

29. Gyàrfàs A. On the chromatic number of multiple interval graphs and overlap graphs // Ibid.— P. 161—166.
30. Косточка А. В. Оценка хроматического числа графов хорд через плотность // тез. докл. VII Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики, Иркутск, сент. 1985 г.— Иркутск, 1985.— Ч. 1.— С. 101—102.
31. Gavril F. Algorithms on circular arc graphs // Networks.— 1974.— V. 4, N 4.— P. 357—369.

ГЕОМЕТРИЯ В ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

С. В. СЕВАСТЬЯНОВ

Работа посвящена построению эффективных приближенных алгоритмов для таких известных задач теории расписаний как задача объемно-календарного планирования, задачи Джонсона, Акерса — Фридмана,

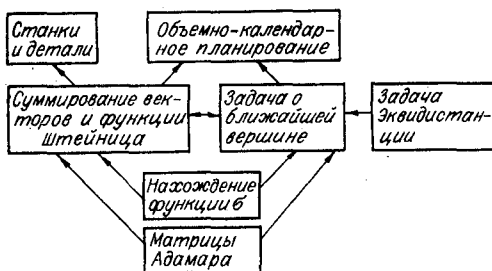


Рис. 1.1. Схема зависимости результатов.

а также других, более общих постановок. При исследовании этих задач обнаруживается их тесная связь с геометрическими постановками, представляющими большой самостоятельный интерес. Среди них задачи компактного суммирования векторов, нахождения ближайшей вершины параллелепипеда, нахождения вершины, равноудаленной от заданного набора вершин единичного куба. Связи между возникающими задачами отражены на рис. 1.1. Результаты, полученные в этой области, находят применение при построении алгоритмов для исходных задач.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И СВЯЗИ

§ 1. Обозначения и определения

Везде $\mathbf{R}^m$ означает m -мерное векторное пространство над полем действительных чисел. Функция $s: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ называется *нормой в пространстве $\mathbf{R}^m$* , если для любых $a, b \in \mathbf{R}^m$, $\lambda \in \mathbf{R}$ выполняется

$$s(a + b) \leq s(a) + s(b), \quad s(\lambda a) = |\lambda|s(a), \quad s(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Для $b \in \mathbf{R}^m$ значение $s(b)$ будем называть *нормой s* (или *s -нормой*) вектора b и обозначать $\|b\|_s$; $\mathbf{R}_s^m$ — пространство $\mathbf{R}^m$ с нормой s .

Множество $\Pi(R_s^m) \triangleq \{b \in \mathbf{R}^m \mid \|b\|_s \leq 1\}$ назовем *единичным шаром нормы s в пространстве $\mathbf{R}_s^m$* . Для любой нормы s шар $\Pi(R_s^m)$ является выпуклым, центрально-симметричным, поглощающим множеством. С другой стороны, по множеству $\Pi \subset \mathbf{R}^m$, обладающему этими свойствами, однозначно определяется норма $s: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ такая, что $\Pi(\mathbf{R}_s^m) = \Pi$. Эту норму будем называть *нормой, порожденной множеством Π* .

Множество $R\Pi(R_s^m) = \{Rb \mid b \in \Pi(R_s^m)\}$ назовем *шаром s -нормы радиуса R* . Множество $a + R\Pi(R_s^m)$ назовем *шаром s -нормы радиуса R с центром в точке a* . Шар минимального радиуса, содержащий множество $A \subset \mathbf{R}_s^m$, назовем *шаром s -нормы, описанным вокруг A* .

Определим несколько норм как функции от координат вектора $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbf{R}^m$. Для $p \geq 1$ l_p -норма вектора $x \in \mathbf{R}^m$ определяется

по формуле

$$\|x\|_{l_p} \triangleq \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p},$$

$$\|x\|_{l_\infty} \triangleq \max_{i=1, \dots, m} |x_i|.$$

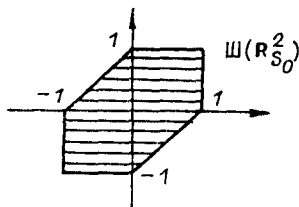


Рис. 1.2. Единичный шар нормы s_0 .

Норму l_2 будем называть также «евклидовой»,

а шар в $R_{l_2}^m$ — «евклидовым». Пусть для $\lambda \in \mathbf{R}$ через λ^+ , λ^- обозначены функции

$$\lambda^+ \triangleq \begin{cases} \lambda, & \lambda \geq 0, \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases} \quad \lambda^- \triangleq \begin{cases} 0, & \lambda \geq 0, \\ \lambda, & \lambda < 0. \end{cases}$$

Норму s_0 определим по формуле

$$\|x\|_{s_0} \triangleq \max_i x_i^+ - \min_i x_i^-.$$

Единичный шар этой нормы определяется равенством

$$\mathcal{W}(R_{s_0}^m) = \text{conv}\{\mathcal{W}, -\mathcal{W}\},$$

где $\mathcal{W} = \{x \in \mathbf{R}^m | x_i \in [0, 1], i = 1, \dots, m\}$ (см. $\mathcal{W}(R_{s_0}^2)$ на рис. 1.2).

Для $\lambda \in \mathbf{R}$ через $[\lambda]$, $\lceil \lambda \rceil$ обозначим ближайшее к λ целое число, меньшее λ и большее λ , соответственно.

§ 2. Исходные постановки задач

Здесь речь пойдет о постановках задач, послуживших источником для развития приводимой ниже теории, а также конечным пунктом ее приложения.

Задача равномеризации. *Имеется n предметов и m параметров для их характеристики. Требуется разбить множество предметов на l подмножеств «равномерно», чтобы суммарные m -мерные характеристики во всех множествах мало отличались друг от друга.*

Экономической интерпретацией может служить следующая задача объемно-календарного планирования (ОКП): годовой план, представленный n наименованиями, требуется разбить по кварталам (или по месяцам) как можно равномернее по всем параметрам.

В дальнейшем, говоря о задаче равномеризации и имея в виду ее практический смысл, будем называть ее задачей ОКП.

Традиционный подход к приближенному решению задачи ОКП*) состоит в следующем: переставляя предметы, вначале добиваются равномерности распределения по первому параметру без учета остальных, затем — по второму (при этом равномерность по первому параметру ухудшается) и так далее.

Здесь предлагается иной подход, при котором учитываются все параметры одновременно. Идея состоит в следующем. Если $b_i \in \mathbf{R}^m$ — вектор характеристик i -го предмета, $B \triangleq \sum b_i$, то стараемся найти такой порядок суммирования векторов $\{b_i\}$, чтобы траектория их промежуточных сумм мало отклонялась от прямой $L = \{tB, t \in \mathbf{R}\}$. Разбивая такую траекторию на части ортогональными к L плоскостями, проходящими че-

*) Применение алгоритмов точного решения этой задачи не имеет практического смысла ввиду их огромной трудоемкости. Задачи, рассматриваемые в данной работе, как правило, относятся к классу NP-трудных проблем.

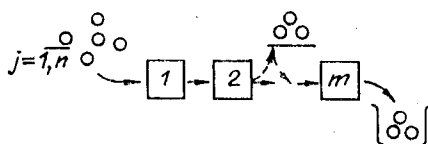


Рис. 1.3. Модель Джонсона.

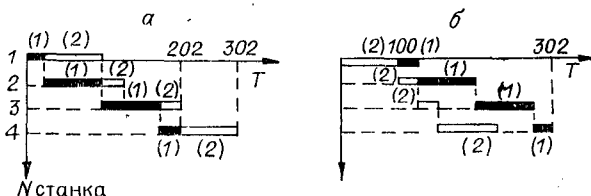


Рис. 1.4. Графики Ганта расписаний без задержки.

рез точки $B/l, 2B/l, \dots, (l-1)B/l$, получим разбиение $\{N_1, \dots, N_l\}$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$, при котором для каждого $k = \overline{1, l}$ суммарный вектор $b^k \triangleq \sum_{i \in N_k} b_i$ мало отличается от вектора B/l , т.е. все суммарные векторы $\{b^k, k = \overline{1, l}\}$ примерно равны.

Чтобы траектория мало отклонялась от прямой L , спроецируем b_i на ортогональную к L гиперплоскость, и относительно этих проекций $\{b'_i\}$ (для которых $\sum b'_i = 0, \|b'_i\|_{l_2} \leq \max_i \|b_i\|_{l_2}$) решим следующую задачу компактного суммирования векторов (КСВ): найти такой порядок суммирования $\{b'_i\}$, чтобы все промежуточные суммы были по возможности малы (в норме l_2).

Задача Джонсона [1]. Имеются m станков и n деталей, каждая из которых проходит обработку последовательно на 1-м, 2-м, ..., m -м станках и затем выходит из процесса (см. рис. 1.3). Заданы длительности $a_{ij}, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$, всех операций. Требуется найти порядок обработки деталей за наименьшее время.

В произвольном допустимом расписании детали проходят обработку на i -м станке в некоторой последовательности $\pi^i = (\pi_1^i, \dots, \pi_n^i)$, при этом перестановки π^i могут не совпадать для различных i . В самом деле, мы можем задержать 1-ю деталь после прохождения, скажем, 2-го станка, пропустив на 3-й станок детали 2, 3 и 4, и только после этого вновь пустить 1-ю деталь (см. рис. 1.3), получив $\pi^3 \neq \pi^2$. В ряде случаев подобное изменение порядка обработки деталей может приводить к улучшению расписания. Рассмотрим пример с двумя деталями, четырьмя станками и длительностями операций $a_{11} = a_{41} = a_{22} = a_{32} = 1; a_{21} = a_{31} = a_{12} = a_{42} = 100$.

Длина каждого расписания без задержки (их всего два: (1,2) и (2,1)) равна 302 (рис. 1.4). Если же через 1-й и 2-й станок детали проходят в порядке (1,2), а через 3-й и 4-й — в порядке (2,1), то длина расписания будет меньше (рис. 1.5). Тем не менее ограничимся рассмотрением расписаний, задаваемых единственной перестановкой π , т.е. $\pi^1 = \pi^2 = \dots = \pi^m = \pi$. Назовем их *перестановочными*. (Что мы теряем, игнорируя все прочие расписания и среди них, возможно, оптимальное, — увидим из дальнейшего). Для перестановочных расписаний технология выполнения операций легко описывается с помощью сети S_π (рис. 1.6), где $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ — порядок следования деталей; o_{ij} на рисунке — операция обработки j -й детали на i -м станке.

Перестановка π не задает расписания однозначно (для однозначности необходимо еще указать момент начала каждой операции): каждой перестановке π соответствует континуум расписаний. Длина любого из них не меньше длины произвольного пути C из источника s в сток t в сети S_π , где под *длиной пути* понимается сумма длительностей лежащих на нем операций. Таким образом, для кратчайшего из порожденных перестановкой π расписания P_π выполняется неравенство

$$T(P_\pi) \geq \max_{C \subset S_\pi, o_{ij} \in C} \sum a_{ij}.$$

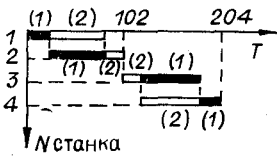


Рис. 1.5. График расписания с задержкой.

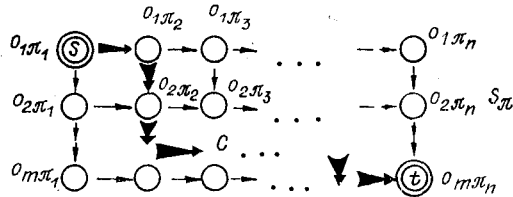


Рис. 1.6. Сетевая модель перестановочного расписания.

Более того, теория, развитая в сетевом планировании, утверждает, что здесь имеет место равенство, т. е.

$$T(P_\pi) = \max_{1 \leq k_1 < \dots < k_{m-1} \leq n} \left(\sum_{j=1}^{k_1} a_{1\pi_j} + \sum_{j=k_1}^{k_2} a_{2\pi_j} + \dots + \sum_{j=k_{m-1}}^n a_{m\pi_j} \right). \quad (1.1)$$

Обозначим

$$H_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}, \quad H = \max_{i=1, \dots, m} H_i, \quad h = \max_{i,j} a_{ij}.$$

Из (1.1) ясно, что для любой перестановки π выполняется $T(P_\pi) \geq H$. Более того, оценка

$$T(P) \geq H \quad (1.2)$$

справедлива для любых расписаний, включая неперестановочные, поскольку чистое время работы i -го станка равно H_i , $i = 1, \dots, m$. Значения H_i могут быть различными для разных станков. Однако, увеличивая некоторые a_{ij} (при сохранении неравенства $a_{ij} \leq h$), можно добиться, чтобы

$$H_i = H, \quad i = 1, \dots, m. \quad (1.3)$$

При этом длина расписания P_π , вообще говоря, может увеличиться. Ниже мы получим оценку, насколько сильным может быть это увеличение.

Определим векторы $b_j = (a_{1j} - a_{2j}, a_{2j} - a_{3j}, \dots, a_{m-1,j} - a_{mj}) \in \Pi(R_{l_\infty}^{m-1})$. Из (1.3) следует, что $\sum b_j = 0$. Для любого расписания P_π справедливо неравенство

$$T(P_\pi) \leq (m-1)h + b_\pi^{h_1}(1) + b_\pi^{h_2}(2) + \dots + b_\pi^{h_{m-1}}(m-1) + H,$$

где $b_\pi^h \triangleq \sum_{j=1}^h b_{\pi_j}$, $b(i)$ — i -я координата вектора b , а числа $h_1, \dots, h_{m-1}$ соответствуют максимальному пути C в сети S_π . Если просуммируем векторы b_j так, чтобы все суммы b_π^h , $h = 1, \dots, n$, лежали в шаре $R_1 \Pi(R_{l_\infty}^{m-1})$, то получим

$$T(P_\pi) \leq H + (m-1)(R_1 + 1)h. \quad (1.4)$$

Отсюда, учитывая (1.2), выводим оценку отклонения от оптимума.

$$T(P_\pi) - T(P_{\text{опт}}) \leq (m-1)(R_1 + 1)h,$$

из которой видно, что чем меньше R_1 , тем меньше оценка отклонения от оптимума, т. е. мы вновь приходим к необходимости уметь решать задачу КСВ (на этот раз — в пространстве с нормой l_∞).

Попробуем теперь оценить длину расписания по-другому, для чего рассмотрим векторы $c_j = (a_{1j} - a_{mj}, a_{2j} - a_{mj}, \dots, a_{m-1,j} - a_{mj}) \in R_{l_\infty}^{m-1}$, $j = 1, \dots, n$, лежащие в шаре $R_{s_0}^{m-1}$. Для любого вектора $x \in \Pi(R_{s_0}^m)$

$$|x(i)| \leq 1, \quad (1.5)$$

$$|x(i) - x(j)| \leq 1. \quad (1.6)$$

Из (1.1) получаем

$$T(P_\pi) \leq (m-1)h + (c_\pi^{k_1}(1) - c_\pi^{k_1}(2)) + (c_\pi^{k_2}(2) - c_\pi^{k_2}(3)) + \dots + (c_\pi^{k_{m-2}}(m-2) - c_\pi^{k_{m-2}}(m-1)) + c_\pi^{k_{m-1}}(m-1) + H, \quad (1.7)$$

где $c_\pi^k = \sum_{j=1}^k c_{\pi_j}$; $k_1, \dots, k_{m-1}$ соответствуют максимальному пути $C \subset S_\pi$.

Если R_2 таково, что $c_\pi^k \in R_2 h \text{III} (R_{s_0}^{m-1})$, $k = \overline{1, n}$, то из (1.5)–(1.7) вытекает оценка

$$T(P_\pi) \leq H + (m-1)(R_2 + 1)h, \quad (1.8)$$

аналогичная (1.4). Ясно, что чем меньше R_2 , тем лучше оценка. Минимизация же R_2 достигается при помощи решения задачи КСВ в пространстве с нормой s_0 относительно векторов $\{c_j\}$ ($\sum c_j = 0$).

Таким образом, для задачи Джонсона мы можем предложить два алгоритма приближенного ее решения с использованием алгоритмов решения задачи КСВ: для векторов $\{b_j\} \subset R_{l_\infty}^{m-1}$ и векторов $\{c_j\} \subset R_{s_0}^{m-1}$.

При этом для конкретной задачи мы можем получить две различные перестановки π , и лучшим может оказаться как первый, так и второй метод. Но если брать совокупность задач в целом, то лучшим является тот метод, для которого при той же (или сравнимой по порядку) трудоемкости мы можем заранее гарантировать лучшее приближение к оптимуму, т. е. лучшую априорную оценку точности. Следовательно, из двух методов с получением оценок (1.4), (1.8) лучше тот, который гарантирует меньший радиус R_i ($i = 1, 2$).

Итак, для решения задачи равномеризации и задачи Джонсона необходимо

— уметь эффективно решать задачу КСВ с гарантированными оценками точности для различных норм;

— уметь выбирать метод сведения к задаче КСВ, обеспечивающий наилучшую оценку точности в исходной задаче.

Иначе говоря, нам требуется подробный анализ задачи КСВ.

§ 3. О суммировании векторов

Вначале уточним постановку задачи КСВ, упомянутой в § 2.

Определение. Совокупность векторов $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subset R_s^m$ будем называть совокупностью Штейница, если $\sum b_j = 0$, $\|b_j\|_s \leq 1$.

Задача КСВ. Построить алгоритм, который для всякой совокупности Штейница $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subset R_s^m$ эффективно строил бы перестановку $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ чисел $1, 2, \dots, n$, минимизирующую функционал

$$f_{\mathfrak{B},s}(\pi) = \max_{k=\overline{1,n}} \left\| \sum_{j=1}^k b_{\pi_j} \right\|_s.$$

Функцией Штейница в пространстве R_s^m назовем

$$\varphi_s(m) \triangleq \sup_{\mathfrak{B} \subset R_s^m} \min_{\pi} f_{\mathfrak{B},s}(\pi).$$

Обоснование корректности такого определения дает фактически доказанная в [2]

Лемма (Штейниц). Для любых s и m

$$\varphi_s(m) \leq 2m. \quad (1.9)$$

Лемма Штейница имеет для нас основополагающее значение. Во-первых, она позволяет ввести функции $\varphi_s(m)$ и исследовать поведение зада-

чи KCB в наихудшем случае для всевозможных норм. Во-вторых, она локализует значение оптимума исходных задач в узкой области. Размер области постоянен в пределах заданного m , т. е. не зависит от числа предметов, деталей, которое в практических задачах, как правило, большое.

