42. **Владимиров В. С.** Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1971.— 512 с.
43. **Михлин С. Г.** Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.— М.: Физматгиз, 1962.— 254 с.
44. **Ляпунов А. М.** Работы по теории потенциала.— М.; Л.: Гостехиздат, 1949.— 178 с.
45. **Мак-Коннел А. Дж.** Введение в тензорный анализ.— М.: Физматгиз, 1963.— 411 с.
46. **Смирнов В. И.** Курс высшей математики.— М.: Наука, 1974.— Т. 3, ч. 2.— 672 с.
47. **Пыхтеев Г. Н.** Точные методы вычисления интегралов типа Коши по разомкнутому контуру.— Apl. mat.— 1965.— Т. 10, № 4.— С. 351—372.
48. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи.— М.: Физматгиз, 1963.— 639 с.
49. **Дзядык В. К.** Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.— М.: Наука, 1977.— 222 с.
50. **Даугавет И. К.** Введение в теорию приближения функций.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1977.— 184 с.
51. **Люк Ю.** Специальные математические функции и их аппроксимации.— М.: Мир, 1980.— 608 с.
52. **Кушнель А. К.** Об интерполяции периодических функций // Укр. мат. журн.— 1986.— Т. 38, № 1.— С. 114—116.
53. **Гаркави А. Л.** О совместном приближении периодической функции и ее производных тригонометрическими полиномами // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1960.— Т. 24, № 1.— С. 103—128.
54. **Даугавет И. К.** Об одном свойстве вполне непрерывных операторов в пространстве C // Успехи мат. наук.— 1963.— Т. 18, вып. 5.— С. 157—158.
55. **Вайникко Г. М.** Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений.— Тарту: Изд-во Тарт. гос. ун-та, 1970.— 192 с.
56. **Бабенко К. И., Юрьев С. П.** Об одной задаче Гаусса.— М., 1977.— 69 с.— (Препр./ АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 63).
57. **Годунов С. К.** Решение систем линейных уравнений.— Новосибирск: Наука, 1980.— 177 с.
58. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— 5-е изд.— М.: Наука, 1971.— 1108 с.

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ АНАЛОГОВ ДИССИПАТИВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ

А. М. БЛОХИН

В настоящее время для нахождения приближенных решений уравнений математической физики часто используют конечно-разностные методы. Так, в задачах газовой динамики для расчета течений с ударными волнами широко применяются различные разностные схемы (см. [1]). При этом сплошь и рядом имеет место следующая парадоксальная ситуация: вычислитель находит приближенное «решение» краевой задачи, не зная, разрешима или нет эта математическая задача. Однако в рамках теории дифференциальных уравнений давно принято изучать одновременно исходную математическую задачу и ее конечно-разностный аналог. Здесь уместно вспомнить основополагающую работу [2], а также монографии [3, 4]. Очевидно, что этот подход в полном объеме удается реализовать в основном лишь для линейных краевых задач.

В основу конструирования и исследования разностных схем мы положим требование адекватности разностной модели исходной дифференциальной задаче. Под адекватностью будем понимать следующее: разностная модель строится так, чтобы с ее помощью можно было бы доказать теорему существования решения исходной дифференциальной задачи. Последнее обстоятельство представляется нам чрезвычайно важным фактом, поскольку при численных расчетах мы должны быть уверены в том, что приближенное решение действительно стремится в пределе к решению исходной дифференциальной задачи.

В качестве исходных математических моделей мы рассмотрим смешанные задачи для симметрических t-гиперболических систем с диссипативными граничными условиями (см. [3]) и для системы уравнений акустики с граничными условиями на ударной волне (см. [5]). Корректность этих задач изучалась в [3, 5] с помощью техники диссипативных интегралов энергии.

Разностные модели будем строить так, чтобы они допускали построение разностного аналога диссипативного интеграла энергии. Наличие такого аналога даст нам возможность получить энергетическую оценку (см. [6]), из которой будет следовать устойчивость предлагаемой разностной схемы. Это и будет означать адекватность разностной модели исходной дифференциальной задаче, поскольку при наличии энергетической оценки теорема существования достаточно гладкого решения доказывается стандартными рассуждениями (см. [3]).

Настоящая работа представляет краткий обзор результатов автора и его учеников по применению техники построения разностных аналогов диссипативных интегралов энергии для исследования устойчивости конкретных разностных схем (см. [7—13]).

Сформулируем исходные математические модели. Пусть $\Pi = \{(t, x, y) | 0 < t \leqslant T,\ x > 0,\ y \in \mathbf{R}\}$.

Задача I. *Найти решение U симметрической t-гиперболической системы*

$$AU_t + B\mathbf{U}_x + C\mathbf{U}_y = 0 \quad \text{в } \Pi, \tag{0.1}$$

удовлетворяющее граничным условиям при $x = 0$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{I}} = S\mathbf{U}^{\mathrm{II}} \tag{0.2}$$

и начальным данным при $t = 0$

$$\mathbf{U}(0, x, y) = \mathbf{U}_0(x, y). \tag{0.3}$$

Здесь A, B, C — квадратные (вещественные постоянные) матрицы порядка N, причем A, B имеют канонический вид (см. [3, § 11])

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{\mathrm{I}} & & 0 \\ & A^{\mathrm{II}} & \\ 0 & & A^{\mathrm{III}} \end{bmatrix}, \quad A^{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{N_0} \end{bmatrix},$$

$$A^{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} a_{N_0+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{N_0+N_1} \end{bmatrix}, \quad A^{\mathrm{III}} = \begin{bmatrix} a_{N_0+N_1+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_N \end{bmatrix},$$

где $a_i > 0$, $i = \overline{1, N}$, $N_0 + N_1 \leqslant N$,

$$B = \begin{bmatrix} I_{N_0} & & 0 \\ & -I_{N_1} & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix},$$

I_{N_0} — единичная матрица порядка N_0 и т. д.;

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}(t, x, y) = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N_0} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{U}^{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} u_{N_0+1} \\ \vdots \\ u_{N_0+N_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}^{\mathrm{III}} = \begin{bmatrix} u_{N_0+N_1+1} \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix},$$

$\mathbf{S}$ — прямоугольная (вещественная постоянная) матрица размеров $N_0 \times \times N_1$. Предположим, что граничные условия (0.2) строго диссипативны [3], т. е.

$$-(B\mathbf{U},\ \mathbf{U})|_{x=0} = \left(\mathbf{U}^{\mathrm{II}},\ [I_{N_1} - S^*S]\,\mathbf{U}^{\mathrm{II}}\right)\Big|_{x=0} \geqslant k_0\left(\mathbf{U}^{\mathrm{II}},\ \mathbf{U}^{\mathrm{II}}\right)|_{x=0}, \quad (0.4)$$

где $k_0 > 0$ — некоторая постоянная.

Замечание 0.1. При замене зависимых переменных

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{\mathrm{I}} \\ \mathbf{V}^{\mathrm{II}} \\ \mathbf{V}^{\mathrm{III}} \end{bmatrix} = D\mathbf{U},$$

$$D = \left[\begin{array}{c:c:c} D^{\mathrm{I}} & & 0 \\ \hdashline & D^{\mathrm{II}} & \\ \hdashline 0 & & I_{N-N_0-N_1} \end{array}\right], \quad D^{\mathrm{I}} = \begin{bmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{N_0} \end{bmatrix},$$

$$D^{\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} \mu_{N_0+1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_{N_0+N_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix},$$

где $\mu_i > 0$, $i = \overline{1,\ N_0 + N_1}$,— некоторые постоянные, система (0.1) примет вид

$$A\mathbf{V}_t + B\mathbf{V}_x + \tilde{C}\mathbf{V}_y = 0,$$

а граничные условия (0.2) —

$$\mathbf{V}^{\mathrm{I}} = \tilde{S}\mathbf{V}^{\mathrm{II}}. \quad (0.2')$$

Здесь $\tilde{C} = DCD^{-1}$, $\tilde{S} = D^{\mathrm{I}}S(D^{\mathrm{II}})^{-1}$. Отсюда видно, что выбирая специальным образом константы μ_i, $i = \overline{1,\ N_0 + N_1}$, мы можем добиться того, что матрица $\tilde{S}^*\tilde{S}$ будет достаточно мала по норме. В таком случае граничные условия (0.2′) будут строго диссипативны, т. е.

$$-(B\mathbf{V},\ \mathbf{V})|_{x=0} \geqslant \tilde{k}_0(\mathbf{V}^{\mathrm{II}},\ \mathbf{V}^{\mathrm{II}})|_{x=0}, \quad (0.4')$$

где константа $\tilde{k}_0 > 0$ близка к единице.

Следуя [3], можно записать на гладких решениях системы (0.1) тождество интеграла энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\mathbf{U},\ \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial x}(B\mathbf{U},\ \mathbf{U}) + \frac{\partial}{\partial y}(C\mathbf{U},\ \mathbf{U}) = 0, \quad (0.5)$$

с помощью которого в случае диссипативных граничных условий (0.2) для задачи (0.1) — (0.3) может быть получена априорная оценка

$$\mathcal{J}(t) \leqslant \mathcal{J}(0),\ 0 < t \leqslant T, \quad (0.6)$$

где

$$\mathcal{J}(t) = \iint\limits_{\mathbf{R}^2_+} (A\mathbf{U},\ \mathbf{U})\,dxdy,$$

$$\mathbf{R}^2_+ = \{(x,\ y)\,|\,x > 0,\ y \in \mathbf{R}\}.$$

Задача II. *Найти решение* $\mathbf{U}$ системы уравнений акустики

$$A\mathbf{U}_t + B\mathbf{U}_x + (C + \omega A)\mathbf{U}_y = 0 \quad \text{в } \Pi, \quad (0.7)$$

удовлетворяющее граничным условиям при $x = 0$

$$u + dp = 0,\ v_t + \omega v_y - \lambda p_y = 0 \quad (0.8)$$

и начальным данным при $t = 0$

$$\mathbf{U}(0,\ x,\ y) = \mathbf{U}_0(x,\ y). \quad (0.9)$$

Здесь

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & M^2 & 0\\ 0 & 0 & M^2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & M^2 & 0\\ 0 & 0 & M^2\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{U}=\begin{bmatrix}p\\ u\\ v\end{bmatrix},$$

$M(0<M<1)$, $\omega\geqslant 0$, d, λ — некоторые постоянные. Система (0.7) получена путем линеаризации уравнений газовой динамики относительно постоянного основного решения за косым скачком уплотнения и при определенном способе обезразмеривания линеаризованной системы, а граничные условия (0.8) — после линеаризации условий Рэнкина — Гюгонио на ударной волне; u, v, p — малые возмущения компонент вектора скорости, давления (см. [5]). Независимо от задачи (0.7) — (0.9) будем рассматривать следующие соотношения:

$$S_t+S_x+\omega S_y=0 \quad \text{в } \Pi,$$
$$S+p=0 \quad \text{при } x=0,$$
$$S(0,x,y)=S_0(x,y) \quad \text{при } t=0.$$

Здесь S — малое возмущение энтропии (см. [5]).

В [5] для доказательства корректности смешанной задачи (0.7) — (0.9) был построен диссипативный интеграл энергии, из чего следует, что $\mathbf{U}(t,x,y)\in W_2^2(\mathbf{R}_+^2)$ при всех t, $0\leqslant t\leqslant T$. Диссипативный интеграл энергии был построен при условии

$$m,\ n,\ (\gamma^2-4mn)>0, \tag{0.10}$$

где $\quad m=\beta d+\lambda M^2/\beta,\ n=-\lambda/\beta,\ \gamma=\beta/M^2,\ \beta^2=1-M^2.$

Замечание 0.2. В работах [7—9] рассматривались смешанные задачи для симметрических t-гиперболических систем с переменными коэффициентами и правыми частями. Переменность коэффициентов систем и наличие правых частей приводит только к техническим трудностям. Поэтому изложение материала в § 1, 2 дается на примере смешанных задач с постоянными коэффициентами.

Замечание 0.3. Разностная модель смешанной задачи II, описанная в § 3, неудобна для конкретных численных расчетов из-за весьма обременительных ограничений на шаги разностной сетки. Однако одномерный вариант этой разностной модели с успехом использовался автором при численном решении смешанных задач для квазилинейных уравнений газовой динамики (см. [12]).

§ 1. Устойчивость явных разностных схем для симметрических t-гиперболических систем

В области Π построим разностную сетку с шагами $\Delta t=\Delta$, $\Delta x=h_x$, $\Delta y=h_y$ $(T=\Delta m)$. Введем следующие обозначения: $\mathbf{U}_{ij}^k=\mathbf{U}=\mathbf{U}(k\Delta, ih_x, jh_y)$, $k=\overline{0,m}$; i, $|j|=0,1,\ldots$; $\varphi\mathbf{U}_{ij}^k=\mathbf{U}_{ij}^{k+1}=\widehat{\mathbf{U}}$, $\psi^{\pm1}\mathbf{U}_{ij}^k=\mathbf{U}_{i\pm1,j}^k$, $\theta^{\pm1}\mathbf{U}_{ij}^k=\mathbf{U}_{i,j\pm1}^k$, $\tau=\varphi-1$, $\xi=\psi-1$, $\eta=\theta-1$, $\overline{\xi}=1-\psi^{-1}$, $\overline{\eta}=1-\theta^{-1}$.

Действуя формально, можно получить для системы (0.1) точное разностное представление (подробности см. в [14])

$$A\widehat{\mathbf{U}}=\Big\{\alpha(1+\xi)^{-r_x\gamma\widetilde{B}}(1-\overline{\xi})^{r_x\overline{\gamma}\widetilde{B}}(1+\eta)^{-r_y l\widetilde{C}}(1-\overline{\eta})^{r_y\overline{l}\widetilde{C}}+$$
$$+\overline{\alpha}(1+\eta)^{-r_y\beta\widetilde{C}}(1-\overline{\eta})^{r_y\overline{\beta}\widetilde{C}}(1+\xi)^{-r_x\delta\widetilde{B}}(1-\overline{\xi})^{r_x\overline{\delta}\widetilde{B}}\Big\}A\mathbf{U}, \tag{1.1}$$

где $\alpha,\overline{\alpha},\gamma,\overline{\gamma},l,\overline{l},\beta,\overline{\beta},\delta,\overline{\delta}\geqslant 0$, $\alpha+\overline{\alpha}=1$, $\gamma+\overline{\gamma}=1$, $l+\overline{l}=1$, $\beta+\overline{\beta}=1$,

$\delta+\bar{\delta}=1$, $r_x=\Delta/h_x$, $r_y=\Delta/h_y$, $\widetilde{B}=BA^{-1}$, $\widetilde{C}=CA^{-1}$, причем

$$(1+\xi)^{-r_x\gamma\widetilde{B}}=1-r_x\gamma\widetilde{B}+\frac{r_x\gamma\widetilde{B}\left(r_x\gamma\widetilde{B}+I_N\right)}{2!}\xi^2-\ldots,$$

$$\left(1-\bar{\xi}\right)^{r_x\bar{\gamma}\widetilde{B}}=1-r_x\bar{\gamma}\widetilde{B}+\frac{r_x\bar{\gamma}\widetilde{B}\left(r_x\bar{\gamma}\widetilde{B}-I_N\right)}{2!}\bar{\xi}^2-\ldots$$

Если в (1.1) вместо бесконечной суммы возьмем конечную (к которой, возможно, добавлены и некоторые другие члены), то мы получим явную разностную схему, которую запишем в следующем каноническом виде:

$$A\tau\mathbf{U}+\sum_{|\mu|\geqslant 1}Q_\mu D^\mu\mathbf{U}=0. \tag{1.2}$$

Здесь Q_μ — матричные коэффициенты, элементы которых определяются через элементы матриц A, B, C и величины r_x, r_y; $\mu=(\nu,\sigma)$, $\nu=(\nu_1,\nu_2)$, $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2)$; $\nu_{1,2}$, $\sigma_{1,2}\geqslant 0$ — целые числа; $|\mu|=|\nu|+|\sigma|$, $|\nu|=\nu_1+\nu_2$, $|\sigma|=\sigma_1+\sigma_2$; $D^\mu=\xi^{\nu_1}\bar{\xi}^{\nu_2}\eta^{\sigma_1}\bar{\eta}^{\sigma_2}$. Разностная схема (1.2) должна аппроксимировать систему (0.1). Следовательно, сравнивая (1.2) и (1.1), получаем

$$Q_{1000}=r_x(\alpha\gamma+\bar{\alpha}\delta)B,\quad Q_{0100}=r_x(\alpha\bar{\gamma}+\overline{\alpha\delta})B,$$
$$Q_{0010}=r_y(\alpha l+\bar{\alpha}\beta)C,\quad Q_{0001}=r_y(\alpha\bar{l}+\overline{\alpha\beta})C.$$

Граничные условия (0.2) и начальные данные (0.3) аппроксимируются так:

$$(\mathbf{U}^{\mathrm{I}})^k_{0j}=S\left(\mathbf{U}^{\mathrm{II}}\right)^k_{0j},\ k=\overline{0,m},\ |j|=0,1,\ldots, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{U}^0_{ij}=\mathbf{U}_0(ih_x,\ jh_y),\ i,\ |j|=0,1,\ \ldots. \tag{1.4}$$

Ниже мы докажем устойчивость «модифицированной» явной разностной схемы, которая получается из (1.2) добавлением членов

$$A\tau\mathbf{U}+\sum_{|\mu|\geqslant 1}Q_\mu D^\mu\mathbf{U}-A\left(a\xi\bar{\xi}+b\eta\bar{\eta}\right)\mathbf{U}=0, \tag{1.2$'$}$$

где a, $b>0$ — некоторые постоянные.

