

заменить условием согласования достаточно высокого порядка начальных данных с граничными.

Замечание 4.3. При наличии оценки диссипативного интеграла энергии для смешанной задачи II и теоремы существования достаточно гладкого ее решения из [5] следует, что решение задачи II принадлежит при всех t , $0 \leq t \leq T$, пространству $W_2^2(\mathbf{R}_+^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Численное решение многомерных задач газовой динамики/С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов и др.—М.: Наука, 1976.— 400 с.
2. Курант Р., Фридрихс К., Леви Г. О разностных уравнениях математической физики // Успехи мат. наук.— 1940.— Вып. 8.— С. 125—160.
3. Годунов С. К. Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1979.— 392 с.
4. Ладженская О. А. Краевые задачи математической физики.— М.: Наука, 1973.— 408 с.
5. Блохин А. М. Интегралы энергии в задаче об устойчивости ударной волны.— Новосибирск: Изд-во ИМ СО АН СССР, 1982.— 176 с.
6. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 418 с.
7. Блохин А. М., Алаев Р. Д. Об устойчивости модифицированной разностной схемы Мас Сомтаск'а для симметрической t -гиперболической системы // Корректные краевые задачи неклассических уравнений математической физики.— Новосибирск, 1984.— С. 24—42.
8. Алаев Р. Д., Блохин А. М. Исследование устойчивости разностной схемы В. В. Рузанова методом диссипативных интегралов энергии // Неклассические уравнения математической физики.— Новосибирск, 1985.— С. 23—38.
9. Блохин А. М. Построение устойчивых разностных схем для симметрической t -гиперболической системы // Тр. семин. С. Л. Соболева/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.— 1985.— № 1.— С. 34—52.
10. Блохин А. М., Алаев Р. Д., Дружинин И. Ю. Устойчивость явных разностных схем для симметрических t -гиперболических систем // Тр. семин. С. Л. Соболева/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.— 1986.— № 1.— С. 26—39.
11. Блохин А. М., Алаев Р. Д. Интегралы энергии в теории устойчивости ударных волн // Дифференциальные уравнения с частными производными: Тр. Междунар. конф. по диф. уравнениям с частн. производными.— Новосибирск, 1986.— С. 56—60.
12. Алаев Р. Д., Блохин А. М. Теоретическое и численное исследование разностной модели смешанной задачи для уравнений газовой динамики с граничными условиями на ударной волне // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа.— Новосибирск, 1983.— С. 66—83.
13. Алаев Р. Д., Блохин А. М. Существование достаточно гладкого решения линейной смешанной задачи для уравнения газовой динамики с граничными условиями на ударной волне // Тр. семин. С. Л. Соболева/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.— 1983.— № 2.— С. 5—21.
14. Goursley A. R., Mitchell A. R. Two — level difference schemes for hyperbolic systems // SIAM J. Numer. Anal.— 1966.— V. 3, N 3.— P. 474—485.
15. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы.— М.: Наука, 1977.— 440 с.

РАСЧЕТ СТАЦИОНАРНОГО ФРОНТА ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

С. В. КУЗНЕЦОВ

Работа посвящена описанию алгоритма расчета траекторий, соединяющих две особые точки системы дифференциальных уравнений, в частности расчета фронтов химических реакций.

Предлагаемый алгоритм основан на использовании метода Ньютона для отыскания решения нелинейных краевых задач и метода ортогональной прогонки, предложенного С. К. Годуновым в [1] и модифицированного в [2].

Следует отметить, что метод ортогональной прогонки используется как для решения краевых задач, так и для нахождения базиса подпространства входящих либо выходящих траекторий особой точки системы дифференциальных уравнений. Преимущество этого метода состоит в том, что он позволяет решать краевые задачи для систем дифференци-

альных уравнений с достаточно большим коэффициентом жесткости и на достаточно большом интервале.

Задача расчета траекторий, соединяющих особые точки, имеет две постановки — глобальную и локальную. Мы будем рассматривать только локальную задачу, которая заключается в том, что надо найти искомую траекторию (в случае расчета стационарного фронта химической реакции — еще и скорость распространения фронта), если известны (приблизительно) поведение искомой траектории и скорость распространения фронта.