Итак, лемма Штейница верна для любой нормы. Но при этом она не позволяет различать функции $\varphi_s(m)$ для различных норм. Кроме того, остаются актуальными задачи усиления полученной Штейницем оценки (1.9) и эффективного построения перестановок π с гарантированными оценками величины $f_{\mathfrak{B},s}(\pi)$.

На решение обеих задач направлена полученная автором

Теорема 1.1. Пусть $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \Pi \subset \mathbb{R}^m$, Π — выпуклое множество, $x = \sum x_i/n$. Тогда существует и эффективно (за $O(n^2 m^2)$ операций) находится такая перестановка $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, что

$$\sum_{j=1}^k x_{\pi_j} - (k-m)x \in m\Pi, \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.10)$$

Для произвольной совокупности Штейница $\mathfrak{B} = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \Pi(\mathbb{R}_s^m)$ теорема 1.1 дает эффективный алгоритм нахождения перестановки π с оценкой

$$f_{\mathfrak{B},s}(\pi) \leq m, \quad (1.11)$$

откуда

$$\varphi_s(m) \leq m. \quad (1.12)$$

Оценка (1.12) точнее, чем (1.9), а также (при $s = l_2$), чем оценка $\varphi_{l_2}(m) \leq ((4^m - 1)/3)^{1/2}$. Последняя получена в 1931 г. Бергстромом [3] и независимо в 1953 г. Кадецом [4]. Отметим, что поставленный [5] Гроссом в 1917 г. вопрос о нахождении точных значений функции $\varphi_{l_2}(m)$ пока остается открытым.

Укажем некоторые свойства функций $\varphi_s(m)$.

Теорема 1.2. Существуют $m > 1$ и нормы s_1, s_2 такие, что $\varphi_{s_1}(m) \neq \varphi_{s_2}(m)$.

Теорема 1.3. $\inf_{p \geq 1} \varphi_{l_p}(m) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$.

Доказательство теорем 1.2, 1.3 опирается на построение нижних и верхних оценок функций $\varphi_{l_p}(m)$ (см. гл. 2).

В связи с теоремой 1.3 возникает следующая

Гипотеза: $\inf_s \varphi_s(m) \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$.

Автором доказана

Теорема 1.4. $\inf_s \varphi_s(2) \geq (9/8)^{1/2}$.

Отметим простое, но полезное свойство инвариантности функций относительно линейного преобразования пространства.

Теорема 1.5. Пусть $L: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — невырожденный линейный оператор; s_1 и s_2 — нормы в $\mathbb{R}^m$ такие, что $\Pi(\mathbb{R}_{s_2}^m) = L(\Pi(\mathbb{R}_{s_1}^m))$. Тогда $\varphi_{s_2}(m) = \varphi_{s_1}(m)$.

Из теоремы 1.5 сразу следует, что $\varphi_{l_1}(2) = \varphi_{l_\infty}(2)$, поскольку единичные шары норм l_1 и l_∞ в $\mathbb{R}^2$ (рис. 1.7а, б) линейно подобны.

Зависимость функций $\varphi_s(m)$ от нормы s характеризует

Теорема 1.6. Задача KCB в пространстве $\mathbb{R}_s^2$ решается за $O(n^2)$ операций с оценкой

$$f_{\mathfrak{B},s}(\pi) \leq \sigma(s, 2), \quad (1.13)$$

где функция $\sigma(s, x)$ показывает, в какое минимальное число раз x необ-

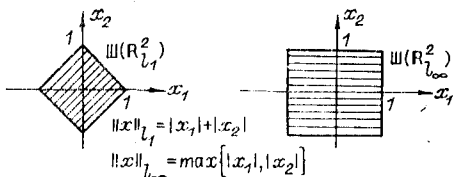


Рис. 1.7. Единичные шары норм l_1 и l_∞ в R^2 .

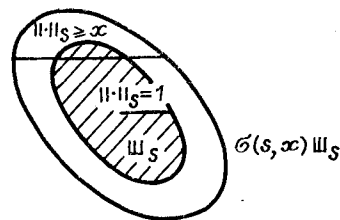


Рис. 1.8. Иллюстрация функции $\sigma(s, x)$.

ходимо увеличить единичный шар Π_s , чтобы всякая хорда в шаре $\kappa\Pi_s$, пересекающая Π_s , имела s -норму не меньше x (рис. 1.8).

Здесь и далее $\Pi_s = \Pi(R_s^2)$.

Следствие 1. Для всякой нормы s верна оценка

$$\varphi_s(2) \leq \sigma(s, 2). \quad (1.14)$$

В отличие от оценок (1.9), (1.12) теорема 1.6 дает такую верхнюю оценку для $\varphi_s(2)$, в которой существенно используется специфика единичного шара s -нормы. По своей природе функция σ близка к модулю гладкости нормированного пространства, определяемому в [6] по формуле

$$\rho(t) = \sup_{\|u\|, \|v\| \leq 1} \left(\frac{\|u + tv\| + \|u - tv\|}{2} - 1 \right), t \geq 0.$$

Отметим также, что теорема 1.6 позволяет уточнить (1.12) при $m = 2$ для целого ряда норм. В частности, при $s = l_2$ получаем из (1.14) и равенства $\sigma(l_2, x) = (1 + x^2/4)^{1/2}$ оценку $\varphi_{l_2}(2) \leq \sqrt{2}$, полученную ранее Гроссом [5].

Следствие 2. Для нормы s_0 теорема 1.6 дает эффективный алгоритм нахождения перестановки π с оценкой

$$f_{\otimes, s_0}(\pi) \leq 1,5. \quad (1.15)$$

Нижняя оценка функции $\varphi_{l_p}(m)$, нетривиальная при малых $p \geq 1$ (например $\varphi_{l_1}(m) \geq (m+1)/2$, $\varphi_{l_2}(m) \geq \sqrt{m+3}/2$), при $p \rightarrow \infty$ вырождается ($\varphi_{l_\infty}(m) \geq 1$), что позволяет сделать вывод о неограниченном росте функции $\varphi_{l_\infty}(m)$ с ростом m . Для получения нетривиальных оценок функции $\varphi_{l_\infty}(m)$ оказались полезными матрицы Адамара.

§ 4. Оценки функций Штейница через матрицы Адамара

Матрицей Адамара A_n называется квадратная матрица порядка n такая, что ее элементы суть ± 1 и любые две ее строки ортогональны.

Примеры матриц Адамара приведены на рис. 1.9.

Нетрудно проверить, что если матрица A_n , $n \geq 4$, существует, то n кратно 4. Адамаром же была высказана гипотеза, что для любого n , кратного 4, матрица A_n существует. Эта гипотеза подтверждена для всех $n \leq 264$ (см. [7]).

Частным случаем матриц Адамара являются матрицы Сильвестра $S_0, S_1, \dots$, определяемые следующим образом:

$$S_0 = (+1), \quad S_{k+1} = \begin{pmatrix} S_k & S_k \\ S_k & -S_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Нетрудно видеть, что S_k имеет порядок 2^k . Другое свойство представляет нам

Лемма 1.1 [8]. Любые $l \leq k$ строк матрицы S_k совпадают не менее, чем в 2^{k-l+1} разрядах.

Следствие. Для любых k строк матрицы S_k найдется столбец $i \neq 1$, в котором все выбранные строки совпадают.

Теорема 1.7. Если для $n \leq m+1$ существует матрица A_n , то

$$\begin{aligned} \varphi_{l_p}(m) &\geq n/2 \sqrt{n-1}, \quad p \geq 2, \\ \varphi_{l_\infty}(m) &\geq] n/2 \sqrt{n-1} [. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Доказательство. Для получения искомых оценок будем конструировать «плохую» совокупность Штейница в $R_{l_p}^{n-1}$, используя строки $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$ матрицы A_n . Без ограничения общности можем считать, что $a_{i1} = 1$, $i = 1, n$ (эти условия выполняются в матрицах Сильвестра). Векторы $b_i \triangleq (a_{i2}, \dots, a_{in})$ дадут нам искомую совокупность Штейница $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subset R_{l_\infty}^{n-1}$. Действительно, для $A \triangleq \sum_{i=1}^n a_i$, $B \triangleq \sum_{i=1}^n b_i$

$$(B, B) = (A, A) - A^2(1) = \sum_{i=1}^n (a_i, a_i) - n^2 = n^2 - n^2 = 0,$$

откуда $B = 0$. Для произвольного $J \subset \{1, 2, \dots, n\}$, $|J| = n/2$, и $a \triangleq \sum_{i \in J} a_i$,

$$b \triangleq \sum_{i \in J} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} b^2(i) = (b, b) = (a, a) - a^2(1) = n^2/2 - n^2/4 = n^2/4,$$

поэтому $\|b\|_{l_\infty} = \max_i |b(i)| \geq] (n^2/4(n-1))^{1/2} [$. Последнее неравенство

означает, что какой бы порядок π суммирования векторов $\{b_1, \dots, b_n\}$ мы ни взяли, верна оценка

$$f_{\mathfrak{B}, l_\infty}(\pi) \geq \left\| \sum_{j=1}^{n/2} b_{\pi_j} \right\|_{l_\infty} \geq] n/2 \sqrt{n-1} [,$$

из которой вытекает $\varphi_{l_\infty}(m) \geq \varphi_{l_\infty}(n-1) \geq] n/2 \sqrt{n-1} [$. Совокупность $\{x_i\} = \{\lambda b_i\}$, где $\lambda = (n-1)^{-1/p}$, можно взять в качестве совокупности Штейница в пространстве $R_{l_p}^{n-1}$. Пусть Π_s — шар евклидовой нормы, описанный вокруг $\Pi(R_{l_p}^{n-1})$; s — норма, порожденная Π_s . Тогда $\|x_i\|_{l_p} = \|x_i\|_s = 1$, $p \geq 2$. Далее, для $X \triangleq \sum_{i \in J} x_i$, $b = \sum_{i \in J} b_i$, $|J| = n/2$

$$\|X\|_{l_p} \geq \|X\|_s = \frac{\|X\|_s}{\|x_i\|_s} = \frac{\|X\|_{l_2}}{\|x_i\|_{l_2}} = \frac{\|b\|_{l_2}}{\|b_i\|_{l_2}} = \frac{n}{2\sqrt{n-1}},$$

откуда $\varphi_{l_p}(m) \geq \varphi_{l_p}(n-1) \geq n/2 \sqrt{n-1}$. Теорема доказана.

Пусть $m \geq 3$ и l — максимальное такое число, что $4l^2 \leq m+1$. Тогда

$$4(l+1)^2 \geq m+2. \quad (1.17)$$

Из теоремы 1.7 следует, что если матрица A_{4l^2} существует, то $\varphi_{l_\infty}(m) \geq] 2l^2/(4l^2-1)^{1/2} [= l+1 \geq] \sqrt{m+2}/2 [$, так что справедливо

Следствие 1. Если матрица A_n существует для всех $n \leq m+1$ вида $n = 4l^2$, то

$$\varphi_{l_\infty}(m) \geq \lfloor \sqrt{m+2}/2 \rfloor. \quad (1.18)$$

Из результатов, приведенных в [9, 10], следует факт существования матриц A_{4l^2} при $l \leq 32$, в связи с этим оценка (1.18) справедлива для всех $m \leq 4 \cdot 32^2 - 2 = 4354$.

Следствие 2. Для всех m справедливы неравенства

$$\varphi_{l_\infty}(m) \geq \lfloor (m+2)/2 \sqrt{2m} \rfloor \geq \lfloor 0,3535 \sqrt{m+4} \rfloor. \quad (1.19)$$

Действительно, поскольку матрица Сильвестра порядка $n \in [(m+2)/2, m+2]$ всегда существует, то, используя монотонность функции $n/\sqrt{n} - 1$ и заменяя в (1.16) n на $(m+2)/2$, получим (1.19).

Следствие 3. Если существует матрица A_{m+1} , то $\varphi_{l_p}(m) \geq \lfloor (m+1)/2 \sqrt{m} \rfloor > \sqrt{m+2}/2$, $p \geq 2$.

Рассмотрение матриц Сильвестра S_k , $k = \lfloor \log_2(m+1) \rfloor$, позволяет получить еще одну оценку. Пусть $S_k = (a_{ij})$, $b_i = (a_{i_2}, \dots, a_{i_n})$, $n = 2^k$, $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$. Для любых k векторов совокупности $\mathfrak{B}$ согласно следствию леммы 1.1 существует j такое, что j -е координаты всех выбранных векторов совпадают (и равны $+1$ или -1). Это означает, что какую бы перестановку π векторов $\mathfrak{B}$ мы ни взяли, будет выполняться равенство

$$\left\| \sum_{j=1}^k b_{\pi_j} \right\|_{l_\infty} = k, \text{ из которого}$$

$$f_{\mathfrak{B}, l_\infty}(\pi) \geq k = \lfloor \log_2(m+1) \rfloor \text{ и } \varphi_{l_\infty}(m) \geq \lfloor \log_2(m+1) \rfloor. \quad (1.20)$$

Хотя оценка (1.20) хуже по порядку, чем (1.18), но при $m \leq 194$ она дает не худшие, а при некоторых m — лучшие значения (как, например, при $m = 7, \dots, 98$ или $m = 127, \dots, 142$).

§ 5. Возвращение к истокам. Станки и детали

Из (1.11) в силу (1.4) или (1.8) получаем следующий результат для задачи Джонсона.

Теорема 1.8. Для любых n деталей, проходящих обработку на m станках по схеме, изложенной в задаче Джонсона, с трудоемкостью $O(n^2 m^2)$ можно найти перестановочное расписание с оценкой

$$T(P_\pi) \leq H + m(m-1)h. \quad (1.21)$$

Приведем несколько выводов из этой теоремы.

Вывод 1. Опираясь на (1.2) и (1.21), мы можем довольно точно вычислить значение оптимума (локализовав его в интервале $[H, H + m(m-1)h]$, длина которого не зависит от числа деталей), не имея практической возможности найти само оптимальное расписание.

Вывод 2. Оптимум среди перестановочных расписаний отличается от глобального оптимума не более, чем на величину $m(m-1)h$, не зависящую от размеров исходной совокупности деталей.

Вывод 3. Если при прохождении потока одинаковых деталей по m станкам сразу же определяется узкое место, каким является наиболее загруженный станок, то для потока из различных деталей это, вообще говоря, не так. Узкое место может возникать то на одном, то на другом станке, в результате чего даже наиболее загруженный станок может длительное (в сумме) время простаивать. Однако по теореме 1.8 этого можно избежать, и при правильной организации работы наиболее загруженный станок практически не простаивает (т. е. $T(P_{\text{опт}})$ близко к H).

Вывод 4. Выравнивание величин H_i (процедура, приводящая к (1.3)) огрубляет оптимум незначительно, хотя общий объем работы при этом может сильно возрасти (в некоторых случаях — в m раз!).

Теперь перейдем к более общим моделям и зададимся вопросом: возможны ли для них результаты, аналогичные только что сформулированным?

Задача Акерса — Фридмана. Имеется m станков и n деталей, для каждой из которых маршрут прохождения по станкам задан заранее и является перестановкой чисел $\{1, 2, \dots, m\}$; o_{ij} — операция обработки j -й детали на i -м станке, a_{ij} — ее длительность. Требуется найти порядок обработки деталей за наименьшее время.

Задача встречных маршрутов является сужением задачи Акерса — Фридмана на случай двух различных маршрутов по станкам: $(1, 2, \dots, m)$ и $(m, m-1, \dots, 1)$.

В [11] приведен алгоритм нахождения расписания P с оценкой

$$T(P) \leq H + 3^{m-1} (1 + (\varphi_{l_\infty} (2m-2) + 12)/2) h.$$

Последняя существенно зависит от успешного решения задачи КСВ, так же как и приводимые ранее оценки (1.4), (1.8), хотя интервал прогнозирования оптимума здесь существенно шире, чем в задаче Джонсона. Позднее выяснилось, что при более аккуратном использовании задачи КСВ результат может быть существенно улучшен.

Теорема 1.9. Для задачи встречных маршрутов с трудоемкостью $O(n^2 m^2)$ можно найти расписание с оценкой

$$T(P) \leq H + (2m^2 - (m+3)/2) h < H + 2m^2 h.$$

Задача Акерса — Фридмана долгое время не поддавалась ни эффективному приближенному решению, ни сколько-нибудь нетривиальному анализу, поскольку технологические маршруты в ней столь путанно переплетаются между собой, что даже выписать (аналитически) целевую функцию — чтобы потом исследовать ее, как (1.1) в задаче Джонсона — не представляется возможным. В этой ситуации в [12] была получена в случае $a_{ij} = 1$ нетривиальная оценка оптимума:

$$T(P_{\text{опт}}) \leq H \sqrt{m} + (m - \sqrt{m}) h,$$

не позволявшая, однако, говорить о какой-либо «локализации» значения оптимума. Существенное продвижение дала работа [13], где в случае трех станков найден алгоритм построения расписания с оценкой

$$T(P) \leq H + 3(3\sqrt{2} + 5) h < H + 28h. \quad (1.22)$$

Приведенный в [13] алгоритм не обобщается на случай $m > 3$ станков. Тем не менее результат позволял надеяться на существование аналогичной оценки в общем случае, что и было подтверждено в дальнейшем: автором данной статьи отличным от [13] методом построен алгоритм, за $O(m^4 n^2)$ операций находящий расписание P с оценкой $T(P) \leq H + (m-1)(m^3 + 2)h$. Причем этот результат попутно получен при решении наиболее общей задачи такого типа: деталь может проходить через один и тот же станок сколько угодно раз, и нет ограничений на длину маршрута. Назовем ее задачей с маршрутами произвольного вида (МПВ) и приведем точную ее формулировку.

Задача МПВ. Имеется n деталей, m станков. Заданы частичный порядок выполнения операций $O_j = \{o_j^s, s = 1, w_j\}$ для j -й детали, и для каждой операции o_j^s — ее длительность a_j^s и станок-исполнитель $I(o_j^s)$. Требуется найти расписание выполнения всех операций за наименьшее время.