Теорема 1.1. *Пусть*

1) $Q_{\nu 0}=(r_x)^{q_\nu}\widetilde{Q}_{\nu 0}$, $|\nu|\geqslant 2$, $q_\nu>0$ (т. е. $Q_{\nu 0}=0$ при $r_x=0$),

2) $Q_{0\sigma}=(r_y)^{g_\sigma}\widetilde{Q}_{0\sigma}$, $|\sigma|\geqslant 2$, $g_\sigma>0$ (т. е. $Q_{0\sigma}=0$ при $r_y=0$),

3) $Q_\mu=(r_x)^{p_\nu}(r_y)^{\rho_\sigma}\widetilde{Q}_\mu$, $|\mu|\geqslant 2$, $|\sigma|$, $|\nu|\geqslant 1$, p_ν, $\rho_\sigma\geqslant 0$, $p_\nu+\rho_\sigma>0$ (т. е. $Q_\mu=0$ при $r_x=0$ или при $r_y=0$),

4) $\widetilde{Q}_{\nu 0}=\left[\begin{array}{c|c}\widetilde{G}_{\nu 0}&0\\ \hline 0&0\end{array}\right]$, *где* $\widetilde{G}_{\nu 0}$ — *матрица порядка* N_0+N_1, $|\nu|\geqslant 2$.

Если
$$a,\ b<\frac{\min\limits_{i=\overline{1,N}}a_i}{4\lambda_0},\quad \lambda_0=\max_{i=\overline{1,N}}\left(a_i+\frac{1}{a_i}\right),$$
$$q_\nu\geqslant 1,\ |\nu|\geqslant 2;$$

то при определенных ограничениях (сверху) на величины r_x, r_y, *разностная схема* (1.2′) *устойчива в энергетической норме* $\sqrt{\mathcal{J}_k}$, *где*

$$\mathcal{J}_k=h_xh_y\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(\mathbf{U},A\mathbf{U})+h_xh_y\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{\left([\mathbf{U}^{\mathrm{II}}]^k_{0j},\ A^{\mathrm{II}}[\mathbf{U}^{\mathrm{II}}]^k_{0j}\right)+\right.$$
$$\left.+\left([\mathbf{U}^{\mathrm{III}}]^k_{0j},\ A^{\mathrm{III}}[\mathbf{U}^{\mathrm{III}}]^k_{0j}\right)\right\}.$$

Доказательство. Из (1.2′) вытекает

$$(\widehat{\mathbf{U}}, A\widehat{\mathbf{U}})=(\mathbf{U}, A\mathbf{U})-2(\mathbf{U}, \mathbf{E})+2(\mathbf{U}, A\mathbf{L})+(R\mathbf{V}, \mathbf{V}), \tag{1.5}$$

где

$$\mathbf{E}=\sum_{|\mu|\geqslant 1} Q_\mu D^\mu \mathbf{U}, \quad \mathbf{L}=\left(a\xi\bar{\xi}+b\eta\bar{\eta}\right)\mathbf{U},$$

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix} E \\ L \end{bmatrix}, \quad R=\left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & -I_N \\ \hline -I_N & A \end{array}\right].$$

Ниже мы будем часто пользоваться следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}
(2\mathbf{U}, B\xi\mathbf{U})=\xi(\mathbf{U}, B\mathbf{U})-(\xi\mathbf{U}, B\xi\mathbf{U}),\\
(2\mathbf{U}, B\bar{\xi}\mathbf{U})=\bar{\xi}(\mathbf{U}, B\mathbf{U})+(\bar{\xi}\mathbf{U}, B\bar{\xi}\mathbf{U}),\\
(2\mathbf{U}, A\xi\bar{\xi}\mathbf{U})=\xi\bar{\xi}(\mathbf{U}, A\mathbf{U})-(\xi\mathbf{U}, A\xi\mathbf{U})-(\bar{\xi}\mathbf{U}, A\bar{\xi}\mathbf{U}),\\
(\mathbf{U}, \xi\mathbf{W})=\xi(\mathbf{U}, \mathbf{W})-(\xi\mathbf{U}, \psi\mathbf{W}),\\
(\mathbf{U}, \bar{\xi}\mathbf{W})=\bar{\xi}(\mathbf{U}, \mathbf{W})-(\bar{\xi}\mathbf{U}, \psi^{-1}\mathbf{W}).
\end{gathered} \tag{1.6}$$

С учетом (1.6) перепишем формы $2(\mathbf{U}, A\mathbf{L})$, $-2(\mathbf{U}, \mathbf{E})$:

$$\begin{gathered}
2(\mathbf{U}, A\mathbf{L})=a\xi\bar{\xi}(\mathbf{U}, A\mathbf{U})+b\eta\bar{\eta}(\mathbf{U}, A\mathbf{U})-a\{(\xi\mathbf{U}, A\xi\mathbf{U})+\\
+(\bar{\xi}\mathbf{U}, A\bar{\xi}\mathbf{U})\}-b\{(\eta\mathbf{U}, A\eta\mathbf{U})+(\bar{\eta}\mathbf{U}, A\bar{\eta}\mathbf{U})\},
\end{gathered} \tag{1.7}$$

$$\begin{gathered}
-2(\mathbf{U}, \mathbf{E})=-2(\mathbf{U}, Q_{1000}\xi\mathbf{U})-2(\mathbf{U}, Q_{0100}\bar{\xi}\mathbf{U})-\\
-2(\mathbf{U}, Q_{0010}\eta\mathbf{U})-2(\mathbf{U}, Q_{0001}\bar{\eta}\mathbf{U})-\\
-2\Bigl(\mathbf{U}, \sum_{|\nu|\geqslant 2} Q_{\nu 0}\xi^{\nu_1}\bar{\xi}^{\nu_2}\mathbf{U}\Bigr)-2\Bigl(\mathbf{U}, \sum_{|\sigma|\geqslant 2} Q_{0\sigma}\eta^{\sigma_1}\bar{\eta}^{\sigma_2}\mathbf{U}\Bigr)-\\
-2\Bigl(\mathbf{U}, \sum_{\substack{|\mu|\geqslant 2\\ |\sigma|,|\nu|\geqslant 1}} Q_\mu D^\mu\mathbf{U}\Bigr)=-\xi(\mathbf{U}, Q_{1000}\mathbf{U})+\\
+(\xi\mathbf{U}, Q_{1000}\xi\mathbf{U})-\bar{\xi}(\mathbf{U}, Q_{0100}\mathbf{U})-\\
-(\bar{\xi}\mathbf{U}, Q_{0100}\bar{\xi}\mathbf{U})-\eta(\mathbf{U}, Q_{0010}\mathbf{U})+\\
+(\eta\mathbf{U}, Q_{0010}\eta\mathbf{U})-\bar{\eta}(\mathbf{U}, Q_{0001}\mathbf{U})-(\bar{\eta}\mathbf{U}, Q_{0001}\bar{\eta}\mathbf{U})-\\
-2\xi\Bigl(\mathbf{U}, \sum_{|\nu|\geqslant 2} Q_{\nu 0}\xi^{|\nu|-1}\psi^{-\nu_2}\mathbf{U}\Bigr]+2\Bigl(\xi\mathbf{U}, \sum_{|\nu|\geqslant 2} Q_{\nu 0}\xi^{|\nu|-1}\psi^{1-\nu_2}\mathbf{U}\Bigr)-\\
-2\eta\Bigl(\mathbf{U}, \sum_{|\sigma|\geqslant 2} Q_{0\sigma}\eta^{|\sigma|-1}\theta^{-\sigma_2}\mathbf{U}\Bigr)+2\Bigl(\eta\mathbf{U}, \sum_{|\sigma|\geqslant 2} Q_{0\sigma}\eta^{|\sigma|-1}\theta^{1-\sigma_2}\mathbf{U}\Bigr)-\\
-2\eta\Bigl(\mathbf{U}, \sum_{\substack{|\mu|\geqslant 2\\ |\sigma|,|\nu|\geqslant 1}} Q_\mu\xi^{|\nu|}\psi^{-\nu_2}\eta^{|\sigma|-1}\theta^{-\sigma_2}\mathbf{U}\Bigr)+\\
+2\Bigl(\eta\mathbf{U}, \sum_{\substack{|\mu|\geqslant 2\\ |\sigma|,|\nu|\geqslant 1}} Q_\mu\xi^{|\nu|}\psi^{-\nu_2}\eta^{|\sigma|-1}\theta^{1-\sigma_2}\mathbf{U}\Bigr).
\end{gathered} \tag{1.8}$$

При выводе формулы (1.8) мы воспользовались равенствами $\bar{\xi}=1-\psi^{-1}=(\psi-1)\psi^{-1}=\xi\psi^{-1}$, $\bar{\eta}=\eta\theta^{-1}$. Подставляя (1.7), (1.8) в (1.5), получим разностный аналог тождества интеграла энергии (0.5).

Рассмотрим теперь форму $(R\mathbf{V}, \mathbf{V})$. Справедлива оценка

$$(R\mathbf{V}, \mathbf{V})\leqslant\lambda_{\max}(R)\{\|\mathbf{E}\|^2+\|\mathbf{L}\|^2\}, \tag{1.9}$$

где $\lambda_{\max}(R)$ — максимальное собственное значение матрицы R, $\|\mathbf{E}\|^2=(\mathbf{E}, \mathbf{E})$ и т. д. Заметим, что характеристическое уравнение

$\det(R-\lambda I_{2N})=0$ матрицы R можно переписать так:

$$\det(R-\lambda I_{2N})=(-\lambda)^N\det\left(A+A^{-1}-\lambda I_N\right)=(-\lambda)^N\prod_{i=1}^{N}(a_i+1/a_i-\lambda)=0,$$

т. е. $\lambda_{\max}(R)=\max\limits_{i=\overline{1,N}}(a_i+1/a_i)=\lambda_0$. Далее,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{L}\|^2&\leqslant 2a^2\|\xi\bar{\xi}\mathbf{U}\|^2+2b^2\|\eta\bar{\eta}\mathbf{U}\|^2\leqslant\\&\leqslant 4a^2(\|\xi\mathbf{U}\|^2+\|\bar{\xi}\mathbf{U}\|^2)+4b^2(\|\eta\mathbf{U}\|^2+\|\bar{\eta}\mathbf{U}\|^2).\end{aligned}\tag{1.10}$$

При выводе (1.10) мы воспользовались неравенством треугольника и соотношением $\xi\bar{\xi}=\xi-\bar{\xi}$.

Оценим теперь величину $\|\mathbf{E}\|^2$. Имеем

$$\|\mathbf{E}\|^2=\Big\|\sum_{|\mu|\geqslant 1}Q_\mu D^\mu\mathbf{U}\Big\|^2\leqslant\Big(\sum_{|\mu|\geqslant 1}\|Q_\mu D^\mu\mathbf{U}\|\Big)^2\leqslant M\sum_{|\mu|\geqslant 1}\|Q_\mu D^\mu\mathbf{U}\|^2,$$

где M — число членов в сумме $\sum\limits_{|\mu|\geqslant 1}$. Сумму $\sum\limits_{|\mu|\geqslant 1}\|Q_\mu D^\mu\mathbf{U}\|^2$ разобьем на четыре:

$$\begin{aligned}\sum_{|\mu|\geqslant 1}\|Q_\mu D^\mu\mathbf{U}\|^2&=\sum_{\substack{|\mu|\geqslant 1\\ \nu_1\geqslant 1}}^{(\mathrm{I})}\|Q_\mu\xi^{|\nu|-1}\psi^{-\nu_2}\eta^{|\sigma|}\theta^{-\sigma_2}\xi\mathbf{U}\|^2+\\&+\sum_{\substack{|\mu|\geqslant 1\\ \nu_2\geqslant 1}}^{(\mathrm{II})}\|Q_\mu\xi^{|\nu|-1}\psi^{-\nu_2+1}\eta^{|\sigma|}\theta^{-\sigma_2}\bar{\xi}\mathbf{U}\|^2+\\&+\sum_{\substack{|\mu|\geqslant 1\\ \sigma_1\geqslant 1}}^{(\mathrm{III})}\|Q_\mu\xi^{|\nu|}\psi^{-\nu_2}\eta^{|\sigma|-1}\theta^{-\sigma_2}\eta\mathbf{U}\|^2+\sum_{\substack{|\mu|\geqslant 1\\ \sigma_2\geqslant 1}}^{(\mathrm{IV})}\|Q_\mu\xi^{|\nu|}\psi^{-\nu_2}\eta^{|\sigma|-1}\theta^{-\sigma_2+1}\bar{\eta}\mathbf{U}\|^2,\end{aligned}$$

причем

$$\begin{aligned}&\|Q_\mu\xi^{|\nu|-1}\psi^{-\nu_2}\eta^{|\sigma|}\theta^{-\sigma_2}\xi\mathbf{U}\|^2\leqslant\\&\leqslant|\nu|(|\sigma|+1)\sum_{n_1=0}^{|\nu|-1}\sum_{n_2=0}^{|\sigma|}\left(C_{|\nu|-1}^{n_1}C_{|\sigma|}^{n_2}\right)^2\psi^{\nu_1-1-n_1}\theta^{\sigma_1-n_2}(\xi\mathbf{U},\ Q_\mu^*Q_\mu\xi\mathbf{U}),\\&\|Q_\mu\xi^{|\nu|-1}\psi^{-\nu_2+1}\eta^{|\sigma|}\theta^{-\sigma_2}\bar{\xi}\mathbf{U}\|^2\leqslant\\&\leqslant|\nu|(|\sigma|+1)\sum_{n_1=0}^{|\nu|-1}\sum_{n_2=0}^{|\sigma|}\left(C_{|\nu|-1}^{n_1}C_{|\sigma|}^{n_2}\right)^2\psi^{\nu_1-n_1}\theta^{\sigma_1-n_2}(\bar{\xi}\mathbf{U},\ Q_\mu^*Q_\mu\bar{\xi}\mathbf{U}),\\&\|Q_\mu\xi^{|\nu|}\psi^{-\nu_2}\eta^{|\sigma|-1}\theta^{-\sigma_2}\eta\mathbf{U}\|^2\leqslant\\&\leqslant|\sigma|(|\nu|+1)\sum_{n_1=0}^{|\nu|}\sum_{n_2=0}^{|\sigma|-1}\left(C_{|\nu|}^{n_1}C_{|\sigma|-1}^{n_2}\right)^2\psi^{\nu_1-n_1}\theta^{\sigma_1-1-n_2}(\eta\mathbf{U},\ Q_\mu^*Q_\mu\eta\mathbf{U}),\\&\|Q_\mu\xi^{|\nu|}\psi^{-\nu_2}\eta^{|\sigma|-1}\theta^{-\sigma_2+1}\bar{\eta}\mathbf{U}\|^2\leqslant\\&\leqslant|\sigma|(|\nu|+1)\sum_{n_1=0}^{|\nu|}\sum_{n_2=0}^{|\sigma|-1}\left(C_{|\nu|}^{n_1}C_{|\sigma|-1}^{n_2}\right)^2\psi^{\nu_1-n_1}\theta^{\sigma_1-n_2}(\bar{\eta}\mathbf{U},\ Q_\mu^*Q_\mu\bar{\eta}\mathbf{U}).\end{aligned}\tag{1.11}$$

При выводе неравенств (1.11) мы воспользовались формулой бинома Ньютона

$$\begin{aligned}&\xi^{|\nu|-1}\psi^{-\nu_2}\eta^{|\sigma|}\theta^{-\sigma_2}=\psi^{-\nu_2}(\psi-1)^{|\nu|-1}\theta^{-\sigma_2}(\theta-1)^{|\sigma|}=\\&=\sum_{n_1=0}^{|\nu|-1}C_{|\nu|-1}^{n_1}(-1)^{n_1}\psi^{\nu_1-1-n_1}\sum_{n_2=0}^{|\sigma|}C_{|\sigma|}^{n_2}(-1)^{n_2}\theta^{\sigma_1-n_2}=\end{aligned}$$

$$= \sum_{n_1=0}^{|\nu|-1} \sum_{n_2=0}^{|\sigma|} (-1)^{n_1+n_2} C_{|\nu|-1}^{n_1} C_{|\sigma|}^{n_2} \psi^{\nu_1-1-n_1} \theta^{\sigma_1-n_2},$$

где $C_{|\sigma|}^{n_2} = \dfrac{|\sigma|!}{n_2!\,(|\sigma|-n_2)!}$ и т.д.

