Н. В. БЕЛЯКИН

ВЫЧИСЛЕНИЯ С ОРАКУЛАМИ

Статья представляет собой введение в общую теорию вычислений с частичными оракулами. В ней систематически изложены результаты автора по этой теме, полученные в последние годы. Некоторые простые утверждения, в ней содержащиеся, были рассеяны по различным статьям, перечислять которые здесь нет надобности.

Теория частичных оракулов восходит к работам Клини по вычислимым функционалам и составляет, таким образом, специальный раздел общей теории абстрактной вычислимости. Главная область ее применения на сегодняшний день — основания математики; однако нельзя исключать возможность практических приложений, поскольку мы здесь имеем дело с весьма удобной формой представления математических знаний.

В трех первых параграфах подробно рассматриваются наиболее существенные для теории частичных оракулов понятия: нормальность (вычислимость джамп-операции), регулярность (наличие селекторной функции) и слабая фундированность (перечислимость множества кодов вычислимых ординалов). Идейным центром статьи является § 4, в котором излагается аксиоматический подход к изучению машинно-оракульной вычислимости. Часть результатов этого параграфа была опубликована без доказательства в [1]. Наконец, в § 5 усиливается результат из [2] об оракульном моделировании простой теории типов и обсуждаются метаматематические принципы, используемые при его получении.

§ 1. МАШИНЫ И ОРАКУЛЫ

Машины Тьюринга с оракулами хорошо известны в литературе (см., например, [3, с. 322] или [4, с. 169]). Их формальное определение допускает разные эквивалентные модификации, и мы не будем на этом задерживаться. По существу, речь идет о вычислительных программах специального вида, при выполнении которых машина может выдавать во внешнюю среду вопросы и продолжает работу только после получения ответов. Источник ответов мыслится в виде некоего «оракула», т. е. не предполагается алгоритмической связи между вопросами и ответами. В дальнейшем в качестве оракулов будут использоваться одноместные числовые функции (как правило, частичные), так что на вопрос x, обращенный к оракулу $\mathcal{F}$, машина получает ответ $\mathcal{F}(x)$. Если же машина задает оракулу $\mathcal{F}$ вопрос, не входящий в его область определения $\delta\mathcal{F}$, то дальнейшее поведение машины считается не определенным (машина «застревает»).

С формальной точки зрения машина с оракулом — это пара, первая компонента которой есть программа (запись на некотором формальном языке, т. е. конструктивный объект), а вторая компонента — оракул (теоретико-множественный объект). В дальнейшем термины «машина» и «программа» будут пониматься как равнозначные, что позволит нам говорить о поведении одной и той же машины с разными оракулами. Зафиксируем какую-нибудь взаимно однозначную гёделевскую нумерацию всевозможных машин и будем отождествлять машины и их номера (аналогично будем поступать с другими конструктивными объектами).

Инициальной машиной будем называть пару $\langle m, x\rangle$, где m — машина, а x — входная информация (вернее, ее гёделевский номер). При работе инициальной машины M с оракулом $\mathcal{F}$ возможны три случая:

1) M останавливается через конечное число шагов,

2) M работает бесконечно долго,

3) M застревает.

Если $\mathcal{F}$ — всюду определенная функция, то третий случай, очевидно, невозможен, но всюду определенные оракулы нас будут интересовать меньше всего. Первые два случая обладают существенным общим свойством: в каждом из них M получает от оракула ответы на все свои вопросы. Это дает основание рассматривать их как «однородные» в противовес третьему случаю.

Вычислимость с оракулом $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F}$-вычислимость) определяется естественным образом. Через $\{z\}^{\mathcal{F}}(x_1, \ldots, x_n)$ будем обозначать n-местную частичную функцию, $\mathcal{F}$-вычисляемую машиной z. Легко проверить, что при этом остаются справедливыми: теорема об универсальной функции, S^n_m-теорема и теорема о неподвижной точке (доказательства такие же, как в обычной теории алгоритмов). Отметим, что эти теоремы имеют «равномерный» характер, т. е. соответствующие процедуры не зависят от конкретного выбора оракула $\mathcal{F}$. Например, гёделевский номер u_n универсальной n-местной $\mathcal{F}$-вычислимой функции определяется эффективно по n, и хотя машина u_n с разными оракулами вычисляет разные функции, при каждом выборе $\mathcal{F}$ это будет универсальная $\mathcal{F}$-вычислимая функция. Вопросы равномерности будут играть существенную роль в последующих рассмотрениях, поскольку оракулы (как и другие теоретико-множественные объекты) будут задаваться посредством наборов «характерных параметров» (натуральных чисел).

Введем в рассмотрение следующие множества:

$B(\mathcal{F})$ — множество инициальных машин, останавливающихся с оракулом $\mathcal{F}$,

$\tilde{B}(\mathcal{F})$ — множество инициальных машин, не застревающих с оракулом $\mathcal{F}$,

$B^*(\mathcal{F})$ — множество (не инициальных) машин, $\mathcal{F}$-вычисляющих всюду определенные одноместные функции.

Эти множества естественным образом сопутствуют каждому оракулу, поскольку от их «алгоритмической характеризации» существенно зависят свойства $\mathcal{F}$-вычислимости.

$\mathcal{F}$-разрешимость числовых множеств и предикатов определяется очевидным образом, и это свойство, конечно, сохраняется при использовании пропозициональных операций. Хуже обстоит дело с обобщением перечислимости: различные эквивалентные определения рекурсивно перечислимого множества при их непосредственном обобщении на случай вычислимости с частичным оракулом перестают быть эквивалентными. Мы выбираем в качестве «правильного» следующее определение. Множество $\mathcal{A}$ назовем *$\mathcal{F}$-перечислимым*, если оно есть область определения частичной $\mathcal{F}$-вычислимой функции. Машину, которая $\mathcal{F}$-вычисляет эту функцию, будем называть *перечисляющей машиной для множества $\mathcal{A}$*.

Очевидно, множество $B(\mathcal{F})$ является $\mathcal{F}$-перечислимым для любого $\mathcal{F}$, причем перечисляющая машина может быть указана независимо от $\mathcal{F}$ (равномерно по $\mathcal{F}$). Иначе обстоит дело с множествами $\tilde{B}(\mathcal{F})$ и $B^*(\mathcal{F})$. Если хотя бы одно из них окажется $\mathcal{F}$-перечислимым, то его перечисляющая машина как раз и будет одним из вышеупомянутых «характерных параметров» оракула $\mathcal{F}$.

Разумеется, в дальнейшем важную роль будут играть множества, являющиеся областями значений всюду определенных $\mathcal{F}$-вычислимых функций. Однако нас в основном будут интересовать оракулы, обладающие одним дополнительным свойством, в силу которого такие множества оказываются $\mathcal{F}$-разрешимыми. Это интересующее нас свойство заключается в существовании $\mathcal{F}$-вычислимой функции $\varphi_{\mathcal{F}}$, для которой выполнено следующее:

$$\varphi_{\mathcal{F}}(x)=\begin{cases}0, \text{ если } x\in B(\mathcal{F}),\\ 1, \text{ если } x\in \widetilde{B}(\mathcal{F})-B(\mathcal{F}),\\ \text{не определено для } x\,\overline{\in}\,\widetilde{B}(\mathcal{F}).\end{cases}$$

Оракул с этим свойством мы будем называть *нормальным.* Заметим, что отображение $\mathcal{F}\to\varphi_{\mathcal{F}}$ является монотонным: если $\mathcal{F}_1\subseteq\mathcal{F}_2$, то $\varphi_{\mathcal{F}_1}\subseteq\subseteq\varphi_{\mathcal{F}_2}$. Минимальная неподвижная точка этого отображения может служить примером нормального оракула. Если оракул $\mathcal{F}$ нормален, то гёделевский номер соответствующей функции $\varphi_{\mathcal{F}}$ является еще одним «характерным параметром».

Утверждение 1. *Нормальный оракул не может быть всюду определенной функцией.*

Доказательство. В противном случае $\mathcal{F}$-вычислимость совпадала бы с рекурсивностью относительно «графика» $\mathcal{F}$ (т. е. множества $C_{\mathcal{F}}=\{\langle x, y\rangle\colon \mathcal{F}(x)=y\}$), и тогда в силу нормальности $\mathcal{F}$ множество $\{x\colon \{x\}^{C_{\mathcal{F}}}(x)\text{ определено}\}$ было бы рекурсивно относительно $C_{\mathcal{F}}$, что невозможно.

Утверждение 2. *Если $\mathcal{F}$ — нормальный оракул и $R(x, y)$ — $\mathcal{F}$-разрешимый предикат, то предикат $\exists yR(x, y)$ $\mathcal{F}$-разрешим равномерно по гёделевским номерам R и $\varphi_{\mathcal{F}}$.*

Доказательство. Для произвольных r, x построим инициальную машину $M_{r,x}$, последовательно применяющую r к аргументам $\langle x, y\rangle$ при $y=0, 1, 2, \ldots$. Как только результат одного из этих применений окажется равным нулю, $M_{r,x}$ останавливается. Ясно, что $M_{r,x}$ строится рекурсивно по r, x. Затем по произвольным a, r строим машину z, которая, получив аргумент x, должна вычислить $M_{r,x}$ и применить a к аргументу $M_{r,x}$; z строится рекурсивно по a, r. Если a — гёделевский номер $\varphi_{\mathcal{F}}$ и r — разрешающая машина для R, то z — искомая разрешающая машина для $\exists yR(x, y)$.

Из этого утверждения, в частности, следует, что область значений тотальной (всюду определенной) $\mathcal{F}$-вычислимой функции $\mathcal{F}$-разрешима (для нормального $\mathcal{F}$).

Утверждение 3. *Если $\mathcal{F}$ — нормальный оракул, то $B^*(\mathcal{F})$ $\mathcal{F}$-перечислимо.*

Доказательство. Пусть a — гёделевский номер $\varphi_{\mathcal{F}}$; по любому z построим машину z', которая на аргументе x работает так. К аргументу $\langle z, x\rangle$ применяется a. Если результат применения равен нулю, то z' останавливается; если же этот результат отличен от нуля, то z' последовательно задает оракулу вопросы $0, 1, 2, \ldots$ (и застревает в силу утверждения 1). Ясно, что z и z' $\mathcal{F}$-перечисляют одно и то же множество; в частности, $z\in B^*(\mathcal{F})$ тогда и только тогда, когда $z'\in B^*(\mathcal{F})$. Теперь строим инициальную машину u_z, последовательно применяющую z' к аргументам $0, 1, 2, \ldots$. Очевидно, $u_z\in\widetilde{B}(\mathcal{F})$ тогда и только тогда, когда $z\in B^*(\mathcal{F})$, так что $B^*(\mathcal{F})\leqslant_1\widetilde{B}(\mathcal{F})$ (равномерно по a). Поскольку $\mathcal{F}$-перечислимость $\widetilde{B}(\mathcal{F})$ непосредственно следует из определения нормальности, то $B^*(\mathcal{F})$ тоже $\mathcal{F}$-перечислимо.

Заметим, что для любого $\mathcal{F}$ пересечение конечного числа $\mathcal{F}$-перечислимых множеств, очевидно, $\mathcal{F}$-перечислимо. Из утверждения 3 вытекает более сильный факт (для нормальных $\mathcal{F}$): если $R(x, y)$ $\mathcal{F}$-перечислим, то таковым же будет и $\forall yR(x, y)$.

Функционал G типа 2 (т. е. тотальное отображение вида $\mathbf{N}^n \to \mathbf{N}$) назовем *$\mathcal{F}$-вычислимым*, коль скоро существует такая машина w, что для всякого $x \in B^*(\mathcal{F})$ справедливо: $\{w\}^{\mathcal{F}}(x) = G(\lambda t\{x\}^{\mathcal{F}}(t))$. Разумеется, $\mathcal{F}$-вычислимым оказывается лишь «кусок» G: результат его ограничения $\mathcal{F}$-вычислимыми функциями. Поэтому любой функционал G', совпадающий с G на $\mathcal{F}$-вычислимых функциях, тоже оказывается $\mathcal{F}$-вычислимым. Такое словоупотребление оправдано в тех случаях, когда приходится сопоставлять различные оракулы, умеющие вычислять соответствующие «куски» одного и того же функционала. В связи с рассмотрением нормальных оракулов наиболее естественным является клиниевский функционал E, представляющий очевидную модификацию «джамп-оператора»:

$$E(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } \exists t(\alpha(t) = 0), \\ 1 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где α пробегает по всем одноместным тотальным числовым функциям. Из утверждения 2 следует, что E вычислим с любым нормальным оракулом $\mathcal{F}$ равномерно по гёделевскому номеру $\varphi_{\mathcal{F}}$.