Доказана (см. гл. 2) следующая

Теорема 1.10. Для задачи МПВ с трудоемкостью $O(n^2 m^2 w^2)$ можно построить расписание P с оценкой

$$T(P) \leq H + \kappa h, \quad (1.23)$$

$$\text{где } H = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{I(o_j^s)=i} a_j^s, \quad h = \max_{s, j} a_j^s, \quad w = \max_{j=1, \dots, n} w_j,$$

$$\kappa = (mw^2 + 2w - 1)(w - 1). \quad (1.24)$$

Заметим, что оценка (1.23) вновь дает возможность довольно точно прогнозировать значение оптимума при большом потоке деталей, а также позволяет утверждать, что при правильной организации работы в системе будет лишь одно узкое место — у наиболее загруженного станка. На вопрос, как организовать само расписание, близкое к оптимальному, мы ответим во второй главе. Сейчас лишь заметим, что и в этом случае эффективно использовалась задача КСВ.

Умение ориентироваться в задаче КСВ еще не раз оказывалось полезным. Так, для задачи Акерса — Фридмана с тремя станками оценку (1.22) из [13] автору удалось значительно улучшить, причем только за счет более удачного использования задачи КСВ и обращения к оценке (1.15) для нормы s_0 . В результате получена

Теорема 1.11. Для задачи Акерса — Фридмана ($m = 3$) с трудоемкостью $O(n^2)$ строится расписание P с оценкой

$$T(P) \leq H + 6h. \quad (1.25)$$

Является ли эта оценка неулучшаемой — вопрос пока открытый. Отметим, что для задачи Джонсона ($m = 3$) после установления теоремы 1.8 последовала серия результатов, приведших к неулучшаемой оценке точности. Из (1.21) при $m = 3$ имеем $T(P) \leq H + 6h$. Из оценок (1.8), (1.15) можно получить $T(P) \leq H + 5h$. Б. Душин в [14] показал, как за $O(n)$ операций гарантировать оценку $T(P) \leq H + 4h$. Автором настоящей статьи доказана

Теорема 1.12. Для любой задачи Джонсона ($m = 3$) за $O(n \log n)$ операций находится расписание с оценкой

$$T(P) \leq H + 3h, \quad (1.26)$$

неулучшаемой в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует конкретная задача Джонсона ($m = 3$), для которой

$$T(P_{\text{опт}}) > H + (3 - \varepsilon)h. \quad (1.27)$$

При доказательстве теоремы 1.12 мы также использовали задачу суммирования векторов, заключая замкнутую ломаную уже не в шар какой-либо нормы, а в область, изображенную на рис. 1.10.

Для задачи Джонсона при $m = 4$ из (1.21) вытекает

$$T(P) \leq H + 12h.$$

В [14] за $O(n^2)$ операций достигнута оценка

$$T(P) \leq H + 11h.$$

Наконец, автором [15] с той же трудоемкостью построено расписание с оценкой

$$T(P) \leq H + 9h, \quad (1.28)$$

при выводе которой вновь использована норма s_0 и (1.15). Однако оценка (1.28), по-видимому, еще далека от окончательной.

Умение «суммировать векторы» играет решающую роль и в более сложных задачах, обобщающих задачу Джонсона в различных направлениях. Назовем некоторые из них, рассмотренные в [15, 16]: задача о партиях, где перестановка деталей должна отвечать требованию слитности каждой партии деталей; постановка задачи Джонсона, в которой каждому

станку предписана безостановочная работа; случай альтернативных станков на каждом из уровней модели Джонсона; усложненные технологические маршруты. Приведем результат для задачи, обобщающей задачу МПВ.

Задача с альтернативными исполнителями обобщает задачу МПВ на случай, когда для каждой операции o_j^s вместо конкретного станка $I(o_j^s)$ задается множество допустимых станков-исполнителей $J(o_j^s) \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$.

Таким образом, вместо конкретного маршрута детали по станкам теперь имеем множество допустимых маршрутов для каждой детали (в дополнение к многообразию маршрутов, возникающему в связи с частичным, т. е. неполным порядком на множестве операций j -й детали).

Для такой задачи установлена

Теорема 1.13. Для задачи с альтернативными исполнителями с трудоемкостью $O(m^2 w^2 n^2)$ можно построить расписание P с оценкой $T(P) - T(P_{\text{опт}}) \leq (\kappa + 1)h$, где κ определено согласно (1.24).

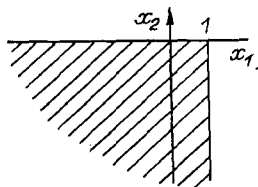


Рис. 1.10. Область суммирования векторов в задаче Джонсона ($m = 3$).

§ 6. Календарное планирование, геометрия и комбинаторика

Изучение задачи ОКП привело автора к необходимости геометрических и комбинаторных исследований, результаты которых приведены в этом параграфе. Первой работой автора в этом направлении явилась заметка [17]. Полученные теоретические результаты имеют полезные приложения к задачам ОКП и равномеризации.

Приведем более полную формулировку задачи равномеризации с уточнением критерия равномерности распределения.

Задача равномеризации. Для совокупности векторов $\{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}_s^m$ требуется найти разбиение $P = \{N_1, \dots, N_l\}$ множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на l подмножеств, минимизирующее функцию

$$L_s(P) = \max_{k=1, \dots, l} \left\| \sum_{i \in N_k} b_i - \bar{b} \right\|_s,$$

$$\text{где } \bar{b} = \sum_{i=1}^n b_i / l.$$

Представляет практический интерес и частный случай этой задачи при $s = l_\infty$. Тогда

$$L_{l_\infty}(P) = \max_{k=1, \dots, l} \max_{v=1, \dots, m} \left| \sum_{i \in N_k} b_i(v) - \bar{b}(v) \right| = \max_{v=1, \dots, m} L^v(P),$$

$$\text{где } L^v(P) = \max_{k=1, \dots, l} \left| \sum_{i \in N_k} b_i(v) - \bar{b}(v) \right|.$$

Функция $L^v(P)$ является критерием равномерности распределения P по v -му параметру. Поскольку различные параметры в прикладной задаче могут быть физически несоизмеримы, то представляется целесообразным не сводить критерии L^v к общему критерию L_{l_∞} , а добиваться равномерности по каждому из параметров $v = 1, \dots, m$.

Пусть $b_i(v) \geq 0$, $i = 1, \dots, n$; $B_v = \max_{i=1, \dots, n} b_i(v)$. Применив теорему 1.1 к векторам $\{b_1, \dots, b_n\}$ (предварительно добавим к ним столько нулевых векторов, чтобы n делилось на l), найдем такую перестановку

$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$, что

$$\sum_{j=1}^k b_{\pi_j} = \frac{k-m}{n} \sum_{i=1}^n b_i + y_k, \quad k = \overline{1, n},$$

где $y_k \in m\mathbb{I}$, а $\mathbb{I}$ есть выпуклая оболочка векторов $\{b_i\}$. Разделив перестановку π на l равных частей (по $t = n/l$ векторов в каждой), получим такое разбиение P , что

$$\sum_{j \in N_k} b_j - \bar{b} = y_{tk} - y_{t(k-1)}, \quad k = \overline{1, l}.$$

Так как $y_{tk}(v), y_{t(k-1)}(v) \in [0, mB_v]$, то

$$L^v(P) \leq mB_v = m \max_{i=\overline{1, n}} b_i(v), \quad v = \overline{1, m}.$$

Последняя оценка характеризует, насколько равномерно по каждому из параметров $v = \overline{1, m}$ мы сумели распределить n векторов. Другую оценку функции $L_s(P)$ мы можем получить, сведя задачу равномеризации к задаче КСВ. Пусть $n_1 = \min \{j \mid j \geq n; j \text{ делится на } l\}$; $n_2 \triangleq n + n_1$. К совокупности $\{b_1, \dots, b_n\}$ добавим n_1 «новых» векторов, равных $-\sum_{i=1}^n b_i/n_1$ (прежние векторы будем называть «старыми»). Тогда для расширенной совокупности $\mathfrak{B}$ верно $\sum_{b_i \in \mathfrak{B}} b_i = 0$, а из $b_i \in R\mathbb{I}(R_s^m)$, $i = \overline{1, n}$, следует

$b_i \in R\mathbb{I}(R_s^m)$ для всех $b_i \in \mathfrak{B}$.

Решим задачу КСВ для $\mathfrak{B} \subset R_s^m$ с оценкой вида

$$\left\| \sum_{j=1}^k b_{\pi_j} \right\|_s \leq R\mu_s(m), \quad k = \overline{1, n_2},$$

где $\mu_s(m)$ — некоторая функция. После этого перестановку π разделим на части $N'_1, \dots, N'_l$, содержащие ровно по t «новых» векторов. Тогда

$$\left\| \sum_{j \in N'_k} b_j \right\|_s \leq 2R\mu_s(m), \quad k = \overline{1, l}.$$

Разделив в левой части «новые» и «старые» векторы (множество индексов последних обозначим N_k), получим

$$\left\| \sum_{j \in N_k} b_j - \bar{b} \right\|_s \leq 2R\mu_s(m),$$

а положив $R \triangleq \max_{j=\overline{1, n}} \|b_j\|_s$, $P = \{N_1, \dots, N_l\}$, приходим к оценке

$$L_s(P) \leq 2\mu_s(m) \max_{j=\overline{1, n}} \|b_j\|_s. \quad (1.29)$$

Из (1.29) видно, что равномерность получаемого этим методом распределения существенно зависит от умения решать задачу КСВ в произвольном нормированном пространстве.

Перейдем к изложению другого способа получения равномерных распределений, не использующего задачу КСВ. Он представляется нам более перспективным по следующей причине. Задача КСВ требует нахождения траектории суммирования векторов, на всем протяжении близкой к прямой $L = \{t\bar{b}, t \in \mathbb{R}\}$. Однако для задачи равномеризации достаточно, чтобы эта траектория лишь иногда близко подходила к прямой L (в точках $\bar{b}, 2\bar{b}, \dots, l\bar{b}$). Очевидно, что меньшим требованиям можно удовлетворить с большей точностью.

Итак, в задаче равномеризации требуется разбить множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$ на l подмножеств $\{N_1, \dots, N_l\}$ так, что $\sum_{i \in N_k} b_i \approx \bar{b}, k = \overline{1, l}$. Мы можем при любых $l_1, l_2 (l_1 + l_2 = l)$ разбить N на N_1, N_2 так, что $\sum_{i \in N_k} b_i \approx l_k \bar{b}, k = 1, 2$. Более того, для любого $\lambda \in (0, 1)$ мы можем найти такое подмножество N' , что

$$\sum_{i \in N'} b_i \approx \lambda \sum_{i \in N} b_i \triangleq \lambda B.$$

Такую возможность предоставляет лемма 2.1 (доказываемая в гл. 2), согласно которой мы можем найти множество $N'' \subseteq N$ и линейную комбинацию $\sum_{j \in N''} \lambda_j b_j = \lambda B$, такие, что почти все λ_j равны 1 за исключением не более, чем m коэффициентов $\{\lambda_j \in (0, 1), j \in \widehat{N}\}$, где $\widehat{N} \subseteq N'', |\widehat{N}| \leq m$. В результате, точка $x \triangleq \lambda B - \sum_{j \in N'' \setminus \widehat{N}} b_j = \sum_{j \in \widehat{N}} \lambda_j b_j$ оказывается внутренней точкой параллелепипеда, построенного на ребрах $\{b_j, j \in \widehat{N}\}$. Взяв вершину параллелепипеда $y = \sum_{j \in \widehat{N}} b_j (\bar{N} \subseteq \widehat{N})$, удаленную от внутренней точки x на величину $\eta \triangleq \|y - x\|_s$, мы тем самым найдем множество $N' \triangleq (N'' \setminus \widehat{N}) \cup \bar{N}$, для которого $\left\| \sum_{j \in N'} b_j - \lambda B \right\|_s = \eta$. Таким образом, близость вектора $\sum_{j \in N'} b_j$ к заданному вектору λB целиком определяется умением решать следующую задачу.

Задача нахождения ближайшей вершины (НБВ). Пусть $b_1, \dots, b_m \in \mathbf{R}_s^m; \|b_j\|_s \leq 1$. Для точки $x = \sum_i \lambda_i b_i$ ($\lambda_i \in [0, 1], i = \overline{1, m}$) требуется найти точку $y = \sum_i z_i b_i$ ($z_i \in \{0, 1\}, i = \overline{1, m}$), на которой достигается минимум величины $\|y - x\|_s$. Иначе говоря, для внутренней точки x параллелепипеда, построенного на векторах $\{b_1, \dots, b_m\}$, требуется найти ближайшую (в норме s) вершину этого параллелепипеда.

Если задачу НБВ мы можем решать с оценкой $\|y - x\|_s \leq \eta_s(m)$, то для задачи равномеризации получаем

$$\left\| \sum_{j \in N'} b_j - \lambda B \right\|_s \leq \eta_s(m) \max_{j=\overline{1, n}} \|b_j\|_s. \quad (1.30)$$

Сразу заметим, что в задаче НБВ эффективно достигается оценка

$$\|y - x\|_s \leq m/2, \quad (1.31)$$

верная для любой нормы s . (Для нахождения искомой вершины y по точке $x = \sum \lambda_i b_i$ достаточно все λ_i округлить до ближайшего целого). Эта оценка позволяет определить функцию

$$\theta_s(m) = \sup_{\{\mathfrak{B}\}} \sup_{x \in \Pi(\mathfrak{B})} \min_{N' \subseteq N} \left\| \sum_{j \in N'} b_j - x \right\|_s,$$

где $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_m\} \subset \Pi(\mathbf{R}_s^m)$, $\Pi(\mathfrak{B}) = \left\{ \sum_{b_j \in \mathfrak{B}} \lambda_j b_j \mid \lambda_j \in [0, 1] \right\}$, $N = \{1, 2, \dots, m\}$. Очевидно, $\theta_s(m)$ является наименьшим значением функции $\eta_s(m)$, годным для любого параллелепипеда и любой его внутренней точки. Вопрос о вычислении функций $\theta_s(m)$ будет затронут позднее, а пока вернемся к задаче равномеризации. Оценка (1.30) обеспечивает индукционный шаг при доказательстве следующего утверждения.

Лемма 1.2. Пусть для любых $l' < l$ и $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbf{R}_s^m$ существует разбиение $P = \{N_1, \dots, N_{l'}\}$ множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ на l' подмножеств с оценкой $L_s(P) \leq \nu(l') C(\mathfrak{B})$, где $C(\mathfrak{B}) \triangleq \eta_s(m) \max_{b_i \in \mathfrak{B}} \|b_i\|_s$. Тогда

1	l	1	2	3	4	5	6	7
2	$v(l)$	0	1	1,5	1,5	1,75	1,75	1,8(3)
3	l'	—	1	2	2	4	4	4
4	$h(l)$	1	1,5	1,8(3)	1,75	1,95	1,91(6)	1,9762 *

1	8	9	10	11	12	13
2	1,75	1,875	1,875	1,875	1,875	1,95
3	4	8	8	8	8	8
4	1,875	1,986(1)	1,975	1,966 *	1,958(3)	2,027 *

1	14	15
2	1,91(6)	1,958(3)
3	8	12
4	1,9881 *	2,025 *

любую совокупность векторов можно разбить на l множеств с оценкой

$$L_s(P) \leq v(l)C(\mathfrak{B}), \quad (1.32)$$

где

$$v(l) = \min_{l' \in (0, l)} \max \{v(l') + 1/l', v(l - l') + 1/(l - l')\}. \quad (1.33)$$

Примечание. Звездочкой отмечена верхняя оценка.

Доказательство. Найдем l' , на котором достигается минимум в (1.33), а затем — разбиение $\{N', N''\}$ множества N с оценками

$$\left\| \sum_{j \in N'} b_j - l' \bar{b} \right\|_s \leq C(\mathfrak{B}); \quad \left\| \sum_{j \in N''} b_j - (l - l') \bar{b} \right\|_s \leq C(\mathfrak{B}),$$

вытекающими из (1.30). Решим задачу разбиения N' на l' подмножеств $P' = \{N_1, \dots, N_{l'}\}$ с оценкой $L_s(P') \leq v(l')C(\mathfrak{B}')$ и задачу разбиения N'' на $l - l'$ подмножеств $P'' = \{N_{l'+1}, \dots, N_l\}$ с оценкой $L_s(P'') \leq v(l - l')C(\mathfrak{B}'')$. Тогда для $k = \overline{1, l'}$

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j \in N_k} b_j - \bar{b} \right\|_s &\leq \left\| \sum_{j \in N_k} b_j - \sum_{j \in N'} b_j / l' \right\|_s + \left\| \sum_{j \in N'} b_j - l' \bar{b} \right\|_s / l' \leq \\ &\leq v(l')C(\mathfrak{B}') + C(\mathfrak{B})/l' \leq (v(l') + 1/l')C(\mathfrak{B}). \end{aligned}$$

Аналогично получаем оценку для $k = \overline{l' + 1, l}$, откуда вытекает (1.33) для $v(l)$. Лемма доказана.

Из рекуррентной формулы (1.33) и равенства $v(1) = 0$ легко вычисляются значения $v(l)$ по следующей схеме:

$$v(1) := 0; \quad l := 1;$$

$$M: h(l) := v(l) + 1/l;$$

$$v(l) := \min_{l' \in [1/2, l]} \max \{h(l'), h(l - l')\}; \quad l := l + 1; \text{ на } M. \quad (1.34)$$

При малых l значения $h(l)$, $v(l)$ приведены в таблице, где l' — значение l' , на котором достигается минимум в (1.34).

Дальнейшие вычисления показывают, что $v(l) < 2$ при всех $l \leq 250$. Отсюда $h(l) \leq v(l) + 1/125 < 2.008$ при всех $l = 125, \dots, 250$, и в силу (1.34)

$$v(l) < 2.008 \text{ при } l \leq 500,$$

$$h(l) < 2.012 \text{ при } l = 250, \dots, 500,$$

$$v(l) < 2.012 \text{ при } l \leq 1000, \text{ и т. д.}$$

В результате для всех l справедлива оценка

$$v(l) < 2.016 = 2 + (1/125) (1 + 1/2 + 1/4 + \dots).$$

На этом же принципе основано доказательство более точной оценки, полученной с помощью ЭВМ:

$$v(l) < 2.00046, \quad (1.35)$$

причем показано, что $v(l)$ достигает максимума при $l = 909$, и $v(909) < 2.00045038$.

