всех указанных ослаблений аксиома H становится довольно привлекательной, и факт моделируемости в ней арифметики третьей ступени (а также и всей простой теории типов, как легко усматривается из нашей конструкции) заслуживает некоторого внимания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Белякин Н. В.** Вычисления с оракулами: аксиоматическая версия // 4-я Всесоюз. конф. «Применение методов математической логики»: Тез. докл.— Таллин: Б. и., 1986.— С. 32—33.
2. **Белякин Н. В.** Обобщенные вычисления и арифметика третьей ступени // Алгебра и логика.— 1974.— Т. 13, № 2.— С. 132—144.
3. **Клини С. К.** Введение в метаматематику.— М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
4. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.— М.: Мир, 1972.
5. **Moschovakis Y.** Hyperanalitic predicates // Trans. Amer. Math. Soc.— 1967.— V. 129.— P. 249—282.
6. **Kleene S. C.** Recursive functionals and quantifiers offinite type // Trans. Amer. Math. Soc.— 1959.— V. 91.— P. 1—52.
7. **Вопенка П.** Математика в альтернативной теории множеств.— М.: Мир, 1983.
8. **Ганов В. А.** Машинно-оракульное моделирование теории типов.— Москва, 1985.— Деп. ВИНИТИ 22.11.85, № 8092 — В.

С. С. ГОНЧАРОВ

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ АКСИОМАТИЗИРУЕМЫХ КЛАССОВ С СИЛЬНЫМИ ЭПИМОРФИЗМАМИ

Продолжается изучение синтаксических свойств аксиоматизируемых классов с условиями на сильные гомоморфизмы. А. И. Мальцевым был сформулирован вопрос [1]: нельзя ли указать строение тех аксиом, которые описывают классы моделей, внутри которых гомоморфизм сильный? В [2] автор получил решение этого вопроса. Другие свойства аксиом, связанные с сильными гомоморфизмами, исследовались в [3—5]. Ниже рассматривается строение аксиом для аксиоматизируемых классов, внутри которых каждый эпиморфизм сильный.

Вопрос о возможности характеризации аксиом для классов с сильными эпиморфизмами возник на семинаре «Теория моделей» во время доклада автором решения вопроса А. И. Мальцева [1]. Оказалось, что на основе той же идеи удается найти вид аксиом и для классов с сильными эпиморфизмами, однако доказательство этого факта и вид аксиом при этом усложняются. В основных определениях и результатах из теории моделей будем следовать работам [1, 3].

Введем некоторые определения и обозначения. Гомоморфизм λ модели $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{N}$ называется *сильным*, если для любых элементов $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathfrak{M}$ и сигнатурных предикатных символов P таких, что $\mathfrak{N} \models P(\lambda(a_1), \ldots, \lambda(a_n))$, найдутся элементы $b_1, \ldots, b_n$, имеющие те же образы, т. е. $\lambda(a_i) = \lambda(b_i)$ для $i \leqslant n$, и $\mathfrak{M} \models P(b_1, \ldots, b_n)$.

Для последовательности переменных $x_1, \ldots, x_n$ и константных символов $c_1, \ldots, c_n$ будем использовать сокращенные записи соответственно $\bar{x}$ и $\bar{c}$. Если Q_i-квантор существования или всеобщности, то вместо формулы $Q_0x_0 \ldots Q_nx_n\varphi$ пишем $Q\bar{x}\varphi$. Для формулы $\varphi(\bar{x}^0, \ldots, \bar{x}^n)$, где $\bar{x}^0, \ldots, \bar{x}^n$ — наборы переменных, будем использовать сокращение $\varphi(\bar{x}^i)$; аналогично для констант. Вместо $\exists\bar{x}^0 \ldots \exists\bar{x}^n\varphi(\bar{x}^0, \ldots, \bar{x}^n)$ пишем $\exists\bar{x}^i\varphi(\bar{x}^i)$. Для краткости формулу $\mathop{\&}\limits_{i=0}^{n} t_i = q_i$ записываем в виде $\bar{t} = \bar{q}$, а формулу $\bigvee\limits_{i=0}^{n} t_i \neq q_i$ — в виде $\bar{t} \neq \bar{q}$. Далее, если λ — функция и $a_0, \ldots, a_n$ — некоторый набор элементов или переменных, то вместо набора

$\lambda(a_0), \ldots, \lambda(a_n)$ пишем $\lambda(\bar a)$. Для формул $\underset{i=1}{\overset{n}{\Box}} P(\bar c^i)$, $\underset{i=1}{\overset{n}{\Box}} \bar t_i = \bar q_i$ и $\underset{i=1}{\overset{n}{\Box}} \psi_i$, где $\Box$ — конъюнкция или дизъюнкция, будем опускать предельные значения, т. е. использовать сокращения $\Box P(\bar c^i)$, $\Box \bar t_i = \bar q_i$ и $\Box\psi_i$, если пределы для нас не важны или ясны из контекста.