Утверждение 4. *Если E $\mathcal{F}$-вычислим и $B^*(\mathcal{F})$ $\mathcal{F}$-перечислимо, то $\mathcal{F}$ — нормальный оракул.*

Доказательство. Множество $\tilde{B}(\mathcal{F})$ очевидным образом 1-сводимо к $B^*(\mathcal{F})$ и потому $\mathcal{F}$-перечислимо. Каждому $x \in \tilde{B}(\mathcal{F})$ сопоставим $z \in B^*(\mathcal{F})$, так что $\{z\}^{\mathcal{F}}(t) = 0$, если x к моменту t уже остановилась, и $\{z\}^{\mathcal{F}}(t) = 1$ в противном случае. Теперь из вычислимости E непосредственно получаем искомую вычислимость $\varphi_{\mathcal{F}}$.

Оракулы $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ будем называть *эквивалентными*, если каждый из них вычислим посредством другого. Будем говорить, что $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ *равнообъемны*, если для всякого $x \in \delta\mathcal{F}_1$ значение $\mathcal{F}_1(x)$ $\mathcal{F}_2$-вычислимо равномерно по x, и наоборот.

Утверждение 5. *Если $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ равнообъемны, то*

1) *всякое $\mathcal{F}_1$-разрешимое множество $\mathcal{F}_2$-разрешимо,*

2) *всякий $\mathcal{F}_1$-вычислимый функционал $\mathcal{F}_2$-вычислим.*

Доказательство. Достаточно заметить, что в силу определения равнообъемности всякое незастревающее с оракулом $\mathcal{F}_1$ вычисление можно воспроизвести с оракулом $\mathcal{F}_2$.

Дадим некоторый эвристический комментарий к предшествующим рассмотрениям. Нормальные оракулы можно неформально интерпретировать как «воображаемые механизмы», способные совершать некоторые простейшие акты бесконечного перебора. С помощью таких оракулов можно, например, за конечное число шагов выяснить, что данная машина работает бесконечно долго. В силу утверждения 2 эти акты перебора можно итерировать, так что каждый шаг может, в свою очередь, содержать бесконечный перебор и т. д. Чтобы подходящим образом охарактеризовать возможности такой итерации, приходится накладывать на оракул дополнительные условия.

§ 2. СЕЛЕКТОРНАЯ ФУНКЦИЯ

При возникновении теории алгоритмов главный интерес был направлен на разрешимые множества и всюду определенные вычислимые функции. Что же касается перечислимых множеств и частичных вычислимых функций, то они были введены в рассмотрение не столько ради них самих, сколько для того, чтобы сделать более удобным изучение общих свойств вычислимости. Такую же роль в наших рассмотрениях должны играть $\mathcal{F}$-перечислимые множества. Однако, вообще говоря, если не накладывать на оракул дополнительных ограничений, они с этой ролью справляются довольно плохо: многие естественные свойства рекурсивной перечислимости, которые, собственно говоря, и делают это понятие интересным, не всегда переносятся на $\mathscr{F}$-перечислимость. Например, для произвольного оракула $\mathscr{F}$ не обязательно должен иметь место аналог известной теоремы Поста (перечислимое множество с перечислимым дополнением разрешимо). Действительно, зафиксируем произвольный оракул $\mathscr{F}$ и произвольное не $\mathscr{F}$-разрешимое множество $\mathscr{A}$; построим новый оракул $\mathscr{F}'$, полагая $\mathscr{F}'(3^x) \simeq \mathscr{F}(x)$ и для $u \in \mathscr{A} \times (\mathrm{N} - \mathscr{A}) \mathscr{F}'(5^u) = 0$ (в остальных случаях $\mathscr{F}'(x)$ не определено). Всякое незастревающее $\mathscr{F}'$-вычисление можно промоделировать с оракулом $\mathscr{F}$: моделирующая машина игнорирует вопросы вида 5^u, поскольку, если на них вообще существует ответ, он заведомо равен нулю. Следовательно, $\mathscr{A}$ не $\mathscr{F}'$-разрешимо, хотя по построению множества $\mathscr{A}$ и $\mathrm{N} - \mathscr{A}$ $\mathscr{F}'$-перечислимы.

Приведем некоторые свойства $\mathscr{F}$-перечислимости, которые должны иметь место для «хороших» оракулов.

1. Проекция $\mathscr{F}$-перечислимого множества $\mathscr{F}$-перечислима.

2. Объединение $\mathscr{F}$-перечислимого семейства $\mathscr{F}$-перечислимых множеств $\mathscr{F}$-перечислимо.

3. $\mathscr{F}$-перечислимое множество с $\mathscr{F}$-перечислимым дополнением $\mathscr{F}$-разрешимо.

4. Функция с $\mathscr{F}$-перечислимым графиком $\mathscr{F}$-вычислима.

Эти условия не являются независимыми. Легко проверить, что условия 1 и 2 эквивалентны. Можно также показать, что условия 3 и 4 тоже эквивалентны, но нам этот факт не понадобится и мы опускаем доказательство.

Однако за счет условий 1—4 мы не получаем достаточно «комфортабельной» теории $\mathscr{F}$-перечислимости, поскольку в этом списке отсутствует самое существенное свойство, поглощающее уже названные, а именно: надо иметь возможность для любого непустого $\mathscr{F}$-перечислимого множества вычислить с оракулом $\mathscr{F}$ (равномерно по перечисляющей машине) некоторый элемент этого множества. Иначе говоря, надо предположить существование $\mathscr{F}$-вычислимой функции $\chi_{\mathscr{F}}$, такой, что

$$\exists t (\langle z, t\rangle \in B(\mathscr{F})) \to \exists u (\chi_{\mathscr{F}}(z) = u \wedge \langle z, u\rangle \in B(\mathscr{F})).$$

Гёделевский номер такой функции $\chi_{\mathscr{F}}$ (селекторной функции) будем называть *регулятором оракула* $\mathscr{F}$, а сам оракул, обладающий селекторной функцией,— *регулярным*.

Утверждение 6. *Регулярный оракул удовлетворяет условиям 1—4 равномерно по его регулятору.*

Доказательство. 1. Пусть $d_{\mathscr{F}}$— регулятор $\mathscr{F}$ и z — перечисляющая машина предиката $R(x, y)$. Для любого x множество $\{y\colon R(x, y)\}$ $\mathscr{F}$-перечислимо, и его перечисляющая машина m_x строится равномерно по x, z. Искомая перечисляющая машина для $\exists y R(x, y)$ устроена так: получив аргумент x, она применяет $d_{\mathscr{F}}$ к m_x и, если результат этого применения есть u, то к паре $\langle x, u\rangle$ применяется z. Заметим, что m_x могла перечислять пустое множество, но тем не менее значение u могло случайно быть определено, так что «контрольное» применение z к $\langle x, u\rangle$ не излишне.

2. Тривиально следует из условия 1.

3. Пусть z_1, z_2 — перечисляющие машины для $\mathscr{A}$ и $\mathrm{N} - \mathscr{A}$ соответственно. Для каждого x множество $\{\langle z_1, x\rangle, \langle z_2, x\rangle\} \cap B(\mathscr{F})$ $\mathscr{F}$-перечислимо, и его перечисляющая машина w_x строится эффективно по x, z_1, z_2. Для каждого x это множество одноэлементно: оно равно $\{\langle z_1, x\rangle\}$, если $x \in A$, и $\{\langle z_2, x\rangle\}$, если $x \overline{\in} A$. Поэтому, вычисляя значение $\chi_{\mathscr{F}}(w_x)$, мы тем самым разрешаем $\mathscr{A}$.

4. Пусть z — перечисляющая машина для графика функции $g(x)$; тогда для каждого x можно эффективно по z, x построить перечисляю-

щую машину u_x для множества $\{y\colon\ g(x)=y\}$ (это множество либо пусто, либо одноэлементно). Машина, вычисляющая g, строится так. Для данного аргумента x сначала к u_x применяется $d_{\mathscr{F}}$; если s — результат этого применения, то к паре $\langle x,\ s\rangle$ применяется z, после чего машина останавливается с результатом s. Утверждение доказано.

Будем говорить, что *оракул $\mathscr{F}$ обладает свойством парной селекции (на множестве $B(\mathscr{F})$)*, если существует $\mathscr{F}$-вычислимая функция $v_{\mathscr{F}}$, такая что

$$\{x,\ y\}\cap B(\mathscr{F})\neq\varnothing\rightarrow v_{\mathscr{F}}(x,\ y)\in\{x,\ y\}\cap B(\mathscr{F}).$$

Заметим, что парная селекция не является частным случаем селекторного свойства, так как $\mathscr{F}$-перечислимое множество $\{x,\ y\}\cap B(\mathscr{F})$, из которого нужно выбрать элемент, задается не произвольной перечисляющей машиной, а некоторым специальным образом.

Утверждение 7. *Если оракул $\mathscr{F}$ обладает парной селекцией, то он регулярен равномерно по гёделевскому номеру $v_{\mathscr{F}}$.*

Доказательство. Обозначим гёделевский номер $v_{\mathscr{F}}$ через w. Зафиксируем q так, чтобы для любых z, t (и для любого $\mathscr{F}$) имело место $\{q\}^{\mathscr{F}}(z,\ t)\simeq\{z\}^{\mathscr{F}}(t+1)$; пусть $z'=S_1^1(q,\ z)$. Далее, пусть $S=\{z\in\in B^*(\mathscr{F})\colon\ \exists t(\{z\}^{\mathscr{F}}(t)\in B(\mathscr{F}))\}$ и для $z\in S$ положим $r(z)==\min\{t:\{z\}^{\mathscr{F}}(t)\in B(\mathscr{F})\}$. С помощью теоремы о неподвижной точке построим машину p, как указано ниже (при ее описании будем для удобства предполагать, что она работает с нашим оракулом $\mathscr{F}$). Применение p к аргументу z, по построению, происходит следующим образом.

1. Вычисляется значение $a=\{w\}^{\mathscr{F}}(\{z\}^{\mathscr{F}}(0),\ \langle p,\ z'\rangle)$. Если оно определено, то p переходит к п. 2.

2. Если $a=\{z\}^{\mathscr{F}}(0)$, то p останавливается с результатом 0; в противном случае — переход к п. 3.

3. Вычисляется значение $b=\{w\}^{\mathscr{F}}(\{z\}^{\mathscr{F}}(0),\ \{z'\}^{\mathscr{F}}(\{p\}^{\mathscr{F}}(z')))$. Если оно определено — переход к п. 4.

4. Если $b=\{z\}^{\mathscr{F}}(0)$, то p останавливается с результатом 0; в противном случае p останавливается с результатом $\{p\}^{\mathscr{F}}(z')+1$.

Очевидно, p строится эффективно по w. Для $z\in S$ индукцией по $r(z)$ (учитывая, что $r(z)>0$ влечет $f(z')=r(z)-1$) легко доказать, что $\{z\}^{\mathscr{F}}(\{p\}^{\mathscr{F}}(z))\in B(\mathscr{F})$. Теперь регулятор $d_{\mathscr{F}}$ строится тривиально: для любого z пусть $\bar{z}$ есть гёделевский номер рекурсивной функции такой, что $\{\bar{z}\}(t)=\langle z,\ t\rangle$; тогда $\chi_{\mathscr{F}}=\lambda z\{p\}^{\mathscr{F}}(\bar{z})$ и гёделевский номер $\chi_{\mathscr{F}}$ находится эффективно по w. Заметим, что способ доказательства этого утверждения восходит к некоторым конструкциям Клини и Московакиса (см., например, [5]).

Утверждение 8. *Если $\mathscr{F}$ регулярен и $B^*(\mathscr{F})$ $\mathscr{F}$-перечислимо, то $\mathscr{F}$ — нормальный оракул и гёделевский номер $\varphi_{\mathscr{F}}$ строится эффективно по регулятору $d_{\mathscr{F}}$ и перечисляющей машине для $B^*(\mathscr{F})$.*

Доказательство. Достаточно убедиться в $\mathscr{F}$-вычислимости E. Для произвольного z построим z_1 и z_2 так. Машина z_1 применяет z к аргументу t и останавливается, если результат этого применения отличен от нуля; если же этот результат равен нулю, то z_1 впадает в бесконечный процесс. Машина z_2 (с любым аргументом) применяет последовательно z к аргументам $0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ и останавливается, если очередное применение дает результат 0. Очевидно, множество $\{z_1,\ z_2\}\cap B^*(\mathscr{F})$ $\mathscr{F}$-перечислимо и его перечисляющая машина строится эффективно по z и по перечисляющей машине для $B^*(\mathscr{F})$. Для всякого $z\in B^*(\mathscr{F})$ это множество равно $\{z_1\}$, если $E(\lambda t\{z\}^{\mathscr{F}}(t))=1$, и равно $\{z_2\}$ в противном случае. Поэтому, осуществляя селекцию на множестве $\{z_1,\ z_2\}\cap B^*(\mathscr{F})$, мы тем самым вычисляем $E(\lambda t\{z\}^{\mathscr{F}}(t))$.