Итак, из (1.30), (1.32) следует, что в задаче равномеризации достигается оценка

$$L_s(P) \leq v(l) \eta_s(m) \max_{j=\overline{1,n}} \|b_j\|_s.$$

Подставляя вместо $v(l)$ ее оценку из (1.35), а вместо $\eta_s(m)$ — функцию $m/2$, получаем следующее утверждение.

Теорема 1.14. Для любых l, s за $O(m^2 \ln)$ операций в задаче 1 находится разбиение $P = \{N_1, \dots, N_l\}$ с оценкой

$$L_l(P) \leq 1.00023m \max_{j=\overline{1,n}} \|b_j\|_s.$$

Замечаем, что полученная оценка лучше (1.29) после подстановки в последнюю наилучшей известной оценки для $\mu_s(m)$ ($\mu_s(m) \leq m$ — из (1.11)). Если же учесть, что для некоторых норм s мы можем заменить $\eta_s(m)$ существенно меньшими по сравнению с $m/2$ функциями, то преимущество нового подхода к задаче равномеризации становится еще более ощутимым. В связи с этим логично перейти к вопросу о вычислении функций $\theta_s(m)$, являющихся наилучшими оценками функционала в задаче НБВ.

Легко доказывается, что $\theta_{l_1}(m) = m/2$, т. е. для нормы $s = l_1$ оценка (1.31) является неулучшаемой (и достижимой всего за $O(m)$ операций). При $s = l_2$ функция $\theta_{l_2}(m)$ также легко вычисляется. Нижняя ее оценка, $\theta_{l_2}(m) \geq \sqrt{m}/2$, достигается на «наихудшем» параллелепипеде, построенном на единичных ортах $\{e_1, \dots, e_m\}$, для «наихудшей» точки в нем $x = \sum_{i=1}^m e_i/2$, а верхнюю оценку дает

Теорема 1.15 [18]. Для задачи НБВ в пространстве $R_{l_2}^m$ с трудоемкостью $O(m^4)$ находится вершина y с гарантированной оценкой $\|y - x\|_{l_2} \leq \sqrt{m}/2$.

В итоге имеем $\theta_{l_2}(m) = \sqrt{m}/2$.

Отметим, что при вычислении или оценивании функции $\theta_s(m)$ в других нормах возникают трудности. Рассмотрим, например, случай $s = l_\infty$. Сначала упростим задачу НБВ, ограничив векторы b_j , на которых строится параллелепипед, «экстремальными» векторами с координатами $\{-1, 1\}^*$, а в качестве точки x взяв середину параллелепипеда: $x = \sum b_j/2$. В пределах этих ограничений наилучшей гарантированной оценкой в задаче НБВ является функция

$$\theta'(m) \triangleq \max_{\{\mathfrak{B}\}} \min_{N' \subseteq N} \max_{i=\overline{1,m}} \left| \sum_{i \in N'} b_j(i) - \sum_{j \in N} b_j(i)/2 \right|, \quad (1.36)$$

где $\{\mathfrak{B}\}$ — множество таких совокупностей $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_m\} \subset R^m$, что $b_j(i) = \pm 1$, $i, j = \overline{1, m}$; $N = \{1, 2, \dots, m\}$. Очевидно,

$$\theta'(m) \leq \theta_{l_\infty}(m), \quad (1.37)$$

*) В прикладной задаче ОКП и в вытекающей из нее задаче НБВ все координаты векторов b_j , как правило, неотрицательны. Для таких случаев целесообразно в качестве экстремальных рассматривать векторы с координатами $\{0, 1\}$ (см. [8]).

и есть основание предполагать, что в (1.37) достигается равенство, т. е. «наихудший» параллелепипед в задаче НБВ строится на векторах с координатами ± 1 , и центр — «наихудшая» точка в нем. Перейдем к построению верхних и нижних оценок функции $\theta'(m)$.

Обозначим через b^i вектор-столбец матрицы, j -я строка которой совпадает с вектором $b_j \in \mathfrak{B}$, а через x — вектор из $\mathbf{R}^m$ такой, что $x(j) = 1$ для $j \in N'$, $x(j) = -1$ для $j \notin N'$. Распишем выражение, взятое из правой части (1.36):

$$\begin{aligned} \sum_{j \in N'} b_j(i) - \frac{1}{2} \sum_{j \in N} b_j(i) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j \in N'} b_j(i) - \sum_{j \in N \setminus N'} b_j(i) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j \in N} b_j(i) x(j) = \frac{1}{2} (b^i, x) = \frac{1}{2} (|\{j: b^i(j) = x(j)\}| - \\ &- |\{j: b^i(j) \neq x(j)\}|) = \frac{1}{2} (m - 2\rho(b^i, x)) = \frac{m}{2} - \rho(b^i, x), \end{aligned}$$

где $\rho(x, y)$ — число несовпадающих координат векторов x, y , или «расстояние Хэмминга» в пространстве 2-значных векторов. Отметим, что величина $\rho(x, y)$ не зависит от того, какие именно значения принимают векторы x, y . Заменяя для каждого из рассматриваемых векторов координату -1 на 0 , получим следующее выражение для $\theta'(m)$:

$$\theta'(m) = \max_{\mathfrak{B} \subset B^m} \min_{x \in B^m} \max_{b^i \in \mathfrak{B}} |\rho(b^i, x) - m/2|,$$

где $B^m = \{0, 1\}^m$ — m -мерный единичный куб, $\mathfrak{B} = \{b^1, \dots, b^m\}$ — совокупность m вершин этого куба. Задача НБВ в такой постановке интерпретируется как задача нахождения вершины единичного куба $x \in B^m$, удаленной от всех заданных вершин $\{b^1, \dots, b^m\}$ на «одинаковое» расстояние, близкое к $m/2$. Эту задачу удобно называть задачей эквидистанции. Функция θ' характеризует наилучшее решение этой задачи в наихудшем случае, т. е. для «наихудшей» совокупности вершин $\{b^1, \dots, b^m\} \subset B^m$. С этих позиций проведем анализ функции θ' .

Пусть $x \in B^m$, $\alpha \geq 0$. Будем говорить, что совокупность вершин $\mathfrak{B} \subset B^m$ α -хорошая относительно данной вершины x , если $|\rho(y, x) - m/2| \leq \alpha \quad \forall y \in \mathfrak{B}$. (В частности, если $\mathfrak{B}$ состоит из одной вершины $\{y\}$, то вершина y α -хорошая относительно x .) В противном случае $\mathfrak{B}$ — α -плохая относительно x . Наконец, $\mathfrak{B} \subset B^m$ α -плохая, если она α -плохая относительно любого $x \in B^m$. Очевидно, что в кубе B^m имеем $A(x) \triangleq \sum_{|j-m/2| \leq \alpha} \binom{m}{j}$

α -хороших относительно x вершин. Здесь $\binom{m}{j}$ — число сочетаний из m по j — количество вершин, находящихся от x на расстоянии j . Из $A(x)$ вершин можно составить $A^m(x)$ m -вершинных (упорядоченных) совокупностей, α -хороших относительно x . Количество совокупностей, α -хороших относительно хотя бы одной вершины $x \in B^m$, не превосходит $2^m A^m(x)$, в то время как количество всех m -вершинных упорядоченных совокупностей в B^m равно $(2^m)^m$. Нетрудно понять, что для существования α -плохой совокупности достаточно выполнения неравенства $2^m A^m(x) \leq (2^m)^m$, для чего, в свою очередь, достаточно

$$\begin{aligned} 2^m \left((2[\alpha] + 1) \binom{m}{[m/2]} \right)^m &\leq (2^m)^m, \quad 2(2[\alpha] + 1) \binom{m}{[m/2]} \leq 2^m, \\ [\alpha] &\leq \frac{1}{4} 2^m / \binom{m}{[m/2]} - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Итак, для любого $\alpha > 0$, удовлетворяющего (1.38), существует α -плохая совокупность $\mathfrak{B} = \{b^1, \dots, b^m\} \subset B^m$, для которой $\min_{x \in B^m} \max_{b^i \in \mathfrak{B}} |\rho(b^i, x) - m/2| > \alpha$, откуда

$$\begin{aligned} \theta'(m) &\geq \left[\frac{1}{4} 2^m \binom{m}{[m/2]} + \frac{1}{2} \right] \geq \\ &\geq (\text{ввиду оценок Роббинсона для } n! [19, \text{с. 17}]) \geq \\ &\geq [\sqrt{\pi m/32} + 1/2] \geq [0.31 \sqrt{m} + 0.5]. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Оценим $\theta'(m)$ сверху таким же способом. Число вершин x , относительно которых данная вершина $y \in B^m$ α -плохая, т. е. $|\rho(y, x) - m/2| > \alpha$, равно $2 \sum_{j < m/2 - \alpha} \binom{m}{j}$. В силу [19, с. 18], $2 \sum_{j < m/2 - \alpha} \binom{m}{j} < 2 \cdot 2^m e^{-2\alpha^2/m}$. Отсюда, если задана произвольная совокупность вершин $\{b^1, \dots, b^m\} \subset B^m$, то количество вершин $x \in B^m$, относительно которых α -плохая хотя бы одна вершина $b^i \in \mathfrak{B}$ (а значит, и вся совокупность $\mathfrak{B}$), строго меньше, чем $2m \cdot 2^m e^{-2\alpha^2/m}$. Если α таково, что

$$2m \cdot 2^m e^{-2\alpha^2/m} \leq 2^m, \quad (1.40)$$

то для заданной совокупности $\mathfrak{B}$ всегда найдется точка $x \in B^m$, для которой

$$F(\mathfrak{B}, x) \triangleq \max_{b^i \in \mathfrak{B}} |\rho(b^i, x) - m/2| \leq \alpha, \quad \text{а, значит, } F(\mathfrak{B}, x) \leq [2\alpha]/2. \quad (1.41)$$

Остается вычислить минимальное α , при котором справедливо (1.40), т. е.

$$e^{2\alpha^2/m} \geq 2m, \quad (2\alpha)^2 \geq 2m \ln 2m.$$

Обозначая это значение α через $\hat{\alpha}$ и подставляя в (1.41), получим $\theta'(m) \leq [2\hat{\alpha}]/2 = [\sqrt{2m \ln 2m}]/2$. Из последней оценки и (1.39) следует

$$[0,31\sqrt{m} + 0,5] \leq \theta'(m) \leq [\sqrt{2m \ln 2m}]/2.$$

Хотя в данном случае вероятностный метод не дает наилучшей оценки (нижняя оценка будет далее улучшена), он представляется нам заслуживающим внимания. Действительно, нижнюю оценку мы получили, не имея конкретного примера «плохой» совокупности векторов, а верхнюю — не имея алгоритма нахождения «близкой» вершины.

Рассмотрим теперь произвольную норму s . От функции $\theta_s(m)$ перейдем к функции $\bar{\theta}_s(m)$, взяв в качестве $x \in \Pi(\mathfrak{B})$ центр параллелепипеда: $x = \sum b_j/2$. Ясно, что

$$\bar{\theta}_s(m) \leq \theta_s(m), \quad (1.42)$$

а при $s = l_\infty$, кроме того, $\theta'(m) \leq \bar{\theta}_{l_\infty}(m)$. Функцию $\bar{\theta}_s(m)$ запишем в виде

$$\bar{\theta}_s(m) = \sup_{\{\mathfrak{B}\}} \min_{N' \subset N} \left\| \sum_{j \in N'} b_j - \sum_{j \in N} b_j/2 \right\|_s = \frac{1}{2} \sup_{\{\mathfrak{B}\}} \min_{\varepsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=1}^m \varepsilon_j b_j \right\|_s, \quad (1.43)$$

в результате чего приходим к функции

$$v_s(m) = \sup_{x_i \in \Pi(R_s^m)} \min_{\{\pm\}} \|\pm x_1 \pm x_2 \pm \dots \pm x_p\|_s,$$

вопрос о вычислении которой содержится в списке нерешенных вопросов 7-го симпозиума AMS по чистой математике (см. [20, с. 496]). Очевидно

неравенство $2\bar{\theta}_s(m) \leq v_s(m)$. Кроме того,

$$v_s(m) = 2 \sup_{x_i \in \Pi(R_s^m)} \min_{N' \subseteq \{1, 2, \dots, p\}} \left\| \sum_{i \in N'} x_i - \sum_{i=1}^p x_i/2 \right\|_s \leq 2\theta_s(m),$$

(см. (1.30)). Таким образом, $2\bar{\theta}_s(m) \leq v_s(m) \leq 2\theta_s(m)$, и если в (1.42) имеет место равенство, то $v_s(m) = 2\bar{\theta}_s(m)$.

Выведем оценку функции $\bar{\theta}_{l_p}(m)$ при $p \geq 2$, используя матрицы Адамара. Пусть для $n \leq m$ матрица A_n существует, и $b_j \in \{-1, 1\}^n$, $j = \overline{1, n}$, — строки этой матрицы. Евклидов шар $\Pi_{s'}$, описанный вокруг $\Pi(R_{l_p}^n)$, $p \geq 2$, касается его в точках x , где $|x(1)| = |x(2)| = \dots = |x(n)| = m^{-1/p} \triangleq \lambda$. В частности, $\| \lambda b_j \|_{l_p} = \| \lambda b_j \|_{s'} = 1$, где s' — норма, порождаемая в R^n шаром $\Pi_{s'}$. Отсюда и из (1.43)

$$\begin{aligned} 2\bar{\theta}_{l_p}(m) &\geq \lambda \min_{\varepsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j b_j \right\|_{l_p} \geq \lambda \min_{\varepsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j b_j \right\|_{s'} = \\ &= \lambda \min_{\varepsilon_j = \pm 1} \left(\left\| \sum_j \varepsilon_j b_j \right\|_{s'} / \| \lambda b_j \|_{s'} \right) = \lambda \min_{\varepsilon_j = \pm 1} \left(\left\| \sum_j \varepsilon_j b_j \right\|_{l_2} / \| \lambda b_j \|_{l_2} \right) = \\ &= \left(\sum_j (b_j, b_j) \right)^{1/2} / \sqrt{(b_j, b_j)} = \sqrt{n}. \end{aligned}$$

Поскольку матрица Сильвестра порядка n для некоторого $n \in [(m+1)/2, m]$ всегда существует, то

$$\bar{\theta}_{l_p}(m) \geq \sqrt{m+1}/2 \sqrt{2} > 0.3535 \sqrt{m+1}, \quad p \geq 2. \quad (1.44)$$

Наилучшую при таком подходе оценку

$$\bar{\theta}_{l_p}(m) \geq \sqrt{m}/2, \quad p \geq 2, \quad (1.45)$$

удается получить, когда существует матрица A_m . При $p \in [1, 2]$ для получения оценки функции $\bar{\theta}_{l_p}(m)$ используется совокупность единичных

орт $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_m\}$. Для нее $\min_{\varepsilon_j = \pm 1} \left\| \sum_{j=1}^m \varepsilon_j e_j \right\|_{l_p} = m^{1/p}$, поэтому

$$\bar{\theta}_{l_p}(m) \geq m^{1/p}/2, \quad p \in [1, 2]. \quad (1.46)$$

При $p=1$ и $p=2$ в (1.46) достигается равенство. Возможно, оно имеет место для любого $p \in [1, 2]$.

Наконец заметим, что при $s=l_\infty$ оценки (1.44), (1.45) выводились с использованием совокупностей векторов $\mathfrak{B} \subset \{-1, 1\}^m$, а значит, они верны и для $\theta'(m)$. Более точно: поскольку n четно, для любого $i = \overline{1, n}$ сумма $\sum_j \varepsilon_j b_j(i)$ четна, $\lambda = 1$, то $\theta'(m) \geq]\sqrt{n}/2[$, откуда, используя матрицы Сильвестра, для любого m получаем оценку

$$\theta'(m) \geq]0.3535\sqrt{m+1}[$$

а используя матрицы A_{4l^2} (где $4l^2 \leq m < 4(l+1)^2$) — оценку

$$\theta'(m) \geq l =]\sqrt{m+1}/2[-1,$$

справедливую, по крайней мере, для $m \leq 4355$ (см. § 4).

Для произвольных s выскажем гипотезу: $\bar{\theta}_s(m) \geq \bar{\theta}_{l_2}(m)$.

Она легко подтверждается при $m=2$. Пусть $\|a\|_s = \|b\|_s = 1$ и $\|a+b\|_s = \|a-b\|_s \triangleq \lambda$ (по любому $a \in R^m$ можно найти $b \in R^m$, $\|b\|_s = 1$ такой, что $\|a+b\|_s = \|a-b\|_s$). Положим $c \triangleq (a+b)/\lambda$, $d \triangleq (a-b)/\lambda$. Ясно, что $\|c\|_s = \|d\|_s = 1$ и $\|c+d\|_s = \|c-d\|_s = 2/\lambda$. Так как $\max\{\lambda, 2/\lambda\} \geq \sqrt{2}$,

то одна из совокупностей $\mathfrak{B}' = \{a, b\}$, $\mathfrak{B}'' = \{c, d\}$ обеспечит соотношение

$$2\bar{\theta}_s(2) = \sup_{\{\mathfrak{B}\}} \min_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{b_i \in \mathfrak{B}} \varepsilon_i b_i \right\|_s \geq \sqrt{2} = 2\bar{\theta}_{l_2}(2).$$

Наконец, справедливо неравенство $2\theta_s(2) \leq \sigma(s, 2)$, где σ — функция из теоремы 1.6.

Действительно, если в R_s^2 взять произвольно параллелепипед со сторонами b_1, b_2 ($\|b_i\|_s \leq 2$) и точку x в нем, то найдется сторона параллелепипеда, удаленная в норме s от x не более чем на 1, т. е. пересекающая единичный шар Π_s с центром в точке x . Если обе вершины этой стороны находятся вне шара Π с радиусом $\sigma(s, 2)$ и центром в x , то собственный отрезок этой стороны является хордой в Π , пересекающей Π_s и имеющей длину строго меньше, чем 2, что противоречит определению функции $\sigma(s, x)$. Значит, по крайней мере, одна из вершин (v) принадлежит Π , т. е. $\|v - x\|_s \leq \sigma(s, 2)$.