В силу предположений 1—3 теоремы 1.1

$$2\Big(\xi \mathbf{U}, \sum_{|\nu|\geqslant 2} Q_{\nu 0} \xi^{|\nu|-1} \psi^{1-\nu_2} \mathbf{U}\Big) =$$

$$= \sum_{|\nu|\geqslant 2} \sum_{n_1=0}^{|\nu|-2} 2 (r_x)^{q_\nu} (-1)^{n_1} C_{|\nu|-2}^{n_1} \Big(\xi \mathbf{U}, \widetilde{Q}_{\nu 0} \psi^{\nu_1-1-n_1} \xi \mathbf{U}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\nu|\geqslant 2} \sum_{n_1=0}^{|\nu|-2} (r_x)^{q_\nu} C_{|\nu|-2}^{n_1} \Big\{\|\xi \mathbf{U}\|^2 + \psi^{\nu_1-1-n_1} \big(\xi \mathbf{U}, \widetilde{Q}_{\nu 0}^{*} \widetilde{Q}_{\nu 0} \xi \mathbf{U}\big)\Big\},$$

$$2\Big(\eta \mathbf{U}, \sum_{|\sigma|\geqslant 2} Q_{0\sigma} \eta^{|\sigma|-1} \theta^{1-\sigma_2} \mathbf{U}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\sigma|\geqslant 2} \sum_{n_2=0}^{|\sigma|-2} (r_y)^{g_\sigma} C_{|\sigma|-2}^{n_2} \Big\{\|\eta \mathbf{U}\|^2 + \theta^{\sigma_1-1-n_2} \big(\eta \mathbf{U}, \widetilde{Q}_{0\sigma}^{*} \widetilde{Q}_{0\sigma} \eta \mathbf{U}\big)\Big\}, \tag{1.12}$$

$$2\Bigg(\eta \mathbf{U}, \sum_{\substack{|\mu|\geqslant 2\\ |\sigma|,|\nu|\geqslant 1}} Q_\mu \xi^{|\nu|} \psi^{-\nu_2} \eta^{|\sigma|-1} \theta^{1-\sigma_2} \mathbf{U}\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{|\mu|\geqslant 2\\ |\sigma|,|\nu|\geqslant 1}} \sum_{n_1=0}^{|\nu|-1} \sum_{n_2=0}^{|\sigma|-1} (r_x)^{p_\nu} (r_y)^{\rho_\sigma} C_{|\nu|-1}^{n_1} C_{|\sigma|-1}^{n_2} \Big\{\|\eta \mathbf{U}\|^2 +$$

$$+ \psi^{\nu_1-1-n_1} \theta^{\sigma_1-n_2} \big(\xi \mathbf{U}, \widetilde{Q}_\mu^{*} \widetilde{Q}_\mu \xi \mathbf{U}\big)\Big\}.$$

Умножим теперь обе части неравенства (1.5) на $h_x h_y$ и просуммируем полученные выражения по i от 0 до ∞ и по j от $-\infty$ до ∞. В силу (1.9)—(1.12)

$$\mathcal{F}_{k+1} \leqslant \mathcal{F}_k + h_x h_y \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Big\{ r_x \big(\mathbf{U}_{0j}^k, B \mathbf{U}_{0j}^k\big) + 2 \Big(\mathbf{U}_{0j}^k, \sum_{|\nu|\geqslant 2} Q_{\nu 0} \xi^{|\nu|-1} \psi^{-\nu_2} \mathbf{U}_{0j}^k\Big)\Big\} +$$

$$+ h_x h_y \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{(\xi \mathbf{U}, \widetilde{K}_1 \xi \mathbf{U}) + (\bar{\xi} \mathbf{U}, K_2 \bar{\xi} \mathbf{U}) + (\eta \mathbf{U}, K_3 \eta \mathbf{U}) + (\bar{\eta} \mathbf{U}, K_4 \bar{\eta} \mathbf{U})\}, \tag{1.13}$$

где

$$\mathcal{F}_k = h_x h_y \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\mathbf{U}, A\mathbf{U}),\ \widetilde{K}_1 = -aA + 4a^2 \lambda_0 I_N +$$

$$+ Q_{1000} + \lambda_0 M \sum_{\substack{|\mu|\geqslant 1\\ \nu_1\geqslant 1}}^{(\mathrm{II})} |\nu| (|\sigma| + 1) C_{2|\nu|-2}^{|\nu|-1} C_{2|\sigma|}^{|\sigma|} Q_\mu^{*} Q_\mu +$$

$$+ \sum_{|\nu|\geqslant 2} (r_x)^{q_\nu} 2^{|\nu|-2} \big(I_N + \widetilde{Q}_{\nu 0}^{*} \widetilde{Q}_{\nu 0}\big) +$$

$$+ \sum_{\substack{|\mu|\geqslant 2\\ |\sigma|,|\nu|\geqslant 1}} (r_x)^{p_\nu} (r_y)^{\rho_\sigma} 2^{|\mu|-2} \widetilde{Q}_\mu^{*} \widetilde{Q}_\mu,$$

$$K_2 = -aA + 4a^2 \lambda_0 I_N - Q_{0100} + \lambda_0 M \sum_{\substack{|\mu|\geqslant 1\\ \nu_2\geqslant 1}}^{(\mathrm{II})} |\nu| (|\sigma| + 1) C_{2|\nu|-2}^{|\nu|-1} C_{2|\sigma|}^{|\sigma|} Q_\mu^{*} Q_\mu,$$

$$K_3 = -bA + 4b^2\lambda_0 I_N + Q_{0010} + \lambda_0 M \sum_{\substack{|\mu|\geqslant 1\\ \sigma_1\geqslant 1}}^{(\mathrm{III})} |\sigma|(|\nu|+1)\left\{C_{2|\sigma|-2}^{|\sigma|-1}\left[C_{2|\nu|}^{|\nu|} + \sum_{n_1=\nu_1+1}^{|\nu|}(n_1-\nu_1)\left(C_{|\nu|}^{n_1}\right)^2\right]\right\} Q_\mu^* Q_\mu + \sum_{|\sigma|\geqslant 2}(r_y)^{g_\sigma} 2^{|\sigma|-2}\left(I_N + \tilde{Q}_{0\sigma}^*\tilde{Q}_{0\sigma}\right) + \left(\sum_{\substack{|\mu|\geqslant 2\\ |\sigma|,|\nu|\geqslant 1}} (r_x)^{p_\nu}(r_y)^{\rho_\sigma} 2^{|\mu|-2}\right) I_N,$$

$$K_4 = -bA + 4b^2\lambda_0 I_N - Q_{0001} + \lambda_0 M \sum_{\substack{|\mu|\geqslant 1\\ \sigma_2\geqslant 1}}^{(\mathrm{IV})} |\sigma|(|\nu|+1)\left\{C_{2|\sigma|-2}^{|\sigma|-1}\left[C_{2|\nu|}^{|\nu|} + \sum_{n_1=\nu_1+1}^{|\nu|}(n_1-\nu_1)\left(C_{|\nu|}^{n_1}\right)^2\right]\right\} Q_\mu^* Q_\mu.$$

При выводе неравенства (1.13) мы ввели так называемые «фиктивные» границы при $i=-1, -2, \ldots$, на которых

$$\mathbf{U}_{ij}^k = \mathbf{U}_{0j}^k \quad \text{при } i = -1, -2, \ldots .$$

Рассмотрим теперь форму

$$2\left(\mathbf{U}_{0j}^k, \sum_{|\nu|\geqslant 2} Q_{\nu 0}\xi^{|\nu|-1}\psi^{-\nu_2}\mathbf{U}_{0j}^k\right).$$

В силу предположения 4 теоремы 1.1

$$2\left(\mathbf{U}_{0j}^k, \sum_{|\nu|\geqslant 2} Q_{\nu 0}\xi^{|\nu|-1}\psi^{-\nu_2}\mathbf{U}_{0j}^k\right) \leqslant \sum_{|\nu|\geqslant 2}\sum_{n_1=0}^{|\nu|-2} C_{|\nu|-2}^{n_1}\left\{(r_x)^{\frac{3}{2}q_\nu}\|\breve{\mathbf{U}}_{0j}^k\|^2 + \psi^{\nu_1-2-n_1}(r_x)^{\frac{1}{2}q_\nu}\left(\xi\breve{\mathbf{U}}_{0j}^k, \tilde{G}_{\nu 0}^*\tilde{G}_{\nu 0}\xi\breve{\mathbf{U}}_{0j}^k\right)\right\}, \tag{1.14}$$

где $\breve{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix}\mathbf{U}^{\mathrm{I}}\\ \mathbf{U}^{\mathrm{II}}\end{bmatrix}$.

Используя диссипативность граничных условий, неравенства (0.4) и (1.14), перепишем еще раз (1.13):

$$\mathcal{F}_{k+1} \leqslant \mathcal{F}_k + h_x h_y \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{-r_x k_0\|(\mathbf{U}^{\mathrm{II}})_{0j}^k\|^2 + \left(\sum_{|\nu|\geqslant 2}(r_x)^{\frac{3}{2}q_\nu}2^{|\nu|-2}\right)\|\breve{\mathbf{U}}_{0j}^k\|^2\right\} + h_x h_y \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\{(\xi\mathbf{U}, K_1\xi\mathbf{U}) + (\bar{\xi}\mathbf{U}, K_2\bar{\xi}\mathbf{U}) + (\eta\mathbf{U}, K_3\eta\mathbf{U}) + (\bar{\eta}\mathbf{U}, K_4\bar{\eta}\mathbf{U})\}, \tag{1.13'}$$

где $K_1 = \tilde{K}_1 + \sum_{|\nu|\geqslant 2}(r_x)^{\frac{1}{2}q_\nu}2^{|\nu|-2}\tilde{Q}_{\nu 0}^*\tilde{Q}_{\nu 0}$. Пусть

$$a, b < \left\{\min_{i=\overline{1,N}} a_i\right\}\Big/ 4\lambda_0. \tag{1.15}$$

Тогда при определенных ограничениях (сверху) на величины r_x, r_y имеем $K_{1,2,3,4} \leqslant 0$. Следовательно, (1.13′) можно переписать так:

$$\mathcal{F}_{k+1} \leqslant \mathcal{F}_k + h_x h_y \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left\{-\left([\mathbf{U}^{\mathrm{II}}]_{0j}^k, \left([k_0 r_x - \lambda_1] I_{N_1} - \lambda_1 S^* S\right)[\mathbf{U}^{\mathrm{II}}]_{0j}^k\right)\right\}. \tag{1.13''}$$

Здесь $\lambda_1 = \sum_{|\nu|\geqslant 2} (r_x)^{\frac{3}{2}q_\nu} 2^{|\nu|-2}$. Введем в рассмотрение

$$\mathcal{J}_k = h_x h_y \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\mathrm{U}_x A\mathrm{U}) + h_x h_y \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{([\mathrm{U}^{\mathrm{II}}]_{0j}^k, A^{\mathrm{II}} [\mathrm{U}^{\mathrm{II}}]_{0j}^k) + \\ + ([\mathrm{U}^{\mathrm{III}}]_{0j}^k, A^{\mathrm{III}} [\mathrm{U}^{\mathrm{III}}]_{0j}^k)\}.$$

Из (1.13″) получаем (ср. с оценкой (0.6)), что

$$\mathcal{J}_{k+1} \leqslant \mathcal{J}_k, \tag{1.16}$$

если

$$(k_0 r_x - \lambda_1) I_{N_1} - (\lambda_1 + \lambda_2) S^* S \geqslant 0, \tag{1.17}$$

где $\lambda_2 = \max_{i=\overline{1,N}} a_i$. Неравенство (1.17) будет выполнено при

$$k_0 \geqslant \frac{2\lambda_1 + \lambda_2}{r_x + \lambda_1 + \lambda}, \tag{1.18}$$

$$\lambda_1 < r_x, \text{ т. е. } \sum_{|\nu|\geqslant 2} (r_x)^{\frac{3}{2}q_\nu - 1} 2^{|\nu|-2} < 1. \tag{1.19}$$

Если $q_\nu \geqslant 1$, $|\nu| \geqslant 2$, то при некоторых ограничениях (сверху) на r_x неравенство (1.19) выполнено, а, следовательно, в силу замечания 0.1 из введения выполнено (1.18). Неравенство (1.16) и означает устойчивость «модифицированной» разностной схемы (1.2′) в энергетической норме $\sqrt{\mathcal{J}_k}$.

В качестве важных примеров разностных схем вида (1.2′) можно рассмотреть модифицированную схему Мак-Кормака, описанную в [7], и разностную схему Русанова, устойчивость которой исследовалась в [8]. Мы остановимся на модифицированной схеме Мак-Кормака, которая записывается так:

1) предиктор

$$A\overline{\mathrm{U}} = A\mathrm{U} - r_x B\xi\mathrm{U} - r_y C\eta\mathrm{U}, \tag{1.20}$$

2) корректор

$$A\hat{\mathrm{U}} = \frac{1}{2}\{A\overline{\mathrm{U}} + A\mathrm{U} - r_x B\bar{\xi}\overline{\mathrm{U}} - r_y C\bar{\eta}\overline{\mathrm{U}}\} - \frac{1}{2}[r_x^2 BA^{-1}B\xi\bar{\xi} + \\ + r_x r_y BA^{-1}C\bar{\xi}\eta + r_x r_y CA^{-1}B\xi\bar{\eta} + r_y^2 CA^{-1}C\eta\bar{\eta}]\,\mathrm{U} + A(a\xi\bar{\xi} + b\eta\bar{\eta})\,\mathrm{U}. \tag{1.21}$$

Здесь $\overline{\mathrm{U}}$ — «промежуточное» значение вектора U. Исключая с помощью предиктора (1.20) вектор $\overline{\mathrm{U}}$ в корректоре (1.21), получим следующее выражение:

$$A\tau\mathrm{U} + \frac{r_x}{2} B(\xi + \bar{\xi})\,\mathrm{U} + \frac{r_y}{2} C(\eta + \bar{\eta})\,\mathrm{U} - A(a\xi\bar{\xi} + b\eta\eta)\,\mathrm{U} = 0,$$

т. е. $Q_{1000} = Q_{0100} = r_x B/2$, $Q_{0010} = Q_{0001} = r_y C/2$, $Q_\mu = 0$ при $|\mu| > 1$.

Используя специфический вид матричных коэффициентов Q_μ для модифицированной схемы Мак-Кормака, авторы работы [7] получили более точные оценки на величины a, b, r_x, r_y:

$$a, b < 1/4, \tag{1.22}$$

$$r_x \leqslant (\sqrt{a} - 2a)\nu_0, \quad r_y \leqslant (\sqrt{b} - 2b)\nu_0/\nu_c, \tag{1.23}$$

где $\nu_0 = \min_{i=\overline{1,N}} a_i$, $\nu_C = \max_{i=\overline{1,N}} |\lambda_i(C)|, \lambda_i(C)$, $i = \overline{1, N}$ — собственные числа матрицы C. Заметим, что условия (1.23) более обременительны, чем условия Куранта, Фридрихса и Леви (см. [2, 15]), которые в нашем случае записываются так: $r_x \leqslant \nu_0$, $r_y \leqslant \nu_0/\nu_c$. Однако условия (1.23) гарантируют устойчивость модифицированной разностной схемы Мак-Кормака (1.20)—(1.21) с учетом граничных условий (0.2).