Определение. *Предложение вида*

$$(\forall\bar x)(\neg P(\bar x)\to(\varphi\vee(\exists\bar y_1\ldots\bar y_k)(\psi\,\&\,\& P(\bar y_i))))\,\&$$
$$\&(\forall\bar x)(P\bar x)\to(\neg\varphi\,\&(\forall\bar y_1\ldots\bar y_k)(\psi\to\vee\,\bar y_i=\bar x))),$$

где φ — тождественно ложная или позитивная $\exists$-формула, а ψ — позитивная $\exists$-формула, называется S-аксиомой для предикатного символа P.

В [2] на основе метода диаграмм и теоремы компактности А. И. Мальцева получена

Теорема. *В аксиоматизируемом классе $\mathcal{K}$ все гомоморфизмы сильные тогда и только тогда, когда для любого предикатного символа P в $\mathcal{K}$ выполнена некоторая S-аксиома.*

В случае эпиморфизмов в аксиоматизируемых классах характеризация аксиом усложняется. Это вызвано тем, что указанные условия выполняются только относительно эпиморфизмов.

Определение. *Предложение вида*

$$\forall(\bar x)(\neg P(\bar x)\to((\forall\bar z_1)(\exists\bar z_2)\ldots(Q\bar z_p)\bigvee_{i=1}^{m}\mathop{\&}_{j=1}^{n}(\varphi_{ij}\vee(\exists\bar y_1\ldots\bar y_k)(\psi_{ij}\,\&\,\& P(\bar y_s)))))\,\&$$
$$(\forall\bar x)(P(\bar x)\to(\exists\bar z_1)(\forall\bar z_2)\ldots(Q'\bar z_p)\mathop{\&}_{i=1}^{m}\bigvee_{j=1}^{n}(\neg\varphi_{ij}\,\&(\forall\bar y_1\ldots\bar y_k)(\psi_{ij}\to\vee\,\bar y_s=\bar x))),$$

где для любых i, j формула φ_{ij} тождественно ложная или позитивная, а ψ_{ij} позитивная и $Q\in\{\forall,\exists\}$, $\forall'\leftrightharpoons\exists$ и $\exists'\leftrightharpoons\forall$, называется SE-*аксиомой.*

Будем обозначать через F тождественно ложную формулу.

Лемма 1. *Пусть в классе $\mathcal{K}$ для предикатного символа P выполнена SE-аксиома и λ — эпиморфизм модели $\mathfrak{N}$ из $\mathcal{K}$ на модель $\mathfrak{M}$, лежащую в классе $\mathcal{K}$. Тогда для любых $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathfrak{N}$, если $\mathfrak{M}\models P(\lambda(\bar a))$ и $\mathfrak{N}\models\neg P(\bar a)$, то найдутся элементы $b_1, \ldots, b_n$ такие, что $\mathfrak{N}\models P(\bar b)$ и $\lambda(\bar a)=\lambda(\bar b)$.*

Доказательство. Пусть Δ — SE-аксиома для P, выполненная в классе $\mathcal{K}$, а соответствующие формулы φ_{ij}, ψ_{ij} относятся к SE-аксиоме.

Так как по условию $\mathfrak{M}\models P(\lambda(\bar a))$, то из конъюнктивного члена

$$\mathfrak{M}\models(\forall\bar x)(P(\bar x)\to(\exists\bar z_1)(\forall\bar z_2)\ldots(Q'\bar z_p)\mathop{\&}_{i}\bigvee_{j}(\neg\varphi_{ij}\,\&$$
$$(\forall\bar y_1\ldots\bar y_k)(\psi_{ij}\to\bigvee\bar y_s=\bar x))$$

аксиомы Δ мы имеем

$$\mathfrak{M}\models\Big[(\exists\bar z_1)(\forall\bar z_2)\ldots(Q'\bar z_p)\mathop{\&}_{i}\bigvee_{j}(\neg\varphi_{ij}\,\&(\forall\bar y_1\ldots\bar y_k)(\psi_{ij}\to\bigvee\bar y_s=\bar x))\Big]^{\bar x}_{\lambda\bar a}.$$