Парную селекцию не обязательно определять на $B(\mathcal{F})$, иногда бывает удобно рассматривать в этой связи другие множества. Например, скажем, что *$\mathcal{F}$-вычислимая функция $v'_{\mathcal{F}}(x, y)$ осуществляет парную селекцию на $\delta\mathcal{F}$*, коль скоро:

$$\{x, y\} \cap \delta\mathcal{F} \neq \varnothing \to v'_{\mathcal{F}}(x, y) \in \{x, y\} \cap \delta\mathcal{F}.$$

Утверждение 9. *Если оракул $\mathcal{F}$ нормален и обладает парной селекцией на $\delta\mathcal{F}$, то $\mathcal{F}$ регулярен (и $d_{\mathcal{F}}$ строится эффективно по гёделевским номерам $\varphi_{\mathcal{F}}$ и $v'_{\mathcal{F}}$).*

Доказательство. По любой паре инициальных машин x, y построим машину $w_{x,y}$, которая следующим образом «параллельно» моделирует x и y. Этот процесс моделирования естественным образом разбивается на конечное или бесконечное число этапов. К началу очередного этапа работа каждой из машин x, y доведена до такого момента, когда машина должна задать оракулу некоторый вопрос. Пусть u_1 — вопрос машины x, а u_2 — машины y. На данном этапе делается следующее. Вычисляется $v'_{\mathcal{F}}(u_1, u_2)$ и тем самым из пары $\{u_1, u_2\}$ выделяется вопрос, заведомо принадлежащий $\delta\mathcal{F}$ (если $\{x, y\} \cap B(\mathcal{F}) \neq \varnothing$); пусть, для определенности, это будет u_1. Этот вопрос задается оракулу, после чего моделирование соответствующей машины (в нашем случае — машины x) продолжается до следующего вопроса.

Ясно, что $w_{x,y}$ строится эффективно по x, y и по гёделевскому номеру $v'_{\mathcal{F}}$. Если $\{x, y\} \cap B(\mathcal{F}) \neq \varnothing$, то $w_{x,y} \in \widetilde{B}(\mathcal{F})$. Теперь парную селекцию на $B(\mathcal{F})$ можно осуществить так. С помощью функции $\varphi_{\mathcal{F}}$ можно проанализировать поведение машины $w_{x,y}$ с оракулом $\mathcal{F}$ и выяснить, какая из машин x, y была полностью промоделирована в ходе работы $w_{x,y}$ и как именно эта машина себя ведет: останавливается или работает бесконечно. По этой информации очевидным образом производится искомая селекция.

Если z_0 и z_1 — перечисляющие машины для одного и того же множества, то, вообще говоря, $\chi_{\mathcal{F}}(z_0) \neq \chi_{\mathcal{F}}(z_1)$. Этот недостаток оказывается неустранимым.

Утверждение 10. *Пусть $\mathcal{F}$ — регулярный оракул и $d_{\mathcal{F}}$ — любой его регулятор. Тогда существуют z_0 и z_1, $\mathcal{F}$-перечисляющие одно и то же множество и такие, что $\{d_{\mathcal{F}}\}^{\mathcal{F}}(z_0) \neq \{d_{\mathcal{F}}\}^{\mathcal{F}}(z_1)$.*

Доказательство. Зафиксируем какую-нибудь машину z_0, $\mathcal{F}$-перечисляющую множество $\{0, 1\}$; предположим, для определенности, что $\{d_{\mathcal{F}}\}^{\mathcal{F}}(z_0) = 1$. С помощью теоремы о неподвижной точке построим машину z_1, которая на всех аргументах, кроме 0, 1, впадает в бесконечный процесс, на аргументе 0 останавливается, а на аргументе 1 ведет себя следующим образом. Сначала z_1 вычисляет свой гёделевский номер и применяет к нему $d_{\mathcal{F}}$. Поскольку заведомо $\langle z_1, 0\rangle \in B(\mathcal{F})$, значение $u = \{d_{\mathcal{F}}\}^{\mathcal{F}}(z_1)$ определено; очевидно, оно может быть равно только 0 или 1. Если $u = 0$, то z_1, по построению, останавливается на аргументе 1, если же $u = 1$, то z_1 впадает в бесконечный процесс. Так как $d_{\mathcal{F}}$ — регулятор $\mathcal{F}$, а z_1 $\mathcal{F}$-перечисляет непустое множество, то $\{d_{\mathcal{F}}\}^{\mathcal{F}}(z_1)$ не может быть равно 1. Следовательно, z_1 $\mathcal{F}$-перечисляет множество $\{0, 1\}$ и $\{d_{\mathcal{F}}\}^{\mathcal{F}}(z_0) \neq \{d_{\mathcal{F}}\}^{\mathcal{F}}(z_1)$.

§ 3. СЛАБАЯ ФУНДИРОВАННОСТЬ

Непустое множество $\mathfrak{D}$ числовых кортежей называется *деревом*, если $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle \in \mathfrak{D}$ влечет $\langle t_1, \ldots, t_k\rangle \in \mathfrak{D}$ для всех $k < n$; в частности, пустой кортеж $\langle\ \rangle$ должен принадлежать $\mathfrak{D}$. Кортеж $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ называется *кон-*

цевой вершиной дерева $\mathfrak{D}$, если сам он принадлежит $\mathfrak{D}$, а всякий кортеж $\langle t_1, \ldots, t_n, s\rangle$ уже не принадлежит $\mathfrak{D}$. Введем обозначения: если u — кортеж, $u = \langle u_1, \ldots, u_n\rangle$, и t — число, то кортежи $\langle t, u_1, \ldots, u_n\rangle$ и $\langle u_1, \ldots, u_n, t\rangle$ обозначим через $t * u$ и $u * t$ соответственно. *Отростком* $\mathfrak{D}/n$ *дерева* $\mathfrak{D}$ будем называть множество таких u, для которых $n * u \in \mathfrak{D}$ (если оно непусто, т. е. если $\langle n\rangle \in \mathfrak{D}$).

Если дерево $\mathfrak{D}$ является $\mathscr{F}$-разрешимым множеством, то назовем его *$\mathscr{F}$-вычислимым деревом.* Пусть $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ есть множество гёделевских номеров $\mathscr{F}$-вычислимых деревьев; дерево с гёделевским номером z обозначим $\mathfrak{D}_z^{\mathscr{F}}$ (или просто $\mathfrak{D}_z$). Очевидно, гёделевский номер отростка $\mathfrak{D}_z/n$ вычисляется по z, n с помощью некоторой рекурсивной функции $b(z, n)$.

Утверждение 11. *Для всякого $\mathscr{F}$ множества $\mathscr{D}(\mathscr{F})$ и $B^*(\mathscr{F})$ рекурсивно изоморфны.*

Доказательство. По каждому z построим машину z_1, работающую так. Получив аргумент $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$, z_1 последовательно применяет z к $\langle t_1, \ldots, t_k\rangle$ при $k = 0, 1, \ldots, n$. Если для некоторого $k < n$ результат такого применения окажется отличным от нуля, то z_1 останавливается с результатом 1, если же указанный «поиск» будет доведен до $k = n$ и результат применения z к $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ окажется определенным, z_1 останавливается с результатом 0. Очевидно, $z_1 \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ тогда и только тогда, когда $z \in B^*(\mathscr{F})$, так что $B^*(\mathscr{F}) \leqslant_1 \mathscr{D}(\mathscr{F})$. С другой стороны, по z можно построить машину z_2, которая, получив аргумент $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$, проверяет условие: для некоторого $k \leqslant n$ и для всех $i \leqslant k$ результат применения z к $\langle t_1, \ldots, t_i\rangle$ равен 0, а для $i = k+1, \ldots, n$ этот результат равен 1. Если это условие выполнено, z_2 останавливается с результатом применения z к $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$. Если же по ходу работы выяснится, что это условие нарушено, то z_2 впадает в бесконечный процесс. Стало быть $\mathscr{D}(\mathscr{F}) \leqslant_1 B^*(\mathscr{F})$, и утверждение доказано.

Обозначим через $T(\mathscr{F})$ множество гёделевских номеров $\mathscr{F}$-вычислимых деревьев с обрывом всех цепей. Каждому $z \in T(\mathscr{F})$ естественным образом сопоставляется ординал $\|z\|_{\mathscr{F}}$ — высота дерева $\mathfrak{D}_z^{\mathscr{F}}$ (по определению, *высота* $\mathfrak{D}_z^{\mathscr{F}}$ есть супремум высот его отростков $\mathfrak{D}_z^{\mathscr{F}}/n$). Полагаем $|T(\mathscr{F})| = \sup\{\|z\|_{\mathscr{F}}\colon z \in T(\mathscr{F})\}$. Очевидно, для всякого $\mathscr{F}$-разрешимого множества $Q \subseteq T(\mathscr{F})$ можно эффективно по его гёделевскому номеру построить $z \in T(\mathscr{F})$ такое, что $\|z\|_{\mathscr{F}} = \sup\{\|y\|_{\mathscr{F}}\colon y \in Q\}$. Поэтому $T(\mathscr{F})$ не может быть $\mathscr{F}$-разрешимым. Если это множество $\mathscr{F}$-перечислимо, то назовем оракул $\mathscr{F}$ *слабо фундированным.* Само множество $T(\mathscr{F})$ лишь внешне характеризует оракул, указывая, какие ординалы представимы $\mathscr{F}$-вычислимыми объектами; напротив, свойство слабой фундированности косвенно свидетельствует о наличии у оракула чего-то вроде «трансфинитной структуры», поскольку он способен «реагировать» на коды $\mathscr{F}$-вычислимых ординалов.

Утверждение 12. *Если $\mathscr{F}$ слабо фундирован, то $B^*(\mathscr{F})$ $\mathscr{F}$-перечислимо равномерно по перечисляющей машине для $T(\mathscr{F})$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $B^*(\mathscr{F}) \leqslant_1 T(\mathscr{F})$. По каждому z строим машину z', которая с аргументом u работает так. Если u — пустой кортеж, то z' останавливается с результатом 0. Если кортеж u имеет длину больше 1, то z' останавливается с результатом 1. Если же $u = \langle t\rangle$, то z' применяет z к t. Этим искомая сводимость доказана.

Нетрудно проверить, что для $z \in T(\mathscr{F})$ множества $\{y \in T(\mathscr{F})\colon \|y\|_{\mathscr{F}} \leqslant \|z\|_{\mathscr{F}}\}$ и $\{y \in T(\mathscr{F})\colon \|y\|_{\mathscr{F}} < \|z\|_{\mathscr{F}}\}$ не могут быть $\mathscr{F}$-разрешимыми за исключением тривиального случая $\{y \in T(\mathscr{F})\colon \|y\|_{\mathscr{F}} < 0\}$. В то же время справедливо

Утверждение 13. *Если $\mathscr{F}$ — нормальный оракул, то существуют $\mathscr{F}$-вычислимые функции $f_0(x, y)$, $f_1(x, y)$, определенные для всех x, $y \in$*

$\in T(\mathscr{F})$ *и такие, что*

$$f_0(x, y) = 0 \leftrightarrow \|x\|_{\mathscr{F}} \leqslant \|y\|_{\mathscr{F}}, \ f_1(x, y) = 0 \leftrightarrow \|x\|_{\mathscr{F}} < \|y\|_{\mathscr{F}},$$

коль скоро $x, y \in T(\mathscr{F})$.

Доказательство. Для $x, y \in T(\mathscr{F})$ имеем

$$\|x\|_{\mathscr{F}} \leqslant \|y\|_{\mathscr{F}} \leftrightarrow \|x\|_{\mathscr{F}} = 0 \vee \forall t\,(b(x, t) \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \to \|b(x, t)\|_{\mathscr{F}} < \|y\|_{\mathscr{F}}),$$

$$\|x\|_{\mathscr{F}} < \|y\|_{\mathscr{F}} \leftrightarrow \|y\|_{\mathscr{F}} \neq 0 \wedge \exists t\,(b(x, t) \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \wedge \|x\|_{\mathscr{F}} \leqslant \|b(y, t)\|_{\mathscr{F}}).$$

С помощью теоремы о неподвижной точке построим машины f_0 и f_1, так чтобы для $x, y \in T(\mathscr{F})$ значения $\{f_0\}^{\mathscr{F}}(x, y)$ и $\{f_1\}^{\mathscr{F}}(x, y)$ были определены и выполнялись условия

1) $\{f_0\}^{\mathscr{F}}(x, y) = 0 \leftrightarrow \|x\|_{\mathscr{F}} = 0 \vee \forall t\,(b(x, t) \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \to \{f_1\}^{\mathscr{F}}(b(x, t), y) = 0)$,

2) $\{f_1\}^{\mathscr{F}}(x, y) = 0 \leftrightarrow \|y\|_{\mathscr{F}} \neq 0 \wedge \exists t\,(b(y, t) \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \wedge \{f_0\}^{\mathscr{F}}(x, b(y, t)) = 0)$.

