $\min\{b |]a, b[\in F'\} \geqslant c+1$. Напомним, что все концы всех отрезков из F_0 различны (поскольку F_0 — клика в $F(q)$) и являются целыми числами. Пусть $|F'| = r_1$, $|F''| = r_2$. По лемме 4.12 и ее аналогу для левых концов отрезков $c - a_0 \geqslant 1 + m + t(r_2 - m + t - 2)$, $b_0 - 1 - c \geqslant 1 + m +$ $+ t(r_1 - m + t - 2)$. Сложив последние неравенства, получим $tq = b_0 - a_0 -$ $-1 \geqslant 2 + 2m + t(r_1 + r_2 - 2m + 2t - 4)$ и $r_1 + r_2 \leqslant (tq - 2 - 2m)/t + 2m -$ $- 2t + 4 = q + 2m + 4 - 2(t + (1+m)/t)$. Взяв производную по t и учитывая, что $m = 1 + [q/2]$, имеем $r_1 + r_2 \leqslant q + 2[q/2] + 6 - 4\sqrt{2 + [q/2]} <$ $< 2q - 1$. Таким образом, $\omega(F(q)) = 1 + r_1 + r_2 \leqslant 2q - 1$. Лемма доказана.

Теорема 4.5. *Если* $k \geqslant 5$, *то* $\varphi(\mathfrak{X},\ k) > k(\ln k - 2)/2$.

Доказательство. В силу леммы 4.13 достаточно доказать, что $\chi(F(q)) > q(\ln 2q - 2)$ при $q = [(k+1)/2]$. Поскольку $1/i > \ln((i+1)/i)$ для каждого натурального i, то $|F(q)| \geqslant q(q+2)\left(-\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{m} 1/i\right) \geqslant$ $\geqslant q(q+2)(-1/2 + \ln((q+3)/2))$, и по лемме 4.12 $\chi(F(q)) \geqslant |F(q)|/$ $/\alpha(F(q)) \geqslant q(q+2)(-0{,}5 + \ln((q+3)/2))/(q+1) > q(\ln 2q - 2)$. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ершов А. П.** Сведение задачи распределения памяти при составлении программ к задаче раскраски вершин графа // Докл. АН СССР.— 1962.— Т. 142, № 4.— С. 785—787.
2. **Евстигнеев В. А.** Применение теории графов в программировании.— М.: Наука, 1985.— 352 с.
3. **Шеннон К. Э.** Теорема о раскраске ребер графа // Кибернетический сборник.— М., 1960.— № 1.— С. 249—250.
4. **Golumbic M. C.** Algorithmic graph theory and perfect graphs.— N. Y.: Acad. Press, 1980.— 284 p.
5. **Akers S. B.** Fault diagnosis as a graph colouring problem // IEEE Trans. Comput.— 1974.— C-23, N 7.— P. 706—713.
6. **Stockmeyer L.** Planar 3 — colorability is polynomial complete // ACM SIGAST News.— 1973.— V. 3.— P. 25—32.
7. **Визинг В. Г.** Хроматический класс мультиграфов // Кибернетика.— 1965.— № 3.— С. 29—39.
8. **Косточка А. В.** Аналог оценки Шеннона для тотальных раскрасок // Методы дискретного анализа в комбинаторных задачах.— Новосибирск, 1977.— Вып. 30.— С. 30—34.
9. **Карапетян И. А.** О раскраске дуговых графов // Докл. АН АрмССР.— 1980.— Т. 70, № 5.— С. 306—311.
10. **Косточка А. В.** Верхние оценки хроматического числа графов через максимальную степень, плотность и обхват // Докл. АН СССР.— 1977.— Т. 235, № 3.— С. 516—518.
11. **Catlin P. A.** A bound on the chromatic number of a graph // Discrete Math.— 1978.— V. 22, N 1.— P. 81—84.
12. **Косточка А. В.** Степень, плотность и хроматическое число графов // Методы дискретного анализа в теории булевых функций и схем.— Новосибирск, 1980.— Вып. 35.— С. 45—70.
13. **Можан Н. Н.** Степень, плотность, хроматическое число графа/Омский политех. ин-т.— Омск, 1984.— 30 с.— ДЕП в ВИНИТИ 6.04.84, № 2073—84.
14. **Ташкинов В. А.** Запрещенные подграфы и хроматическое число // Материалы Всесоюзной студенческой конференции. Математика, Новосибирск, апрель 1977 г.— Новосибирск, 1978.— С. 29—42.
15. **Erdös P.** Graph theory and probability // Canad. J. of Math.— 1959.— V. 11, N 1.— P. 34—38.
16. **Itai A., Even S.** Queues, stacks and graphs // Theory of machines and computations.— N. Y.: Acad. Press.— 1971.— P. 71—86.
17. **Харари Ф.** Теория графов.— М.: Мир, 1973.— 300 с.
18. **Эрдеш П., Спенсер Дж.** Вероятностные методы в комбинаторике. М.: Мир, 1976.— 132 с.
19. **Orlin J.** Contentement in graph theory // K. Nederl. Acad. Wetensch. Proc. (Ser. A).— 1977.— V. 80.— P. 406—424.
20. **Parthasaraty K. R., Choudum S. A.** The edges clique cover number of products of graphs // Jour. Math. Phys. Sci.— 1976.— V. 10, N 3.— P. 255—261.
21. **Brigham R. C., Dutton R. D.** On clique covers and independence numbers of graphs // Discrete Math.— 1983.— V. 44, N 2.— P. 139—144.
22. **Erdös P.** On the covering of the vertices of a graph by cliques // J. Math. Res. Exposition.— 1982.— V. 2, N 1.— P. 93—96.
23. **Erdös P.** Problems and results in graph theory // The theory and applications of graphs.— N. Y., 1981.— P. 331—342.
24. **Fraysseix de H.** A characterization of circle graphs // European J. of Combinatorics.— 1983.— V. 5, N 3.— P. 223—238.
25. **Gavril F.** Algorithms for a maximum clique and a maximum independent set of a circle graph // Networks.— 1973.— V. 3, N 3.— P. 261—273.
26. **Garey M., Johnson D., Miller G., Papadimitriou C.** The complexity of coloring circular arcs and chords // SIAM J. Algeb. Disc. Methods.— 1980.— V. 1.— P. 216—227.
27. **Карапетян И. А.** О совершенных дуговых и хордовых графах: Автореф. дис. ... ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.09.— Новосибирск, 1984.— 9 с.
28. **Gyàrfàs A., Lehel J.** Covering and coloring problems for relatives of intervals // Discrete Math.— 1985.— V. 55, N 2.— P. 161—166.