Рассматриваются задачи вида

$$\frac{dV(x, \omega)}{dx} = F(V(x, \omega), \omega), \quad (1)$$

$$V(-\infty, \omega) = H, \quad V(+\infty, \omega) = G,$$

где $V(x, \omega)$, F , G и H — векторы размерности n , причем H и G заданы таким образом, что для любого ω выполнены равенства $F(H, \omega) = 0$ и $F(G, \omega) = 0$. Кроме того, предполагается, что матрицы $F_V(H, \omega)$ и $F_V(G, \omega)$ не имеют собственных чисел на мнимой оси, где $F_V(V, \omega)$ — матрица Якоби, т. е. спектр вышеупомянутых матриц строго разделен осью ординат. Для данной задачи требуется определить параметр ω и поведение траектории на всей числовой прямой. Естественно, что предлагаемый алгоритм может быть с успехом применен и к задаче

$$\frac{dV(x)}{dx} = F(V(x)), \quad (2)$$

$$V(-\infty) = H, \quad V(+\infty) = G,$$

где V , F , H , G — векторы размерности n , причем H и G являются особыми точками данной системы дифференциальных уравнений. Как и в задаче (1), предполагается, что матрицы $F_V(G)$ и $F_V(H)$ не имеют собственных чисел, лежащих на мнимой оси. Поскольку алгоритм численного решения задачи (1) применим и к задаче (2), то далее наше внимание будет сосредоточено только на задаче (1).

Автор выражает искреннюю благодарность профессору С. К. Годунову за поддержку и внимание к работе, а также Г. А. Чумакову, Н. А. Чумаковой, С. И. Фадееву за полезные обсуждения.

§ 1. Алгоритм расчета

Как уже отмечалось выше, описываемый алгоритм является локальным, поэтому будем считать, что имеется некоторая заданная на всей числовой прямой вектор-функция $V_0(x)$, достаточно близкая к искомой траектории $V(x, \omega)$, а также определено некоторое число ω_0 , достаточно близкое к искомой скорости распространения фронта ω . Понятно, что $V_0(x)$ определяется так, что $V_0(-\infty) = H$ и $V_0(+\infty) = G$.

Поскольку вектор-функция $V(x, \omega)$ — решение задачи (1), то

$$\frac{dV(x, \omega)}{dx} = F(V(x, \omega), \omega).$$

Заметим, что

$$F(V(x, \omega), \omega) = F(V_0(x) + \bar{V}(x), \omega_0 + \bar{\omega}), \quad (3)$$

где $\bar{V}(x) = V(x, \omega) - V_0(x)$, $\bar{\omega} = \omega - \omega_0$. Разлагая левую часть (3) в ряд Тейлора, можно утверждать, что с точностью до членов второго порядка малости верно равенство

$$F(V(x, \omega), \omega) = F(V_0(x), \omega_0) + F_V(V_0(x), \omega_0)\bar{V}(x) + \bar{\omega}F_\omega(V_0(x), \omega_0), \quad (4)$$

где $F_V(V_0(x), \omega_0)$ — матрица Якоби, $F_\omega(V_0(x), \omega_0)$ — производная левой части системы дифференциальных уравнений по параметру. Учитывая

(4), получаем, что $V(x, \omega)$ с точностью до членов второго порядка малости является решением следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dV(x, \omega)}{dx} = & F(V_0(x), \omega_0) + F_V(V_0(x), \omega_0)(V(x, \omega) - V_0(x)) + \\ & + (\omega - \omega_0) F_\omega(V_0(x), \omega_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Поскольку $\|H\| < \infty$ и $\|G\| < \infty$, то считая, что $V_0(x)$ достаточно близка к искомой траектории, можно указать числа x_0 и $\bar{x}$ такие, что выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \max_{x \in (-\infty, x_0)} \|V(x, \omega) - H\| &\leq \varepsilon, \\ \max_{x \in [\bar{x}, +\infty)} \|V(x, \omega) - G\| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \quad (6)$$

Можно перейти от решения задачи (1) к решению краевой задачи для линейной системы дифференциальных уравнений на конечном интервале. Естественно, что этот переход осуществляется с некоторой потерей точности, и, расширяя интервал, можно получить более точное решение. Возникает проблема: как правильно поставить краевые условия? Краевые условия ставим исходя из следующих соображений.