Построение этих машин осуществляется следующим образом. Ввиду нормальности $\mathscr{F}$, можно построить машину m, такую, что для $z \in T(\mathscr{F})$ имеем $\{m\}^{\mathscr{F}}(z) = 0$, если $\|z\|_{\mathscr{F}} = 0$, и $\{m\}^{\mathscr{F}}(z) = 1$, если $\|z\|_{\mathscr{F}} \neq 0$. Для произвольных x, y построим инициальные машины $p^0_{x,y}$, $p^1_{x,y}$, работающие так. Машина $p^0_{x,y}$ сначала применяет m к x, и если результат равен нулю, то $p^0_{x,y}$ впадает в бесконечный процесс. Если же этот результат отличен от нуля, то $p^0_{x,y}$ последовательно применяет f_1 к парам $b(x, t)$, y при $t \in \{t' : b(x, t') \in \mathscr{D}(\mathscr{F})\}$ (заметим, что $x \in T(\mathscr{F})$ влечет $b(x, t') \in \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \leftrightarrow \{x\}^{\mathscr{F}}(\langle t' \rangle) = 0$). Коль скоро результат очередного применения окажется отличен от нуля, $p^0_{x,y}$ останавливается. Заметим, что $p^0_{x,y}$ построена в расчете на то, чтобы для $x, y \in T(\mathscr{F})$ было $\varphi_{\mathscr{F}}(p^0_{x,y}) = 1$, если $\|x\|_{\mathscr{F}} \leqslant \|y\|_{\mathscr{F}}$, и $\varphi_{\mathscr{F}}(p^0_{x,y}) = 0$, если это не так. Машина $p^1_{x,y}$ строится аналогично, так чтобы (для $x, y \in T(\mathscr{F})$) было $\varphi_{\mathscr{F}}(p^1_{x,y}) = 0$, если $\|x\|_{\mathscr{F}} < \|y\|_{\mathscr{F}}$, и $\varphi_{\mathscr{F}}(p^1_{x,y}) = 1$ в противном случае. Теперь искомые машины f_0 и f_1 строятся очевидным образом: например, f_0, будучи применена к x, y, должна вычислить $\varphi_{\mathscr{F}}(p^0_{x,y})$ и остановиться с «противоположным» результатом.

Трансфинитной индукцией проверяется выполнение нужных свойств 1 и 2 для так построенных f_0 и f_1.

Следующий важный класс слабо фундированных оракулов восходит к работам Клини по теории рекурсивных функционалов [6]; правда, в этих работах идея частичного оракула (в том виде, как она представлена здесь) присутствует лишь как комментарий к довольно сложному формальному определению. Явное использование оракулов как числовых функций, удовлетворяющих определенным условиям, вероятно, заметно упростило бы изложение упомянутой теории. Особенно легко удается эта экспликация, когда речь идет о вычислимости числовых функций относительно функционалов типа 2.

Пусть $\alpha \in T_1$ (т. е. α — тотальная числовая функция) и G — тотальный функционал типа 2 ($G \in T_2$). Определим оракул $\mathscr{H}_{\alpha, G}$ как минимальную частичную функцию, удовлетворяющую условиям

1) $\mathscr{H}_{\alpha, G}(2^t) = \alpha(t)$,

2) если $y \in B^*(\mathscr{H}_{\alpha, G})$, то $\mathscr{H}_{\alpha, G}(5^y) = G(\lambda t\,\{y\}^{\mathscr{H}_{\alpha, G}}(t))$.

Аналогичным образом определяются оракулы $\mathscr{H}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, G_1, \ldots, G_m}$; такие оракулы мы будем называть *клиниевскими* ввиду их очевидной связи с теорией рекурсивных функционалов.

Легко видеть, что $\mathscr{H}_{\alpha, G}$ является, по определению, минимальной неподвижной точкой подходящего монотонного оператора $\Theta_{\alpha, G}$, описание которого непосредственно извлекается из определения $\mathscr{H}_{\alpha, G}$: $\Theta_{\alpha, G}(\mathscr{H}) =$

$=\mathcal{H}'$, где

$$\mathcal{H}'(2^t)=\alpha(t),\quad \mathcal{H}'(5^y)=G(\lambda t\{y\}^{\mathcal{H}}(t)),\ \text{если } y\in B^*(\mathcal{H});$$

в остальных случаях $\mathcal{H}'(x)$ не определено.

Ясно, что $\mathcal{H}_{\alpha,G}$ можно представить в виде $\bigcup\limits_{\gamma\in \mathrm{On}}\mathcal{H}^{\gamma}_{\alpha,G}$, где $\mathcal{H}^{0}_{\alpha,G}=\varnothing$, $\mathcal{H}^{\gamma+1}_{\alpha,G}=\Theta_{\alpha,G}(\mathcal{H}^{\gamma}_{\alpha,G})$, и $\mathcal{H}^{\gamma}_{\alpha,G}=\bigcup\limits_{\zeta<\gamma}\mathcal{H}^{\zeta}_{\alpha,G}$ для предельных γ. Для $x\in\delta\mathcal{H}_{\alpha,G}$ полагаем

$$\rho_{\alpha,G}(x)=\min\{\gamma\colon\ x\in\delta\mathcal{H}^{\gamma+1}_{\alpha,G}\},\quad |\mathcal{H}_{\alpha,G}|=\sup\{\rho_{\alpha,G}(x)\colon\ x\in\delta\mathcal{H}_{\alpha,G}\}.$$

Утверждение 14. *Оракул $\mathcal{H}_{\alpha,G}$ слабо фундирован; перечисляющая машина для $T(\mathcal{H}_{\alpha,G})$ не зависит от α, G.*

Доказательство. С помощью теоремы о неподвижной точке построим для любых z, u машину $M_{z,u}$ следующим образом. Получив аргумент t, $M_{z,u}$ применяет z к $u*t$. Если результат применения отличен от нуля, то $M_{z,u}$ останавливается. Если же этот результат равен нулю, то $M_{z,u}$ задает вопрос $5^{M_{z,u*t}}$ и после получения ответа останавливается. Если $z\in T(\mathcal{H}_{\alpha,G})$, то индукцией по $\|z\|_{\mathcal{H}_{\alpha,G}}$ легко доказывается, что для любого $u\in\mathfrak{D}_z^{\mathcal{H}_{\alpha,G}}$ справедливо $M_{z,u}\in B^*(\mathcal{H}_{\alpha,G})$; в частности, $M_{z,\langle\rangle}\in B^*(\mathcal{H}_{\alpha,G})$. Пусть $z\in\mathcal{D}(\mathcal{H}_{\alpha,G})-T(\mathcal{H}_{\alpha,G})$. Предположим от противного, что $M_{z,\langle\rangle}\in B^*(\mathcal{H}_{\alpha,G})$. Выберем такое t_0, что $b(z,t_0)\in T(\mathcal{H}_{\alpha,G})$. Поскольку $M_{z,\langle\rangle}\in B^*(\mathcal{H}_{\alpha,G})$, имеем $M_{z,\langle t_0\rangle}\in B^*(\mathcal{H}_{\alpha,G})$; кроме того, $\rho_{\alpha,G}(5^{M_{z,\langle t_0\rangle}})<\rho_{\alpha,G}(5^{M_{z,\langle\rangle}})$. Теперь выберем t_1, чтобы было $b(b(z,t_0),t_1)\in T(\mathcal{H}_{\alpha,G})$ и аналогично заключаем, что $M_{z,\langle t_0,t_1\rangle}\in B^*(\mathcal{H}_{\alpha,G})$ и $\rho_{\alpha,G}\left(5^{M_{z,\langle t_0,t_1\rangle}}\right)<\rho_{\alpha,G}\left(5^{M_{z,\langle t_0\rangle}}\right)$. Продолжая таким же образом, получаем бесконечно убывающую последовательность ординалов, что невозможно. Таким образом,

$$z\in T(\mathcal{H}_{\alpha,G})\leftrightarrow z\in\mathcal{D}(\mathcal{H}_{\alpha,G})\wedge M_{z,\langle\rangle}\in B^*(\mathcal{H}_{\alpha,G}).$$

Так как $B^*(\mathcal{H}_{\alpha,G})$ по построению $\mathcal{H}_{\alpha,G}$-перечислимо, то в силу утверждения 11 $T(\mathcal{H}_{\alpha,G})$ тоже $\mathcal{H}_{\alpha,G}$-перечислимо.

Утверждение 15. *Если оракул $\mathcal{H}_{\alpha,G}$ нормален, то он регулярен, причем его регулятор строится эффективно по гёделевскому номеру $\varphi_{\mathcal{H}_{\alpha,G}}$.*

Доказательство. Воспользуемся утверждением 9 и теоремой о неподвижной точке. Пусть $\{x,y\}\cap\delta\mathcal{H}_{\alpha,G}\neq\varnothing$. Если x или y имеет вид 2^t, то селекция осуществляется тривиально. Если это не так, строим машину $w_{x,y}$, как описано в доказательстве утверждения 9 (обращаем внимание, что в этом построении используется еще не известный нам параметр: код искомой селекторной функции $v'_{\mathcal{H}_{\alpha,G}}$). На множестве пар $\{x,y\}$, имеющих непустое пересечение с $\delta\mathcal{H}_{\alpha,G}$, зададим ранговую функцию $r(x,y)$, полагая $r(x,y)=\min\{\rho_{\alpha,G}(x),\ \rho_{\alpha,G}(y)\}$ (для $u\in\delta\mathcal{H}_{\alpha,G}$ считаем $\rho_{\alpha,G}(u)=|\mathcal{H}_{\alpha,G}|$). Индукцией по $r(x,y)$ легко проверяется, что $w_{x,y}\in\tilde{B}(\mathcal{H}_{\alpha,G})$, коль скоро $\{x,y\}\cap\delta\mathcal{H}_{\alpha,G}\neq\varnothing$. Завершается доказательство так же, как для утверждения 9.

Для произвольного $G\in T_2$ определим функционал G' так:

$$G'(\alpha,t)=\begin{cases}0, & \text{если } t\in \text{графику } \mathcal{H}_{\alpha,G},\\ 1 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Отображение $S\colon G\to G'$ называется *суперджампом*. В частности, $S(E)$ — это так называемая *гиперджамп-операция*. Другая общеупотребительная форма представления той же операции — функционал E_1:

$$E_1(\alpha)=\begin{cases}0, & \text{если } \forall\beta\exists t\,(\alpha(\bar\beta(t))=0),\\ 1 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

(где $\bar{\beta}(t)=\langle\beta(0), \ldots, \beta(t-1)\rangle$). Функционалы E_1 и $S(E)$ взаимно вычислимы относительно друг друга в следующем естественном смысле. Будем говорить, что G_1 *вычислим относительно* G_2, если для некоторого w справедливо $G_1(\alpha)=\{w\}^{\mathscr{H}_{\alpha, G_2}}(0)$ для всех α. Заметим, что функционал $S(G)$ зависит от двух аргументов. При помощи очевидной перекодировки его можно было бы превратить в одноместное отображение G^+: $T_1 \to \mathbf{N}$, так что G^+ и $S(G)$ будут взаимно вычислимы. Но в такой перекодировке нет надобности, поскольку, например, определение клиниевского оракула тривиально распространяется на функционалы такого более общего вида.

§ 4. АКСИОМАТИЗАЦИЯ

Представление о машине с оракулом $(m, \mathscr{F})$ как о «симбиозе» конструктивного объекта с теоретико-множественным не совсем удовлетворительно в методологическом отношении. В самом деле, конструктивный объект — это то, что можно породить многократным применением каких-либо «механических» правил, тогда как множества суть воображаемые «вещи», с которыми мы якобы оперируем по ходу наших формальных рассуждений. Таким образом, речь идет не просто об объектах двух сортов, а о разных математических универсумах. Обычно это обстоятельство игнорируется, причем фактически происходит подмена конструктивных объектов их теоретико-множественной имитацией (например, натуральных чисел — элементами множества ω), что не очень естественно.

Последовательный учет этих соображений вывел бы нас в альтернативную теорию множеств [7]; здесь мы не будем заходить столь далеко. В частности, не будем уточнять, что мы понимаем под «стандартным» натуральным рядом. Однако заметим, что нет надобности представлять себе оракул как индивидуальный теоретико-множественный объект (допустимое значение предметной переменной). Более естественно считать его неопределяемым понятием, добавленным к языку элементарной арифметики.