Глава 2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

§ 1. Алгоритмы суммирования векторов в пространстве Минковского

Совокупность векторов $\mathcal{A}' \subset R^m$ называется базой совокупности $\mathcal{A} \subset R^m$, если $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, совокупность $\mathcal{A}'$ линейно независима, и ее линейная оболочка содержит $\mathcal{A}$.

Лемма 2.1. Пусть $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\} \subset R^m$; $\lambda_j \in [0, 1]$, $j = \overline{1, n}$; $a = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j$. Тогда с трудоемкостью $O(m^2 n)$ можно найти базу $\mathcal{A}'$ совокупности $\mathcal{A}$ и числа λ'_j , $j = \overline{1, n}$, такие, что

(а) $\lambda'_j \in [0, 1]$;

(б) $\sum_{j=1}^n \lambda'_j a_j = a$;

(в) $\{a_j: \lambda'_j \in (0, 1)\} \subseteq \mathcal{A}'$.

Доказательство состоит в следующем: если в линейной комбинации $\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j = a$, $\lambda_j \in [0, 1]$, $j = \overline{1, n}$, множество векторов $\{a_j | \lambda_j \notin \{0, 1\}\}$ линейно зависимо, то мы найдем эту зависимость, и с ее помощью изменим коэффициенты λ_j так, что хотя бы еще один коэффициент λ_j обратился в 0 либо 1. Ниже будет показано, как реализовать этот алгоритм за $O(m^2 n)$ операций.

Обозначим через $\Pi\{x_1, \dots, x_k\}$ линейную оболочку совокупности $\{x_1, \dots, x_k\} \subset R^m$; $N_k \triangleq \{1, 2, \dots, k\}$. Базу $\mathcal{A}'$ и совокупность $\{\lambda'_j, j = \overline{1, n}\}$ построим за $n+1$ шагов. В конце шага k нам будут известны:

— размерность s пространства $\Pi\{a_1, \dots, a_k\}$;

— коэффициенты $\lambda'_j \in [0, 1]$, $j = \overline{1, n}$, линейной комбинации $\sum_{j=1}^n \lambda'_j a_j = a$;

— база $\mathcal{A}_k = \{a_{j_1}, \dots, a_{j_s}\}$ совокупности $\{a_1, \dots, a_k\}$, содержащая все векторы из $\{a_1, \dots, a_k\}$ с коэффициентами $\lambda'_j \notin \{0, 1\}$, т. е. $J_k \triangleq \{j_1, \dots, j_s\} \equiv \{j: \lambda'_j \in (0, 1)\} \cap N_k$;

— базис $B_k = \{b_j, j = \overline{1, s}\}$ пространства $\Pi\{a_1, \dots, a_k\}$ и первые s позиций перестановки $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(m))$ пространственных координат R^m такие, что для $j = \overline{1, s}$ имеем $b_j(\pi(i)) = 0$ при $i = \overline{1, j-1}$; $b_j(\pi(j)) \neq 0$;

— матрица $(c_{ij})_{i,j=\overline{1,s}}$ перехода от базы $\mathcal{A}_k$ к базису B_k :

$$b_t = \sum_{i=1}^s c_{ti} a_{j_i}, \quad t = \overline{1, s}. \quad (2.1)$$

Шаг 0. Полагаем $\lambda'_j := \lambda_j$, $j = \overline{1, n}$; $J_0 := \emptyset$; $s := 0$.

Шаг k ($k = \overline{1, n}$). Полагаем $b := a_k$. Если $b = 0$, то $\lambda'_k := 0$, и шаг закончен. Пусть $b \neq 0$. Для $t = \overline{1, s}$ выполняем циклы $\{\mu_t := b(\pi(t))/b_t(\pi(t)); b := b - \mu_t b_t\}$, в результате которого имеем $b = a_k - \sum_{t=1}^s \mu_t b_t$,

$b(\pi(t)) = 0$, $t = \overline{1, s}$. Вычисляем величины $\mu'_t = \sum_{i=1}^s \mu_i c_{it}$, $t = \overline{1, s}$. Тогда

$b = a_k - \sum_{t=1}^s \mu'_t a_{j_t}$. Возможны два случая

(а) Существует координата $t \in \{1, 2, \dots, m\} \setminus \{\pi(i), i = \overline{1, s}\}$ такая, что $b(t) \neq 0$. Положим $\pi(s+1) := 1$; $b_{s+1} := b$; $j_{s+1} := k$; $J_k := J_{k-1} \cup \{k\}$; $c_{s+1,t} := -\mu'_t$, $t = \overline{1, s}$; $c_{s+1,s+1} := 1$; $c_{k,s+1} := 0$, $k = \overline{1, s}$; $s := s+1$;

(б) $b = 0$.

Так как $a_k = 0$, то $\{t: \mu'_t \neq 0\} \triangleq M \neq \emptyset$. Найдем максимальное $\varepsilon = \varepsilon^*$ такое, что $(\lambda'_{j_t} - \varepsilon \mu'_t \in [0, 1], t = \overline{1, s}) \& (\lambda'_k + \varepsilon \in [0, 1])$, и положим $\lambda'_{j_t} := \lambda'_{j_t} - \varepsilon^* \mu'_t$, $t = \overline{1, s}$; $\lambda'_k := \lambda'_k + \varepsilon^*$. Если $\lambda'_k \in \{0, 1\}$, то шаг закончен. Иначе найдется $t \in M$ такое, что $\lambda'_{j_t} \in \{0, 1\}$. Положим $J_k := J_{k-1} \cup \{k\} \setminus \{j_t\}$, $j_t := k$; $c_{it} := c_{it}/\mu'_t$, $i = \overline{1, s}$; $c_{iq} := c_{iq} - c_{it}\mu'_q$, $i = \overline{1, s}$, $q \in \{1, \dots, s\} \setminus \{t\}$ (соотношения (2.1) при этом сохраняются). Шаг k закончен.

Нетрудно видеть, что база $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_n$ и числа $\{\lambda'_j, j = \overline{1, n}\}$, полученные после n -го шага, являются искомыми. Так как на осуществление k -го шага тратится $O(m^2)$ операций, то трудоемкость всего алгоритма есть $O(m^2 n)$. Лемма 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 1.1. Последовательно для $k = n, n-1, \dots, m$ построим множества $N_k \subseteq N$, $\Lambda_k = \{\lambda_j^k \in [0, 1], j \in N_k\}$ такие, что

(а) $N = N_n \supset N_{n-1} \supset \dots \supset N_m$,

(б) $|N_k| = k$, $k = m, n$,

(в) $\sum_{j \in N_k} \lambda_j^k x_j = (k-m)x$,

(г) $\sum_{j \in N_k} \lambda_j^k = k-m$,

после чего определим $\{\pi_k\} = N_k \setminus N_{k-1}$ для $k > m$, а значения $\pi_1, \dots, \pi_m$ перестановки π доопределим произвольно.

Формулу (1.10) при $k > m$ получим из соотношений

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k x_{\pi_j} - (k-m)x &= \sum_{j \in N_k} x_j - \sum_{j \in N_k} \lambda_j^k x_j = \sum_{j \in N_k} (1 - \lambda_j^k) x_j \in \\ &\in \sum_{j \in N_k} (1 - \lambda_j^k) \Pi = \Pi \sum_{j \in N_k} (1 - \lambda_j^k) = m\Pi, \end{aligned}$$

а при $k \leq m$ —

$$\sum_{j=1}^k x_{\pi_j} - (k-m)x \in k\Pi + (m-k)\Pi = m\Pi.$$

Приведем алгоритм построения множеств N_k, Λ_k .

Основание индукции: $k = n$. Полагаем $N_n := N$; $\lambda_j^n := (n-m)/n$, $j = \overline{1, n}$.

Шаг индукции: $k+1 \rightarrow k$ ($k \geq m$). Пусть множество N_{k+1} и со-

вокупность чисел Λ_{k+1} построены. Тогда для векторов $\bar{x}_j \triangleq (x_j(1), \dots, x_j(m), 1) \in \mathbb{R}^{m+1}$, $j = \overline{1, n}$, и $\bar{x} \triangleq \sum_{j=1}^n \bar{x}_j/n$ имеем

$$\sum_{j \in N_{k+1}} \lambda_j^{k+1} \bar{x}_j = (k+1-m) \bar{x},$$

откуда, положив $\bar{\lambda}_j = \lambda_j^{k+1} (k-m)/(k+1-m)$, получим

$$\sum_{j \in N_{k+1}} \bar{\lambda}_j \bar{x}_j = (k-m) \bar{x}, \quad (2.2)$$

Теперь нужно лишь переопределить коэффициенты $\{\bar{\lambda}_j, j \in N_{k+1}\}$ с сохранением (2.2) и свойства $\bar{\lambda}_j \in [0, 1]$ так, чтобы один из коэффициентов $\bar{\lambda}_j$ обратился в нуль. (Исключив это j из N_{k+1} , будем иметь N_k). С этой целью применим алгоритм леммы 2.1, получив такие коэффициенты $\{\lambda_j^k \in [0, 1], j \in N_{k+1}\}$, что

$$\left(\sum_{j \in N_{k+1}} \lambda_j^k \bar{x}_j = (k-m) \bar{x} \right) \& (|J| \leq m+1),$$

где $J = \{j \in N_{k+1} : \lambda_j^k \in (0, 1)\}$. Предположим, что

$$\lambda_j^k = 1 \quad \forall j \in N_{k+1} \setminus J. \quad (2.3)$$

Тогда получим формулу

$$\sum_{j \in N_{k+1}} \lambda_j^k \geq \sum_{j \in N_{k+1} \setminus J} \lambda_j^k = |N_{k+1} \setminus J| \geq k+1-(m+1) = k-m,$$

в которой либо первое, либо последнее неравенство строгое (в случаях $|J| > 0$, $|J| < m+1$ соответственно), что противоречит равенству

$\sum_{j \in N_{k+1}} \lambda_j^k = k-m$. Это опровергает предположение (2.3) и доказывает

существование $\lambda_j^k = 0$, $j \in N_{k+1}$. Теорема 1.1 доказана.

§ 2. Оценки и свойства функций Штейница

Теорема 1.5 об аффинной инвариантности функций Штейница дает возможность при анализе этих функций линейно преобразовывать шар Π_s к более удобному для нас виду, оставляя функцию $\varphi_s(m)$ без изменений. Например, полезным может оказаться преобразование, рассматриваемое в следующей лемме.

Лемма 2.2. Для любой нормы s в $\mathbb{R}^m$ существует невырожденный линейный оператор T , такой что $\Pi(\mathbb{R}_{l_1}^m) \subseteq T(\Pi_s) \subseteq \Pi(\mathbb{R}_{l_\infty}^m)$.

При доказательстве леммы используется

Теорема Тейлора [21]. В пространстве $\mathbb{R}_s^m$ существуют m векторов $x_1, \dots, x_m$ и m линейных функционалов $f_1, \dots, f_m$ таких, что $\|x_i\|_s = \|f_i\|_s = 1$, $i = \overline{1, m}$; $f_i(x_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Доказательство леммы 2.2. Множество $\{x_1, \dots, x_m\}$ является базисом в $\mathbb{R}^m$, так как если $\sum \mu_i x_i = 0$, то $\mu_i = f_i(\sum \mu_i x_i) = 0$, $i = \overline{1, m}$. В базисе $\{x_i\}$ определим $\Pi_{l_1} = \left\{ \sum \mu_i x_i \mid \sum_i |\mu_i| \leq 1 \right\}$; $\Pi_{l_\infty} = \left\{ \sum \mu_i x_i \mid |\mu_i| \leq 1 \right\}$.

Так как по условию теоремы $\{x_i\} \subset \Pi_s$, а Π_s абсолютно выпуклый, то $\Pi_{l_1} \subseteq \Pi_s$. Пусть $x = \sum \mu_i x_i \in \Pi_s$. Тогда $|\mu_i| = |f_i(x)| \leq \sup_{y \in \Pi_s} |f_i(y)| \triangleq \|f_i\|_s = 1$, откуда $\Pi_s \subseteq \Pi_{l_\infty}$. Таким образом, линейный

оператор T , переводящий базис $\{x_i\}$ в базис $\{e_i\}$ является искомым.

Пример другого полезного преобразования дает

Теорема (Джон [22], Лейхтвейс [23]). Для любой нормы s в $\mathbf{R}^m$ существует такое линейное преобразование пространства (T) , что $\Pi_{l_2} \subseteq \subseteq T(\Pi_s) \subseteq \sqrt{m} \Pi_{l_2}$.

Заметим, что функция $\sigma(s, x)$ также аффинно инвариантна, а шар $\Pi(\mathbf{R}_{s_0}^2)$ аффинно подобен правильному шестиугольнику, что позволяет легко вычислить значение $\sigma(s_0, 2) = 1.5$ в теореме 1.6 и получить нужную нам оценку (1.15).

Теорема 2.1 [24]. Если s_1, s_2 — нормы в $\mathbf{R}^m$, и для $\alpha, \beta \neq 0$ выполняется $\beta \Pi_{s_2} \subseteq \Pi_{s_1} \subseteq \alpha \Pi_{s_2}$, то $(\beta/\alpha) \varphi_{s_2}(m) \leq \varphi_{s_1}(m) \leq (\alpha/\beta) \varphi_{s_2}(m)$.

С помощью теоремы 2.1 мы можем, имея оценку функции $\varphi_s(m)$ для некоторой нормы s , получить близкие по порядку оценки для норм, близких к s .

Далее перейдем к вычислению оценок функций Штейница. Нижние оценки получим с помощью двух примеров «плохих» совокупностей Штейница.

Пример 1. Пусть $\varepsilon > 0$, N — нечетное число и векторы $a_1, \dots, a_m$, $a_\varepsilon \triangleq \sum_{i=2}^m a_i/2N$ пространства $\mathbf{R}_s^m$ таковы, что $\|a_1\|_s \leq 1 - \varepsilon$; $\|a_i\|_s \leq 1$, $i = 2, m$; $\|a_\varepsilon\|_s \leq \varepsilon$. Совокупность $\mathfrak{B} = \{b_i\}$ составим из векторов $a_2, \dots, a_m$ («основной» список), а также из N векторов, равных $a' \triangleq a_1 - a_\varepsilon$ и N векторов, равных $a'' \triangleq -a_1 - a_\varepsilon$ («дополнительный» список). Нетрудно убедиться, что $\mathfrak{B}$ — совокупность Штейница в $\mathbf{R}_s^m$.

Пусть $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_B)$ — оптимальная перестановка в задаче КСВ для совокупности $\mathfrak{B}$, $B = |\mathfrak{B}|$, а число k таково, что среди $\{b_{\pi_j}, j = \overline{1, k}\}$ содержится ровно N векторов из «дополнительного» списка. Тогда

$$f_{\mathfrak{B}, s}(\pi) \geq \left\| \sum_{j=1}^k b_{\pi_j} \right\|_s = \left\| k' a_1 + \sum_{i=2}^m \delta_i a_i - \sum_{i=2}^m a_i/2 \right\|_s,$$

где k' нечетное, δ_i равно 0 либо 1 — в зависимости от того, содержится ли вектор a_i среди первых k векторов перестановки π . Устремляя ε к нулю, получим оценку

$$\varphi_s(m) \geq \sup_{\|a_i\|_s \leq 1} \min_{k' \text{ нечетн}} \min_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| k' a^1 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^m \varepsilon_i a_i \right\|_s. \quad (2.4)$$

Подстановка в (2.4) единичных орт e_i вместо a_i дает для $s = l_p$

$$\varphi_{l_p}(m) \min_{k \text{ нечетн}} (k^p + (m-1)/2^p)^{1/p} = (1 + (m-1)/2^p)^{1/p}, \quad p \geq 1, \quad (2.5)$$

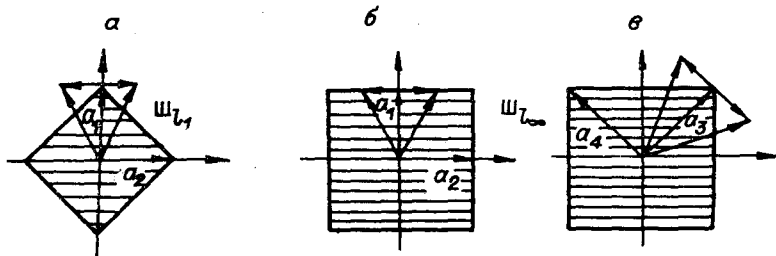
откуда при $p = 1, 2$

$$\varphi_{l_1}(m) \geq (m+1)/2, \quad \varphi_{l_2}(m) \geq \sqrt{m+3}/2. \quad (2.6)$$

При возрастании p функция в правой части (2.5) уменьшается, и при $s = l_\infty$ оценка вырождается в тривиальную: $\varphi_{l_\infty}(m) \geq 1$ (рис. 2.1а, б).

Для получения нетривиальных оценок функции $\varphi_{l_\infty}(m)$ нужно взять другую ортонормированную систему векторов $\{a_i\} \subset \mathbf{R}_{l_\infty}^m$, более подходящую для норм l_p , $p \geq 2$ (рис. 2.1в).

Пусть $\{a_i\}$ — ортонормированная в $\mathbf{R}_s^m$ система векторов, $\Pi_{s'} — эвклидов шар, описанный вокруг Π_s . $\left(\Pi_{s'} = R \Pi_{l_2}, \text{ где } R = \max_{a \in \Pi_s} \|a\|_{l_2} \right)$,$



$$\|\alpha_1 + \alpha_2/2\|_{l_1} = \|\alpha_1 - \alpha_2/2\|_{l_1} = 3/2; \quad \|\alpha_1 + \alpha_2/2\|_{l_\infty} = \|\alpha_1 - \alpha_2/2\|_{l_\infty} = 1.$$

Рис. 2.1. К построению примера 1 в норме l_∞ .