Из другого конъюнктивного члена

$$\mathfrak{N}\models(\forall\bar x)(\neg P(\bar x)\to(\forall\bar z_1)(\exists\bar z_2)\ldots(Q\bar z_p)\bigvee_{i}\mathop{\&}_{j}(\varphi_{ij}\vee(\exists\bar y_1\ldots\bar y_k)(\psi_{ij}\,\&\,\& P(\bar y_s)))$$

аксиомы Δ получаем

$$\mathfrak{N}\models\Big[(\forall\bar z_1)(\exists\bar z_2)\ldots(Q\bar z_p)\bigvee_{i}\mathop{\&}_{j}(\varphi_{ij}\vee(\exists\bar y_1\ldots\bar y_k)(\psi_{ij}\,\&\,\& P(\bar y_s)))\Big]^{\bar x}_{\bar a}.$$

Выберем элементы $\bar c_1$ из $\mathfrak{N}$ такие, что

$$\mathfrak{M}\models\Big[(\forall\bar z_2)\ldots(Q'\bar z_p)\mathop{\&}_{i}\bigvee_{j}\Big(\neg\varphi_{ij}\,\&(\forall\bar y_1\ldots\bar y_k)\Big(\psi_{ij}\to\bigvee_{s}\bar y_s=\bar x\Big)\Big)\Big]^{\bar x\bar z_1}_{\lambda\bar a\lambda\bar c_1}.$$

Но поскольку

$$\mathfrak{N} \models \left[(\forall \bar{z}_1)(\exists \bar{z}_2)\dots(Q\bar{z}_p) \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\varphi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar{y}_s)\right)\right)\right]^{\bar{x}}_{\bar{a}},$$

то

$$\mathfrak{N} \models \left[(\exists \bar{z}_2)\dots(Q\bar{z}_p) \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\varphi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar{y}_s)\right)\right)\right]^{\bar{x}\bar{z}_1}_{\bar{a}\bar{c}_1}.$$

Теперь выберем набор $\bar{c}_2$ так, что

$$\mathfrak{N} \models \left[(\forall \bar{z}_3)\dots(Q\bar{z}_p) \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\varphi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar{y}_s)\right)\right)\right]^{\bar{x}\bar{z}_1\bar{z}_2}_{\lambda\bar{a}\lambda\bar{c}_1\lambda\bar{c}_2}.$$

Тогда

$$\mathfrak{M} \models \left[(\exists \bar{z}_3)\dots(Q'\bar{z}_p) \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\varphi_{ij} \mathbin{\&} (\forall \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \to \bigvee_s \bar{y}_s = \bar{x}\right)\right)\right]^{\bar{x}\bar{z}_1\bar{z}_2}_{\lambda\bar{a}\lambda\bar{c}_1\lambda\bar{c}_2}.$$

Продолжая этот процесс, мы найдем элементы $\bar{c}_1, \dots, \bar{c}_p$ из $\mathfrak{N}$, для которых

$$\mathfrak{M} \models \left[\mathop{\&}_i \bigvee_j \left(\neg\varphi_{ij} \mathbin{\&} (\forall \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \to \bigvee_s \bar{y}_s = \bar{x}\right)\right)\right]^{\bar{x}\bar{z}}_{\lambda\bar{a}\lambda\bar{c}},$$

$$\mathfrak{N} \models \left[\bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\varphi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar{y}_s)\right)\right)\right]^{\bar{x}\bar{z}}_{\bar{a}\bar{c}}.$$

Рассмотрим i такое, что

$$\mathfrak{N} \models \left[\mathop{\&}_j \left(\varphi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(y_s)\right)\right)\right]^{\bar{x}\bar{z}}_{\bar{a}\bar{c}}.$$

Тогда

$$\mathfrak{M} \models \left[\bigvee_j \left(\neg\varphi_{ij} \mathbin{\&} (\forall \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \to \bigvee_s \bar{y}_s = \bar{x}\right)\right)\right]^{\bar{x}\bar{z}}_{\lambda\bar{a}\lambda\bar{c}}.$$

Выберем теперь j такое, что

$$\mathfrak{M} \models \left[\left(\neg\varphi_{ij} \mathbin{\&} (\forall \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \to \bigvee_s \bar{y}_s = \bar{x}\right)\right)\right]^{\bar{x}\bar{z}}_{\lambda\bar{a}\lambda\bar{c}}.$$

В этом случае

$$\mathfrak{N} \models \left[\varphi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar{y}_s)\right)\right]^{\bar{x}\bar{z}}_{\bar{a}\bar{c}}.$$