Поскольку оракул есть частичная функция, то предпочтительнее ввести в сигнатуру имя не самого оракула, а его графика. Так мы и поступим, но для наглядности будем пользоваться атомарными выражениями вида $\mathscr{F}(x)=y$ (x, y — переменные или константы), предполагая, что символ $\mathscr{F}$ никаким иным образом в наши формулы не входит. В принципе может оказаться желательным расширение арифметического языка за счет присоединения символов нескольких оракулов: кроме того, можно добавлять предметные константы.

Основной язык, с которым мы будем иметь дело,— это язык элементарной арифметики с добавленным к нему символом оракула $\mathscr{F}$ (вернее, предикатным символом $R_{\mathscr{F}}$ для его графика) и с предметной константой c, роль которой будет объяснена чуть ниже. Подразумевается, что предметные переменные пробегают стандартный натуральный ряд, а $\mathscr{F}$ интерпретируется как некоторая частичная числовая функция. Ясно, что поведение всякой машины z с оракулом $\mathscr{F}$ можно описать в этом языке; поэтому множества $B(\mathscr{F})$, $\tilde{B}(\mathscr{F})$, $B^*(\mathscr{F})$ и $\mathscr{D}(\mathscr{F})$, в очевидном смысле, выразимы. Хуже обстоит дело с множеством $T(\mathscr{F})$, так как в его определении фигурирует условие обрыва цепей. По этой причине мы ограничимся такими интерпретациями рассматриваемого языка, в которых $\mathscr{F}$ является слабо фундированным оракулом; константа c интерпретируется как перечисляющая машина для $T(\mathscr{F})$. Такие интерпретации будут называться *стандартными*.

Отношение $P(\mathscr{F}, \bar{x})$, по определению, выразимо в нашем языке, если некоторая формула $\varphi(\mathscr{F}, \bar{x})$ выражает его в любой стандартной интерпретации. Очевидно, $T(\mathscr{F})$ выразимо посредством формулы $\langle c, x\rangle \in \in B(\mathscr{F})$.

Рассмотрим теперь формальную систему F в описанном расширении арифметического языка. Примем аксиомы элементарной арифметики (математическая индукция распространяется на любые формулы). Добавим к ним формулу $R_{\mathscr{F}}(x, y) \wedge R_{\mathscr{F}}(x, z) \to y=z$. Сверх того, примем в качестве аксиомы утверждение о регулярности $\mathscr{F}$ (очевидно, выразимое в нашем языке) и следующие аксиомы, характеризующие константу c. Первая аксиома утверждает, что $\{\langle\ \rangle\}$ есть дерево с обрывом цепей и если все отростки некоторого дерева $\mathfrak{D}_z^{\mathscr{F}}$ суть деревья с обрывом цепей, то таково же и само $\mathfrak{D}_z^{\mathscr{F}}$:

$$(\mathfrak{D}_z^{\mathscr{F}} = \{\langle\ \rangle\} \to \langle c, z\rangle \in B(\mathscr{F})). \wedge .(\forall t\,(b(z, t) \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \to$$
$$\to \langle c, b(z, t)\rangle \in B(\mathscr{F}))) \to \langle c, z\rangle \in B(\mathscr{F}).$$

Вторая аксиома (схема аксиом) — это принцип $T(\mathscr{F})$-индукции:

$$(\mathfrak{D}_z^{\mathscr{F}} = \{\langle\ \rangle\} \to \varphi(z)) \wedge (\forall t\,(b(z, t) \in \mathscr{D}(\mathscr{F}) \to \varphi(b(z, t))) \to \varphi(z)). \to .$$
$$. \to . \forall y\,(\langle c, y\rangle \in B(\mathscr{F}) \to \varphi(y)),$$

где φ — любая формула рассматриваемого языка.

Утверждения 1—13 доказуемы в F (в чем легко убедиться, просматривая их доказательства). Исследуем теперь возможности этой системы для осуществления более сложных «машинно-оракульных» конструкций. Заметим, что $T(\mathscr{F})$ является лишь одной из возможных систем обозначений для $\mathscr{F}$-вычислимых ординалов; в дальнейшем придется иметь дело и с другими системами. Нас будут интересовать только такие системы ординальных обозначений, для которых можно установить равномерные $\mathscr{F}$-вычислимые связи с $T(\mathscr{F})$, обеспечивающие выводимость в F соответствующего варианта трансфинитной индукции. Во многих случаях это удается сделать, исходя из следующих соображений.

Пусть $R(x, y, \mathscr{F})$ — выразимый предикат; $C_{R,\mathscr{F}} = \{y\colon \exists x\,(R(x, y, \mathscr{F}) \vee \vee R(y, x, \mathscr{F}))\}$. Формульную схему

$$\forall x \in C_{R,\mathscr{F}}\,(\forall y\,(R(y, x, \mathscr{F}) \wedge y \neq x \to \varphi(y)) \to \varphi(x)) \to \forall x \in C_{R,\mathscr{F}}\varphi(x)$$

будем называть *R-индукцией*. Спрашивается: при каких обстоятельствах R-индукция (для фундированного R) выводима в F? Подходящим достаточным условием является следующее

Условие I. Отношение $\lambda xyR(x, y, \mathscr{F})$ рефлексивно и транзитивно; для каждого $x \in C_{R,\mathscr{F}}$ можно эффективно указать $q_x \in B^*(\mathscr{F})$, такое что $\{z\colon \{q_x\}^{\mathscr{F}}(z) = 0\}$ есть множество R-предшественников x, конфинальное x, т. е.

$$\forall y\,(R(y, x, \mathscr{F}) \wedge y \neq x \to \exists z\,(\{q_x\}^{\mathscr{F}}(z) = 0 \wedge R(y, z, \mathscr{F}))).$$

Утверждение 16. *Если R удовлетворяет условию* I, *то свойство фундированности R выразимо в F.*

Доказательство. Пусть условие I выполнено; надо указать формулу φ (без свободных переменных), истинную в точности для таких стандартных интерпретаций, при которых $\lambda xyR(x, y, \mathscr{F})$ фундировано. С помощью теоремы о неподвижной точке построим рекурсивную функцию e, так чтобы для любого x машина $e(x)$ с аргументом u работала следующим образом. Если $u = \langle\ \rangle$, то $e(x)$ останавливается с результатом 0; если же $u = t * u_1$, то $e(x)$ применяет q_x к аргументу t. Если результат применения отличен от нуля, то $e(x)$ останавливается с результатом 1, а если применение q_x к t дает результат 0, то $e(x)$ применяет $e(t)$ к u_1. Таким образом, коль скоро $x \in C_{R,\mathscr{F}}$, то $e(x) \in \mathscr{D}(\mathscr{F})$ и отростки $\mathfrak{D}_{e(x)}^{\mathscr{F}}$ суть деревья, сопоставляемые функцией e предшественникам x из множества $\{z: \{q_x\}^{\mathcal{F}}(z)=0\}$. Очевидно, в качестве искомой φ можно взять формулу $\forall x \in C_{R,\mathcal{F}}(\langle c, e(x)\rangle \in B(\mathcal{F}))$; точнее, конъюнкция этой φ и условия I (которую мы обозначим через $\mathfrak{C}_R$) выражает свойство: R есть фундированный предикат, удовлетворяющий условию I.

Возьмем сначала в качестве R отношение: $y, z \in T(\mathcal{F}) \wedge \|y\|_{\mathcal{F}} \leqslant \leqslant \|z\|_{\mathcal{F}}$; для него условие I тривиально выполнено, поскольку конфинальным множеством предшественников любого $z \in T(\mathcal{F})$ является множество кодов отростков $\mathfrak{D}_z^{\mathcal{F}}$, т. е. $\{b(z, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{F})\}$. Соответствующий этому R принцип индукции естественно назвать $\|z\|_{\mathcal{F}}$-*индукцией.*

Утверждение 17. *Принцип* $\|z\|_{\mathcal{F}}$ *-индукции выводим в F.*

Доказательство. В силу утверждений 8 и 12 оракул $\mathcal{F}$ нормален, так что мы можем воспользоваться функциями f_0, f_1, построенными при доказательстве утверждения 13. Для произвольной формулы φ предположим, что $z\|_{\mathcal{F}}=0 \to \varphi(z)$ и $\forall y(f_1(y, z)=0 \wedge \langle c, y\rangle \in B(\mathcal{F}) \to \to \varphi(y)) \to \varphi(z)$. Пусть $\varphi'(z)$ означает $\varphi(z) \wedge \forall y(f_1(y, z)=0 \wedge \langle c, y\rangle \in \in B(\mathcal{F}) \to \varphi(y))$. Из построения f_0, f_1 следует (для $z, z' \in (T(\mathcal{F}))$, что если $\|z\|_{\mathcal{F}}=\|z'\|_{\mathcal{F}}$ (т. е. $f_0(z, z')=0 \wedge f_1(z, z')=1$), то $\varphi'(z)$ влечет $\varphi'(z')$. Пусть $\psi(z)$ есть $\forall t(b(z, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{F}) \to \varphi'(b(z, t))) \to \varphi'(z)$. Применяя $T(\mathcal{F})$-индукцию, заключаем, что $\psi(z)$ имеет место для всех $z \in \in T(\mathcal{F})$. Снова применяя $T(\mathcal{F})$-индукцию, убеждаемся, что φ', а значит и φ, справедливо для всех $z \in T(\mathcal{F})$.

Утверждение 18. *В F доказуемо, что из $\mathfrak{C}_R$ следует R-индукция.*

Доказательство. Пусть свойство φ таково, что для $x \in C_{R,\mathcal{F}}$ $\varphi(x)$ следует из $\forall y(R(y, x, \mathcal{F}) \wedge y \neq x \to \varphi(y))$. Допустим, что $\varphi(x)$ ложно для некоторого x из $C_{R,\mathcal{F}}$. Имеем $e(x) \in T(\mathcal{F})$ (где e — функция из доказательства утверждения 16). В силу утверждения 17 это x можно выбрать так, чтобы значение $\|e(x)\|_{\mathcal{F}}$ было минимальным. Так как $\varphi(x)$ ложно, то для некоторого y, R-предшествующего x, $\varphi(y)$ ложно. В силу условия I это y является R-предшественником некоторого $y' \in \{z: \{q_x\}^{\mathcal{F}}(z)=0\}$, причем по построению функции e справедливо $\|e(y')\|_{\mathcal{F}} < \|e(x)\|_{\mathcal{F}}$, что противоречит выбору x.

Наша ближайшая цель — развить в рамках теории F некоторую элементарную часть теории индуктивных определений. Рассмотрим вспомогательную систему F', расширяющую F следующим образом. К языку F добавим переменные X, Y, ..., допустимые значения которых — числовые множества; на эти переменные не разрешается навешивать кванторы. Схемы аксиом распространяем на этот расширенный язык; других новых аксиом не добавляем. В теории F' можно говорить об операторах, заданных на числовых множествах, коль скоро эти операторы, в очевидном смысле, определимы в F'. Заметим, что такой оператор Θ, вообще говоря, зависит от оракула $\mathcal{F}$ как от параметра: $\Theta=\lambda X \Theta(X, \mathcal{F})$. Использование «переменных множеств» в контексте наших рассмотрений не очень естественно. Однако если X выразимо в исходной системе F, то таково же и $\Theta(X)$, причем формула, описывающая Θ в F', устанавливает равномерную связь между X и $\Theta(X)$, так что можно воспринимать X, Y, ... как метапеременные.

Итак, пусть Θ — выразимый оператор. Полагаем

$$X_\Theta^\xi=\bigcup_{\zeta<\xi} \Theta(X_\Theta^\zeta), \quad X_\Theta=\bigcup_\xi X_\Theta^\xi, \quad |x|_\Theta=\min\{\xi: x \in X_\Theta^{\xi+1}\}.$$

Назовем Θ $\mathcal{F}$-*вычислимым*, если существует рекурсивная функция (с гёделевским номером M_Θ), такая, что, если $z \in B^*(\mathcal{F})$, то $\{M_\Theta\}(z) \in \in B^*(\mathcal{F})$ и притом $Y_{\{M_\Theta\}(z)}=\Theta(Y_z)$, где $Y_z=\{t: \{z\}^{\mathcal{F}}(t)=0\}$. Если мы дополнительно потребуем, чтобы это соотношение было выводимо в F, то будем говорить, что Θ *верифицируем в* F.

Утверждение 19. *Если оператор* Θ $\mathcal{F}$*-вычислим и верифицируем в* F, *то соотношение* $X_\Theta^{\|z\|_{\mathcal{F}}} = \bigcup_{\|y\|_{\mathcal{F}} < \|x\|_{\mathcal{F}}} \Theta\left(X_\Theta^{\|y\|_{\mathcal{F}}}\right)$ *выразимо и доказуемо в* F.