где $R = \max_{a \in \Pi_s} \|a\|_{l_2}$, s' — порожденная им норма. Тогда для $x \triangleq k'a_1 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^m \varepsilon_i a_i$

$$\begin{aligned} \|x\|_s &\geq \|x\|_{s'} = \frac{1}{R} \|x\|_{l_2} = \frac{1}{R} \left((k' \|a_1\|_{l_2})^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^m \|a_i\|_{l_2}^2 \right)^{1/2} \geq \\ &\geq \left((\|a_1\|_{l_2}/R)^2 + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^m (\|a_i\|_{l_2}/R)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если система $\{a_i\}$ при этом такова, что

$$\|a_i\|_{l_2} = \max_{a \in \Pi_s} \|a\|_{l_2} = R, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.8)$$

то из (2.7), (2.4) получим оценку

$$\varphi_s(m) \geq (1 + (m-1)/4)^{1/2} = \sqrt{m+3}/2.$$

Как нетрудно убедиться, $\max_{a \in \Pi_{l_p}} \|a\|_{l_2}$ при $p \geq 2$ достигается на векторах

a таких, что $|a(1)| = |a(2)| = \dots = |a(m)| = m^{-1/p}$. Это для нормы l_∞ вновь приводит нас к матрицам Адамара. А именно: если матрица A_m существует, то ее строки дают ортонормированную в $R_{l_\infty}^m$ систему векторов $\{a_i\}$, обладающую свойством (2.8). (Для $R_{l_p}^m$, $p \geq 2$, эти векторы нужно умножить на коэффициент $m^{-1/p}$.) Таким образом, справедлива

Теорема 2.2. Если для некоторого $n \leq m$ существует матрица A_n , то для любого $p \geq 2$

$$\varphi_{l_p}(m) \geq \sqrt{n+3}/2. \quad (2.9)$$

Следствие 1. Если гипотеза Адамара (см. гл. 1, § 4) верна при любом $n \leq m$, то $\varphi_{l_p}(m) \geq \sqrt{m}/2$, $p \geq 2$.

Из (2.9) при $n=2$ вытекает

Следствие 2. $\varphi_{l_p}(m) \geq \sqrt{5/4}$ для $m=2, 3$; $p \geq 2$.

Заметим, что следствие 3 теоремы 1.7 при $m=3$ дает более точную оценку: $\varphi_{l_p}(3) \geq \sqrt{4/3}$, $p \geq 2$.

Поскольку матрица Сильвестра порядка $n \in [(m+1)/2, m]$ существует, то, подставляя $n = (m+1)/2$ в (2.9), получаем

Следствие 3. Для любого m

$$\varphi_{l_p}(m) \geq \sqrt{m+7/2} \sqrt{2} > 0,3535 \sqrt{m+7}, \quad p \geq 2. \quad (2.10)$$

Заметим, что во всех трех следствиях мы могли бы опустить условие $p \geq 2$, так как при $p \in [1, 2]$ оценки перекрываются вытекающей из (2.5) оценкой $\varphi_{l_p}(m) \geq \sqrt{m+3}/2$. Таким образом, для всех норм l_p безусловно справедлива оценка (2.10), что доказывает теорему 1.3.

При произвольной норме s из (2.4), (2.7) для ортономированной системы векторов $\{a_i\} \subset \mathbb{R}_s^m$ мы получаем плохую, близкую к тривиальной оценку, если шар Π_s слишком вытянут в одном направлении. (Тогда для всех $i=1, m$, кроме, быть может, одного, величины $\|a_i\|_{l_2}/\max_{a \in \Pi_s} \|a\|_{l_2}$ малы). Однако теорема 1.5 позволяет применять к шару Π_s любые аффинные преобразования (с сохранением значения $\varphi_s(m)$), а теорема Джона и Лейхтвейса [25, с. 49] утверждает существование аффинного преобразования T , для которого $\Pi_{l_2} \subseteq T(\Pi_s) \subseteq \sqrt{m} \Pi_{l_2}$. Отсюда при $m=2$, взяв $\{a_1, a_2\}$ такие, что $\|a_1\|_{l_2} = R$, $a_2 \perp a_1$, $\|a_2\|_{l_2} \geq R/\sqrt{2}$, из (2.4), (2.7) получим оценку

$$\varphi_s(2) \geq \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^{1/2} = \sqrt{9/8},$$

доказывающую теорему 1.4.

Пример 2. Рассматриваемый здесь способ получения оценок функций Штейница связан с задачей НБВ. Пусть $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_m\} \subset \Pi(\mathbb{R}_s^m)$, $b' \triangleq -\sum_{i=1}^m b_i/2M$, где M столь велико, что $b' \in \Pi(\mathbb{R}_s^m)$. Совокупность векторов $H = \{b_j, j = \overline{1, n}\}$ ($n = m + 2M$; $b_j = b', j = \overline{1+m, n}$) является совокупностью Штейница. Пусть $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ — оптимальная перестановка для H в задаче КСВ. Найдем такое k , что среди векторов $\{b_{\pi_1}, \dots, b_{\pi_k}\}$ ровно M векторов b' . Тогда

$$f_{H,s}(\pi) \geq \left\| \sum_{j=1}^k b_{\pi_j} \right\|_s = \left\| \sum_{j \in N'} b_j - \sum_{j=1}^m b_j/2 \right\|_s$$

для некоторого $N' \subseteq \{1, 2, \dots, m\} \triangleq N$. Отсюда

$$f_{H,s}(\pi) \geq \min_{N' \subseteq N} \left\| \sum_{j \in N'} b_j - \sum_{j \in N} b_j/2 \right\|_s, \\ \varphi_s(m) \geq \sup_{\{\mathfrak{B}\}} \min_{N' \subseteq N} \left\| \sum_{j \in N'} b_j - \sum_{j \in N} b_j/2 \right\|_s = \bar{\theta}_s(m).$$

Выведенная оценка устанавливает связь между функциями Штейница и задачей НБВ и может быть использована для получения нетривиальных нижних оценок функции $\varphi_s(m)$ при произвольной норме s .

Доказательство теоремы 1.6. Вначале изложим алгоритм нахождения искомого порядка $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)$ суммирования векторов совокупности Штейница $\mathfrak{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}_s^2$.

Вектор b_{π_1} выбираем произвольно. Пусть последовательность $b_{\pi_1}, \dots, b_{\pi_k}$ определена, $b_{\pi}^k \triangleq \sum_{j=1}^k b_{\pi_j}$.

Введем несколько обозначений. Пусть $b, c \in \mathbb{R}^2$, $c \neq 0$, а $\Pi_0(b, c)$ и $\Pi_1(b, c)$, соответственно, — левая и правая замкнутые полуплоскости при движении по лучу $\Pi(b, c) = \{b + tc, t \geq 0\}$ из точки b (рис. 2.2). Через $S(b, c)$ обозначим сектор $\Pi_1(0, b) \cap \Pi_0(0, c)$ (рис. 2.3).

Если $b_{\pi}^k = 0$, то $b_{\pi_{k+1}}$ выбираем произвольно. Пусть $b_{\pi}^k \neq 0$, $\|b_{\pi}^k\|_s \leq \kappa \triangleq \sigma(s, 2)$. Среди оставшихся векторов совокупности $\mathfrak{B}$ в каждой из полуплоскостей $\Pi_i(0, b_{\pi}^k)$, $i = 0, 1$, найдем вектор, образующий наибольший угол с b_{π}^k : пусть это $c_0(b_{\pi}^k)$ и $c_1(b_{\pi}^k)$, соответственно (возможно, что они совпадают). В качестве $b_{\pi_{k+1}}$ возьмем тот из векторов c_0, c_1 , который обеспечивает истинность предиката $Q(b_{\pi}^k + c_i)$ (см. ниже). Заметим, что при доказательстве истинности $Q(b_{\pi}^k + c_0) \vee Q(b_{\pi}^k + c_1)$ существенно используется истинность $Q(b_{\pi}^k)$. А поскольку изначально $Q(b_{\pi}^1)$

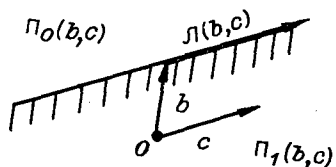


Рис. 2.2. Луч и полуплоскости.

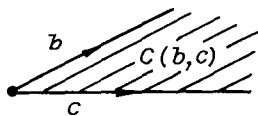


Рис. 2.3. Сектор.

истинно, то тем самым порождается процесс, при котором все предикаты $Q(b_\pi^k)$, $k = \overline{1, n}$, истинны. Отсюда следует $\|b_\pi^k\|_s \leq \kappa$, $k = \overline{1, n}$, что доказывает оценку (4.13).

Определение предикатов:

$P_i(b) = (\text{луч } Л(b, -c_i(b)) \text{ пересекает шар } Ш_s);$

$Q_i(b) = P_i(b) \& \|b\|_s \leq \kappa;$

$Q(b) = Q_0(b) \vee Q_1(b).$

Далее, не ограничивая общности, будем считать, что совокупность $\mathfrak{B}$ не содержит нулевых векторов.

Для случаев $b_\pi^k = 0$ доопределяем также $c_i(b_\pi^k) := c_i(e)$, $i = 0, 1$, где $e = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Поскольку $\kappa \geq 1$, то очевидна

Лемма 2.3. Если $\|b\|_s \leq 1$, то $Q_0(b) \& Q_1(b)$.

Из леммы сразу имеем $Q(b_\pi^1)$, какой бы вектор $b_i \in \mathfrak{B}$ в качестве b_{π_1} мы ни взяли.

Нам понадобится следующая

Лемма 2.4. Пусть множество Π выпукло в $\mathbb{R}^2$; $\lambda > 0$; a, b, c — ненулевые векторы в $\mathbb{R}^2$, причем луч $Л(0, b)$ лежит «между» лучами $Л(0, a)$ и $Л(0, c)$. Тогда из $0, a, c, c + \lambda b \in \Pi$ следует $(b \in \Pi) \vee \vee (c + \lambda a \in \Pi)$.

Доказательство. Ограничимся не строгим, но наглядным доказательством (подробности см. в [24, с. 62]).

Если Z — выпуклая замкнутая область, ограниченная в $\mathbb{R}^2$ лучами $Л(0, a)$, $Л(c, b)$ и отрезком $[0, c]$ (рис. 2.4), то отрезок $[a, c + \lambda b]$ делит ее на две выпуклые области Z_1 и Z_2 , где Z_1 — замкнутый четырехугольник $\{0, a, c + \lambda b, c\}$, а $Z_2 \triangleq Z \setminus Z_1$.

Лучи $Л(c, a)$ и $Л(0, b)$ лежат в Z (так как $Л(0, b)$ находится «между» $Л(0, a)$ и $Л(0, c)$), откуда $c + \lambda a, b \in Z$. Если указанные точки не принадлежат Z_1 , то обе лежат в выпуклой области Z_2 , откуда $x \triangleq (1/(1 + \lambda))(c + \lambda a) + (\lambda/(1 + \lambda))b \in Z_2$. Но $x = (1/(1 + \lambda))(c + \lambda b) + (\lambda/(1 + \lambda))a \in Z_1$; противоречие. Следовательно, $(c + \lambda a \in Z_1) \vee (b \in Z_1)$. А поскольку $Z_1 \subseteq \Pi$, то лемма доказана.

Лемма 2.5. Если $Q_i(b_\pi^k)$, то

$$(\|b_\pi^k + c_0(b_\pi^k)\|_s \leq \kappa) \vee (\|b_\pi^k + c_1(b_\pi^k)\|_s \leq \kappa).$$

Доказательство. Пусть, для определенности, выполняется $Q_0(b_\pi^k)$, и $\|b_\pi^k + c_0(b_\pi^k)\|_s > \kappa$. Тогда существует $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что $b_\pi^k + \varepsilon c_0 \notin \kappa Ш_s$. Обозначим $d \triangleq (\varepsilon - 2/\|c_0\|_s)c_0$. Тогда $\|d\|_s > 1$ и $b_\pi^k + d \in \kappa Ш_s$. (Иначе отрезок $(b_\pi^k + \varepsilon c_0, b_\pi^k + d)$ содержит хорду шара $\kappa Ш_s$, пересекающую $Ш_s$, так как луч $Л(b_\pi^k, -c_0)$ пересекает $Ш_s$. Но s -норма этой хорды строго меньше, чем 2, что противоречит определению $\kappa \triangleq \sigma(s, 2)$.) Полагая $c = b_\pi^k$, $a = \kappa c_1$, $b = \kappa d$, $\Pi = \kappa Ш_s$, $\lambda = 1/\kappa$, оказываемся в условиях леммы 2.4. Так как $b \notin \Pi$, то $c + \lambda a \in \Pi$, т. е. $b_\pi^k + c_1 \in \kappa Ш_s$, что и требуется.

Лемма 2.6. Если $Q_i(b_\pi^k)$, то $Q(b_\pi^k + c_0) \vee Q(b_\pi^k + c_1)$.

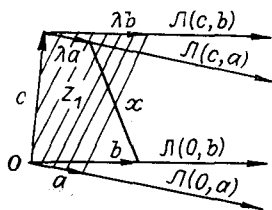


Рис. 2.4.

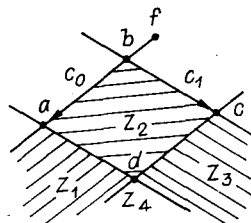


Рис. 2.5.

Доказательство. Пусть, для определенности, выполняется $Q_0(b_\pi^k)$ и $f \in \Pi(b_\pi^k, -c_0) \cap \Pi_s$. Если $(\|b_\pi^k + c_0\|_s \leq 1) \vee (\|b_\pi^k + c_1\|_s \leq 1)$ то по лемме 2.3 получим требуемое. Пусть

$$\|b_\pi^k + c_i\|_s > 1, \quad i = 0, 1. \quad (2.11)$$

Обозначим $b \triangleq b_\pi^k$, $a \triangleq b_\pi^k + c_0$, $c \triangleq b_\pi^k + c_1$, $d \triangleq b_\pi^k + c_0 + c_1$. Так как $0 \in \Pi(b_\pi^k + C(c_1, c_0))$, то возможен один из следующих четырех случаев (рис. 2.5).

Случай 1: $0 \in Z_1$. Лучи $\Pi(0, -c_1)$ и $\Pi(b, c_0)$ пересекаются в точке $e \in \Pi_s$ (рис. 2.6а). Так как $a \in [e, f]$, то $a \in \Pi_s$, что противоречит (2.11). Следовательно, этот случай невозможен.

Случай 2: $0 \in Z_2$. Имеем $0 \in [d, e]$, где $e \in [a, b] \cup [b, c]$. Пусть $e \in [b, c]$ (рис. 2.6б), тогда $\|c - e\|_s \leq 1$, $\|c - d\|_s \leq 1$, откуда $\|c - 0\|_s = \|c\|_s \leq 1$, что противоречит (2.11). Этот случай также невозможен.

Случай 3: $0 \in Z_3$. Пусть $e \in \Pi(0, -c_0) \cap \Pi(b, c_1)$ (рис. 2.6в), тогда $e \in \Pi_s$. Отрезок $[0, f]$ пересекается либо с отрезком $[b, c]$, либо с лучом $\Pi(c, -c_0)$. Пусть $g \in [0, f] \cap ([b, c] \cup \Pi(c, -c_0))$. Так как $[0, f] \subset \Pi_s$, то $g \in \Pi_s$. Но если $g \in [b, c]$, то $c \in [g, e] \subset \Pi_s$, что противоречит (2.11), следовательно, $g \in \Pi(c, -c_0)$.

Положим $b_{\pi_{k+1}} := c_1(b_\pi^k)$. Тогда $b_{\pi_{k+1}}^{k+1} = c$. Так как $c_0(b_{\pi_{k+1}}^{k+1}) = c_0(b_\pi^k) = c_0$ и луч $\Pi(b_{\pi_{k+1}}^{k+1}, -c_0(b_{\pi_{k+1}}^{k+1})) = \Pi(c, -c_0)$ пересекает Π_s в точке g , то имеет место $P_0(b_{\pi_{k+1}}^{k+1})$. Если еще учесть, что $c \in [b, e] \subset \Pi_s$, т. е. $\|b_{\pi_{k+1}}^{k+1}\|_s \leq \kappa$, то получим $Q_0(b_{\pi_{k+1}}^{k+1}) = Q_0(b_\pi^k + c_1)$, что и требуется.

Случай 4: $0 \in Z_4$ (рис. 2.6г). Если $b_{\pi_{k+1}} := c_0$, то $b_{\pi_{k+1}}^{k+1} = a$, и нетрудно видеть, что $c_0(b_{\pi_{k+1}}^{k+1}) \in C(c_0, -c_1)$, или $\Pi(a, -c_0(b_{\pi_{k+1}}^{k+1})) \subset a + C(-c_0, c_1)$, откуда следует, что этот луч обязан пересечь отрезок $[0, f] \subset \Pi_s$, т. е. выполнено свойство $P_0(b_{\pi_{k+1}}^{k+1})$. Полагая же $b_{\pi_{k+1}} := c_1$, для $b_{\pi_{k+1}}^{k+1} = c$ получим $P_1(b_{\pi_{k+1}}^{k+1}) \vee P_0(b_{\pi_{k+1}}^{k+1})$ — в зависимости от того, какой из лучей $\Pi(c, -c_1(b_{\pi_{k+1}}^{k+1}))$, $\Pi(c, -c_0)$ пересекает отрезок $[0, f]$. По лемме 2.5 для одного из векторов c_0, c_1 выполняется $\|b_\pi^k + c_i\|_s \leq \kappa$. Выбрав его в качестве $b_{\pi_{k+1}}$, получим $Q(b_{\pi_{k+1}}^{k+1})$, что и требуется. Лемма доказана.

Лемма 2.6 обосновывает $(k+1)$ -й шаг алгоритма в теореме 1.6 и одновременно доказывает оценку $\|b_\pi^k\|_s \leq \kappa$, $k = \overline{1, n}$, из которой следует (1.13).

Для завершения доказательства теоремы 1.6 остается установить трудоемкость алгоритма. На каждом шаге $k = \overline{1, n}$ для нахождения $b_{\pi_{k+1}}$ мы (а) находим векторы $c_0(b_\pi^k)$, $c_1(b_\pi^k)$ среди еще не

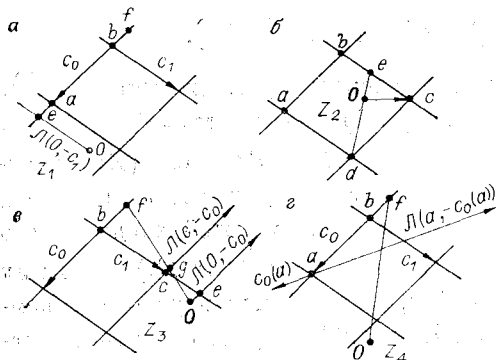


Рис. 2.6.