§ 2. Построение некоторых устойчивых неявных разностных схем для смешанной задачи I

В добавление к § 1 введем разностные операторы $L_t=\alpha\varphi+\delta$, $L_x=(1+\psi)/2$, $L_y=(1+\theta)/2$, $\widehat{\tau}=L_x\tau$, $\widehat{\xi}=L_t\xi$, $\widehat{\eta}=L_tL_x\eta$, где α, $\delta\geqslant 0$ — некоторые константы, причем $\alpha+\delta=1$. Рассмотрим разностную модель смешанной задачи I

$$A\widehat{\tau}\mathbf{U}+r_xB\widehat{\xi}\mathbf{U}+r_yC\widehat{\eta}\mathbf{U}=0,\qquad k=\overline{0,\ m-1},\ i,\ |j|=0,1,\ldots, \tag{2.1}$$

$$(\mathbf{U}^{\mathrm{I}})^k_{0j}=S(\mathbf{U}^{\mathrm{II}})^k_{0j},\ k=\overline{0,m},\ |j|=0,1,\ldots, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{U}^0_{ij}=\mathbf{U}_0(ih_x,\ jh_y),\ i,\ |j|=0,1,\ldots. \tag{2.3}$$

Положим $N_0+N_1=N$ (см. введение).

Теорема 2.1. *Пусть* 1) $C>0$, 2) $\alpha>\delta$. *Если*

$$1-2(\delta/\alpha)^2\lambda_2/\nu_0\geqslant 0,\ \lambda_2=\max_{i=\overline{1,N}}a_i,\ \nu_0=\min_{i-\overline{1,N}}a_i,$$

$$r_x^2\geqslant\lambda_2^3/\alpha^2(\alpha-\delta)\nu_0,$$

$$r_xh_y/h_x\geqslant\lambda_2\widehat{r}_0^2/\alpha^2r_0,\ \widehat{r}_0=\lambda_{\max}(C),\ r_0=\lambda_{\min}(C),$$

то разностная схема (2.1) *устойчива в энергетической норме* $\sqrt{\mathcal{J}_k}$, *где*

$$\mathcal{J}_k=h_xh_y\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(\mathbf{U},A\mathbf{U})+\frac{1}{2}h_xh_y\sum_{j=-\infty}^{\infty}(\mathbf{U}^k_{0j},A\mathbf{U}^k_{0j}).$$

Доказательство. Ниже мы будем пользоваться следующими соотношениями, справедливость которых легко доказывается с помощью формул (1.6):

$$(2L_tL_x\mathbf{U},\ A\widehat{\tau}\mathbf{U})=\tau(L_x\mathbf{U},\ AL_x\mathbf{U})+(\alpha-\delta)(\widehat{\tau}\mathbf{U},\ A\widehat{\tau}\mathbf{U}),$$
$$(2L_tL_x\mathbf{U},\ B\widehat{\xi}\mathbf{U})=\xi(L_t\mathbf{U},\ BL_t\mathbf{U}),$$
$$(2L_tL_x\mathbf{U},\ C\widehat{\eta}\mathbf{U})=\overline{\eta}(L_tL_x\mathbf{U},\ CL_tL_x\mathbf{U})+(\widehat{\eta}\mathbf{U},\ C\widehat{\eta}\mathbf{U}). \tag{2.4}$$

Умножая систему (2.1) скалярно на $2L_tL_x\mathbf{U}$ и пользуясь (2.4), придем к разностному аналогу тождества интеграла энергии (0.5)

$$\tau(L_x\mathbf{U},\ AL_x\mathbf{U})+r_x\xi(L_t\mathbf{U},\ BL_t\mathbf{U})+r_y\overline{\eta}(L_tL_x\mathbf{U},\ CL_tL_x\mathbf{U})+$$
$$+(\alpha-\delta)(\widehat{\tau}\mathbf{U},\ A\widehat{\tau}\mathbf{U})+r_y(\widehat{\eta}\mathbf{U},\ C\widehat{\eta}\mathbf{U})=0. \tag{2.5}$$

В силу (2.5) и диссипативности граничных условий легко получаем

$$\widetilde{\mathcal{J}}_{k+1}-\widetilde{\mathcal{J}}_k+h_xh_y\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}[(\alpha-\delta)(\widehat{\tau}\mathbf{U},\ A\widehat{\tau}\mathbf{U})+r_y(\widehat{\eta}\mathbf{U},\ C\widehat{\eta}\mathbf{U})]\leqslant 0, \tag{2.6}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{J}}_k=h_xh_y\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(L_x\mathbf{U},\ AL_x\mathbf{U}).$$

Из (2.6) вытекает первый вариант энергетического неравенства, наличие которого дает основание утверждать устойчивость предлагаемой разностной схемы. В самом деле, поскольку $C>0$, $\alpha>\delta$, то из (2.6) следует неравенство $\widetilde{\mathcal{J}}_{k+1}\leqslant\widetilde{\mathcal{J}}_k$, которое и означает устойчивость разностной схемы (2.1) в энергетической норме $\sqrt{\widetilde{\mathcal{J}}_k}$.

Для вывода второго варианта энергетического неравенства более внимательно изучим агрегат $\widetilde{\mathcal{J}}_k$. Поскольку

$$\sum_{i=0}^{\infty}(L_x\mathrm{U}, AL_x\mathrm{U}) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\{(\mathrm{U}, A\mathrm{U}) + \psi(\mathrm{U}, A\mathrm{U})\} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(\mathrm{U}, A\psi\mathrm{U}) = \sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{U}, A\mathrm{U}) + \frac{3}{4}(\mathrm{U}_{0j}^k, A\mathrm{U}_{0j}^k) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\infty}(\mathrm{U}, A\xi\mathrm{U}) = \sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{U}, A\mathrm{U}) + \frac{3}{4}(\mathrm{U}_{0j}^k, A\mathrm{U}_{0j}^k) +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\{\xi(\mathrm{U}, A\mathrm{U}) - (\xi\mathrm{U}, A\xi\mathrm{U})\} = \sum_{i=1}^{\infty}(\mathrm{U}, A\mathrm{U}) +$$

$$+\frac{1}{2}(\mathrm{U}_{0j}^k, A\mathrm{U}_{0j}^k) - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty}(\xi\mathrm{U}, A\xi\mathrm{U}),$$

то

$$\widetilde{\mathcal{J}}_k = \mathcal{J}_k - \frac{h_xh_y}{4}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(\xi\mathrm{U}, B\xi\mathrm{U}), \tag{2.7}$$

где

$$\mathcal{J}_k = h_xh_y\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(\mathrm{U}, A\mathrm{U}) + \frac{h_xh_y}{2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(\mathrm{U}_{0j}^k, A\mathrm{U}_{0j}^k).$$

Ввиду (2.7) неравенство (2.6) перепишется так:

$$\mathcal{J}_{k+1} - \mathcal{J}_k + h_xh_y\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\Big\{(\alpha-\delta)(\widehat{\tau}\mathrm{U}, A\widehat{\tau}\mathrm{U}) + r_y'(\widehat{\eta}\mathrm{U}, C\widehat{\eta}\mathrm{U}) +$$

$$+\frac{1}{4}(\xi\mathrm{U}, A\xi\mathrm{U}) - \frac{1}{4}(\xi\widehat{\mathrm{U}}, A\xi\widehat{\mathrm{U}})\Big\} \leqslant 0. \tag{2.6'}$$

Заметим, что

$$\|\xi\widehat{\mathrm{U}}\|^2 = \left\|\frac{1}{\alpha}\widehat{\xi}\mathrm{U} - \frac{\delta}{\alpha}\xi\mathrm{U}\right\|^2 \leqslant \frac{1}{\alpha^2}(\|\widehat{\xi}\mathrm{U}\| + \delta\|\xi\mathrm{U}\|)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\alpha^2}\left(\|\widehat{\xi}\mathrm{U}\|^2 + \frac{\delta^2}{\nu_0}(\xi\mathrm{U}, A\xi\mathrm{U})\right).$$

Далее, поскольку

$$\widehat{\xi}\mathrm{U} = -\frac{1}{r_x}B^{-1}(A\widehat{\tau}\mathrm{U} + r_yC\widehat{\eta}\mathrm{U}), \quad \det B \neq 0,$$

то

$$\|\widehat{\xi}\mathrm{U}\| \leqslant \frac{\lambda_2}{r_x}\|\widehat{\tau}\mathrm{U}\| + \frac{r_y}{r_x}\widehat{r}_0\|\widehat{\eta}\mathrm{U}\|,$$

и поэтому

$$\|\widehat{\xi}\mathrm{U}\|^2 \leqslant 2\frac{\lambda_2^2}{r_x^2}\|\widehat{\tau}\mathrm{U}\|^2 + 2\left(\frac{r_y}{r_x}\widehat{r}_0\right)^2\|\widehat{\eta}\mathrm{U}\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{\lambda_2}{r_x}\right)^2\frac{1}{\nu_0}(\widehat{\tau}\mathrm{U}, A\widehat{\tau}\mathrm{U}) + 2\left(\frac{r_y}{r_x}\widehat{r}_0\right)^2\frac{1}{r_0}(\widehat{\eta}\mathrm{U}, C\widehat{\eta}\mathrm{U}).$$

Следовательно,

$$(\xi\widehat{\mathrm{U}}, A\xi\widehat{\mathrm{U}}) \leqslant \lambda_2\|\xi\widehat{\mathrm{U}}\|^2 \leqslant 2\frac{\lambda_2\delta^2}{\nu_0\alpha^2}(\xi\mathrm{U}, A\xi\mathrm{U}) + 2\frac{\lambda_2}{\alpha^2}\|\widehat{\xi}\mathrm{U}\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2\frac{\lambda_2}{\nu_0}(\xi\mathrm{U}, A\xi\mathrm{U}) + 4\frac{\lambda_2^3}{r_x^2\alpha^2\nu_0}(\widehat{\tau}\mathrm{U}, A\widehat{\tau}\mathrm{U}) + 4\frac{\lambda_2 r_y^2\widehat{r}_0^2}{r_0\alpha^2r_x^2}(\widehat{\eta}\mathrm{U}, C\widehat{\eta}\mathrm{U}).$$

Тогда, если

$$1-2\left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2\frac{\lambda_2}{\nu_0}\geqslant 0,\quad r_x^2\geqslant\frac{\lambda_2^3}{\alpha^2(\alpha-\delta)\nu_0},\quad r_x\frac{h_y}{h_x}\geqslant\frac{\lambda_2\widehat{r}_0^2}{\alpha^2 r_0},$$

то из (2.6′) получаем неравенство

$$\mathcal{J}_{k+1}\leqslant\mathcal{J}_k, \tag{2.8}$$

которое означает устойчивость разностной схемы (2.1) в энергетической норме $\sqrt{\mathcal{J}_k}$.

Мы довольно подробно выводили второй вариант энергетического неравенства потому, что в форме (2.8) такое неравенство удобно применять в теоретических исследованиях при доказательстве теоремы существования достаточно гладкого решения у смешанной задачи I. Заметим также, что при численной реализации схемы (2.1) надо выполнять только одномерные прогонки.

В заключение этого параграфа мы опишем еще один класс неявных разностных схем для смешанной задачи I, устойчивость которых может быть доказана с помощью техники диссипативных разностных интегралов энергии. Следуя идеям уже упоминавшейся работы [14], рассмотрим следующую разностную модель смешанной задачи I:

$$\widehat{L}\widehat{\mathbf{U}}=L\mathbf{U},\quad k=\overline{0, m-1},\quad i,\ |j|=0,1,\ldots, \tag{2.9}$$

$$(\mathbf{U}^{\mathrm{I}})_{0j}^k=S(\mathbf{U}^{\mathrm{II}})_{0j}^k,\quad k=\overline{0,m},\ |j|=0,1,\ldots, \tag{2.10}$$

$$\mathbf{U}_{ij}^0=\mathbf{U}_0(ih_x,jh_y),\ i,\ |j|=0,1,\ldots. \tag{2.11}$$

Здесь

$$\widehat{L}=A+\frac{1}{2}(\alpha_1A+r_yC)\eta+\frac{1}{2}(\alpha_2A+r_xB)\xi+$$
$$+\frac{1}{4}(\alpha_1I_N+r_yCA^{-1})(\alpha_2A+r_xB)\eta\xi,$$
$$L=A+\frac{1}{2}(\alpha_1A-r_yC)\overline{\eta}+\frac{1}{2}(\alpha_2A-r_xB)\overline{\xi}+$$
$$+\frac{1}{4}(\alpha_1I_N-r_yCA^{-1})(\alpha_2A-r_xB)\overline{\eta\xi},$$

α_1, α_2 — некоторые постоянные.

В факторизованной форме разностная схема (2.9) может быть переписана так:

$$\widetilde{L}_y\overline{\mathbf{U}}=L\mathbf{U},\quad \widetilde{L}_xA\widehat{\mathbf{U}}=\overline{\mathbf{U}}, \tag{2.9′}$$

где

$$\widetilde{L}_y=I_N+\frac{1}{2}(\alpha_1I_N+r_yCA^{-1})\eta,$$
$$\widetilde{L}_x=I_N+\frac{1}{2}(\alpha_2I_N+r_xBA^{-1})\xi,$$

$\overline{\mathbf{U}}$ — «промежуточное» значение вектора $\mathbf{U}$.

Теорема 2.2. *Если*

$$-\frac{2}{3}<\alpha_1<0,\ -\frac{2}{5}<\alpha_2<0,$$

то при некоторых ограничениях на величины r_x, r_y разностная схема (2.9) *устойчива в энергетической норме $\sqrt{\mathcal{J}_k}$, где*

$$\mathcal{J}_k=h_xh_y\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(A\mathbf{U},\mathbf{U})+h_xh_y(1-\alpha_2/2)\sum_{j=-\infty}^{\infty}(A\mathbf{U}_{0j}^k,\mathbf{U}_{0j}^k).$$

Доказательство. Из (2.9) следует

$$(\widehat{L}\widehat{\mathbf{U}},\ A^{-1}\widehat{L}\widehat{\mathbf{U}})=(L\mathbf{U},\ A^{-1}L\mathbf{U}), \tag{2.12}$$

причем

$$(\widehat{L}\widehat{\mathbf{U}},\ A^{-1}\widehat{L}\widehat{\mathbf{U}})=(A\widehat{\mathbf{U}},\ \widehat{\mathbf{U}})+([\alpha_1A+r_yC]\,\eta\widehat{\mathbf{U}},\ \widehat{\mathbf{U}})+([\alpha_2A+r_xB]\,\xi\widehat{\mathbf{U}},\ \widehat{\mathbf{U}})+$$
$$+([(\alpha_1A+r_yC)B_1]\eta\xi\mathbf{U},\ \mathbf{U})+(A\mathbf{K}_1,\ \mathbf{K}_1),$$
$$(L\mathbf{U},\ A^{-1}L\mathbf{U})=(A\mathbf{U},\ \mathbf{U})+([\alpha_1A-r_yC]\,\bar{\eta}\mathbf{U},\ \mathbf{U})+([\alpha_2A-r_xB]\,\bar{\xi}\mathbf{U},\ \mathbf{U})+$$
$$+([(\alpha_1A-r_yC)B_2]\,\bar{\eta}\bar{\xi}\mathbf{U},\ \mathbf{U})+(A\mathbf{K}_2,\ \mathbf{K}_2),$$
$$\mathbf{K}_1=\{C_1\eta+B_1\xi+C_1B_1\eta\xi\}\widehat{\mathbf{U}},$$
$$\mathbf{K}_2=\{C_2\bar{\eta}+B_2\bar{\xi}+C_2B_2\overline{\eta\xi}\}\mathbf{U},$$
$$C_1=\frac{1}{2}(\alpha_1I_N+r_yA^{-1}C),\ C_2=\frac{1}{2}(\alpha_1I_N-r_yA^{-1}C),$$
$$B_1=\frac{1}{2}(\alpha_2I_N+r_xA^{-1}B),\ B_2=\frac{1}{2}(\alpha_2I_N-r_xA^{-1}B).$$

Используя соотношения (1.6), перепишем форму $(\widehat{L}\widehat{\mathbf{U}},\ A^{-1}\widehat{L}\widehat{\mathbf{U}})$:

$$(\widehat{L}\widehat{\mathbf{U}},A^{-1}\widehat{L}\widehat{\mathbf{U}})=(A\widehat{\mathbf{U}},\widehat{\mathbf{U}})+\frac{1}{2}\eta([\alpha_1A+r_yC]\,\widehat{\mathbf{U}},\widehat{\mathbf{U}})+$$
$$+\frac{1}{2}\xi([\alpha_2A+r_xB]\,\widehat{\mathbf{U}},\widehat{\mathbf{U}})+\eta([(\alpha_1A+r_yC)B_1]\,\xi\widehat{\mathbf{U}}\widehat{\mathbf{U}})-$$
$$-\frac{1}{2}([\alpha_1A+r_yC]\,\eta\widehat{\mathbf{U}},\eta\widehat{\mathbf{U}})-\frac{1}{2}([\alpha_2A+r_xB_1]\,\xi\widehat{\mathbf{U}},\xi\widehat{\mathbf{U}})-$$
$$-2(B_1\theta\xi\widehat{\mathbf{U}},AC_1\eta\widehat{\mathbf{U}})+(A\mathbf{K}_1,\mathbf{K}_1)\geqslant(A\widehat{\mathbf{U}},\widehat{\mathbf{U}})+$$
$$+\frac{1}{2}\eta([\alpha_1A+r_yC]\,\widehat{\mathbf{U}},\widehat{\mathbf{U}})+\frac{1}{2}\xi([\alpha_2A+r_xB]\,\widehat{\mathbf{U}},\widehat{\mathbf{U}})+$$
$$+\eta([(\alpha_1A+r_yC)B_1]\,\xi\widehat{\mathbf{U}},\widehat{\mathbf{U}})-([AC_1+C_1^*AC_1]\,\eta\widehat{\mathbf{U}},\eta\widehat{\mathbf{U}})-$$
$$-(AB_1\xi\widehat{\mathbf{U}},\xi\widehat{\mathbf{U}})-(B_1^*AB_1\theta\xi\widehat{\mathbf{U}},\theta\xi\widehat{\mathbf{U}}). \tag{2.13}$$

При выводе (2.13) мы воспользовались очевидными неравенствами

$$2(\mathbf{U},\ A\mathbf{V})\leqslant2|(\mathbf{U},\ A\mathbf{V})|\leqslant2(\mathbf{U},\ A\mathbf{U})^{1/2}\times$$
$$\times(\mathbf{V},\ A\mathbf{V})^{1/2}\leqslant(\mathbf{U},\ A\mathbf{U})+(\mathbf{V},\ A\mathbf{V}), \tag{2.14}$$

где $A>0$ — симметрическая матрица.