Доказательство. Располагая параметром M_Θ, можно с помощью теоремы о неподвижной точке построить рекурсивную функцию e, такую, что в F доказуемо $z \in T(\mathcal{F}) \to Y_{e(z)} = \bigcup_n \Theta(Y_{e(b(z,n))})$. Затем с помощью $\|z\|_{\mathcal{F}}$-индукции доказывается, что $\|z_1\|_{\mathcal{F}} = \|z_2\|_{\mathcal{F}}$ влечет $Y_{e(z_1)} = Y_{e(z_2)}$. Стало быть, мы можем определить $X_\Theta^{\|z\|_{\mathcal{F}}}$ $(z \in T(\mathcal{F}))$ как $Y_{e(z)}$ и, снова применяя $\|z\|_{\mathcal{F}}$-индукцию, убеждаемся в доказуемости искомого соотношения.

Мы не можем гарантировать, что последовательность $\{X_\Theta^\xi\}$ стабилизируется к моменту $|T(\mathcal{F})|$, однако во многих случаях это так. Чтобы охватить достаточно широкий запас таких случаев, положим на Θ еще одно требование, обеспечивающее выполнение условия I для отношения $|x|_\Theta \leqslant |y|_\Theta \leqslant |T(\mathcal{F})|$. Полагаем $Z_y = \{t\colon \langle y, t\rangle \in B(\mathcal{F})\}$.

Условие II. Существует рекурсивная функция g, такая, что

1) если $x \in \Theta(Z_y)$, то $g(x, y) \in B^*(\mathcal{F})$ и $Y_{g(x,y)} \subseteq Z_y$,

2) если $g(x, y) \in B^*(\mathcal{F})$ и $Y_{g(x,y)} \subseteq Z_u$, то $x \in \Theta(Z_u)$.

Говоря неформально, $\mathcal{F}$-разрешимое множество $Y_{g(x,y)}$ можно понимать как «объяснение причины» того, что $x \in \Theta(Z_y)$.

Утверждение 20. *В предположении* $\mathcal{F}$*-вычислимости и верифицируемости* Θ, *если выполнено условие* II, *то соотношение* $X_\Theta^{|T(\mathcal{F})|} = \Theta\left(X_\Theta^{|T(\mathcal{F})|}\right)$ *доказуемо в* F.

Доказательство. Из утверждения 19 следует F-перечислимость $X_\Theta^{|T(\mathcal{F})|}$, и соответствующая перечисляющая машина y может быть явно указана. Пусть $x \in \Theta\left(X_\Theta^{|T(\mathcal{F})|}\right)$; тогда $g(x, y) \in B^*(\mathcal{F})$ и $Y_{g(x,y)} \subseteq X_\Theta^{|T(\mathcal{F})|}$. В таком случае $Y_{g(x,y)} \subseteq X_\Theta^{\|z\|_{\mathcal{F}}}$ для некоторого $z \in T(\mathcal{F})$; значит, $x \in X_\Theta^{\|z\|_{\mathcal{F}}+1}$.

Наша следующая задача — формализовать в F определение клиниевского оракула $\mathcal{H}_{\alpha,G}$ (мы ограничиваемся $\mathcal{F}$-вычислимыми α, G). В § 3 этот оракул определялся как неподвижная точка оператора, заданного не на любых числовых множествах, а лишь на графиках функций; но это несущественно, поскольку свойство: X есть график функции — тривиально выразимо в F'.

Пусть машина w удовлетворяет следующим условиям:

1) если $z \in B^*(\mathcal{F})$, то $\langle w, z\rangle \in B(\mathcal{F})$,

2) если z_1, z_2 принадлежат $B^*(\mathcal{F})$ и $\{z_1\}^{\mathcal{F}} = \{z_2\}^{\mathcal{F}}$, то $\{w\}^{\mathcal{F}}(z_1) = \{w\}^{\mathcal{F}}(z_2)$.

Тогда w задает некоторый функционал $G_w^{\mathcal{F}}$ на тотальных $\mathcal{F}$-вычислимых функциях. Если $a \in B^*(\mathcal{F})$, то определим оператор $\Theta_{a,w}$ следующим образом. Когда X не есть график функции, $\Theta_{a,w}(X) = \varnothing$. В противном случае

$$\Theta_{a,w}(X) = \{\langle 2^t, s\rangle\colon s = \{a\}^{\mathcal{F}}(t)\} \cup$$
$$\cup \{\langle 5^y, s\rangle\colon y \in B^*(X) \wedge \exists z \in B^*(\mathcal{F})\left(\{z\}^{\mathcal{F}} = \{y\}^X \wedge \{w\}^{\mathcal{F}}(z) = s\right)\}.$$

Утверждение 21. *В* F *доказуемо, что* $\Theta_{a,w}$ $\mathcal{F}$*-вычислим и удовлетворяет условию* II.

Доказательство. Если X $\mathcal{F}$-разрешимо и является графиком функции, то $B^*(X)$ тоже $\mathcal{F}$-разрешимо (равномерно по разрешающей

X машине). Моделируя с оракулом $\mathscr{F}$ поведение машины y, соединенной с оракулом X, можно для $y \in B^*(X)$ найти $z \in B^*(\mathscr{F})$, чтобы было $\{y\}^x = \{z\}^{\mathscr{F}}$. Это доказывает $\mathscr{F}$-вычислимость $\Theta_{a,w}$. Что касается условия II, то достаточно заметить, что если X — функция с $\mathscr{F}$-перечислимым графиком и $y \in B^*(X)$, то множество вопросов, задаваемых машиной y оракулу X, $\mathscr{F}$-разрешимо.

Очевидно, $X_{\Theta_{a,w}}$ есть график $\mathscr{H}_{\alpha, G_w^{\mathscr{F}}}$ $(\alpha = \{a\}^{\mathscr{F}})$; в силу доказанного $X_{\Theta_{a,w}} = X_{\Theta_{a,w}}^{|T(\mathscr{F})|}$.

Утверждение 22. *Для всякой определимой в F функции X импликация* $\Theta_{a,w}(X) = X \to X_{\Theta_{a,w}} \subseteq X$ *доказуема в F.*

Доказательство. Монотонность $\Theta_{a,w}$ легко верифицируется в F'. С помощью $\|z\|_{\mathscr{F}}$-индукции получаем отсюда, что $X_{\Theta_{a,w}}^{\|z\|\mathscr{F}} \subseteq X$ $(z \in T(\mathscr{F}))$.

Для x, x' из $\delta\mathscr{H}_{\alpha,G}$ (где α, G $\mathscr{F}$-вычислимы) пусть $x' \prec x$ означает, что $x = 5^y$ и машина y задает оракулу $\mathscr{H}_{\alpha,G}$ вопрос x'. Ясно, что условие I для транзитивного замыкания $\prec$ выводимо в F. Так как из построения $\mathscr{H}_{\alpha,G}$ внутри теории F непосредственно следует $\delta\mathscr{H}_{\alpha,G} \leqslant \leqslant_1 T(\mathscr{F})$, то в F выводима $\prec$-индукция. Легко доказывается также, что $\mathscr{H}_{\alpha,G}^{\|z\|\mathscr{F}}$ зависит только от $\|z\|_{\mathscr{F}}$, а отсюда следует $\rho_{\alpha,G}$-индукция. Теперь утверждения 14 и 15 тоже могут быть доказаны в F.

Построение $\mathscr{H}_{\alpha,G}$ является абсолютным в следующем естественном смысле. Пусть $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$ суть регулярные и слабо фундированные оракулы. Предположим, что $\{a_1\}^{\mathscr{F}_1} = \{a_2\}^{\mathscr{F}_2}$ (где $a_1 \in B^*(\mathscr{F}_1)$, $a_2 \in B^*(\mathscr{F}_2)$) и $G_{w_1}^{\mathscr{F}_1} = G_{w_2}^{\mathscr{F}_2}$ (где w_1, $\mathscr{F}_1$ и w_2, $\mathscr{F}_2$ связаны условиями 1 и 2). Запись $G_{w_1}^{\mathscr{F}_1} = G_{w_2}^{\mathscr{F}_2}$ означает, что соответствующие функционалы совпадают на функциях, одновременно вычислимых с $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$. В таком случае, очевидно, $\mathscr{H}_{\{a_1\}^{\mathscr{F}_1}, G_{w_1}^{\mathscr{F}_1}} = \mathscr{H}_{\{a_2\}^{\mathscr{F}_2}, G_{w_2}^{\mathscr{F}_2}}$.

Чтобы формально выразить этот факт элементарными средствами, рассмотрим еще одну вспомогательную теорию, связанную с F: обозначим ее F°. Она получается из F путем «удвоения» оракула. Вместо символа $\mathscr{F}$ и константы c в языке F° содержатся имена двух оракулов $\mathscr{F}_1$ и $\mathscr{F}_2$, а также двух констант c_1, c_2 для представления $T(\mathscr{F}_1)$ и $T(\mathscr{F}_2)$ соответственно. Для обоих оракулов принимаются одинаковые аксиомы; схемы аксиом распространяются на всевозможные формулы, так что, например, можно с помощью $T(\mathscr{F}_1)$-индукции доказывать утверждения, содержащие $\mathscr{F}_2$. Стандартные интерпретации F° определяются очевидным образом. Любую конструкцию, осуществленную в F, можно продублировать в F°, соотнося ее с $\mathscr{F}_1$ или с $\mathscr{F}_2$. Поэтому в F° можно доказывать абсолютность таких конструкций.

Утверждение 23. *Для $\mathscr{F}$-вычислимых α, G абсолютность $\mathscr{H}_{\alpha,G}$ доказуема в F°.*

Доказательство. С помощью $T(\mathscr{F}_1)$-индукции доказывается равенство $\mathscr{H}^{|T(\mathscr{F}_1)|}_{\{a_1\}^{\mathscr{F}_1}, G_{w_1}^{\mathscr{F}_1}} = \mathscr{H}^{|T(\mathscr{F}_1)|}_{\{a_2\}^{\mathscr{F}_2}, G_{w_2}^{\mathscr{F}_2}}$, а с помощью $T(\mathscr{F}_2)$-индукции — равенство

$$\mathscr{H}^{|T(\mathscr{F}_2)|}_{\{a_1\}^{\mathscr{F}_1}, G_{w_1}^{\mathscr{F}_1}} = \mathscr{H}^{|T(\mathscr{F}_2)|}_{\{a_2\}^{\mathscr{F}_2}, G_{w_2}^{\mathscr{F}_2}}.$$

Утверждения 19—23 могут служить ориентиром при выборе дальнейших усилений нашей теории F за счет введения подходящих аксиом, наделяющих оракул $\mathscr{F}$ дополнительными способностями. В этой связи сделаем несколько предварительных замечаний касательно суперджамп-операции и возможностей ее аксиоматизации в описанном здесь стиле, которыми мы и заключим этот параграф. Заметим, что для построения клиниевского оракула $\mathscr{H}_{\alpha,G}$ (для $\mathscr{F}$-вычислимых α, G) вовсе не требуется, чтобы вычисляющая G машина w была применима к гёделевским номерам любых $\mathscr{F}$-вычислимых функций, а нужно лишь, чтобы это имело место для тех функций, которые окажутся $\mathscr{H}_{\alpha,G}$-вычислимыми, когда построение $\mathscr{H}_{\alpha,G}$ будет завершено. Это последнее условие выразимо в F, поскольку его нарушение обнаруживается при построении $\mathscr{H}^{\gamma}_{\alpha,G}$ на некотором шаге $\gamma < |T(\mathscr{F})|$. Исключать подобные случаи из рассмотрения — значило бы вносить в исследуемую ситуацию неоправданные ограничения. Поэтому представляется целесообразным усилить F добавлением такой аксиомы: для всякой $\mathscr{F}$-вычислимой функции α и всякого (вообще говоря, частичного) $\mathscr{F}$-вычислимого функционала G, коль скоро оракул $\mathscr{H}_{\alpha,G}$ может быть построен, его график $\mathscr{F}$-разрешим равномерно по гёделевским номерам α и G. Приведем без доказательства следующие факты.

1. Можно построить (средствами теории множеств) регулярный и слабо фундированный оракул, удовлетворяющий этой новой аксиоме.

2. Его построение можно воспроизвести в рассматриваемом расширении F и доказать, что он обладает нужными свойствами.

3. Указанное построение будет абсолютным.