использованных векторов совокупности $\mathfrak{B}$ (на это требуется $O(n)$ операций) и (б) устанавливаем свойство $Q(b_\pi^k + c_i)$ для одного из векторов c_i . Уточним алгоритм обнаружения этого свойства.

С предыдущего шага мы помним, какое из свойств $Q_0(b_\pi^k)$, $Q_1(b_\pi^k)$ выполнялось. Пусть это было $Q_{J(k)}(b_\pi^k)$, причем известна точка $f \in \Pi(b_\pi^k, -c_{J(k)}(b_\pi^k)) \cap \Pi_s$. Обозначим $c_i = c_i(b_\pi^k)$, $i = 0, 1$. Выполним следующие действия.

1. Вычислим $\|b_\pi^k + c_i\|_s$, $i = 0, 1$. Если $\|b_\pi^k + c_j\|_s \leq 1$, то справедливо и $Q_0(b_\pi^k + c_j)$ и $Q_1(b_\pi^k + c_j)$. Положим $b_{\pi_{k+1}} := c_j$; $J(k+1) := 0$; $f := b_{\pi_{k+1}}^{k+1}$.

2. Если $\|b_\pi^k + c_i\|_s > 1$, $i = 0, 1$, то решим систему с двумя неизвестными x_0, x_1 : $b_\pi^k + x_0 c_0 + x_1 c_1 = 0$. Неотрицательность x_0, x_1 вытекает из свойств векторов b_π^k, c_0, c_1 . Если при этом $x_{J(k)} \leq 1$, то имеем случай 3 леммы 2.6, поэтому $b_{\pi_{k+1}} := c_{1-J(k)}$; $J(k+1) := J(k)$; $f := zf$, где z находится из решения системы $b_\pi^{k+1} - y c_{J(k)} = zf$.

3. Если в п. 2 $x_{J(k)} > 1$, то имеем случай 4 леммы 2.6. Если $\|b_\pi^k + c_{J(k)}\|_s \leq \kappa$, то $b_{\pi_{k+1}} := c_{J(k)}$; $J(k+1) := J(k)$; $f := zf$, где z находится из решения системы $b_\pi^{k+1} - y c_{J(k)}(b_\pi^{k+1}) = zf$ после отыскания вектора $c_{J(k)}(b_\pi^{k+1})$.

4. Если в п. 3 $\|b_\pi^k + c_{J(k)}\|_s > \kappa$, то из леммы 2.5 имеем $\|b_\pi^k + c_{1-J(k)}\|_s \leq \kappa$. Положим $b_{\pi_{k+1}} := c_{1-J(k)}$. Решим систему $b_\pi^{k+1} - y c_{J(k)} = zf$. Если $y \geq 0$, то положим $J(k+1) := J(k)$; $f := zf$.

5. Если в п. 4 $y < 0$, то после отыскания вектора $c_{1-J(k)}(b_\pi^{k+1})$ решим систему $b_\pi^{k+1} - y c_{1-J(k)}(b_\pi^{k+1}) = zf$, и положим $J(k+1) := 1 - J(k)$; $f := zf$.

Таким образом, свойство $Q(b_\pi^{k+1})$ устанавливается за $O(1)$ операций в предположении, что трудоемкость вычисления нормы произвольного вектора ограничена сверху константой (не зависящей от n). Отсюда трудоемкость k -го шага есть $O(n)$, а всего алгоритма — $O(n^2)$. Теорема 1.6 доказана.

Для применения теоремы 1.6 необходимо уметь вычислять значение $\delta(s, 2)$ для конкретных норм.

Нетрудно показать, что

$$\delta(l_2, x) = (1 + x^2/4)^{1/2},$$

$$\delta(l_1, x) = 1 + x/2 = \delta(l_\infty, x).$$

Для произвольных $p \geq 1$, $x \geq 0$

вычисление $\delta(l_p, x)$ становится нетривиальным.

Лемма 2.7. Имеем

$$\sigma(l_p, 2) = \begin{cases} 2^{1/p}, & p \leq 2, \\ 2^{1/q}, & p \geq 2, \text{ где } 1/p + 1/q = 1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть

$$\kappa \triangleq \begin{cases} 2^{1/p}, & p \leq 2, \\ 2^{1/q}, & p \geq 2; \end{cases}$$

Π_s — эвклидов шар, описанный вокруг Π_{l_p} ; s — порожденная им норма; Π' — эвклидов шар, вписанный в $\kappa \Pi_{l_p}$. Рассматривая Π' как шар s -

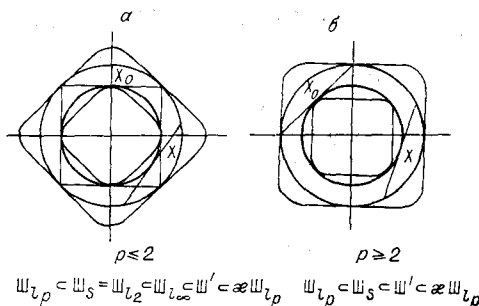


Рис. 2.7.

нормы с радиусом R , получаем: $R = \sqrt{2} \vee_p \geq 1$; s -норма любой хорды X шара Π , касающейся Π_s , равна 2. Следовательно, всякая хорда шара $\kappa\Pi_{l_p}$, пересекающая Π_{l_p} , имеет l_p -норму не меньше, чем 2. Отсюда $\delta(l_p, 2) \leq \kappa$. Равенство же следует из существования хорды X_0 в $\kappa\Pi_{l_p}$, касающейся Π_{l_p} и имеющей l_p -норму, равную 2 (рис. 2.7).

Из леммы 2.7 и теоремы 1.6 вытекает оценка

$$\varphi_{l_2}(2) \leq \sqrt{2}. \quad (2.12)$$

Из (2.6) и (2.12) получаем $\varphi_{l_2}(2) \leq \sqrt{2} < 3/2 \leq \varphi_{l_1}(2)$, что доказывает теорему 1.2.

§ 3. Алгоритмы построения расписаний

Задачи Джонсона и Акерса — Фридмана с тремя станками. Для обеих задач будем предполагать, что начальный этап алгоритма, приводящий к равенству (1.3), уже выполнен. В последующих выкладках используются обозначения и определения § 1, 2, 5 гл. 1.

Доказательство теоремы 1.11. Определим векторы $b_j = (a_{1j} - a_{3j}, a_{2j} - a_{3j}) \in \mathbb{R}^2$, $j = \overline{1, n}$. Тогда $\sum b_j = 0$, $\|b_j\|_{s_0} \leq h \triangleq \max_{i,j} a_{ij}$.

Опираясь на следствие 2 теоремы 1.6, с трудоемкостью $O(n^2)$ найдем перестановку $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ такую, что

$$\left\| \sum_{j=1}^k b_{\pi(j)} \right\|_{s_0} \leq 1.5h, \quad k = \overline{1, n},$$

откуда вытекает соотношение

$$\left| \sum_{j=1}^k a_{i_1 \pi(j)} - \sum_{j=1}^k a_{i_2 \pi(j)} \right| \leq 1.5h, \quad (2.13)$$

верное для любых $i_1, i_2 \in \{1, 2, 3\}$, $k = \overline{1, n}$.

Далее расписание будем строить на тех же принципах, что и в [13], а именно:

(1) при наличии деталей, готовых к запуску на станок, последний не простаивает;

(2) при наличии очереди деталей, готовых к запуску на i -й станок, приоритет между ними устанавливается правилами:

— любая первая или вторая операция над какой-либо деталью приоритетнее любой третьей;

— в совокупности первых и вторых операций приоритет задается перестановкой π (т. е. операция $c_{i, \pi(j_1)}$ приоритетнее $c_{i, \pi(j_2)}$, если $j_1 < j_2$);

— на множестве третьих операций приоритет произвольный.

Докажем, что любое расписание, построенное в соответствии с принципами (1), (2), удовлетворяет оценке (1.25).

Для i -го станка выделим интервалы непрерывной работы и интервалы простоя. Моменты перехода от простоя к работе будем обозначать $t_0^i, t_2^i, t_4^i, \dots$, а от работы к простоям — $t_1^i, t_3^i, \dots$, где $0 = t_0^i \leq t_1^i < t_2^i < \dots < t_{2l_i+1}^i < t_{2l_i+2}^i = \infty$; $t_{2l_i+1}^i$ — момент окончания работы станка i . В соответствии (1) справедливо

Утверждение. Для любого t из интервала простоя $[t_{2k-1}^i, t_{2k}^i]$ все детали, пришедшие на i -й станок до момента t , обрабатываются на нем до момента t .

Пусть $c_{i\pi(j)}$ — первая операция над деталью $\pi(j)$. Тогда она заканчивается не позднее момента $\sum_{k=1}^j a_{i\pi(k)}$.

Пусть $o_{i_1\pi(j)}$, $o_{i_2\pi(j)}$ — соответственно первая и вторая операции над деталью $\pi(j)$. Тогда на i_2 -й станок деталь $\pi(j)$ придет не позднее момента

$$\sum_{k=1}^j a_{i_1\pi(k)} \leq (\text{в силу (2.13)}) \leq \sum_{k=1}^j a_{i_2\pi(k)} + 1.5h.$$

Пусть $o_{i\pi(j)}$ — вторая операция над деталью $\pi(j)$ — выполняется в некотором интервале времени $[\tau_{i\pi(j)}^H, \tau_{i\pi(j)}^K] \subset [t_{2s}^i, t_{2s+1}^i)$. Если среди операций, выполняемых на станке в интервале $[t_{2s}^i, \tau_{i\pi(j)}^H)$, существуют менее приоритетные, чем $o_{i\pi(j)}$, то рассмотрим последнюю из них, $(o_{i\pi(j_0)})$.

Если же таких операций нет, то считаем, что последняя из них имеет нулевую длительность и выполняется в интервале $[t_{2s}^i, t_{2s}^i)$. Операции, последовательно выполняемые на i -м станке после $o_{i\pi(j_0)}$ до $o_{i\pi(j)}$, пронумеруем: $o_{i\pi(j_1)}$, $o_{i\pi(j_2)}$, ..., $o_{i\pi(j_v)}$, где $j_v = j$. Поскольку $o_{i\pi(j_k)}$, $k = \overline{1, v}$, не менее приоритетны, чем $o_{i\pi(j)}$, то все они являются либо первыми, либо вторыми операциями своих деталей, причем $j_k \leq j$, $k = \overline{1, v}$. Пусть $\min j_k$ достигается при $k = z$. В момент прихода (не позднее момента $k = \overline{1, v}$)

$\sum_{k=1}^{j_z} a_{i\pi(k)} + 1.5h$ детали $\pi(j_z)$ на i -й станок последний мог быть занят. Следовательно, к выполнению операции $o_{i\pi(j_z)}$ станок приступит не позднее

момента $\sum_{k=1}^{j_z} a_{i\pi(k)} + 2.5h$, а закончит ее не позднее момента $\sum_{k=1}^{j_z} a_{i\pi(k)} + 3.5h$, откуда заключаем, что операция $o_{i\pi(j)}$ закончится не позднее мо-

мента $\sum_{k=1}^{j_z} a_{i\pi(k)} + 3.5h + \sum_{k=z+1}^v a_{i\pi(j_k)} \leq \sum_{k=1}^j a_{i\pi(k)} + 3.5h$ (так как все j_k , $k = z + 1, v$, различны и лежат в интервале $(j_z, j]$).

Итак, если $o_{i_2\pi(j)}$, $o_{j_3\pi(j)}$ — соответственно вторая и третья операции над деталью $\pi(j)$, то $o_{i_2\pi(j)}$ закончится не позднее момента $\sum_{k=1}^j a_{i_2\pi(k)} + 3.5h$, и в силу (2.13) деталь $\pi(j)$ придет на i_3 -й станок не позднее момента $\sum_{k=1}^i a_{i_3\pi(k)} + 5h$.

Пусть $T \triangleq H + 5h$. Поскольку любая деталь приходит на место выполнения последней операции над ней не позднее T , то для любого $i = \overline{1, 3}$ i -й станок либо заканчивает работу не позднее T , либо (см. утверждение) $T \in [t_{2l_i}^i, t_{2l_i+1}^i)$. Покажем, что во втором случае суммарный простой i -го станка в интервале $[0, t_{2l_i}^i)$ не превышает $6h$, откуда будет следовать оценка (1.25).

Если $t_{2l_i}^i \leq 5h$, то простой i -го станка не превышает $5h$. Пусть $t_{2l_i}^i > 5h$, и t — произвольное число из интервала простоя $[t_{2l_i-1}^i, t_{2l_i}^i)$. Найдем $w \geq 0$ такое, что

$$\sum_{j=1}^w a_{i\pi(j)} \leq t - 5h < \sum_{j=1}^{w+1} a_{i\pi(j)}.$$

Согласно утверждению все детали $\pi(j)$, $j = \overline{1, w}$, успевают обработаться на i -м станке до момента t , откуда суммарный простой i -го станка до момента t составит не более

$$t - \sum_{j=1}^w a_{i\pi(j)} < 5h + a_{i\pi(w+1)} \leq 6h.$$

Поэтому в силу произвольности $t \in [t_{2l_i-1}^i, t_{2l_i}^i)$ простой i -го станка до момента $t_{2l_i}^i$ составит не более $6h$.

Трудоемкость алгоритма складывается из трудоемкостей нахождения перестановки π и нахождения наиболее приоритетной детали из очереди на i -й станок, $i = 1, 3$, в момент окончания обработки на нем очередной детали. Таким образом, весь алгоритм может быть реализован за $O(n^2)$ операций, что завершает доказательство теоремы 1.11.

Доказательство теоремы 1.12. Определим векторы $b_j \triangleq (a_{1j} - a_{2j}, a_{2j} - a_{3j}) \in \mathbb{R}^2$ и обозначим $b_\pi^h \triangleq \sum_{j=1}^h b_{\pi(j)}$; $b(i)$ — i -я координата вектора b . Из (1.3) следует, что $\sum b_i = 0$. Искомое расписание с оценкой (1.26) будем искать среди перестановочных расписаний P_π (см. гл. 1, § 2). Для $m = 3$ формула (1.1) запишется в виде

$$T(P_\pi) = \max_{1 \leq k_1 \leq k_2 \leq n} \left(\sum_{j=1}^{k_1} a_{1\pi(j)} + \sum_{j=k_1}^{k_2} a_{2\pi(j)} + \sum_{j=k_2}^n a_{3\pi(j)} \right).$$

Заменяя $a_{1\pi(k_1)}$ и максимальный из элементов $a_{2\pi(k_2)}, a_{3\pi(k_2)}$ на h , получим оценку

$$\begin{aligned} T(P_\pi) &\leq 2h + H + \max_{0 \leq k_1 \leq k_2 \leq n} (b_\pi^{k_1}(1) + b_\pi^{k_2}(2)) \leq \\ &\leq 2h + H + \max_{k=1, n} b_\pi^k(1) + \max_{k \in K(\pi)} b_\pi^k(2), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $K(\pi) = \{k: b_\pi^k(2) \text{ не есть строгий локальный максимум функции } v(k) \triangleq b_\pi^k(2)\}$.

Построим перестановку π , удовлетворяющую оценкам

$$b_\pi^k(1) \leq 0, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2.15)$$

$$b_\pi^k(2) \leq h, \quad k \in K(\pi), \quad (2.16)$$

что с учетом (2.14) дает (1.26).

Для каждого вектора b_j , $j = \overline{1, n}$, вычислим угловую координату $\alpha(b_j) \in [0, 2\pi)$, равную аргументу комплексного числа $z(b_j) \triangleq -b_j(2) - b_j(1)i$, и упорядочим числа $j = \overline{1, n}$ по неубыванию величин $\alpha(b_j)$: $(j_1, \dots, j_n) \triangleq \pi'$. Если просуммируем векторы b_j в порядке π' , то получим выпуклую замкнутую ломаную, целиком лежащую в полуплоскости $b(1) \leq 0$ (рис. 2.8).

Перестановку $\pi(s)$ будем определять индукцией по $t = \overline{1, n}$ так, чтобы для любого $t = \overline{1, n}$ множество $\{\pi(s), s = \overline{1, t}\}$ состояло из некоторых начального и конечного отрезков последовательности π' , и чтобы выполнялись условия (2.15), (2.16). Положим $\pi(1) = j_1$. Пусть $\pi(s)$ определено для $s = \overline{1, t}$, $t < n$ и выполнены соотношения $b_\pi^t(1) \leq 0$, $b_\pi^t(2) \leq h$, $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{\pi(s), s = \overline{1, t}\} = \{j_v, j_{v+1}, \dots, j_\mu\}$. Тогда $b_\pi^t(1) + b_{j_v}(1) \leq 0$, и, если $b_\pi^t(2) + b_{j_v}(2) \leq h$, то положим $\pi(t+1) := j_v$. Неравенства (2.15), (2.16) для $k = t+1$ выполнены. Если

$$(b_\pi^t(2) + b_{j_v}(2) > h) \& (b_\pi^t(1) + b_{j_\mu}(1) \leq 0)$$

(рис. 2.9а), то положим $\pi(t+1) := j_\mu$. Неравенства (2.15), (2.16) для $k = t+1$ выполнены.

Наконец, если

$$(b_\pi^t(2) + b_{j_v}(2) > h) \& (b_\pi^t(1) + b_{j_\mu}(1) > 0)$$

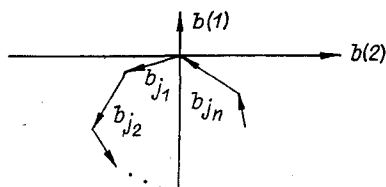


Рис. 2.8.

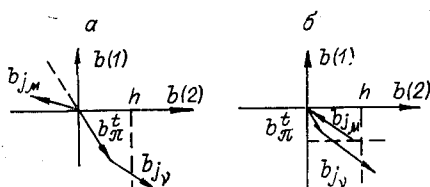


Рис. 2.9.