Если φ_{ij} — позитивная формула, то она сохраняет истинность при эпиморфизмах и поэтому $\mathfrak{N} \models [\neg\varphi_{ij}]^{\bar{x}\bar{z}}_{\bar{a}\bar{c}}$. Если же φ_{ij} позитивная или тождественно ложная, то

$$\mathfrak{N} \models \left[(\exists \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(y_s)\right)\right]^{\bar{x}\bar{z}}_{\bar{a}\bar{c}}.$$

Рассмотрим наборы элементов $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_k$, для которых $\mathfrak{M} \models [\psi_{ij}]^{\bar{x}\bar{z}\bar{y}_1\dots\bar{y}_k}_{\lambda\bar{a}\lambda\bar{c}\lambda\bar{b}_1\dots\lambda\bar{b}_k}$, но

$$\mathfrak{M} \models [(\forall \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)(\psi_{ij} \to \vee \bar{y}_s = \bar{x})]^{\bar{x}\bar{z}}_{\lambda\bar{a}\lambda\bar{c}}.$$

Имеем $\mathfrak{M} \models \vee \lambda\bar{b}_s = \lambda\bar{a}$.

Пусть для s выполнено $\mathfrak{M} \models \lambda\bar{b}_s = \lambda\bar{a}$. В этом случае $\mathfrak{M} \models P(\bar{b}_s)$ и $\lambda\bar{b}_s = \lambda\bar{a}$, что и требовалось доказать.

Прежде чем переходить к формулировке и доказательству основной теоремы, рассмотрим некоторые свойства пар теорий одной и той же сигнатуры. Пусть Σ — некоторая сигнатура и $\{c_i | i < \varkappa\}$ — некоторое множество константных символов, попарно различных и не лежащих в Σ. а $\varkappa$ — бесконечный кардинал мощности, большей языка сигнатуры Σ.

Через $\bar{c}$ обозначим набор $c_0, \ldots, c_n$, и через P — $(n+1)$-местный предикатный символ сигнатуры Σ. Нас будут интересовать следующие свойства пар (X, Y) множеств предложений сигнатуры Σ' ($\Sigma \cup \{c_0, \ldots, c_n\} \subseteq \Sigma'$ и $\Sigma' \subseteq \Sigma \cup \{c_i | i < \varkappa\}$):

S_1. Множества формул X и Y непротиворечивы.

S_2. Если Δ — позитивная формула сигнатуры Σ и $X \vdash \Delta$, то $Y \vdash \Delta$.

S_3. Если $\bar{c}'$ — набор константных символов сигнатуры Σ' и $X \vdash P(\bar{c}')$, то $Y \vdash \bar{c}' \neq \bar{c}$.

S_4. Если $Y \vdash (\forall \bar{z}_1)(\exists \bar{z}_2) \ldots (Q\bar{z}_m)\left(\underset{i}{\&} \underset{j}{\bigvee} (\neg \pi_{ij} \& (\forall \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_k)(\psi_{ij} \to \bigvee \bar{y}_s = \right.$ $= \bar{c})$), где π_{ij} — позитивная формула или F, а ψ_{ij} — позитивная формула и $Q \in \{\forall, \exists\}$, то

$$X \vdash \neg (\exists \bar{z}_1)(\forall \bar{z}_2) \ldots (Q'\bar{z}_m) \bigvee_i \underset{j}{\&} (\pi_{ij} \vee \exists \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_k (\psi_{ij} \& \& P(\bar{y}_s))),$$

где $\forall' \leftrightharpoons \exists$ и $\exists' \leftrightharpoons \forall$.

Лемма 2. *Если пара (X, Y) сигнатуры Σ' удовлетворяет условиям $S_1 - S_4$ и φ — предложение языка $\Sigma \cup \{c_i | i < \varkappa\}$, то существует пара (X', Y') сигнатуры $\Sigma'' \leftrightharpoons \Sigma' \cup \{c_i | c_i$ входит в $\varphi\}$ такая, что $\varphi \in X'$ или $\neg\varphi \in X'$, а (X', Y') удовлетворяет свойствам $S_1 - S_4$ и расширяет (X, Y), т. е. $X \subseteq X'$ и $Y \subseteq Y'$.*

Доказательство. Определим сигнатуру $\Sigma'' \leftrightharpoons \Sigma' \cup \{c_i | c_i$ входит в $\varphi\}$ и полагаем

$$X_0 \leftrightharpoons X \cup \{\varphi\} \quad X_1 \leftrightharpoons X \cup \{\neg\varphi\},$$

$$Y_i \leftrightharpoons Y \cup \{\Delta | \Delta \text{ — позитивное предложение сигнатуры } \Sigma''$$
$$\text{и } X_i \vdash \Delta\} \cup \{\bar{c}' \neq \bar{c} | X_i \vdash P(\bar{c}') \text{ и } \bar{c}' \text{ — константы из } \Sigma''\}.$$

Докажем, что X_0 и Y_0 или X_1 и Y_1 — непротиворечивые множества формул. Заметим, что достаточно показать, что Y_0 или Y_1 — непротиворечивое множество формул, так как если Y_i непротиворечиво, то и X_i непротиворечиво.