Заметим, что понятие стандартной интерпретации использовалось нами как эвристическое средство. Продемонстрированные эффекты «самовоспроизводимости» и абсолютности скорее означают, что в широком контексте мы можем вообще не интересоваться, имеет ли данный вариант «арифметики с оракулом» стандартную модель; разумеется, этот контекст включает в себя не только доказывание теорем в имеющейся на данный момент теории, но и усиление оракула, по мере надобности. Грубо говоря, мы имеем возможность представлять себе стандартную интерпретацию теории вычислений с оракулом, даже когда точно известно, что такой интерпретации нет.

§ 5. ТЕХНИКА НАКОПИТЕЛЕЙ

Рассмотрим сначала простой пример (извлеченный из [2]), представляющий и некоторый самостоятельный интерес. Пусть $\mathscr{M}$ — множество числовых последовательностей, вполне упорядоченное отношением $<_{\mathscr{M}}$. Определим функционал $G_{\mathscr{M}}(\beta, a, t)$ следующим образом. Пусть a — гёделевский номер формулы языка арифметики второго порядка без свободных числовых переменных и n — число свободных функциональных переменных этой формулы (обозначим ее A). Произвольную числовую последовательность β представим в виде $\beta = \lambda t\langle\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t)\rangle$ и функции β_i подставим в A вместо свободных функциональных переменных. Связанные функциональные переменные пусть пробегают множество $\mathscr{M}$. Проинтерпретированную таким образом формулу A обозначим $A_{\mathscr{M},\beta}$. Полагаем $G_{\mathscr{M}}(\beta, a, t) = 0$, если $A_{\mathscr{M},\beta}$ ложна. Если $A_{\mathscr{M},\beta}$ истинна и не начинается квантором существования, то $G_{\mathscr{M}}(\beta, a, t) = 1$. Допустим, что A имеет вид $\exists x B(x)$; тогда $G_{\mathscr{M}}(\beta, a, t) = x_0 + 1$, где x_0 — наименьшее число, такое что истинна $B_{\mathscr{M},\beta}(x_0)$. Наконец, рассмотрим случай, когда A есть $\exists\eta B(\eta)$; пусть η_0 — $<_{\mathscr{M}}$-наименьший элемент $\mathscr{M}$, такой, что $B_{\mathscr{M},\beta}(\eta_0)$; полагаем $G_{\mathscr{M}}(\beta, a, t) = \eta_0(t) + 1$. Тем самым $G_{\mathscr{M}}$ полностью определен. Построим клиниевский оракул $\mathscr{H}_{G_{\mathscr{M}}}$ (этот оракул релятивизован только к функционалу, так что вопросы 2^t в нем отсутствуют).

Утверждение 24. *Пусть $R_{\mathscr{M}}$ — множество $\mathscr{H}_{G_{\mathscr{M}}}$-вычислимых тотальных функций. Если $R_{\mathscr{M}} \subseteq \mathscr{M}$ и β $\mathscr{H}_{G_{\mathscr{M}}}$-вычислима, то для всякой A имеем $A_{\mathscr{M},\beta} \equiv A_{R_{\mathscr{M}},\beta}$.*

Доказательство. Используется индукция по длине A. Единственный интересный случай — когда A есть $\exists\eta B(\eta)$. В этом случае достаточно заметить, что если вообще существует $\eta \in \mathscr{M}$, при котором $B(\eta)$ истинна в рассматриваемой интерпретации, то по построению $G_{\mathscr{M}}$ существует и $\mathscr{H}_{G_{\mathscr{M}}}$-вычислимая функция, обладающая этим свойством: и эта функция ввиду $R_{\mathscr{M}} \subseteq \mathscr{M}$ принадлежит $\mathscr{M}$.

Теперь определим операцию $\mathscr{M} \to \mathscr{M}'$ так. Присоединим к $\mathscr{M}$ все $\mathscr{H}_{G_{\mathscr{M}}}$-вычислимые функции, не принадлежащие $\mathscr{M}$ (если таковые имеются). Упорядочим их между собой каким-либо естественным образом в соответствии с их $\mathscr{H}_{G_{\mathscr{M}}}$-номерами и полагаем, что все эти новые функции лежат в $\mathscr{M}'$ после всех функций из $\mathscr{M}$ (этим определен порядок $\prec_{\mathscr{M}'}$). Рассмотрим последовательность $\mathscr{M}_0, \mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_\gamma, \ldots$, где $\mathscr{M}_0 = \{\lambda x, 0\}$, $\mathscr{M}_{\gamma+1} = \mathscr{M}'_\gamma$ и $\mathscr{M}_\gamma = \bigcup_{\zeta<\gamma} \mathscr{M}_\zeta$ для предельных γ, причем в последнем случае $\prec_{\mathscr{M}_\gamma} = \bigcup_{\zeta<\gamma} \prec \mathscr{M}_\zeta$. На некотором трансфинитном шаге эта последовательность стабилизируется, и мы получаем «накопитель» $\mathscr{M} = \cup \mathscr{M}_\gamma$, такой, что соответствующий клиниевский оракул $\mathscr{H}_{G_{\mathscr{M}}}$ порождает модель арифметики второго порядка (составленную из $\mathscr{H}_{G_{\mathscr{M}}}$-вычислимых тотальных функций), как это видно из утверждения 24.

Конечно, работая в *ZFC*, можно было бы обойтись без построения последовательности $\{\mathscr{M}_\gamma\}$, а сразу взять в качестве $\mathscr{M}$ все $\mathbf{N}^\mathbf{N}$, вполне упорядочив его с помощью аксиомы выбора. Однако описанное выше построение проходит в более слабой теории множеств: без аксиомы выбора и с заменой аксиомы степени следующей интуитивно более приемлемой (и более уместной в контексте «оракульной математики») аксиомой:

Аксиома H. Пусть X — множество, и последовательность множеств $\{Y_\gamma\}_{\gamma\in On}$ такова, что элементы Y_γ суть подмножества X и $\gamma_1 < \gamma_2$ влечет $Y_{\gamma_1} \subseteq Y_{\gamma_2}$. Тогда на некотором шаге γ эта последовательность стабилизируется.

Описанную аксиоматическую систему теории множеств обозначим *ZH*; через *KPH* обозначим систему Крипке — Платека (без праэлементов) с добавлением аксиомы *H* и аксиомы бесконечности. Хотя последняя теория с точки зрения метарекурсии, видимо, не очень приемлема, все же она достаточно интересна. Формализуемость описанной выше конструкции в *ZH* очевидна; на самом деле, она формализуема уже в *KPH*: достаточно заметить, что функционал $G_{\mathscr{M}}$ определяется Σ-формулой.

Покажем теперь, как аналогичным методом можно построить «оракульную» модель арифметики третьей ступени. Этот результат без дальнейших трудностей может быть обобщен на все конечные (и даже трансфинитные [8]) ступени.

Рассмотрим множества $\mathscr{M}, \mathscr{P} \subseteq \mathbf{N}^\mathbf{N}$ и $\Phi \subseteq \mathscr{P} \to \mathbf{N}$. Будем предполагать, что $\mathscr{M} \subseteq \mathscr{P}$, $\mathscr{M}$ вполне упорядочено отношением $\prec_{\mathscr{M}}$ и Φ вполне упорядочено отношением $\prec_\Phi$. Построим семейство оракулов $\left\{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\right\}$, как описано ниже, где $\bar\beta$ пробегает всевозможные кортежи элементов $\mathscr{P}$, $\bar\beta = \langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Предварительно введем вспомогательное определение.

Пусть $\mathfrak{F} = \{\mathcal{F}_{\bar\beta}\}$ — произвольное семейство оракулов; функционал G назовем *$\mathfrak{F}$-вычислимым относительно* $\beta_1, \ldots, \beta_n$, коль скоро для некоторого w и для всех η из $\mathcal{P}$ справедливо $G(\eta) = \{w\}^{\mathcal{F}_{\beta_1,\ldots,\beta_n,\eta}}(0)$.

Переходим к построению $\left\{\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\mathcal{M},\mathcal{P},\Phi}\right\}$. Определим это семейство как предел последовательности семейств $\left\{\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma}\right\}$, где для всякого $\bar\beta$ из $\gamma_1 < \gamma_2$ следует $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma_1} \subseteq \mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma_2}$. Как обычно полагаем, для всякого $\bar\beta$, что $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{0} = \varnothing$ и $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma} = \bigcup\limits_{\zeta<\gamma} \mathcal{H}_{\bar\beta}^{\zeta}$ для предельных γ. Опишем переход от γ к $\gamma+1$.

Итак, пусть $\left\{\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma}\right\}$ уже построено. Для произвольного допустимого набора $\bar\beta = \langle\beta_1, \ldots, \beta_n\rangle$ ($\beta_i \in \mathcal{P}$) полагаем.

1. Если $u = 2^{\langle t,i\rangle}$ и $i \in \{1, \ldots, n\}$, то $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma+1}(u) = \beta_i(t)$.

2. Если $u = 5^{\langle z,y\rangle}$, $\lambda t\,\{z\}^{\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma}}(t) = \eta \in \mathcal{P}$, то $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma+1}(n) = \mathcal{H}_{\bar\beta,\eta}^{\gamma}(y)$.

3. Пусть a — номер формулы φ арифметики третьего порядка, не имеющей свободных числовых переменных. Подставим в нее вместо каждой свободной переменной типа 1 какую-нибудь тотальную $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma}$-вычислимую функцию, а вместо каждой свободной переменной типа 2 — некоторый $\{\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma}\}$-вычислимый относительно $\bar\beta$ функционал. Обозначим через z код кортежа, составленного из $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma}$-номеров указанных объектов. Теперь пусть связанные переменные φ типов 1 и 2 пробегают соответственно $\mathcal{M}$ и Φ. Формулу φ, проинтерпретированную описанным образом, обозначим через $\varphi_{z,\mathcal{M},\Phi}$. Полагаем.

(а) Если $\varphi = \exists x\psi(x)$, то

$$\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma+1}\left(7^{\langle a,z,t\rangle}\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } \varphi_{z,\mathcal{M},\Phi} \text{ ложна}, \\ x_0 + 1, \text{ если } x_0 = \min\{x\colon \psi_{z,\mathcal{M},\Phi}(x) \text{ истинна}\}. \end{cases}$$

(б) Если $\varphi = \exists\alpha\psi(\alpha)$, то

$$\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma+1}\left(7^{\langle a,z,t\rangle}\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } \varphi_{z,\mathcal{M},\Phi} \text{ ложна}, \\ \alpha_0(t) + 1, \text{ если } \alpha_0 = \min\{\alpha \in \mathcal{M}\colon \psi_{z,\mathcal{M},\Phi}(\alpha) \text{ истинна}\}. \end{cases}$$

(в) Если $\varphi = \exists G\psi(G)$, то

$$\mathcal{H}_{\bar\beta,\eta}^{\gamma+1}\left(7^{\langle a,z,t\rangle}\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } \varphi_{z,\mathcal{M},\Phi} \text{ ложна}, \\ G_0(\eta) + 1, \text{ если } G_0 = \min\{G \in \Phi\colon \psi_{z,\mathcal{M},\Phi}(G) \text{ истинна}\}. \end{cases}$$

В остальных случаях значения оракулов $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma+1}$ не определены. В пунктах 3(б), 3(в) минимум берется соответственно относительно $\prec_{\mathcal{M}}$ и $\prec_{\Phi}$. Обращаем внимание, что в п. 3(в) пополняются оракулы $\mathcal{H}_{\bar\beta,\eta}^{\gamma}$, а сам оракул $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma}$ не затрагивается.

Монотонность графиков $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma}$ очевидна. В силу аксиомы H, последовательность $\left\{\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\gamma}\right\}_{\gamma\in\mathrm{On}}$ когда-нибудь стабилизируется, и мы получим искомое семейство $\left\{\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\mathcal{M},\mathcal{P},\Phi}\right\}$. Заметим, что в силу п. 3 все оракулы $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\mathcal{M},\mathcal{P},\Phi}$ нормальны и слабо фундированы.

Утверждение 25. *Если функция* $\alpha \in \mathcal{P}$ $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\mathcal{M},\mathcal{P},\Phi}$*-вычислима, то оракул* $\mathcal{H}_{\bar\beta,\alpha}^{\mathcal{M},\mathcal{P},\Phi}$ *тоже* $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\mathcal{M},\mathcal{P},\varphi}$ *вычислим (равномерно по* $\mathcal{H}_{\bar\beta}^{\mathcal{M},\mathcal{P},\Phi}$*-коду* α*).*

Доказательство очевидно в силу п. 2 определения наших оракулов.

Утверждение 26. *Если функционал* $G\ \{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\}$*-вычислим относительно* $\bar\beta$, α *и* α $\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$*-вычислима, то* $G\ \{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\}$*-вычислим относительно* $\bar\beta$.