В силу (6) можно утверждать, что

$$\begin{aligned} V(x_0, \omega) - H &= \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i, \\ V(\bar{x}, \omega) - G &= \sum_{i=1}^p \beta_i v_i, \end{aligned}$$

где система векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ является базисом подпространства выходящих траекторий особой точки H , а система $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ — входящих траекторий особой точки G . Левое граничное условие будем задавать в виде $S(V(x_0, \omega) - H) = 0$, где S — матрица размеров $(n - k) \times n$, причем система векторов $\{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ образует полный ортогональный базис подпространства векторов, удовлетворяющих условию $Su = 0$. Правое краевое условие задается равенством $M(V(\bar{x}, \omega) - G) = 0$, где M — матрица размеров $(n - p) \times n$, причем система векторов $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ образует полный ортогональный базис подпространства векторов, удовлетворяющих условию $Mv = 0$. Легко видеть, что $\text{rank } M = n - p$, $\text{rank } S = n - k$.

Выше под базисом входящих (выходящих) траекторий понимался базис инвариантного подпространства векторов, отвечающих собственным числам с отрицательной (положительной) вещественной частью матрицы $F_V(G, \omega_0)$ ($F_V(H, \omega_0)$). Как находятся эти базисы, будет описано в следующем параграфе.

Таким образом, задача сводится к численному решению на конечном интервале краевой задачи

$$\begin{aligned} \frac{dV(x, \omega)}{dx} = & F(V_0(x), \omega_0) + F_V(V_0(x), \omega_0)(V(x, \omega) - V_0(x)) + \\ & + (\omega - \omega_0) F_\omega(V_0(x), \omega_0), \\ SV(x_0, \omega) = & SH, \quad MV(\bar{x}, \omega) = MG. \end{aligned} \quad (7)$$

Необходимым условием разрешимости задачи (7) является условие $k + 1 = n - p$, поскольку в левой части дифференциального уравнения присутствует параметр ω , который требуется определить. В ходе численных экспериментов краевая задача (7) решалась методом ортогональной прогонки, подробно описанным в [2].

Численно определив $V(x, \omega)$ и скорость распространения ω , далее полагаем $\omega_0 = \omega$, $V_0(x) = V(x, \omega)$. Так как краевые условия в силу вы-

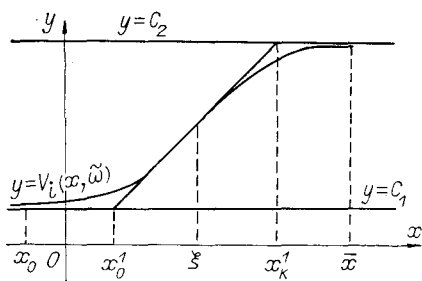


Рис. 1. Вычисление ширины фронта.

Заметим, что если $W(x, \omega)$ — решение задачи (1), то $W(x + \text{const}, \omega)$ тоже решение задачи (1), поэтому при численной реализации алгоритма происходят сдвиги траектории по оси абсцисс. Для того чтобы этого не происходило, предлагается держать середину траектории в середине выбранного интервала $[x_0, \bar{x}]$. В качестве середины траектории предлагается взять значение

$$\xi = \left(\int_{x_0}^{\bar{x}} x V'_i(x, \omega) dx \right) / \left(\int_{x_0}^{\bar{x}} V'_i(x, \omega) dx \right),$$

где i — номер какой-либо компоненты вектор-функции $V(x, \omega)$.

В некоторых случаях не удастся добиться сходимости к искомой траектории на выбранном интервале с помощью метода Ньютона. При возникновении таких ситуаций необходимо расширить интервал так, чтобы его длина была равна $n\eta$, где η — величина, которую будем называть шириной фронта (определение будет дано ниже), а n — наперед заданное натуральное число, обычно заключенное в пределах $2 \leq n \leq 7$.