29. Gyàrfàs A. On the chromatic number of multiple interval graphs and overlap graphs // Ibid.— P. 161—166.
30. Косточка А. В. Оценка хроматического числа графов хорд через плотность // тез. докл. VII Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики, Иркутск, сент. 1985 г.— Иркутск, 1985.— Ч. 1.— С. 101—102.
31. Gavril F. Algorithms on circular arc graphs // Networks.— 1974.— V. 4, N 4.— P. 357—369.

ГЕОМЕТРИЯ В ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

С. В. СЕВАСТЬЯНОВ

Работа посвящена построению эффективных приближенных алгоритмов для таких известных задач теории расписаний как задача объемно-календарного планирования, задачи Джонсона, Акерса — Фридмана, а также других, более общих постановок. При исследовании этих задач обнаруживается их тесная связь с геометрическими постановками, представляющими большой самостоятельный интерес. Среди них задачи компактного суммирования векторов, нахождения ближайшей вершины параллелепипеда, нахождения вершины, равноудаленной от заданного набора вершин единичного куба. Связи между возникающими задачами отражены на рис. 1.1. Результаты, полученные в этой области, находят применение при посторении алгоритмов для исходных задач.

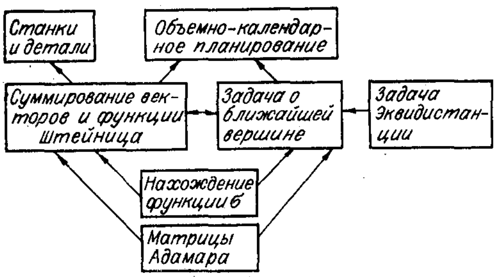


Рис. 1.1. Схема зависимости результатов.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И СВЯЗИ

§ 1. Обозначения и определения

Везде $\mathbf{R}^m$ означает m-мерное векторное пространство над полем действительных чисел. Функция s: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ называется *нормой в пространстве* $\mathbf{R}^m$, если для любых $a, b \in \mathbf{R}^m$, $\lambda \in \mathbf{R}$ выполняется

$$s(a+b) \leqslant s(a)+s(b), \quad s(\lambda a) = |\lambda| s(a), \quad s(a)=0 \Leftrightarrow a=0.$$

Для $b \in \mathbf{R}^m$ значение $s(b)$ будем называть *нормой* s (или *s-нормой*) вектора b и обозначать $\|b\|_s$; $\mathbf{R}_s^m$ — пространство $\mathbf{R}^m$ с нормой s.

Множество $Ш(R_s^m) \triangleq \{b \in R^m | \|b\|_s \leqslant 1\}$ назовем *единичным шаром нормы s в пространстве* $\mathbf{R}_s^m$. Для любой нормы s шар $Ш(\mathbf{R}_s^m)$ является выпуклым, центрально-симметричным, поглощающим множеством. С другой стороны, по множеству $Ш \subset \mathbf{R}^m$, обладающему этими свойствами, однозначно определяется норма s: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ такая, что $Ш(\mathbf{R}_s^m) = Ш$. Эту норму будем называть *нормой, порожденной множеством* Ш.

Множество $RШ(\mathbf{R}_s^m) = \{Rb | b \in Ш(\mathbf{R}_s^m)\}$ назовем *шаром s-нормы радиуса R*. Множество $a + RШ(\mathbf{R}_s^m)$ назовем шаром *s-нормы радиуса R с центром в точке a*. Шар минимального радиуса, содержащий множество $A \subset \mathbf{R}_s^m$, назовем *шаром s-нормы, описанным вокруг A*.

Определим несколько норм как функции от координат вектора $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$. Для $p \geqslant 1$ l_p-норма вектора $x \in \mathbf{R}^m$ определяется