Доказательство. В силу предыдущего утверждения оракул $\mathscr{H}_{\bar\beta,\alpha,\eta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$ вычислим с оракулом $\mathscr{H}_{\bar\beta,\eta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$ на машине, не зависящей от η.

Предположим, что для данных $\mathscr{M}$, $\mathscr{P}$, Φ оказалось, что всякая $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$-вычислимая функция лежит в $\mathscr{P}$. Тогда строим новые накопители $\mathscr{M}'$ и Φ' следующим образом. Добавляем к $\mathscr{M}$ все не принадлежащие этому множеству $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$-вычислимые тотальные функции; продолжаем отношение $\prec_{\mathscr{M}}$ до полного упорядочения $\prec_{\mathscr{M}'}$ полученного множества $\mathscr{M}'$, так что все добавленные функции помещаются после всех элементов $\mathscr{M}$, а между собой эти новые функции упорядочиваются в соответствии с их $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$-кодами. Аналогично строим Φ' и $\prec_{\Phi'}$, добавляя к Φ все не принадлежащие $\Phi\{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\}$-вычислимые относительно $\langle\ \rangle$ тотальные на $\mathscr{P}$ функционалы. Описанную процедуру расширения $\mathscr{M}$ и Φ итерировать по ординалам, пока не произойдет переполнения накопителя $\mathscr{P}$; на предельных шагах мы объединяем ранее построенные накопители и соответствующие вполне-упорядочения.

В ходе описанной итерации могут быть два случая. Может оказаться, что последовательность накопителей $\mathscr{M}$, Φ стабилизируется на некотором шаге, прежде чем переполнится накопитель $\mathscr{P}$. Однако может быть и так, что на каком-то шаге возникнет вычислимая (с очередным оракулом) функция, не принадлежащая $\mathscr{P}$. Тогда все такие функции добавляем к $\mathscr{P}$; выбираем в качестве нового $\mathscr{M}$ множество $\{\lambda t.\ 0\}$ и аналогично задаем тривиальный накопитель Φ. После этого итерация продолжается с новым $\mathscr{P}$. Таким способом получаем трансфинитную последовательность $\{\mathscr{P}_\gamma\}$ (для предельных γ полагаем $\mathscr{P}_\gamma = \bigcup_{\zeta<\gamma}\mathscr{P}_\zeta\Big)$. В конце концов, в силу аксиомы H эта последовательность стабилизируется, после чего, снова в силу H, стабилизируется последовательность накопителей $\mathscr{M}$, Φ, соответствующих полученному, уже не меняющемуся $\mathscr{P}$.

Итак, мы приходим к тройке $\mathscr{M}$, $\mathscr{P}$, Φ, для которой справедливо следующее. Всякая $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$-вычислимая тотальная функция принадлежит $\mathscr{M}$; всякий $\{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\}$-вычислимый относительно $\langle\ \rangle$ функционал принадлежит Φ. По-прежнему обозначим через R множество всех $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$-вычислимых функций, а через Φ_0 обозначим множество всех функционалов $\{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\}$-вычислимых относительно $\langle\ \rangle$.

Утверждение 27. *Если* $\mathscr{M}$, $\mathscr{P}$, Φ *удовлетворяют вышеуказанному условию, то для любой формулы* φ *арифметики третьего порядка и при любой подстановке* $\{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\}$*-вычислимых относительно* $\langle\ \rangle$ *параметров* (с кодом z) *справедливо* $\varphi_{z,\mathscr{M},\Phi} \equiv \varphi_{z,R,\Phi_0}$.

Доказательство проводится индукцией по длине φ. Случай $\exists\alpha\psi(\alpha)$ рассматривается так же, как в утверждении 24. Если же φ есть $\exists G\psi(G)$, то функционал G_0, упомянутый в п. 3(в), является $\{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\}$-вычислимым относительно $\langle\ \rangle$, что и дает требуемую эквивалентность.

Построенная «оракульная» интерпретация языка арифметики третьей ступени не является настоящей моделью, поскольку в ней фигурируют функционалы, заданные на множестве $\mathscr{P}$. Заменим Φ_0 на множество $\Phi^* = \{G \restriction R\colon G \in \Phi_0\}$. В силу утверждения 26 каждый функционал $G^* \in \Phi^*$ $\mathscr{H}_{\langle\ \rangle}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$-вычислим (в смысле § 1). Более того, по

$\left\{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\right\}$-коду $G \in \Phi_0$ можно эффективно построить $\mathscr{H}_{\langle\,\rangle}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$-код $G^* = G \restriction R$. Если A есть список объектов из $R \cup \Phi_0$ и z — гёделевский номер последовательности их $\left\{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\right\}$-кодов (относительно $\langle\ \rangle$), то через z^* обозначим гёделевский номер кортежа, составленного из $\mathscr{H}_{\langle\,\rangle}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$-кодов элементов списка A^*, полученного заменой каждого G на A соответствующим G^*.

Утверждение 28. *Пара множеств R, Φ^* образует модель классической арифметики третьего порядка.*

Доказательство. Если $\eta \in R$, $G \in \Phi_0$ и $G^* = G \restriction R$, то записи $G(\eta) = y$ и $G^*(\eta) = y$ означают одно и то же. Отсюда индукцией по длине φ получаем $\varphi_{z,R,\Phi_0} \equiv \varphi_{z^*,R,\Phi^*}$, а в силу построения наших оракулов это значит, что оракул $\mathscr{H}_{\langle\,\rangle}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$ способен распознавать значение истинности любой формулы в модели (R, Φ^*). Отсюда сразу получается выполнение в (R, Φ^*) аксиомы свертывания второго порядка: $\exists\alpha\forall x(\alpha(x) = 0 \leftrightarrow \varphi(x))$.

Рассмотрим теперь формулу $\varphi(\alpha)$. Соответствующий ей «характеристический» функционал G_φ, очевидно, является $\left\{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\right\}$-вычислимым (так что G_φ принадлежит Φ_0, а значит, и Φ); а потому G_φ^* годится в качестве того G, существование которого требуется в аксиоме свертывания третьего порядка: $\exists G\forall\alpha(G(\alpha) = 0 \leftrightarrow \varphi(\alpha))$, что и доказывает наше утверждение.

Подчеркнем, что в модели (R, Φ^*) участвуют отнюдь не все $\mathscr{H}_{\langle\,\rangle}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$-вычислимые функционалы. Если бы мы захотели аксиоматизировать теорию вычислимости с оракулом $\mathscr{H}_{\langle\,\rangle}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$, не претендуя на то, чтобы построение самого этого оракула было воспроизводимо в полученной системе (как это было в предыдущем параграфе), то проще всего было бы добавить к сигнатуре теории F новый предикатный символ $\approx$, для которого принимается аксиома: «если $x \approx y$, то x и y суть коды одного и того же $\mathscr{F}$-вычислимого функционала» (напоминаем, что $\mathscr{F}$ — формальный символ для оракула в теории F). Затем в этом языке можно проинтерпретировать арифметический язык третьей ступени следующим образом. Вместо объектов типа 1, будем говорить об элементах $B^*(\mathscr{F})$, а вместо объектов типа 2 — о $\mathscr{F}$-кодах z вычислимых с оракулом $\mathscr{F}$ функционалов, удовлетворяющих дополнительному условию $z \approx z$. Наконец, присоединяем к нашему расширению F аксиомы свертывания. Очевидно, построенная выше система оракулов $\left\{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\right\}$ дает модель этой теории, если $x \approx y$ проинтерпретировать так: x, y суть $\mathscr{H}_{\langle\,\rangle}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}$-коды функционала $G \restriction R$, где G — некоторый $\left\{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\right\}$-вычислимый относительно $\langle\ \rangle$ функционал.

Из построения $\left\{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\right\}$ непосредственно видно, что оно происходит в ZH. Интуитивно аксиома H выглядит более приемлемой по сравнению с аксиомой степени. Впрочем, нетрудно убедиться, что в ZH с аксиомой конструктивности аксиома степени выводима.

Однако более внимательное рассмотрение нашей конструкции показывает, что система оракулов $\left\{\mathscr{H}_{\bar\beta}^{\mathscr{M},\mathscr{P},\Phi}\right\}$ может быть построена в рамках теории Крипке — Платека с аксиомой бесконечности и с дабавлением ограниченной аксиомы H: ограничение состоит в том, что стабилизация постулируется лишь для Σ-последовательностей множеств подмножеств X. Можно даже наложить на $\{Y_\gamma\}$ еще одно дополнительное требование: если на некотором шаге γ оказалось $Y_\gamma = Y_{\gamma+1}$, то, начиная с этого γ, $\{Y_\gamma\}$ стабилизируется. В контексте ZF это дополнительное ограничение несущественно; но оно становится существенным в контексте KP. После всех указанных ослаблений аксиома H становится довольно привлекательной, и факт моделируемости в ней арифметики третьей ступени (а также и всей простой теории типов, как легко усматривается из нашей конструкции) заслуживает некоторого внимания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белякин Н. В.** Вычисления с оракулами: аксиоматическая версия // 4-я Всесоюз. конф. «Применение методов математической логики»: Тез. докл.— Таллин: Б. и., 1986.— С. 32—33.
2. **Белякин Н. В.** Обобщенные вычисления и арифметика третьей ступени // Алгебра и логика.— 1974.— Т. 13, № 2.— С. 132—144.
3. **Клини С. К.** Введение в метаматематику.— М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
4. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.— М.: Мир, 1972.
5. **Moschovakis Y.** Hyperanalitic predicates // Trans. Amer. Math. Soc.— 1967.— V. 129.— P. 249—282.
6. **Kleene S. C.** Recursive functionals and quantifiers offinite type // Trans. Amer. Math. Soc.— 1959.— V. 91.— P. 1—52.
7. **Вопенка П.** Математика в альтернативной теории множеств.— М.: Мир, 1983.
8. **Ганов В. А.** Машинно-оракульное моделирование теории типов.— Москва, 1985.— Деп. ВИНИТИ 22.11.85, № 8092 — В.

С. С. ГОНЧАРОВ

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ АКСИОМАТИЗИРУЕМЫХ КЛАССОВ С СИЛЬНЫМИ ЭПИМОРФИЗМАМИ

Продолжается изучение синтаксических свойств аксиоматизируемых классов с условиями на сильные гомоморфизмы. А. И. Мальцевым был сформулирован вопрос [1]: нельзя ли указать строение тех аксиом, которые описывают классы моделей, внутри которых гомоморфизм сильный? В [2] автор получил решение этого вопроса. Другие свойства аксиом, связанные с сильными гомоморфизмами, исследовались в [3—5]. Ниже рассматривается строение аксиом для аксиоматизируемых классов, внутри которых каждый эпиморфизм сильный.

Вопрос о возможности характеризации аксиом для классов с сильными эпиморфизмами возник на семинаре «Теория моделей» во время доклада автором решения вопроса А. И. Мальцева [1]. Оказалось, что на основе той же идеи удается найти вид аксиом и для классов с сильными эпиморфизмами, однако доказательство этого факта и вид аксиом при этом усложняются. В основных определениях и результатах из теории моделей будем следовать работам [1, 3].

Введем некоторые определения и обозначения. Гомоморфизм λ модели $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ называется *сильным*, если для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathfrak{M}$ и сигнатурных предикатных символов P таких, что $\mathfrak{N} \models P(\lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n))$, найдутся элементы $b_1, \ldots, b_n$, имеющие те же образы, т. е. $\lambda(a_i) = \lambda(b_i)$ для $i \leqslant n$, и $\mathfrak{M} \models P(b_1, \ldots, b_n)$.

Для последовательности переменных $x_1, \ldots, x_n$ и константных символов $c_1, \ldots, c_n$ будем использовать сокращенные записи соответственно $\bar{x}$ и $\bar{c}$. Если Q_i-квантор существования или всеобщности, то вместо формулы $Q_0x_0 \ldots Q_nx_n\varphi$ пишем $Q\bar{x}\varphi$. Для формулы $\varphi(\bar{x}^0, \ldots, \bar{x}^n)$, где $\bar{x}^0, \ldots, \bar{x}^n$ — наборы переменных, будем использовать сокращение $\varphi(\bar{x}^i)$; аналогично для констант. Вместо $\exists\bar{x}^0 \ldots \exists\bar{x}^n\varphi(\bar{x}^0, \ldots, \bar{x}^n)$ пишем $\exists\bar{x}^i\varphi(\bar{x}^i)$. Для краткости формулу $\mathop{\&}\limits_{i=0}^{n} t_i = q_i$ записываем в виде $\bar{t} = \bar{q}$, а формулу $\bigvee\limits_{i=0}^{n} t_i \neq q_i$ — в виде $\bar{t} \neq \bar{q}$. Далее, если λ — функция и $a_0, \ldots, a_n$ — некоторый набор элементов или переменных, то вместо набора