Аналогично, применяя (2.14) и неравенство треугольника, выводим, что

$$(L\mathbf{U},A^{-1}L\mathbf{U})=(A\mathbf{U},\mathbf{U})+\frac{1}{2}\bar{\eta}([\alpha_1A-r_yC]\,\mathbf{U},\mathbf{U})+$$
$$+\frac{1}{2}\bar{\xi}([\alpha_2A-r_xB]\,\mathbf{U},\mathbf{U})+\bar{\eta}([(\alpha_1A-r_yC)B_2]\,\bar{\xi}\mathbf{U},\mathbf{U})+$$
$$+\bar{\eta}(B_2^*AC_2B_2\bar{\xi}\mathbf{U},\bar{\xi}\mathbf{U})+([AB_2+B_2^*AB_2]\,\bar{\xi}\mathbf{U},\bar{\xi}\mathbf{U})+$$
$$+([AC_2+C_2^*AC_2]\,\bar{\eta}\mathbf{U},\bar{\eta}\mathbf{U})+([B_2^*C_2^*AC_2B_2+B_2^*AC_2B_2]\,\overline{\eta\xi}\mathbf{U},\overline{\eta\xi}\mathbf{U})+$$
$$+2([C_2^*AC_2B_2+C_2^*AB_2]\,\overline{\eta\xi}\mathbf{U},\bar{\eta}\mathbf{U})\leqslant(A\mathbf{U},\mathbf{U})+\frac{1}{2}\bar{\eta}([\alpha_1A-r_yC]\,\mathbf{U},\mathbf{U})+$$
$$+\frac{1}{2}\bar{\xi}([\alpha_2A-r_xB]\,\mathbf{U},\mathbf{U})+\bar{\eta}([(\alpha_1A-r_yC)B_2]\,\bar{\xi}\mathbf{U},\mathbf{U})+$$
$$+\bar{\eta}(B_2^*AC_2B_2\bar{\xi}\mathbf{U},\ \bar{\xi}\mathbf{U})+([AB_2+3B_2^*AB_2]\,\bar{\xi}\mathbf{U},\bar{\xi}\mathbf{U})+$$
$$+([AC_2+3C_2^*AC_2]\,\bar{\eta}\mathbf{U},\bar{\eta}\mathbf{U})+([2B_2^*C_2^*AC_2B_2+B_2^*AC_2B_2]\,\overline{\eta\xi}\mathbf{U},\overline{\eta\xi}\mathbf{U})+$$
$$+2(B_2^*AB_2\theta^{-1}\bar{\xi}\mathbf{U},\theta^{-1}\bar{\xi}\mathbf{U}). \tag{2.15}$$

Умножим теперь обе части равенства (2.12) на h_xh_y и просуммируем полученное выражение по i от 0 до ∞ и по j от $-\infty$ до ∞. В силу

(2.13), (2.15) получим в итоге

$$\mathcal{J}_{k+1} - \mathcal{J}_k - h_x h_y \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{(AB_1\mathbf{U}_{0j}^{k+1}, \mathbf{U}_{0j}^{k+1}) - (AB_2\mathbf{U}_{0j}^k, \mathbf{U}_{0j}^k)\} +$$
$$+ h_x h_y \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{(Q_1\eta\widehat{\mathbf{U}}, \eta\widehat{\mathbf{U}}) + (Q_2\xi\widehat{\mathbf{U}}, \bar{\xi}\mathbf{U}) + (Q_3\bar{\eta}\mathbf{U}, \bar{\eta}\mathbf{U}) +$$
$$+ (Q_4\bar{\xi}\mathbf{U}, \bar{\xi}\mathbf{U}) + (Q_5\overline{\eta\xi}\mathbf{U}, \overline{\eta\xi}\mathbf{U})\} \leqslant 0, \tag{2.16}$$

где

$$\mathcal{J}_k = h_x h_y \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (A\mathbf{U}, \mathbf{U}),$$
$$Q_1 = -AC_1 - C_1^* A C_1,\ Q_2 = -AB_1 - B_1^* A B_1,\ Q_3 = -AC_2 - 3C_2^* A C_2,$$
$$Q_4 = -AB_2 - 5B_2^* A B_2,\ Q_5 = -B_2^* A C_2 B_2 - 2B_2^* C_2^* A C_2 B_2.$$

При выводе неравенства (2.16) мы ввели в рассмотрение так называемую «фиктивную» границу при $i = -1$, на которой $\mathbf{U}_{-1,j}^k = \mathbf{U}_{0j}^k$. Пусть $-2/3 < \alpha_1 < 0$, $-2/5 < \alpha_2 < 0$. Тогда $Q_{1,2,3,4,5} \geqslant 0$ при некоторых ограничениях (сверху) на величины r_x, r_y. Ввиду диссипативности граничных условий из (2.16) окончательно получаем

$$\mathcal{J}_{k+1} \leqslant \mathcal{J}_k, \tag{2.17}$$

где

$$\mathcal{J}_k = h_x h_y \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (A\mathbf{U}, \mathbf{U}) + h_x h_y \left(1 - \frac{1}{2}\alpha_2\right) \sum_{j=-\infty}^{\infty} (A\mathbf{U}_{0j}^k, \mathbf{U}_{0j}^k).$$

Неравенство (2.17) и означает устойчивость разностной схемы (2.9) в энергетической норме $\sqrt{\mathcal{J}_k}$.

Замечание 2.1. В теоремах 1.1, 2.1, 2.2 указаны достаточные условия устойчивости рассматриваемых разностных схем. Понятно, что для получения необходимых условий исследования должны быть дополнены, например, спектральным анализом краевых разностных задач.

§ 3. Построение и исследование разностной модели для смешанной задачи II

Рассмотрим разностные операторы

$$\tau = \frac{\varphi - 1}{\Delta},\quad \xi = \frac{\psi - 1}{h_x},\quad \eta = \frac{1 - \theta^{-1}}{h_y},$$
$$\widehat{\xi} = L_t\xi,\quad \widehat{\eta} = L_t\eta,\quad \widehat{\tau} = \tau + w\widehat{\eta}$$

и разностную модель смешанной задачи II

$$A\widehat{\tau}\mathbf{U} + B\widehat{\xi}\mathbf{U} + C\widehat{\eta}\mathbf{U} = 0,\quad k = \overline{0, m-1},\quad i, |j| = 0, 1, \ldots, \tag{3.1}$$
$$\left.\begin{aligned} &u_{0j}^k + d \cdot p_{0j}^k = 0,\quad k = \overline{0, m},\quad |j| = 0, 1, \ldots, \\ &\widehat{\tau} v_{0j}^k - \lambda\widehat{\eta} p_{0j}^k = 0,\quad k = \overline{0, m-1},\quad |j| = 0, 1, \ldots, \end{aligned}\right. \tag{3.2}$$
$$\mathbf{U}_{ij}^0 = \mathbf{U}_0(ih_x, jh_y),\quad i,\ |j| = 0, 1, \ldots. \tag{3.3}$$

Как и для смешанной задачи II (см. [5]), для разностной модели (3.1) — (3.3) справедливы следующие факты.

1. Умножим скалярную систему (1.1) на вектор

$$\begin{bmatrix} M^2(\hat{\tau}+\hat{\xi}) \\ -\hat{\xi} \\ -\hat{\eta} \end{bmatrix},$$

элементами которого являются разностные операторы. После несложных выкладок получаем, что первая компонента вектора $\mathbf{U}-p$ удовлетворяет разностному волновому уравнению

$$\{M^2(\hat{\tau}+\hat{\xi})^2-\hat{\xi}^2-\hat{\eta}^2\}p=0. \tag{3.4}$$

2. Умножим скалярно систему (3.1) на вектор

$$\begin{bmatrix} M^2\hat{\tau} \\ -\hat{\tau} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Полученное выражение при $i=0$ принимает вид

$$\{M^2(1+d)\hat{\tau}^2-\beta^2\hat{\tau}\hat{\xi}+M^2\lambda\hat{\eta}^2\}\,p_{0j}^k=0. \tag{3.5}$$

Следовательно, вместо (3.1)—(3.3) можно рассматривать другую задачу

$$\begin{gathered}\{M^2(\hat{\tau}+\hat{\xi})^2-\hat{\xi}^2-\hat{\eta}^2\}p=0,\quad k=\overline{0,m-2},\quad i,\ |j|=0,1,\ldots,\\ M^2(\hat{\tau}+\hat{\xi})u=-\hat{\xi}p,\quad M^2(\hat{\tau}+\hat{\xi})v=-\hat{\eta}p,\\ k=\overline{0,\,m-1},\quad i,\ |j|=0,1,\ldots;\end{gathered} \tag{3.6}$$

$$\begin{gathered}\{M^2(1+d)\hat{\tau}^2-\beta^2\hat{\tau}\hat{\xi}+M^2\lambda\hat{\eta}^2\}\,p_{0j}^k=0,\quad k=\overline{0,m-2},\\ u_{0j}^k=-d\cdot p_{0j}^k,\quad k=\overline{0,m},\\ \hat{\tau}v_{0j}^k=\lambda\hat{\eta}p_{0j}^k,\quad k=\overline{0,m-1};\ |j|=0,1,\ldots;\end{gathered} \tag{3.7}$$

$$\begin{gathered}\mathbf{U}_{ij}^0=\mathbf{U}_0(ih_x,\,jh_y),\\ (\hat{\tau}+\hat{\xi})\,p_{ij}^0+\hat{\xi}u_{ij}^0+\hat{\eta}v_{ij}^0=0,\ i,|j|=0,1,\ldots.\end{gathered} \tag{3.8}$$

Покажем, что при определенных условиях задачи (3.1)—(3.3) и (3.6)—(3.8) эквивалентны. В самом деле, из (3.6)

$$\{M^2(\hat{\tau}+\hat{\xi})^2-\hat{\xi}^2-\hat{\eta}^2\}p=M^2(\hat{\tau}+\hat{\xi})\mathscr{P}=0,$$

где $\mathscr{P}=\mathscr{P}_{ij}^k=(\hat{\tau}+\hat{\xi})\,p_{ij}^k+\hat{\xi}u_{ij}^k+\hat{\eta}v_{ij}^k$. Аналогично, из (1.7)

$$\{M^2(1+d)\hat{\tau}^2-\beta^2\hat{\tau}\hat{\xi}+M^2\lambda\hat{\eta}^2\}\,p_{0j}^k=M^2\hat{\tau}\mathscr{P}_{0j}^k=0.$$

Следовательно, для $\mathscr{P}$ мы получили задачу

$$(\hat{\tau}+\hat{\xi})\mathscr{P}=0,\quad k=\overline{0,m-2},\quad i,\ |j|=0,1,\ldots, \tag{3.9}$$

$$\hat{\tau}\mathscr{P}_{0j}^k=0,\quad k=\overline{0,m-2},\ |j|=0,1,\ldots, \tag{3.10}$$

$$\mathscr{P}_{ij}^0=0,\ i,\ |j|=0,1,\ldots. \tag{3.11}$$

Из (3.10) следует

$$\hat{\tau}\mathscr{P}_{0j}^k=\tau\mathscr{P}_{0j}^k+\omega\eta L_t\mathscr{P}_{0j}^k=0.$$

Умножая это соотношение на $2L_t\mathscr{P}_{0j}^k$ и пользуясь соответствующими формулами из § 1—2, в итоге получаем

$$\tau\left(\mathscr{P}_{0j}^k\right)^2+\omega\eta\left(L_t\mathscr{P}_{0j}^k\right)^2+(\alpha-\delta)\,\Delta\left(\tau\mathscr{P}_{0j}^k\right)^2+\omega h_y\left(\eta L_t\mathscr{P}_{0j}^k\right)^2=0,$$

откуда вытекает, что при $\alpha \geqslant \delta$, $\omega \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$\|\mathscr{P}^{k+1}\|_0^2 \leqslant \|\mathscr{P}^k\|_0^2,$$

где $\|\mathscr{P}^k\|_0^2 = h_y \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} (\mathscr{P}_{0j}^k)^2$. Поскольку в силу (3.11) $\|\mathscr{P}^0\|_0^2 = 0$, то $\mathscr{P}_{0j}^k = 0$, $k = \overline{0, m-1}$, $|j| = 0, 1, \ldots$. Аналогично, переписывая соотношение (3.9) в виде

$$\tau\mathscr{P} + \xi(L_t\mathscr{P}) + \omega\eta(L_t\mathscr{P}) = 0$$

и умножая его на $2L_t\mathscr{P}$, придем к следующему выражению:

$$\tau(\mathscr{P})^2 + \xi(L_t\mathscr{P})^2 + \omega\eta(L_t\mathscr{P})^2 + [(\alpha-\delta)\Delta - h_x](\tau\mathscr{P})^2 -$$
$$- 2\omega h_x(\tau\mathscr{P})(\eta L_t\mathscr{P}) + \omega(h_y - \omega h_x)(\eta L_t\mathscr{P})^2 = 0.$$

Отсюда при условии

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \omega < h_y/h_x, \quad \alpha > \delta, \\ r_x \geqslant 1/\{(1-\omega h_x/h_y)(\alpha-\delta)\}, \end{gathered} \tag{3.12}$$

получаем

$$\|\mathscr{P}^{k+1}\|^2 \leqslant \|\mathscr{P}^k\|^2,$$

где $\|\mathscr{P}^k\|^2 = h_x h_y \sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} (\mathscr{P}_{ij}^k)^2$. Поскольку в силу (3.11), $\|\mathscr{P}^0\|^2 = 0$, то $\mathscr{P}_{ij}^k = 0$, $k = \overline{0, m-1}$, $i, |j| = 0, 1, \ldots$. Таким образом, первое уравнение системы (3.1) выполнено всюду. Значит, задачи (3.1)—(3.3) и (3.6)—(3.8) эквивалентны.

3. Если p удовлетворяет уравнению (3.4), то вектор

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \widetilde{L}_1 \\ L_2 \\ \widetilde{L}_3 \end{bmatrix} p$$

удовлетворяет системе (см. [5])

$$\{D\widehat{\tau} - Q\widehat{\xi} - R\widehat{\eta}\}\mathbf{Y} = 0. \tag{3.13}$$

Здесь $\widetilde{L}_1 = ML_1$, $L_1 = \widehat{\tau}/\beta^2$, $L_2 = \widehat{\xi} - M^2\widehat{\tau}/\beta^2$, $\widetilde{L}_3 = L_3/\beta$, $L_3 = \widehat{\eta}$, $D = (E + M^2Q)/\beta^2$,

$$E = M\begin{bmatrix} 1 & m_1 & 0 \\ m_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} m_1 & 1 & 0 \\ 1 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & -m_1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & m_1 \\ 1 & m_1 & 0 \end{bmatrix},$$

m_1 — некоторая константа.