(рис. 2.9б), то положим $\pi(t+1) := j_\nu$, $\pi(t+2) := j_\mu$. Поскольку $b_\pi^t(2) + b_{j_\mu}(2) \leq 0$, то $b_\pi^{t+2}(2) \leq h$, в то время как $b_\pi^{t+1}(2)$ является локальным максимумом функции $v(k)$, и, следовательно, $t+1 \notin K(\pi)$. Одновременно выполняется $b_\pi^{t+1}(1) \leq -b_{j_\mu}(1) \leq 0$ (рис. 2.9б), откуда $b_\pi^{t+2}(1) \leq 0$. Таким образом, неравенства (2.15), (2.16) выполнены при $k = t+2$, что завершает обоснование индукционного шага.

Трудоемкость алгоритма складывается из трудоемкостей упорядочения величин $\alpha(b_j)$ (за $O(n \log n)$ операций) и построения перестановки π по перестановке π' ($O(n)$).

Теперь докажем вторую часть теоремы. Пусть $\varepsilon > 0$. Построим пример задачи Джонсона ($m = 3$) с такой матрицей (a_{ij}) , $i = 1, 3$, $j = 1, n$, чтобы длина ее оптимального расписания $P_{\text{опт}}$ удовлетворяла (1.27).

Множество деталей составим из N деталей 1-го типа и k деталей 2-го типа. Для деталей 1-го типа характерно $a_{1j} = a_{3j} = 1 - \kappa$, где $\kappa \triangleq k/N$; $a_{2j} = 1$. Для деталей 2-го типа $a_{1j} = a_{3j} = 1$; $a_{2j} = 0$. Имеем $H = N$; $h = 1$.

Пусть $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ — произвольная перестановка, где $n = N + k$. Очевидно, k деталей 2-го типа делят перестановку π на $k+1$ отрезков, заполненных номерами деталей 1-го типа, причем хотя бы один из отрезков имеет мощность $d \geq N/(k+1)$. Пусть таковым является отрезок $(\pi(j_1), \dots, \pi(j_2))$, где $j_2 - j_1 + 1 = d$. Для расписания P_π справедливы соотношения

$$\begin{aligned} T(P_\pi) &\geq \sum_{j=1}^{j_1} a_{1\pi(j)} + \sum_{j=j_1}^{j_2} a_{2\pi(j)} + \sum_{j=j_2}^n a_{3\pi(j)} = (N - d + 2)(1 - \kappa) + \\ &+ k + d = N - d + 2 - \kappa N + \kappa d - 2\kappa + k + d = N + 2 + \kappa d - 2\kappa \geq \\ &\geq N + 2 + (k/N)(N/(k+1)) - 2k/N = N + 3 - 1/(k+1) - \\ &- 2k/N > H + (3 - \varepsilon)h, \end{aligned}$$

если k и N выбраны так, что $k \geq 3/\varepsilon$, $N \geq 3k/\varepsilon$.

Полученная оценка верна для всех перестановочных расписаний данной задачи. Но поскольку при $m = 3$ оптимум на перестановочных расписаниях совпадает с глобальным оптимумом, то тем самым доказана оценка (1.27), а с ней и теорема 1.12.

Задача с маршрутами деталей общего вида. Условия задачи и результат сформулированы в теореме 1.10, полное доказательство которой можно найти в [16]. Здесь же лишь коротко изложим идею алгоритма.

1. Добавляя нулевые операции, добиваемся того, что каждая деталь j будет состоять из mw операций $\{o_{ij}^s, i = 1, m, s = 1, w\}$, которые разбиваются на w уровней: $O_j^1 < O_j^2 < \dots < O_j^w$, где $O_j^s \triangleq \{o_{ij}^s, i = 1, m\}$, o_{ij}^s выполняется на i -м станке, а $O_j^k < O_j^l$ означает $o' < o''$ для любых $o' \in O_j^k$, $o'' \in O_j^l$.

2. Увеличивая длительности операций (a_{ij}^s) в интервале $[0, h]$, устанавливаем равенства $\sum_{s,j} a_{ij}^s \equiv H \triangleq \max_{i=1,m} \sum_{s,j} a_{ij}^s$, $i = 1, m$.

3. Нумеруем векторы $a_j \in \mathbb{R}^{mw}$ (длительностей операций j -й детали) так, чтобы суммы $\sum_{j=1}^k a_{ij}^s$ росли равномерно по k для всех s, i :

$$\sum_{j=1}^k a_{ij}^s = \frac{k-mw}{n} A_i^s + mwh\delta_{ik}^s, \quad i = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, w}, \quad k = \overline{0, n}, \quad (2.17)$$

где $A_i^s = \sum_{j=1}^n a_{ij}^s$, $\delta_{ik}^s \in [0, 1]$. В теореме 1.1 такая нумерация находится за $O(m^2 w^2 n^2)$ операций.

4. Если на i -м станке, $i = \overline{1, m}$, непрерывно, начиная с $t = 0$, выполнять его операции в порядке

$$o_{i1}^1 < o_{i1}^2 < \dots < o_{i1}^w < o_{i2}^1 < o_{i2}^2 < \dots < o_{in}^w,$$

то момент окончания операции o_{ij}^s равен

$$\bar{t}(o_{ij}^s) = \sum_{k=1}^{j-1} \sum_{v=1}^w a_{ik}^v + \sum_{v=1}^s a_{iv}^v.$$

Отсюда ввиду (2.17) легко вычисляется, что любая операция s -го уровня детали j предшествует любой операции $(s+1)$ -го уровня детали $j+r$, если r достаточно велико; а именно

$$rH/n \geq \Delta(m, w)h, \quad (2.18)$$

где $\Delta(m, w)$ — полином третьей степени.

Для того, чтобы любая операция s -го уровня детали j предшествовала любой операции $(s+1)$ -го уровня той же детали j , нужно сделать следующее. Поясним это для случая $w = 2, s = 1$. Необходимо на каждом станке добавить r фиктивных операций 2-го уровня $o_{i\Phi_1}^2, \dots, o_{i\Phi_r}^2$, $i = \overline{1, m}$, отеснив ими нефиктивные операции 2-го уровня:

$$o_{i1}^1 < o_{i\Phi_1}^2 < o_{i2}^1 < o_{i\Phi_2}^2 < \dots < o_{ir}^1 < o_{i\Phi_r}^2 < o_{i,r+1}^1 < o_{i1}^2 < \dots$$

Выбирая минимальное r , при котором выполняется (2.18), имеем возможность оценить сверху объем добавленных фиктивных операций полиномом от m, w .

Задачи с альтернативными исполнителями. Любая задача теории расписаний, в которой для каждой операции o' задан станок-исполнитель $I(o') \in \{1, 2, \dots, m\}$, может быть обобщена на случай, когда для o' задано допустимое множество исполнителей $J(o') \in \{1, 2, \dots, m\}$. Если при этом задача такова, что длина расписания определяется одним узким местом — наиболее загруженным станком (как это было во всех рассмотренных выше задачах), — то ясно, что равномерное распределение нагрузки по станкам является важнейшей частью составления расписания для таких задач. Отсюда вытекает

Задача о камнях с ограничениями (КО). Требуется распределить N камней по m кучам, минимизируя вес H наибольшей кучи, если для j -го камня заданы вес b_j и множество допустимых куч $J_j \in \{1, 2, \dots, m\}$.

По этой задаче очевидным образом строится потоковая модель с сетью G , состоящей из одного источника (s) , N внутренних вершин $\{v_1, \dots, v_N\}$ (связанных с источником s дугами (s, v_j) пропускной способности b_j , $j = \overline{1, N}$) и m стоков $\{w_1, \dots, w_m\}$. Наличие дуги (v_j, w_i) определяется соотношением $i \in J_j$. Требуется построить поток в сети G максимальной мощности, наиболее равномерный по стокам. Такая задача была эффективно решена в следующем смысле.

Теорема 2.3. Пусть $\mu: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ — функция, которая упорядочивает координаты вектора $x \in \mathbb{R}^m$ по невозрастанию; F_0 — множество макси-

мальных потоков в сети G ; $d_f \in \mathbb{R}^m$ — вектор значений потока f в стоках $\{w_1, \dots, w_m\}$. Тогда за $O(N^2 m^2)$ строится поток $f_0 \in F_0$, на котором достигается

$$\text{lex min}_{f \in F_0} \mu(d_f) \triangleq (\mu_1^0, \dots, \mu_m^0).$$

Ясно, что вес наибольшей кучи при оптимальном распределении камней в задаче КО не меньше величины μ_1^0 (которая характеризует наиболее загруженный сток в потоке f_0): $H(P_{\text{опт}}) \geq \mu_1^0$.

Найденный поток f_0 можно рассматривать как распределение камней по кучам, при котором каждый камень делится между несколькими кучами. Для получения искомого распределения необходимо сделать такое перераспределение потока (не слишком ухудшая его равномерность по стокам), при котором все части каждого камня попадают в одну кучу.

Лемма 2.8. Из любого потока $f \in F_0$ с трудоемкостью $O(Nm^2)$ строится такой поток $f' \in F_0$, что

(1) для любого $j = \overline{1, N}$ поток $f'(v_j, w_i)$ равен b_j для некоторого $i \in J_j$, и равен нулю на остальных дугах, выходящих из v_j ;

(2) $d_{f'}(i) - d_f(i) < h \triangleq \max_{j=\overline{1, N}} b_j$, $i = \overline{1, m}$.

Свойство (1) потока f' позволяет отождествлять его с распределением P' камней по кучам, а свойство (2) гарантирует, что вес максимальной кучи распределения P' , полученного применением леммы 2.8 к потоку f_0 , будет удовлетворять оценке

$$H(P') < \mu_1^0 + h \leq H(P_{\text{опт}}) + h.$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2.4. За $O(N^2 m^2)$ операций находится распределение P' камней по кучам в задаче КО, удовлетворяющее оценке

$$H(P') - H(P_{\text{опт}}) \leq h. \quad (2.19)$$

Доказательство можно найти в [16].

Замечание. Результат теоремы 2.4 хорошо согласуется с полученными выше теоремами для задач Джонсона, Акерса — Фридмана и задачи с маршрутами общего вида. В самом деле, если мы умеем решать задачу с оценкой вида

$$T(P) \leq H + g(m, w)h,$$

то для ее обобщения на случай множества допустимых исполнителей (J_j , $j = \overline{1, N}$) мы можем предложить алгоритм с оценкой

$$T(P) - T(P_{\text{опт}}) \leq (g(m, w) + 1)h,$$

для чего достаточно сначала распределить операции по исполнителям (равномерно), а затем решить задачу с фиксированными исполнителями.

Такой подход, однако, неприменим для более общей постановки, когда для каждой операции допустимые исполнители неэквивалентны. В терминах задачи КО это означает, что «вес камня зависит от того, в какую кучу он положен». Тогда любое распределение камней влияет не только на величину H , но и на h (вес максимального камня для данного распределения). Поэтому недостаточно только решить задачу КО (усложненную) с оценкой вида (2.19) (в терминах величины $\hat{h} \triangleq \max_{j=\overline{1, N}} \min_{i=\overline{1, m}} b_j^i$,

где b_j^i — вес j -го камня для i -й кучи). Нужно еще позаботиться о том, чтобы при распределении не образовалось слишком больших камней. Приемлемых подходов к решению этой задачи автору не известно.

§ 4. Нерешенные вопросы и задачи

I. Оценки и свойства функций Штейница. Задача КСВ.

1. Обобщить алгоритм с оценкой $f_{\mathfrak{B},s}(\pi) \leq \sigma(s, 2)$ на m -мерное пространство, что позволит улучшить оценку $f_{\mathfrak{B},s}(\pi) \leq m$, а, следовательно — оценку в задаче Джонсона: $T(P) \leq H + (m^2 - m)h$.

2. Доказать, что $\varphi_{l_2}(2) = \sqrt{5/4}$.

2а. Вычислить $\varphi_{l_p}(m)$.

3. Найти нижнюю оценку для $\inf_s \varphi_s(m)$, растущую неограниченно с ростом m .

3а. Доказать, что наилучшая нижняя оценка имеет порядок $O(\sqrt{m})$.

3б. Доказать, что $\inf_s \varphi_s(m) = \varphi_{l_2}(m)$.

4. Найти $\sup_s \varphi_s(m)$.

4а. Достигается ли $\sup$ на норме l_∞ ? l_1 ?

II. Задача НБВ.

5. Найти растущую нижнюю оценку для $\inf_s \bar{\theta}_s(m)$.

5а. Доказать, что $\inf_s \bar{\theta}_s(m) = \bar{\theta}_{l_2}(m) = \sqrt{m}/2$.

6. Доказать, что $\theta_s(m) = \bar{\theta}_s(m)$, т. е. «наихудшей» точкой в «наихудшем» параллелепипеде является его центр.

7. Доказать $\bar{\theta}_{l_\infty}(m) = \theta'(m)$, т. е. «наихудшим» в норме l_∞ является параллелепипед, построенный на векторах с экстремальными координатами $\{-1, 1\}$.

8. Верно ли, что $\bar{\theta}_{l_p}(m) = m^{1/p}/2$, $p \in [1, 2]$?

9. Верно ли для любой нормы s равенство $2\theta_s(2) = \delta(s, 2)$?

III. Задача эквидистанции; матрицы Адамара.

10. Верно ли, что задача эквидистанции решается с оценкой $\theta'(m) \leq O(\sqrt{m})$, близкой к нижней оценке (1.45), полученной на матрицах Адамара?

11. Доказать существование матриц Адамара A_n для $n = 4k^2$.

IV. Теория расписаний.

12. Обобщить алгоритм, построенный для задачи Джонсона ($m = 3$), на произвольное число станков.

12а. Найти наименьший интервал локализации оптимума для задачи Джонсона ($m = 4$).

12б. То же — для произвольного m .

13. Доказать, что оптимум задачи Акерса — Фридмана лежит в интервале $[H, H + O(m^3)]$.

13а. Построить эффективный алгоритм решения задачи Акерса — Фридмана со значением $T(P)$ из вышеуказанного интервала.

13б. Найти наименьший интервал локализации оптимума в задаче Акерса — Фридмана ($m = 3$).

13в. То же — для произвольного m .

ЛИТЕРАТУРА

1. Johnson S. M. Optimal Two and Three-Stage Production Schedules with Set-up Times Included // Nav. res. log. quart.— 1954.— V. 1, N 1.— P. 61—68.
2. Steinitz E. Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme // J. reine und angew. Math.— 1913.— Bd 143.— S. 128—175.
3. Bergström V. Ein neuer Beweis eines Satzes von E. Steinitz // Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität.— 1931.— Bd 8.— S. 148—152.
4. Кадец М. И. Об одном свойстве векторных ломаных в n -мерном пространстве // Успехи мат. наук.— 1953.— Т. 8, вып. 1.— С. 139—143.
5. Groß W. Bedingt konvergente Reihen // Monatsh. Math. und Physik.— 1917.— Bd 28.— S. 221—237.

6. Фонф В. П. Об условно сходящихся рядах в равномерно гладком пространстве Банаха // Мат. заметки.— 1972.— Т. 11, вып. 2.— С. 209—214.
7. Мак-Вильямс Ф. Дж., Слоэн Н. Дж. А. Теория кодов, исправляющих ошибки.— М.: Связь, 1979.— 744 с.
8. Севастьянов С. В. О связи задачи календарного распределения с одной задачей на единичном кубе // Дискретный анализ.— Новосибирск, 1980.— Вып. 35.— С. 93—103.
9. Wallis J. S. Williamson matrices of even order // Lecture Notes in Math.— 1974.— V. 403.— P. 132—142.
10. Wallis W. D. Combinatorics Room Squares, Sum-Free Sets, Hadamard Matrices Lecture Notes in Math.— 1972.— V. 292.— 508 p.
11. Бабушкин А. И., Башта А. Л., Белов И. С. Построение календарного плана для задачи встречных маршрутов // Кибернетика.— 1977.— № 4.— С. 130—135.
12. Глебов Н. И., Перепелица В. А. О верхней и нижней оценках для одной задачи теории расписаний // Исследования по кибернетике.— М.: Сов. радио, 1970.— С. 11—17.
13. Бабушкин А. И., Башта А. Л., Белов И. С. Построение календарного плана для многомаршрутной задачи трех станков // Автоматика и телемеханика.— 1976.— № 7.— С. 154—158.
14. Душин Б. И. Замечание к алгоритму в одномаршрутной задаче Джонсона // Кибернетика.— 1980.— № 2.— С. 129—131.
15. Севастьянов С. В. Некоторые обобщения задачи Джонсона // Управляемые системы.— Новосибирск, 1981.— Вып. 21.— С. 45—61.
16. Севастьянов С. В. Алгоритм с оценкой для задачи с маршрутами деталей произвольного вида и альтернативными исполнителями // Кибернетика.— 1986.— № 6.— С. 74—79.
17. Севастьянов С. В. Об асимптотическом подходе к некоторым задачам теории расписаний // 3 Всесоюз. конф. по проблемам теоретической кибернетики, Новосибирск, июнь 1974 г.: Тез. докл.— Новосибирск, 1974.— С. 67—69.
18. Севастьянов С. В. О приближенном решении задачи календарного распределения // Управляемые системы.— Новосибирск, 1980.— Вып. 20.— С. 49—63.
19. Эрдеш П., Спенсер Дж. Вероятностные методы в комбинаторике.— М.: Мир, 1976.— 136 с.
20. Convexity.— Providence: Amer. Math. Soc., 1963.— 516 p.— (Proc. Symposia pure math.; 7).
21. Taylor A. E. A Geometric theorem and its application to biorthogonal systems // Bull. Amer. Math. Soc.— 1947.— V. 53, N 6.— P. 614—616.
22. John F. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions // Studies and essays, presented to R. Courant on his 60-th Birthday.— N. Y., 1948.— P. 187—204.
23. Leichtweiss K. Zwei Extremalprobleme der Minkowski-Geometrie // Math. Z.— 1955.— Bd 62.— S. 37—49.
24. Севастьянов С. В. Оценки и свойства функций Штейница // Дискретный анализ.— Новосибирск, 1981.— Вып. 36.— С. 59—73.
25. Грюнбаум Б. Этюды по комбинаторной геометрии и теории выпуклых тел.— М.: Наука, 1971.— 96 с.