Пусть

$$C_1 = \min_{x \in (-\infty, +\infty)} V_i(x, \omega), \quad C_2 = \max_{x \in (-\infty, +\infty)} V_i(x, \omega).$$

Проведем касательную к траектории $y = V_i(x, \omega)$ в точке ξ — середине фронта — и определим точки x_0^1 и x_k^1 пересечения этой касательной с прямыми $y = C_1$ и $y = C_2$. Величину $\eta = x_k^1 - x_0^1$ и будем называть шириной фронта (см. рис. 1). Далее расширяем интервал, если это требуется, так, чтобы его длина была равна $n\eta$. Кроме того, делаем сдвиг траектории так, чтобы середина траектории и середина интервала совпадали. Доопределение компонент вектор-функции $V(x, \omega)$ в случае сдвига траектории или расширения интервала может происходить различными способами, в частности интегрированием линеаризованной системы. Вышеописанную процедуру рекомендуется проводить перед осуществлением каждой итерации методом Ньютона.

§ 2. Постановка краевых условий

Пусть дана квадратная матрица A порядка n . Предположим, что или известна размерность инвариантного подпространства векторов, отвечающих собственным числам с положительной (отрицательной) вещественной частью, или у матрицы A , базисы подпространств которой предстоит выделить, нет собственных чисел кратности больше чем два.

Зададим некоторую ортогональную матрицу Q_0 . Пусть $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}$ — столбцы матрицы Q_0 . Допустим что требуется выделить базис инвариантного подпространства векторов, соответствующих собственным числам с положительной вещественной частью. Для этого задаем поло-

шесказанного зависят от ω , то определяем новые краевые условия и, решая краевую задачу, получаем более близкую к искомой траекторию. Алгоритм прекращает работу при выполнении следующих неравенств:

$$\max_{x \in [x_0, \bar{x}]} \|V(x, \omega) - V_0(x)\| \leq \delta,$$

$$|\omega - \omega_0| < \delta.$$

жительный шаг интегрирования h . Рекомендуется выбирать величину этого шага, равной $1/\|A\|$. Численным интегрированием получаем векторы $z_1^{(0)}(h)$, $z_2^{(0)}(h)$, ..., $z_n^{(0)}(h)$ как решения задач Коши

$$\frac{dz_j^{(0)}(t)}{dt} = Az_j^{(0)}(t), \quad z_j^{(0)}(0) = q_j^{(0)}.$$

Составляем матрицу Z_0 , столбцы которой суть соответственно $z_1^{(0)}(h)$, $z_2^{(0)}(h)$, ..., $z_n^{(0)}(h)$. Разлагаем преобразования Хаусхолдера матрицу Z_0 в произведение ортогональной и верхне-треугольной матриц. Таким образом получаем равенство $Z_0 = Q_1 R_1$, где $Q_1^* Q_1 = I_n$ и $r_{ij}^{(1)} = 0$ при $i > j$.

Далее действуем следующим образом.

1°. Пусть $q_1^{(h)}$, $q_2^{(h)}$, ..., $q_n^{(h)}$ — столбцы матрицы Q_k . Каждому вектору $q_j^{(h)}$ сопоставляем вектор $z_j^{(h)}(h)$, полученный численным интегрированием задачи Коши