Заметим, что $D > 0$, если $|m_1| < 1$. Из двух систем вида (3.13) составим расширенную систему

$$\left\{\begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}\widehat{\tau} - \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}\widehat{\xi} - \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}\widehat{\eta}\right\}\mathbf{X} = 0, \tag{3.14}$$

где

$$\mathbf{X} = \{\widetilde{L}_1L_+, L_2L_+, \widetilde{L}_3L_+, \widetilde{L}_1L_-, L_2L_-, \widetilde{L}_3L_-\}',$$
$$L_\pm = (L_\pm)_{ij}^k = \left(a_1L_1 + a_2^\pm L_2\right)p_{ij}^k, \quad a_1 = m/M,$$
$$a_2^\pm = -n/a_\pm, \quad a_\pm = M\left(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4mn}\right)/2m.$$

При этом условие (3.5) можно переписать так:

$$\{\widetilde{L}_1 - a_\pm L_2\}(L_\pm)_{0j}^k = 0, \quad k = \overline{0, m-2}, \quad |j| = 0, 1, \ldots \tag{3.5'}$$

Пусть $m_1 = a_+/(1 + a_+^2)$ для первой системы и $m_1 = a_-/(1 + a_-^2)$ для второй. Тогда граничные условия (3.5′) диссипативны для системы (3.14), поскольку

$$\left(\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \mathbf{X}_{0j}^k, \mathbf{X}_{0j}^k\right) = a_+ (a_1 L_1 L_2 p_{0j}^k + a_2^+ L_2^2 p_{0j}^k)^2 + a_+ (a_1 L_1 \widetilde{L}_3 p_{0j}^k + $$
$$+ a_2^+ L_2 \widetilde{L}_3 p_{0j}^k)^2/(1 + a_+^2) + a_- (a_1 L_1 L_2 p_{0j}^k + a_2^- L_2^2 p_{0j}^k)^2 +$$
$$+ a_- (a_1 L_1 \widetilde{L}_3 p_{0j}^k + a_2^- L_2 \widetilde{L}_3 p_{0j}^k)^2/(1 + a_-^2) > 0. \qquad (3.15)$$

Наконец заметим, что агрегат $\Omega = \Omega_{ij}^k = \widehat{\eta} u_{ij}^k - \widehat{\xi} v_{ij}^k$ (разностный аналог вихря скорости) в силу (3.1) удовлетворяет следующему соотношению:

$$(\widehat{\tau} + \widehat{\xi})\Omega = 0,\ k = \overline{0,\ m-2},\ i,\ |j| = 0,\ 1,\ \ldots \qquad (3.16)$$

Удобно пользоваться вытекающей из (3.1) системой

$$M\tau\mathbf{Z} + B_1 \xi (L_t \mathbf{Z}) + C_1 \eta (L_t \mathbf{Z}) + \mathbf{\Gamma} = 0, \qquad (3.1')$$

где

$$\mathbf{Z} = T_0 A^{\frac{1}{2}} \mathbf{U},\quad T_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad B_1 = \begin{bmatrix} M & - \\ -1 & M \end{bmatrix} \times I_2,$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \omega M - 1 & 0 \\ 0 & \omega M + 1 \end{bmatrix} \times I_2,\quad \mathbf{\Gamma} = \frac{M}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Omega;$$

$A \times B$ — кронекерово произведение квадратных матриц A и B. Умножая систему (3.1′) скалярно на $2L_t\mathbf{Z}$, получим

$$M\tau(\|\mathbf{Z}\|^2) + \xi(B_1 L_t \mathbf{Z},\ L_t \mathbf{Z}) + \eta(C_1 L_t \mathbf{Z},\ L_t \mathbf{Z}) + (\tau\mathbf{Z},\ [(\alpha - \delta)\Delta M I_4 -$$
$$- h_x M^2 B_1^{-1}]\,\tau\mathbf{Z}) + (\widehat{\eta}\mathbf{Z},\ [h_y C_1 - h_x C_1 B_1^{-1} C_1]\,\widehat{\eta}\mathbf{Z}) - 2(\tau\mathbf{Z},\ h_x M B_1^{-1} C_1 \widehat{\eta}\mathbf{Z}) +$$
$$+ 2(L_t\mathbf{Z},\ \mathbf{\Gamma}) - 2h_x M (B_1^{-1}\tau\mathbf{Z},\ \mathbf{\Gamma}) - 2h_x (B_1^{-1} C_1 \widehat{\eta}\mathbf{Z},\ \mathbf{\Gamma}) - h_x (B_1^{-1}\mathbf{\Gamma},\ \mathbf{\Gamma}) = 0.$$

Аналогично, умножая (3.16) на $2L_t\Omega$, имеем $\tau(\Omega^2) + \xi((L_t\Omega)^2) + \omega\eta((L_t\Omega)^2) + [(\alpha - \delta)\Delta - h_x](\tau\Omega)^2 - 2\omega h_x(\tau\Omega)(\widehat{\eta}\Omega) + \omega(h_y - \omega h_x) \times (\widehat{\eta}\Omega)^2 = 0$. Учитывая эти соотношения, без труда выводим, что если

$$\alpha - \delta > 0,\ 1 < \omega M < M h_y/h_x,\ r_x > 1/\{(\alpha - \delta)(1 - \omega h_x/h_y)\}, \qquad (3.17)$$

то

$$\tau\{\|\mathbf{Z}^k\|^2 + \|\Omega^k\|^2\} - h_y \sum_{j=-\infty}^{\infty} \{(B_1 L_t \mathbf{Z}_{0j}^k,\ L_t \mathbf{Z}_{0j}^k) + (L_t \Omega_{0j}^k)^2\} \leqslant$$
$$\leqslant M_1 \{\|\mathbf{Z}^k\|^2 + \|\mathbf{Z}^{k+1}\|^2 + \|\Omega^k\|^2\}, \qquad (3.18)$$

где

$$\|\mathbf{Z}^k\|^2 = M h_x h_y \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \|\mathbf{Z}\|^2,$$

$$\|\Omega^k\|^2 = h_x h_y \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Omega^2,$$

$M_1 > 0$ — некоторая константа. Заметим также, что в силу (3.2)

$$(B_1 L_t \mathbf{Z}_{0j}^k,\ L_t \mathbf{Z}_{0j}^k) = M(1 + M^2 d^2 - 2d)(L_t p_{0j}^k)^2 + M^3 (L_t v_{0j}^k)^2,$$
$$(L_t \Omega_{0j}^k)^2 = (\lambda + 1/M^2 - d)^2 (L_t \widehat{\eta} p_{0j}^k)^2.$$

Из третьего уравнения системы (3.1) следует

$$(\widehat{\tau}+\widehat{\xi})\widehat{\tau}v=-\widehat{\tau}\widehat{\eta}p/M^2.$$

Отсюда получаем оценку

$$\tau\left(\|\widehat{\tau}v^k\|^2\right)-h_y\sum_{j=-\infty}^{\infty}(L_t\widehat{\tau}v_{0j}^k)^2\leqslant M_2\{\|\widehat{\tau}v^k\|^2+\|\widehat{\tau}v^{k+1}\|^2+\|\widehat{\tau}\widehat{\eta}p^k\|^2\},\tag{3.19}$$

где

$$\|\widehat{\tau}v^k\|^2=h_xh_y\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}(\widehat{\tau}v_{ij}^k)^2,\quad (L_t\widehat{\tau}v_{0j}^k)^2=\lambda^2(L_t\widehat{\eta}p_{0j}^k)^2,$$

$M_2>0$ — некоторая константа.

Перейдем теперь к рассмотрению задачи (3.14), (3.5′). Вместо системы (3.14) будем пользоваться

$$\left\{\begin{bmatrix}D_1 & 0\\ 0 & D_1\end{bmatrix}\widehat{\tau}-\begin{bmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & Q_1\end{bmatrix}\widehat{\xi}-\begin{bmatrix}R_1 & 0\\ 0 & R_1\end{bmatrix}\widehat{\eta}\right\}\mathbf{W}=0.\tag{3.14′}$$

Здесь

$$D_1=\frac{M}{\beta^2}\begin{bmatrix}1 & -M\\ -M & 1\end{bmatrix}\times H,\quad Q_1=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\times H,$$

$$R_1=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\times H,\quad H=\begin{bmatrix}1 & -m_1\\ -m_1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{W}=\mathbf{W}_{ij}^k=\begin{bmatrix}T_0 & 0\\ 0 & T_0\end{bmatrix}\mathbf{X}.$$

Заметим, что $H>0$ при $|m_1|<1$. Так как матрицы коэффициентов системы (3.14′) клеточно-диагональны, то все рассуждения будем проводить для системы вида

$$\{D_1\tau-Q_1L_t\xi+(\omega D_1-R_1)L_t\eta\}\widehat{\mathbf{W}}=0,$$

где $\widehat{\mathbf{W}}$ — вектор, составленный из первых (или последних) четырех компонент вектора $\mathbf{W}$. Умножая эту систему скалярно на $2L_t\widehat{\mathbf{W}}$, получим

$$\tau(D_1\widehat{\mathbf{W}},\widehat{\mathbf{W}})-\xi(Q_1L_t\widehat{\mathbf{W}},L_t\widehat{\mathbf{W}})+\eta([\omega D_1-R_1]L_t\widehat{\mathbf{W}},L_t\widehat{\mathbf{W}})+$$
$$+\{(\tau\widehat{\mathbf{W}},[(\alpha-\delta)\Delta D_1+h_xD_1Q_1^{-1}D_1]\tau\widehat{\mathbf{W}})+(\eta\widehat{\mathbf{W}},[(\omega D_1-R_1)h_y+$$
$$+h_x(\omega D_1-R_1)Q_1^{-1}(\omega D_1-R_1)]\eta\widehat{\mathbf{W}})+2h_x(\tau\widehat{\mathbf{W}},D_1Q_1^{-1}(\omega D_1-R_1)\eta\widehat{\mathbf{W}})\}=0.$$

Исследуя знак квадратичной формы, стоящей в фигурных скобках, убеждаемся, что при выполнении условий (3.17) эта форма положительно определена. Учитывая этот факт, получаем неравенство

$$\tau\left(\|\mathbf{W}^k\|_{D_1}^2\right)+h_y\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\begin{bmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & Q_1\end{bmatrix}L_t\mathbf{W}_{0j}^k,L_t\mathbf{W}_{0j}^k\right)\leqslant 0,$$

где

$$\|\mathbf{W}^k\|_{D_1}=h_xh_y\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\begin{bmatrix}D_1 & 0\\ 0 & D_1\end{bmatrix}\mathbf{W}_{ij}^k,\mathbf{W}_{ij}^k\right)=$$
$$=h_xh_y\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(\begin{bmatrix}D & 0\\ 0 & D\end{bmatrix}\mathbf{X}_{ij}^k,\mathbf{X}_{ij}^k\right)=\|\mathbf{X}^k\|_D^2.$$

Поскольку в силу (3.15)

$$\left(\begin{bmatrix}Q_1 & 0\\ 0 & Q_1\end{bmatrix}L_t\mathbf{W}_{0j}^k,L_t\mathbf{W}_{0j}^k\right)=\left(\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & Q\end{bmatrix}L_t\mathbf{X}_{0j}^k,L_t\mathbf{X}_{0j}^k\right)>0,$$

то окончательно имеем оценку

$$\|\mathbf{X}^{k+1}\|_D^2 \leqslant \|\mathbf{X}^k\|_D^2. \tag{3.20}$$

Так как

$$L_1L_2p = (L_1L_+ - L_1L_-)/(a_2^+ - a_2^-), \quad L_1^2p = (L_1L_+ - a_2^+L_1L_2p)/a_1,$$
$$L_2^2p = (L_2L_+ - L_2L_-)/(a_2^+ - a_2^-), \quad \widetilde{L}_3^2p = M^2L_1^2p - L_2^2p,$$
$$L_2\widetilde{L}_3p = (\widetilde{L}_3L_+ - \widetilde{L}_3L_-)/(a_2^+ - a_2^-), \quad L_1\widetilde{L}_3p = (\widetilde{L}_3L_+ - a_2^+L_2\widetilde{L}_3p)/a_1,$$

то с помощью (3.20) можно оценить все агрегаты $\widehat{\tau}^2p$, $\widehat{\tau}\widehat{\xi}p$, $\widehat{\tau}\widehat{\eta}p$, $\widehat{\xi}^2p$, $\widehat{\xi}\widehat{\eta}p$, $\widehat{\eta}^2p$. Наконец, выпишем следующие очевидные соотношения:

$$\begin{gathered}
\tau p - \xi(L_tp) + \omega\eta(L_tp) - \widehat{\tau}p + \widehat{\xi}p = 0,\\
\tau(\widehat{\tau}p) - \xi(L_t\widehat{\tau}p) + \omega\eta(L_t\widehat{\tau}p) - \widehat{\tau}^2p + \widehat{\tau}\widehat{\xi}p = 0,\\
\tau(\widehat{\xi}p) - \xi(L_t\widehat{\xi}p) + \omega\eta(L_t\widehat{\xi}p) - \widehat{\tau}\widehat{\xi}p + \widehat{\xi}^2p = 0,\\
\tau(\widehat{\eta}p) - \xi(L_t\widehat{\eta}p) + \omega\eta(L_t\widehat{\eta}p) - \widehat{\tau}\widehat{\eta}p + \widehat{\eta}\widehat{\xi}p = 0,\\
\tau v - \xi(L_tv) + \omega\eta(L_tv) - 2\widehat{\tau}v - \widehat{\eta}p/M^2 = 0.
\end{gathered} \tag{3.21}$$

Введем в рассмотрение агрегат

$$\widetilde{\mathcal{J}}_k = \varepsilon_1\{\|\mathbf{Z}^k\|^2 + \|\Omega^k\|^2 + \|\widehat{\tau}v\|^2\} + \|\mathbf{X}^k\|_D^2 + \|p^k\|^2 + \|\widehat{\tau}p^k\|^2 + \|\widehat{\xi}p^k\|^2 + \\ + \|\widehat{\eta}p^k\|^2 + \|v^k\|^2,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — некоторая константа. Из (3.8) — (3.21) следует

$$\widetilde{\mathcal{J}}_{k+1} - \widetilde{\mathcal{J}}_k \leqslant K_2\Delta(\mathcal{J}_k + \mathcal{J}_{k+1}), \tag{3.22}$$

где

$$\mathcal{J}_k = \|\mathbf{U}^k\|^2 + \|\Omega^k\|^2 + \|\widehat{\tau}v^k\|^2 + \|\widehat{\tau}p^k\|^2 + \|\widehat{\xi}p^k\|^2 + \|\widehat{\eta}p^k\|^2 + \|\widehat{\tau}^2p^k\|^2 + \\ + \|\widehat{\tau}\widehat{\xi}p^k\|^2 + \|\widehat{\tau}\widehat{\eta}p^k\|^2 + \|\widehat{\xi}^2p^k\|^2 + \|\widehat{\xi}\widehat{\eta}p^k\|^2 + \|\widehat{\eta}^2p^k\|^2,$$

$$\|\mathbf{U}^k\|^2 = h_xh_y\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\|\mathbf{U}\|^2,$$

$K_2 > 0$ — некоторая константа. Согласно лемме [6, с. 147], из (3.22) вытекает оценка

$$\mathcal{J}_k \leqslant \mathrm{const}\,\mathcal{J}_0, \quad k = \overline{1,\ m-2}, \tag{3.23}$$

наличие которой позволяет говорить об устойчивости предлагаемой разностной схемы. Достаточные условия устойчивости этой схемы сформулированы в виде неравенств (3.17).