$$\frac{dz_j^{(h)}(t)}{dt} = Az_j^{(h)}(t), \quad z_j^{(h)}(0) = q_j^{(h)}.$$

2°. Строим матрицу Z_k , столбцы которой суть векторы $z_1^{(h)}(h)$, $z_2^{(h)}(h)$, ..., $z_n^{(h)}(h)$. Разлагаем матрицу Z_k в произведение двух матриц: ортогональной Q_{k+1} и верхнетреугольной R_{k+1} , т. е. $Z_k = Q_{k+1} R_{k+1}$. Заметим, что $Z_k = e^{hA} Q_k$, где e^{hA} — матричная экспонента; подробнее см. [3]. Таким образом, последовательность ортогональных Q_k и верхне-треугольных матриц R_k строится по следующим рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} e^{hA} Q_0 &= Z_0 = Q_1 R_1, \\ e^{hA} Q_1 &= Z_1 = Q_2 R_2, \\ &\dots \dots \dots \\ e^{hA} Q_k &= Z_k = Q_{k+1} R_{k+1}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что данная схема есть не что иное, как ортогонально-степенной метод Воеводина — Брауэра для определения собственных чисел. Утверждается (см., например, [6]), что матрица $Q_k^* e^{hA} Q_k$ при $k \rightarrow \infty$ сходится к квазитреугольной матрице

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \overline{A_{11}} & & \\ & \overline{A_{22}} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \overline{A_{kk}} \end{bmatrix},$$

где клетки A_{ii} имеют одинаковые по абсолютной величине собственные числа, причем, если $\lambda_1^j, \lambda_2^j, \dots, \lambda_{m_j}^j$ — собственные матрицы A_{jj} , где m_j — размер выделенной клетки, то (см., например, [6, 7])

$$\begin{aligned} |\lambda_1^1| = |\lambda_2^1| = \dots = |\lambda_{m_1}^1| &> |\lambda_1^2| = |\lambda_2^2| = \dots = |\lambda_{m_2}^2| > \dots \\ &\dots > |\lambda_1^k| = |\lambda_2^k| = \dots = |\lambda_{m_k}^k| \end{aligned}$$

Кроме того, если $\{\lambda_j\}_{j=1}^p$ — набор собственных чисел матрицы A , то $\{e^{h\lambda_j}\}_{j=1}^p$ — набор собственных чисел матрицы e^{hA} , причем если λ_s — собственное число матрицы A кратности l , то собственное число $e^{h\lambda_s}$ матрицы e^{hA} тоже кратности l . Ясно, что собственный вектор, соответствующий собственному числу λ_p матрицы A , является собственным век-

тором, соответствующим собственному числу $e^{h\lambda_p}$ матрицы e^{hA} . Поскольку $0 \leq |e^{h\lambda_j}| \leq 1$ при $\operatorname{Re} \lambda_j \leq 0$ и $|e^{h\lambda_j}| \geq 1$ при $\operatorname{Re} \lambda_j \geq 0$, где λ_j — собственные числа матрицы A , $h > 0$, то инвариантное подпространство матрицы A , отвечающее собственным числам с положительной (отрицательной) вещественной частью, и инвариантное подпространство матрицы e^{hA} , отвечающее собственным числам по абсолютной величине больше единицы (меньше единицы), совпадают.

Пусть матрица Q_N такая, что

$$\|Q_N^* e^{hA} Q_N - Q_{N-1}^* e^{hA} Q_{N-1}\| \leq \varepsilon,$$

где ε достаточно мало. Тогда первые s столбцов матрицы Q_N образуют требуемый базис, где s — размерность инвариантного подпространства. Таким образом, если неизвестна размерность инвариантного подпространства, ее требуется определить.

Если у матрицы A нет собственных чисел кратности больше, чем два, размеры выделенных клеток тоже не превышают двух, поэтому можно вычислить собственные числа каждой матрицы A_{jj} . Следовательно, можно указать такой номер i_0 , что все собственные числа матриц $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{i_0, i_0}$ по абсолютной величине больше единицы, а у матриц $A_{i_0+1, i_0+1}, A_{i_0+2, i_0+2}, \dots, A_{hh}$ собственные числа по абсолютной величине меньше единицы. Тогда $m = m_1 + m_2 + \dots + m_{i_0}$ — искомая размерность инвариантного подпространства и первые m столбцов матрицы Q_N образуют требуемый базис, где m_i — размер клетки A_{ii} .

Для того чтобы получить базис инвариантного подпространства векторов, соответствующих собственным числам с отрицательной вещественной частью, необходимо задать шаг интегрирования h отрицательным.