Замечание 3.1. Можно получить (см. [5]) более тонкую оценку

$$\mathcal{J}_k \leqslant \mathrm{const}\,\mathcal{J}_0, \tag{3.24}$$

где

$$\mathcal{J}_k = \|\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{\tau}\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{\xi}\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{\eta}\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{\tau}^2\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{\tau}\widehat{\xi}\mathbf{U}^k\|^2 + \\ + \|\widehat{\tau}\widehat{\eta}\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{\xi}^2\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{\xi}\widehat{\eta}\mathbf{U}^k\|^2 + \|\widehat{\eta}^2\mathbf{U}^k\|^2,$$

$$\|\widehat{\tau}\mathbf{U}^k\|^2 = h_xh_y\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{i=\infty}^{\infty}\|\widehat{\tau}\mathbf{U}\|^2 \quad \text{и т. д.}$$

Оценка (3.24) имеет место и в том случае, когда в агрегат $\mathcal{J}_k$ включены также квадраты норм разностных отношений третьего порядка, т. е. $\|\widehat{\tau}^3\mathbf{U}^k\|^2$, $\|\widehat{\xi}^3\mathbf{U}^k\|^2$, $\|\widehat{\eta}^3\mathbf{U}^k\|^2$ и т. д.

З а м е ч а н и е 3.2. Задачу для S (см. введение) в разностном виде запишем так:

$$(\hat{\tau}+\tilde{\xi})S=0,\ k=\overline{0,\ m-1},\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ |j|=0,\ 1,\ \ldots,$$
$$S_{0j}^k=-p_{0j}^k,\quad k=\overline{0,m},\quad |j|=0,1,\ \ldots,$$
$$S_{ij}^0=S_0(ih_x,\ jh_y),\ i,\ |j|=0,\ 1,\ \ldots,$$

где $\tilde{\xi}=L_t\bar{\xi}$, $\bar{\xi}=(1-\psi^{-1})/h_x$. Умножая первое уравнение на $2L_tS$, после несложных выкладок получаем неравенство

$$\tau\|S^k\|_1^2-h_y\sum_{j=-\infty}^{\infty}(L_tS_{0j}^k)^2\leqslant 0,$$

где $\|S^k\|_1^2=h_xh_y\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}S^2$, $(L_tS_{0j}^k)^2=(L_tp_{0j}^k)$. При выводе этого неравенства новых ограничений на Δ, h_y, h_x, ω, α, δ не потребовалось. Оценка (3.23) будет справедлива, если вместо $\mathcal{J}_k$ рассматривать $\mathcal{J}_k+\|S^k\|_1^2$.

§ 4. Существование достаточно гладкого решения смешанной задачи II

Рассмотрим теперь вопрос о том, как применить оценку (3.24) для доказательства существования достаточно гладкого решения смешанной задачи II. Здесь мы используем способ, подробно описанный в монографии [3, § 17—20]. Однако для применения его к смешанной задаче II и ее разностной модели (3.1)—(3.3) мы должны оценить $\mathcal{J}_0$ через начальные данные, а для этого следует более тщательно изучить разностную модель (3.1)—(3.3). Предположим, что начальные данные $\mathbf{U}(x,\ y)$ обращаются в нуль при $|y|\geqslant Y/2$ и во всех точках $(x,\ y)$ таких, что либо $x\geqslant X$, либо $0\leqslant x\leqslant\sigma<X$. Здесь σ, X, Y — некоторые константы. После несложных преобразований систему (3.1) можно переписать в виде

$$\mathbf{V}_{i+1,\,j}=H\mathbf{V}_{ij}+\mathbf{F}_{ij},\tag{3.1''}$$

где
$$\mathbf{V}_{ij}=L_t\mathbf{U}/\alpha,\ \ H=I_3-\frac{\varkappa}{\alpha r_x}B^{-1}A-\frac{r_y}{r_x}B^{-1}C,$$
$$\mathbf{F}_{ij}=\frac{r_y}{r_x}B^{-1}(C+\omega A)\,\mathbf{V}_{i,j-1}+\frac{1}{\alpha^2 r_x}B^{-1}A\mathbf{U},\ \ \varkappa=1+\omega\alpha r_y.$$

Граничные условия (3.2) перепишутся так:

$$S\mathbf{V}_{0j}=S_1\mathbf{V}_{0,j-1}+S_2\mathbf{U}_{0j}^k,\tag{3.2'}$$

где
$$S=\begin{bmatrix} d & 1 & 0\\ -\lambda\alpha r_y & 0 & \varkappa\end{bmatrix},\quad S_1=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ -\lambda\alpha r_y & 0 & \omega\alpha r_y\end{bmatrix},\quad S_2=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/\alpha\end{bmatrix}.$$

Будем предполагать, что $\mathbf{V}_{ij}=0$, $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, при достаточно больших по модулю отрицательных j. Найдем единственное ограниченное решение задачи (3.1″), (3.2′) (считая, что $\mathbf{V}_{i,\,j-1}$, $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, уже найдены). Матрицу H представим в виде

$$H=\hat{T}^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_3 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1\end{bmatrix}\hat{T},$$

где

$$\widehat{T}=\begin{bmatrix} M^2(\varkappa+l) & M^2(\varkappa-l) & 0 \\ -M^2(\varkappa+l/M^2) & -M^2(\varkappa-l/M^2) & \alpha r_y \\ -\alpha r_y\beta^2 & -\alpha r_y\beta^2 & \varkappa \end{bmatrix},$$

$$l=[M^2\varkappa^2-(\alpha r_y\beta)^2]^{1/2},$$

$$\widehat{T}^{-1}=\frac{1}{\widehat{d}}\begin{bmatrix} l(\varkappa-l) & -M^2\varkappa(\varkappa-l) & +M^2\alpha r_y(\varkappa-l) \\ l(\varkappa+l) & M^2\varkappa(\varkappa+l) & -M^2\alpha r_y(\varkappa+l) \\ 2lr_y\beta^2 l & 2\alpha r_y\beta^2 l & 2M^2\varkappa\beta^2 l \end{bmatrix},$$

$\widehat{d}=2M^2\beta^2 l[\varkappa^2+(\alpha r_y)^2]$, $\lambda_1=(\alpha r_x-\varkappa)/\alpha r_x$, $\lambda_2=\lambda_1+(\varkappa-l)/\alpha r_x\beta^2$, $\lambda_3=\lambda_1+(\varkappa+l)/\alpha r_x\beta^2$. Легко показать, что если выполнены условия (3.17), то $\lambda_3>1>\lambda_2>\lambda_1>0$. Матрицу Грина G_i, удовлетворяющую соотношениям

$$G_{i+1}=HG_i \qquad \text{при } i\leqslant -1,$$
$$G_1=HG_0+I_3,\ G_{i+1}=HG_i \text{ при } i\geqslant 1,$$

возьмем в виде

$$G_i=\begin{cases} -\widehat{T}^{-1}\begin{bmatrix}\lambda_3^{i-1} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\widehat{T} & \text{при} \quad i\leqslant 0,\\ \widehat{T}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^{i-1} & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1^{i-1}\end{bmatrix}\widehat{T} & \text{при} \quad i\geqslant 1.\end{cases}$$

В таком случае единственным ограниченным решением задачи (3.1″), (3.2′) будет $\mathbf{V}_{ij}=\mathbf{W}_{ij}+\widehat{\mathbf{V}}_{ij}$, где

$$\widehat{\mathbf{V}}_{ij}=\sum_{r=-\infty}^{\infty}G_{i-r}\mathbf{F}_{rj} \quad (\mathbf{F}_{rj}=0 \text{ при } r<0),$$

$$\mathbf{W}_{ij}=\widehat{T}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2^i & 0\\ 0 & 0 & \lambda_1^i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ c_2\\ c_1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}c_2\\ c_1\end{bmatrix}=\widehat{S}_-^{-1}\{S_1\mathbf{V}_{0,j-1}+S_2\mathbf{U}_{0j}^k-S\widehat{\mathbf{V}}_{0j}\},$$

$$\widehat{S}_-=\frac{1}{\widehat{d}}\begin{bmatrix} M^2\varkappa[\varkappa+l-d(\varkappa-l)] & M^2\alpha r_y[d(\varkappa-l)-\varkappa-l] \\ \alpha r_y\varkappa[2\beta^2 l+\lambda M^2(\varkappa-l)] & 2M^2\varkappa^2\beta^2 l-\lambda M^2\alpha^2 r_y^2(\varkappa-l)\end{bmatrix},$$

$$\widehat{S}_-^{-1}=\frac{1}{\det\widehat{S}_-}\begin{bmatrix} 2M^2\varkappa^2\beta^2 l-\lambda M^2\alpha^2 r_y^2(\varkappa-l) & M^2\alpha r_y[\varkappa+l-d(\varkappa-l)] \\ -\alpha r_y\varkappa[2\beta^2 l+\lambda M^2(\varkappa-l)] & M^2\varkappa[\varkappa+l-d(\varkappa-l)]\end{bmatrix}.$$

Таким образом, если выполнено условие Лопатинского $\det\widehat{S}_-\neq 0$, то задача (3.1″), (3.2′) однозначно разрешима. Условие Лопатинского в нашем случае записывается в форме $d\neq(\varkappa+l)/(\varkappa-l)$ или

$$(\alpha r_y\beta/\varkappa)^2\neq\left(M+\frac{d-1}{d+1}\right)\left(M-\frac{d-1}{d+1}\right). \tag{4.1}$$

Потребуем, чтобы выполнялось равномерное условие Лопатинского, т. е.

$$|\det\widehat{\mathrm{S}}_-|=\frac{|\varkappa+l-d(\varkappa-l)|\left(M^2\varkappa^2+\alpha^2r_y^2\right)\varkappa}{2M^2\beta^2 l\left(\varkappa^2+\alpha^2 r_y^2\right)^2}\geqslant\mathscr{L}>0,$$

где $\mathscr{L}$ — некоторая постоянная.

Итак, по известным начальным данным мы определяем $\mathbf{U}^1_{ij}$, i, $|j|=0$, 1, 2, ... (причем $\mathbf{U}^1_{ij}=0$ только при $y\leqslant -Y/2$), затем — $\mathbf{U}^2_{ij}$ и т. д. Оценим теперь полученное решение. Используя неравенство Минковского для числовых рядов, легко получаем

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{V}_{ij}\|^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{W}_{ij}\|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\widehat{\mathbf{V}}_{ij}\|^2\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{W}_{ij}\|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\|\widehat{\mathbf{V}}_{ij}\|^2\right)^{1/2}.$$

Далее, справедливы следующие оценки:

$$\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\|\widehat{\mathbf{V}}_{ij}\|^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\|G_i\|\right)\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty}\|\mathbf{F}_{ij}\|^2\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\lambda_3-\lambda_2}{(\lambda_3-1)(1-\lambda_2)}\|\widehat{T}^{-1}\|\|\widehat{T}\|\left\{\frac{r_y}{r_x}\|B^{-1}(C+\omega A)\|\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{V}_{i,j-1}\|^2\right)^{1/2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\alpha^2 r_x}\|B^{-1}A\|\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{U}\|^2\right)^{1/2}\right\},$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{W}_{ij}\|^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\frac{1}{1-\lambda_2^2}\right)^{1/2}\|\widehat{T}^{-1}\|\|\widehat{S}_-^{-1}\|\{\|S_1\|\|\mathbf{V}_{0,j-1}\|+\|S_2\|\|\mathbf{V}^k_{0j}\|+$$
$$+\|S\|\|\widehat{\mathbf{V}}_{0j}\|\}\leqslant\left(\frac{1}{1-\lambda_2^2}\right)^{1/2}\|\widehat{T}^{-1}\|\|\widehat{S}_-^{-1}\|\left\{\|S_1\|\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{V}_{i,j-1}\|^2\right)^{1/2}+\right.$$
$$\left.+\|S_2\|\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{U}\|^2\right)^{1/2}+\|S\|\|\widehat{\mathbf{V}}_{0j}\|\right\},$$

$$\|\widehat{\mathbf{V}}_{0j}\|=\left\|\sum_{i=0}^{\infty}G_{-i}\mathbf{F}_{ij}\right\|\leqslant\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|G_{-i}\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{F}_{ij}\|^2\right)^{1/2}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\frac{1}{\lambda_3^2-1}\right)^{1/2}\|\widehat{T}^{-1}\|\|\widehat{T}\|\left\{\frac{r_y}{r_x}\|B^{-1}(C+\omega A)\|\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{V}_{i,j-1}\|^2\right)^{1/2}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r_x\alpha^2}\|B^{-1}A\|\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{U}\|^2\right)^{1/2}\right\}.$$

Здесь $\|\widehat{T}\|$ — операторная норма матрицы $\widehat{T}$ и т. д. При выводе этих оценок мы пользовались неравенством Коши — Буняковского для числовых рядов и аналогом неравенства Юнга для свертки.

Окончательно,

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{V}_{ij}\|^2\right)^{1/2}\leqslant q\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{V}_{i,j-1}\|^2\right)^{1/2}+q_1\left(\sum_{i=0}^{\infty}\|\mathbf{U}\|^2\right)^{1/2}, \tag{4.2}$$

где q, $q_1>0$ — некоторые постоянные. Пусть $\Delta=C_\Delta h_x/\{(\alpha-\delta)(1-h_x\omega/h_y)\}$, где $C_\Delta>1$ — некоторая постоянная. Тогда $q=q(M,\alpha,\delta,\omega,C_\Delta,d,\lambda,h_x/h_y)\to 0$ при $h_x/h_y\to 0$. Из (4.2) легко получаем оценку

$$\|(\varphi+\delta/\alpha)\mathbf{U}^k\|^2\leqslant\widehat{q}\|\mathbf{U}^k\|^2, \tag{4.2'}$$

где $\widehat{q}>0$ — некоторая константа.

Таким образом, при надлежащем выборе отношения h_x/h_y с помощью (4.2′) можно оценить квадрат нормы $(\varphi+\delta/\alpha)\mathbf{U}^0$ через квадрат нормы начальных данных $\mathbf{U}^0$.

Систему (3.1) можно переписать также в виде

$$\mathbf{V}_{i+1,j}=H\mathbf{V}_{ij}+\widetilde{\mathbf{F}}_{ij},$$

где

$$\mathbf{V}_{ij} = \tau\mathbf{V},\ \widetilde{\mathbf{F}}_{ij} = \frac{r_y}{r_x} B^{-1}(C + \omega A)\,\mathbf{V}_{i,j-1} - \frac{1}{\alpha r_x} B^{-1}(C + \omega A)\,\eta\mathbf{U} - \frac{1}{\alpha r_x}\xi\mathbf{U},$$

а граничные условия (3.2) — в виде

$$S\mathbf{V}_{0j} = S_1\mathbf{V}_{0,\,j-1} + \mathbf{\Gamma},$$

где

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda\eta p_{0j}^k - \omega\eta v_{0j}^k \end{bmatrix}.$$

Здесь применимы все вышеизложенные рассуждения, следовательно, мы можем получить оценку $\|\tau\mathbf{U}^0\|^2$ через $\|\xi\mathbf{U}^0\|^2$, $\|\eta\mathbf{U}^0\|^2$. Агрегат $\widehat{\eta}\mathbf{U} = (\varphi + \delta/\alpha)\,\eta\mathbf{U} = \mathbf{V}_{ij}$ удовлетворяет системе (3.1″) с

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{r_y}{r_x} B^{-1}(C + \omega A)\,\mathbf{V}_{i,j-1} + \frac{1}{\alpha^2 r_x} B^{-1} A\eta\mathbf{U}.$$

Граничные условия (3.2′) имеют вид $S\mathbf{V}_{0j} = \mathbf{\Gamma}$, где

$$S = \begin{bmatrix} d & 1 & 0 \\ -\lambda\alpha & 0 & \omega\alpha \end{bmatrix},\ \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\tau v_{0j}^k \end{bmatrix},$$

а условие Лопатинского аналогично (4.1). Это значит, что мы можем получить оценку $\|\widetilde{\eta}\mathbf{U}^0\|^2$ через квадраты норм разностных отношений первого порядка от начальных данных $\|\xi\mathbf{U}^0\|^2$, $\|\eta\mathbf{U}^0\|^2$. Через них же с помощью исходной системы (3.1) оценивается $\|(\varphi + \delta/\alpha)\,\xi\mathbf{U}^0\|^2$.

Рассуждая, как и выше, мы последовательно можем оценить

$\|(\varphi + \delta/\alpha)\,\tau\mathbf{U}^0\|^2$ — через разностные отношения первого порядка от начальных данных;

$\|\tau\eta\mathbf{U}^0\|^2$ — через разностные отношения второго порядка от начальных данных;

$\|(\varphi + \delta/\alpha)\,\eta^2\mathbf{U}^0\|^2$ — через разностные отношения второго порядка от начальных данных;

$\|(\varphi + \delta/\alpha)^2\eta\mathbf{U}^0\|^2$ — через разностные отношения первого порядка от начальных данных;

$\|(\varphi + \delta/\alpha)\,\xi\eta\mathbf{U}^0\|^2$ — с помощью исходной системы через разностные отношения второго порядка от начальных данных;

$\|(\varphi + \delta/\alpha)\,\tau\eta\mathbf{U}^0\|^2$ — через разностные отношения второго порядка от начальных данных;

$\|(\varphi + \delta/\alpha)^2\eta^2\mathbf{U}^0\|^2$ — через разностные отношения второго порядка от начальных данных;

$\|(\varphi + \delta/\alpha)^2\xi\eta\mathbf{U}^0\|^2$ — с помощью исходной системы через разностные отношения второго порядка от начальных данных.

Таким образом, мы уже можем оценить следующие агрегаты:

$$\|\widehat{\tau}\mathbf{U}^0\|^2 = \|(\tau + \omega L_t\eta)\,\mathbf{U}^0\|^2,\ \|\widehat{\xi}\mathbf{U}^0\|^2 = \|L_t\xi\mathbf{U}^0\|^2,$$

$$\|\widehat{\eta}\mathbf{U}^0\|^2 = \|L_t\eta\mathbf{U}^0\|^2,\ \|\widehat{\tau\eta}\mathbf{U}^0\|^2 = \|(\tau + \omega L_t\eta)\,L_t\eta\mathbf{U}^0\|^2,$$

$$\|\widehat{\xi}\widehat{\eta}\mathbf{U}^0\|^2 = \|L_t^2\xi\eta\mathbf{U}^0\|^2,\ \|\widehat{\eta}^2\mathbf{U}^0\|^2 = \|L_t^2\eta^2\mathbf{U}^0\|^2.$$

Для оценки других агрегатов сформулируем задачу для $\mathbf{V}_{ij} = \tau\xi\mathbf{U}^0$. Очевидно, $\mathbf{V}_{ij}$ удовлетворяет системе (3.1″) с

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{r_y}{r_x} B^{-1}(C + \omega A)\,\mathbf{V}_{i,j-1} - \frac{1}{\alpha r_x} B^{-1}(C + \omega A)\,\xi\eta\mathbf{U}^0 - \frac{1}{\alpha r_x}\xi^2\mathbf{U}^0.$$

Привлекая к рассмотрению уравнения системы (3.1) и граничные условия (3.2), а также учитывая тот факт, что начальные данные обращаются в нуль в узкой полосе около границы $x = 0$, получаем граничные условия $S\mathbf{V}_{0j} = \mathbf{\Gamma}$, где

$$S = \begin{bmatrix} 1 + M^2 d & M^2(1+d) & 0 \\ 0 & 0 & M^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} -M^2 d\tau\eta v_{0j}^0 \\ -(M^2\lambda + 1)\tau\eta p_{0j}^0 \end{bmatrix}.$$

Условие Лопатинского в этом случае выглядит так:

$$d \neq -\left(\frac{1+M^2}{2M^2} - \frac{\beta^2}{2M^2}\frac{\varkappa}{l}\right).$$

Оценив $\|\tau\xi\mathbf{U}^0\|^2$, мы с помощью исходной системы оценим $\|(\varphi + \delta/\alpha)\xi^2\mathbf{U}^0\|^2$.

Задача для $\mathbf{V}_{ij} = (\varphi + \delta/\alpha)\tau\xi\mathbf{U}^0$ формулируется аналогично. А именно: $\mathbf{V}_{ij}$ удовлетворяет системе (3.1″) с

$$\mathbf{F}_{ij} = \frac{r_y}{r_x} B^{-1}(C + \omega A)\mathbf{V}_{i,j-1} - \frac{1}{\alpha r_x} B^{-1}(C + \omega A)(\varphi +$$

$$+ \delta/\alpha)\xi\eta\mathbf{U}^0 - \frac{1}{\alpha r_x}(\varphi + \delta/\alpha)\xi^2\mathbf{U}^0$$

и граничным условиям $S\mathbf{V}_{0j} = \mathbf{\Gamma}$, где

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} -M^2 d(\varphi + \delta/\alpha)\eta\tau v_{0j}^0 - \dfrac{M^2(1+d)}{\alpha}\tau\xi u_{0j}^0 - \\ -(1 + M^2 d)\tau\xi p_{0j}^0/\alpha - M^2 d\tau\eta v_{0j}^0/\alpha \\ \hdashline -(M^2\lambda + 1)(\varphi + \delta/\alpha)\eta\tau p_{0j}^0 - M^2\tau\xi v_{0j}^0/\alpha - \\ -(M^2\lambda + 1)\tau\eta p_{0j}^0/\alpha \end{bmatrix}.$$

Покажем, как в этом случае выводятся граничные условия. При $i = 0$ из системы (3.1) и граничных условий (3.2) имеем соотношения

$$M^2(1+d)\hat{\xi}u_{0j}^k + (1 + M^2 d)\hat{\xi}p_{0j}^k + M^2 d\hat{\eta}v_{0j}^k = 0,$$

$$M^2\hat{\xi}v_{0j}^k + (M^2\lambda + 1)\hat{\eta}p_{0j}^k = 0,$$

действуя на которые оператором $(\varphi + \delta/\alpha)$, получаем

$$(\varphi + \delta/\alpha)[M^2\hat{\xi}v_{0j}^k + (M^2\lambda + 1)\hat{\eta}p_{0j}^k] = M^2 L_t\xi\left(\varphi - 1 + \frac{1}{\alpha}\right)v_{0j}^k +$$

$$+ (M^2\lambda + 1)L_t\eta(\varphi - 1 + 1/\alpha)p_{0j}^k = M^2 L_t\xi(\varphi - 1)v_{0j}^k +$$

$$+ (M^2\lambda + 1)L_t\eta(\varphi - 1)p_{0j}^k + M^2\xi(\varphi - 1)v_{0j}^k + (M^2\lambda + 1)\eta(\varphi -$$

$$- 1)p_{0j}^k + M^2\xi v_{0j}^k/\alpha + (M^2\lambda + 1)\eta p_{0j}^k/\alpha.$$

Отсюда, полагая $k = 0$ и учитывая тот факт, что начальные данные обращаются в нуль в узкой полосе около границы $x = 0$, заключаем:

$$M^2(\varphi + \delta/\alpha)\xi\tau v_{0j}^0 = -(M^2\lambda + 1)(\varphi + \delta/\alpha)\eta\tau p_{0j}^0 -$$

$$- M^2\xi\tau v_{0j}^0/\alpha - (M^2\lambda + 1)\eta\tau p_{0j}^0/\alpha \text{ и т. д.}$$

Оценив $\|(\varphi + \delta/\alpha)\tau\xi\mathbf{U}^0\|^2$, мы с помощью системы (3.1) оценим $\|\tau^2\mathbf{U}^0\|^2$, $\|(\varphi + \delta/\alpha)^2\xi^2\mathbf{U}^0\|^2$. Следовательно, мы можем оценить через начальные данные следующие агрегаты:

$$\|\hat{\tau}^2\mathbf{U}^0\|^2 = \|\tau + \omega L_t\eta)^2\mathbf{U}^0\|^2,$$

$$\|\hat{\xi}^2\mathbf{U}^0\|^2 = \|L_t^2\xi^2\mathbf{U}^0\|^2,$$

$$\|\hat{\tau}\hat{\xi}\mathbf{U}^0\|^2 = \|(\tau + \omega L_t\eta)L_t\xi\mathbf{U}^0\|^2.$$

Если, следуя замечанию 3.1, в выражение $\mathcal{J}_k$ включить квадраты норм разностных отношений третьего порядка, то аналогично рассуждая, можно оценить $\|\widehat{\tau^3}\mathbf{U}^0\|^2, \ldots, \|\widehat{\eta^2}\mathbf{U}^0\|^2$ через разностные отношения третьего порядка от начальных данных. Таким образом,

$$\mathcal{F}_0 \leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{P}_0,$$

где $\mathcal{P}_k = \|\mathbf{U}^k\|^2 + \|\tau\mathbf{U}^k\|^2 + \|\xi\mathbf{U}^k\|^2 + \ldots + \|\tau^3\mathbf{U}^k\|^2 + \ldots + \|\eta^3\mathbf{U}^k\|^2, \quad k = \overline{0,\ m}.$
Ясно, что (3.24) можно переписать так:

$$\max_{k=\overline{0,m}} \mathcal{P}_k \leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{P}_0. \tag{4.3}$$

Для вывода (4.3) последовательно оцениваем следующие величины:

$$\|\tau\mathbf{U}^k\| = \|\hat{\tau}\mathbf{U}^k - \omega\hat{\eta}\mathbf{U}^k\| \leqslant \|\hat{\tau}\mathbf{U}^k\| + \omega\|\hat{\eta}\mathbf{U}^k\| \leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{P}_0^{1/2};$$

$$\|\alpha\varphi\xi\mathbf{U}^k\| = \|\hat{\xi}\mathbf{U}^k - \delta\xi\mathbf{U}^k\| \leqslant \|\hat{\xi}\mathbf{U}^k\| + \delta\|\xi\mathbf{U}^k\|, \ \alpha \max_{k=\overline{0,m}} \|\xi\mathbf{U}^k\| \leqslant$$

$$\leqslant \delta \max_{k=\overline{0,m}} \|\xi\mathbf{U}^k\| + \max_{k=\overline{0,m}} \|\hat{\xi}\mathbf{U}^k\|,$$

$$\max_{k=\overline{0,m}} \|\xi\mathbf{U}^k\| \leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{P}_0^{1/2} \ (\alpha > \delta!);$$

$$\max_{k=\overline{0,m}} \|\eta\mathbf{U}^k\| \leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{P}_0^{1/2}; \ \|\alpha\varphi L_t\xi^2\mathbf{U}^k\| = \|\hat{\xi}^2\mathbf{U}^k - \delta L_t\xi^2\mathbf{U}^k\| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{k=\overline{0,m}} \|\hat{\xi}^2\mathbf{U}^k\| + \delta \max_{k=\overline{0,m}} \|L_t\xi^2\mathbf{U}^k\|,$$

$$\max_{k=\overline{0,m}} \|L_t\xi^2\mathbf{U}^k\| \leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{P}_0^{1/2},$$

$$\max_{k=\overline{0,m}} \|\xi^2\mathbf{U}^k\| \leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{P}_0^{1/2};$$

$$\max_{k=\overline{0,m}} \|\eta^2\mathbf{U}^k\| \leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{P}_0^{1/2}; \ \|\alpha\varphi L_t\xi\eta\mathbf{U}^k\| \leqslant \|\hat{\xi}\hat{\eta}\mathbf{U}^k - \delta L_t\xi\eta\mathbf{U}^k\|, \ \max_{k=\overline{0,m}} \|L_t\xi\eta\mathbf{U}^k\| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{P}_0^{1/2}, \ \max_{k=\overline{0,m}} \|\xi\eta\mathbf{U}^k\| \leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{P}_0^{1/2};$$

$$\|\alpha\varphi\tau\xi\mathbf{U}^k\| = \|(\hat{\tau} - \omega\eta)\hat{\xi}\mathbf{U}^k - \delta\tau\xi\mathbf{U}^k\|,$$

$$\max_{k=\overline{0,m}} \|\tau\xi\mathbf{U}^k\| \leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{P}_0^{1/2},$$

$$\max_{k=\overline{0,m}} \|\tau\eta\mathbf{U}^k\| \leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{P}_0^{1/2},$$

$$\|\tau^2\mathbf{U}^k\| = \|(\hat{\tau} - \omega\eta)^2\mathbf{U}^k\|,$$

$$\max_{k=\overline{0,m}} \|\tau^2\mathbf{U}^k\| \leqslant \mathrm{const}\, \mathcal{P}_0^{1/2} \ \text{и т. д.}$$

Теперь, пользуясь оценкой (4.3) и аргументацией из монографии [3] (см. § 17 — критерии компактности сеточных функций, § 19 — оценки разностных отношений и компактности приближенных решений, § 20 — теорема существования решения смешанной задачи), можно доказать теорему существования достаточно гладкого решения смешанной задачи II.

Теорема 4.1. *Пусть начальные данные $\mathrm{U}_0(x, y) \in C^2$ равны нулю при $|y| \geqslant Y/2$ и во всех точках (x, y) таких, что либо $0 \leqslant x \leqslant \sigma < X$, либо $x \geqslant X$ для некоторого $\sigma > 0$. Тогда существует решение задачи* II. *Это решение отлично от нуля лишь в ограниченной части области* Π *и принадлежит в этой части пространству C^1.*

Замечание 4.1. Добавление в систему уравнения для S не приводит к принципиальным трудностям.

Замечание 4.2. В [3] отмечается, что в формулировке теоремы требование равенства нулю $\mathrm{U}_0(x, y)$ в окрестности границы $x = 0$ можно заменить условием согласования достаточно высокого порядка начальных данных с граничными.

Замечание 4.3. При наличии оценки диссипативного интеграла энергии для смешанной задачи II и теоремы существования достаточно гладкого ее решения из [5] следует, что решение задачи II принадлежит при всех t, $0 \leqslant t \leqslant T$, пространству $W_2^2(\mathbf{R}_+^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Численное** решение многомерных задач газовой **динамики/С. К. Годунов, А. В. За**бродин, М. Я. Иванов и др.— М.: Наука, 1976.— 400 с.
2. **Курант Р., Фридрихс К., Леви Г.** О разностных уравнениях математической физики // Успехи мат. наук.— 1940.— Вып. 8.— С. 125—160.
3. **Годунов С. К.** Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1979.— 392 с.
4. **Ладыженская О. А.** Краевые задачи математической физики.— М.: Наука, 1973.— 408 с.
5. **Блохин А. М.** Интегралы энергии в задаче об устойчивости ударной волны.— Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1982.— 176 с.
6. **Рихтмайер Р., Мортон К.** Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 418 с.
7. **Блохин А. М., Алаев Р. Д.** Об устойчивости модифицированной разностной схемы Mac Cormack'a для симметрической t-гиперболической системы // Корректные краевые задачи неклассических уравнений математической физики.— Новосибирск, 1984.— С. 24—42.
8. **Алаев Р. Д., Блохин А. М.** Исследование устойчивости разностной схемы В. В. Русанова методом диссипативных интегралов энергии // Неклассические уравнения математической физики.— Новосибирск, 1985.— С. 23—38.
9. **Блохин А. М.** Построение устойчивых разностных схем для симметрической t-гиперболической системы // Тр. семин. С. Л. Соболева/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.— 1985.— № 1.— С. 34—52.
10. **Блохин А. М., Алаев Р. Д., Дружинин И. Ю.** Устойчивость явных разностных схем для симметрических t-гиперболических систем // Тр. семин. С. Л. Соболева/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.— 1986.— № 1.— С. 26—39.
11. **Блохин А. М., Алаев Р. Д.** Интегралы энергии в теории устойчивости ударных волн // Дифференциальные уравнения с частными производными: Тр. Междунар. конф. по диф. уравнениям с частн. производными.— Новосибирск, 1986.— С. 56—60.
12. **Алаев Р. Д., Блохин А. М.** Теоретическое и численное исследование разностной модели смешанной задачи для уравнений газовой динамики с граничными условиями на ударной волне // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа.— Новосибирск, 1983.— С. 66—83.
13. **Алаев Р. Д., Блохин А. М.** Существование достаточно гладкого решения линейной смешанной задачи для уравнения газовой динамики с граничными условиями на ударной волне // Тр. семин. С. Л. Соболева/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.— 1983.— № 2.— С. 5—21.
14. **Gourlay A. R., Mitchell A. R.** Two — level difference schemes for hyperbolic systems // SIAM J. Numer. Anal.— 1966.— V. 3, N 3.— P. 474—485.
15. **Годунов С. К., Рябенький В. С.** Разностные схемы.— М.: Наука, 1977.— 440 с.

РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНОГО ФРОНТА ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

С. В. КУЗНЕЦОВ

Работа посвящена описанию алгоритма расчета траекторий, соединяющих две особые точки системы дифференциальных уравнений, в частности расчета фронтов химических реакций.

Предлагаемый алгоритм основан на использовании метода Ньютона для отыскания решения нелинейных краевых задач и метода ортогональной прогонки, предложенного С. К. Годуновым в [1] и модифицированного в [2].

Следует отметить, что метод ортогональной прогонки используется как для решения краевых задач, так и для нахождения базиса подпространства входящих либо выходящих траекторий особой точки системы дифференциальных уравнений. Преимущество этого метода состоит в том, что он позволяет решать краевые задачи для систем дифференци-