§ 3. Результаты численных экспериментов

Пример 1. Рассмотрим трехмерную систему дифференциальных уравнений, описывающую распространение теплового фронта в слое катализатора (см. [9]). Данная система имеет вид

$$\begin{aligned} u' &= -a_1(u - z) - a_2(u - v), \\ v' &= k_2(u)(v - \alpha z), \\ z' &= k_1(u)z, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} k_1(u) &= \begin{cases} \frac{k_{10}}{1 - \sigma\omega} \exp\left(\frac{\theta_s(1-u)}{1 + b\theta_s(1-u)}\right) & \text{при } u < u_0, \\ 0 & \text{при } u_0 \leq u \leq 1, \end{cases} \\ k_2(u) &= \begin{cases} \frac{k_{20}}{1 - \sigma\omega} \exp\left(\frac{v\theta_s(1-u)}{1 + b\theta_s(1-u)}\right) & \text{при } u < u_0, \\ 0 & \text{при } u_0 \leq u \leq 1, \end{cases} \\ a_1 &= (1 - \sigma\omega)Q_1x_0/\theta_s, \quad a_2 = (1 - \sigma\omega)Q_2(1 - y_0)/\theta_s, \\ \alpha &= x_0/(1 - y_0). \end{aligned}$$

Параметр ω определяется через максимальную температуру во фронте θ_s по следующей формуле:

$$\omega = [\theta_s - (Q_1x_0 + Q_2(1 - y_0))] / [\theta_s - \sigma(Q_1x_0 + Q_2(1 - y_0))].$$

Требуется для заданного значения температуры срезы u_0 найти траекторию, соединяющую особую точку $u = v = z = 0$ с особой точкой $u = u_0, v = z = 1$, и значение параметра θ_s , при котором существует такая

Таблица 1

Номер варианта	k_{10}	k_{20}	ν	b	σ	x_0	y_0	Q_1	Q_2	u_0	Полученные значения θ_s
1	10^{-3}	10^{-4}	1	0.07	10^{-3}	1	0	4	12	0.88	27.6491
2	10^{-3}	10^{-4}	1	0.07	10^{-3}	1	0	4	12	0.92	27.6363

траектория. Таким образом, требуется решить задачу (1) с неизвестным параметром в левой части системы дифференциальных уравнений.

Были просчитаны два варианта данной задачи при значениях параметров, указанных в табл. 1. Там же приведены полученные значения максимальной температуры во фронте θ_s .

Пример 2. Рассмотрим задачу нахождения решения типа бегущей волны для уравнения (см. [10, 11])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u(1-u) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (9)$$

Решение типа бегущей волны может быть записано в форме

$$u(x, t) = f(z), \quad z = x + ct, \quad (10)$$

где c — скорость волны. Поскольку уравнение (9) инвариантно относительно замены x на $-x$, скорость c может быть положительной или отрицательной; для определенности будем считать c положительной, так что (10) представляет волну, движущуюся в отрицательном направлении оси x . После подстановки (10) в (9) для функции $f(z)$ имеем

$$f'' - cf' + f(1-f) = 0, \quad (11)$$

где штрих означает дифференцирование по z .

Доказано (см., например, [11, разд. 5.3]), что для $c \geq c_{\min} = 2$ существуют непрерывные волновые решения (9) в форме (10), для которых

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} f(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} f(z) = 1, \quad (12)$$

причем $0 \leq f \leq 1$.

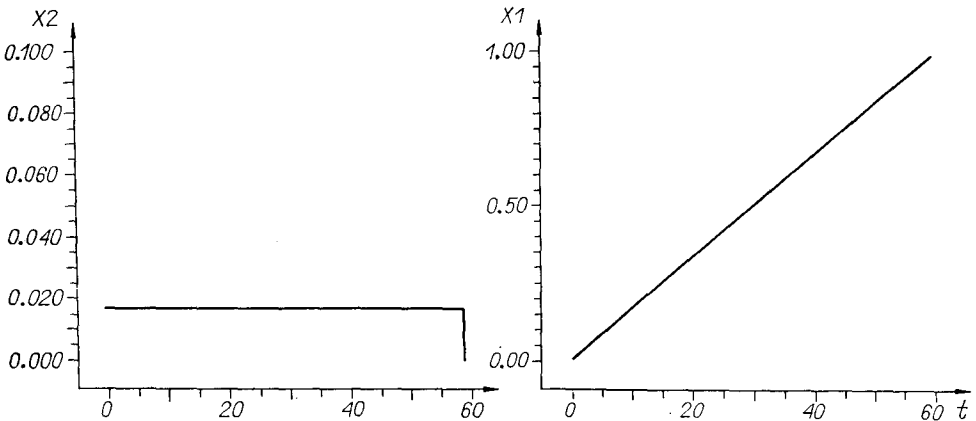


Рис. 2. Начальное приближение.

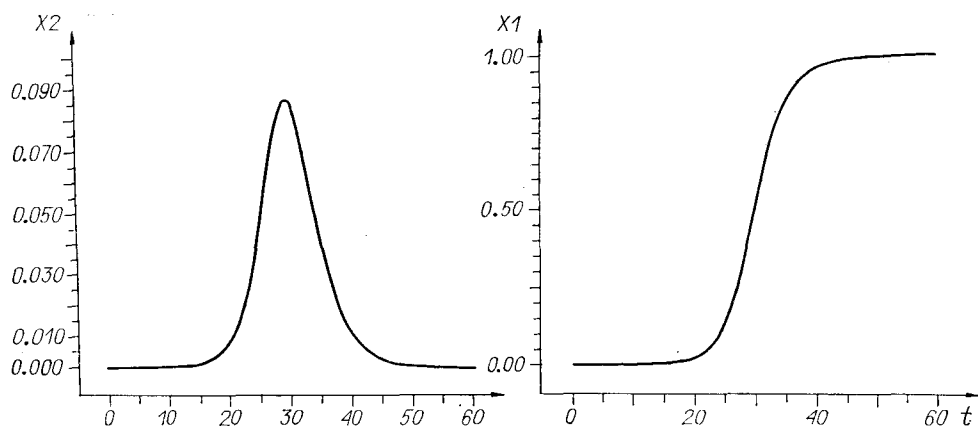


Рис. 3. Искомые траектории.

Таким образом, для $c > c_{\min} = 2$ требуется найти численное решение задачи

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = cx_2 + x_1(x_1 - 1), \quad (13)$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \quad \text{при } t = -\infty, \quad (14)$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \quad \text{при } t = +\infty.$$

Численное решение задачи (13)–(14) приводилось при $c = 3$. На рис. 2 изображено начальное приближение, а на рис. 3 — искомые траектории.

ЛИТЕРАТУРА

1. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.—1961.— Т. 16, вып. 3.— С. 171—174.
2. Кузнецов С. В. Решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений // Вычислительные методы линейной алгебры: Тр./АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.—1985.— Т. 6.— С. 85—109.
3. Годунов С. К., Гордиенко В. М. Матрица Грина краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.—1984.— Т. 39, вып. 1.— С. 40—76.
4. Годунов С. К. Метод ортогональной прогонки для решения систем разностных уравнений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1962.— Т. 2, № 6.— С. 972—982.
5. Годунов С. К. Решение систем линейных уравнений.—Новосибирск: Наука, 1980.—177 с.
6. Воеводин В. В. Решение полной проблемы собственных значений степенными методами // Вычислительные методы и программирование.—М., 1965.— С. 7—55.
7. Кублановская В. Н. О некоторых алгоритмах для решения полной проблемы собственных значений // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—1961.— Т. 1, № 2.— С. 555—570.
8. Воеводин В. В. Вычислительные основы линейной алгебры.—М.: Наука, 1977.—304 с.
9. Киселев О. В., Матрос Ю. Ш. Тепловой фронт в слое катализатора при протекании последовательных реакций // Физика горения и взрыва.—1985.— Т. 21, № 2.— С. 66—70.
10. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применения к одной биологической проблеме // Бюл./Моск. гос. ун-т. Секц. А.—1937.— Т. 4, № 6.— С. 1—26.
11. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях.—М.: Мир, 1983.—397 с.