Предположим противное, т. е. что оба множества Y_0 и Y_1 противоречивы. Тогда найдутся позитивное предложение Δ_s сигнатуры Σ'' и наборы констант $\bar{c}_0^s, \ldots, \bar{c}_k^s$ такие, что

$$X_s \vdash \Delta_s \& \underset{i}{\&} P(\bar{c}_i^s), \quad Y \cup \{\Delta_s\} \cup \{\bar{c}_i^s \neq \bar{c} \,|\, i \leqslant k\}$$

— противоречивое множество формул. Мы можем ограничиться лишь одной формулой Δ_s, так как конъюнкция позитивных формул — позитивная формула. Но в этом случае $Y \vdash \Delta_s \to V\bar{c}_i^s = \bar{c}$ и, следовательно,

$$Y \vdash \forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k \left(\Delta_s \& \underset{i}{\&} \bar{y}_i = \bar{c}_i^s \to \bigvee_i \bar{y}_i = \bar{c}\right).$$

Пусть $\bar{c}^*$ — константы из φ, не лежащие в Σ'. Введем для каждой константы из $\bar{c}^*$ новую переменную $\bar{z}^*$. Тогда

$$Y \vdash (\forall \bar{z}^*)\left[\left(\neg F \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\Delta_s \& \underset{i}{\&} \bar{y}_i = \bar{c}_i^s \to \bigvee_i \bar{y}_i = \bar{c}\right)\right)\right]_{\bar{z}^*}^{\bar{c}^*},$$

так как константы из $\bar{c}^*$ не входят в формулы из Y. Теперь воспользуемся свойством S_4 для (X, Y) и получим

$$X \vdash \neg(\exists \bar{z}^*)\left[\left(F \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\Delta_s \& \underset{i}{\&} \bar{y}_i = \bar{c}_i^s \& \& P(\bar{y}_i)\right)\right)\right]_{\bar{z}^*}^{\bar{c}^*}.$$

Отсюда заключаем, что

$$X \vdash (\forall \bar{z}^*) \neg\left[(\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\Delta_s \& \underset{i}{\&} \bar{y}_i = \bar{c}_i^s \& \underset{i}{\&} P(y_i)\right)\right]_{\bar{z}^*}^{\bar{c}^*}$$

и, следовательно,

$$X \vdash \neg (\exists \bar{y}_0 \dots \bar{y}_k)\left(\Delta_s \mathop{\&}_i \bar{y}_i = \bar{c}_i^s \mathop{\&}_i P(\bar{y}_i)\right),$$

$$X \vdash \neg\left(\Delta_s \mathop{\&}_i P(\bar{c}_i^s)\right),$$

откуда

$$X \vdash \neg\left(\Delta_0 \mathop{\&}_i P(\bar{c}_i^0)\right) \& \neg\left(\Delta_1 \mathop{\&}_i P(\bar{c}_i^1)\right),$$

$$X \vdash \neg\left(\left(\Delta_0 \mathop{\&}_i P(\bar{c}_i^0)\right) \vee \left(\Delta_1 \mathop{\&}_i P(\bar{c}_i^1)\right)\right).$$

Однако $X \cup \{\varphi\} \vdash \Delta_0 \mathop{\&}_i P(\bar{c}_i^0)$ и $X \cup \{\neg\varphi\} \vdash \Delta_1 \mathop{\&}_i P(\bar{c}_i^1)$, поэтому

$$X \vdash \left(\left(\Delta_0 \& \& P(\bar{c}_i^0)\right) \vee \left(\Delta_1 \& \& P(\bar{c}_i^1)\right)\right),$$

но тогда X противоречиво, что не так в силу условия S_1.

Мы показали, что одна из пар (X_0, Y_0) или (X_1, Y_1) удовлетворяет условию S_1. Обозначим эту пару через (X', Y'). Непосредственно из определения $\varphi \in X'$ или $\neg\varphi \in X'$. Условия S_2 и S_3 выполняются для (X_s, Y_s) при $s \in \{0, 1\}$ непосредственно из их определения. Поэтому нам нужно доказать лишь выполнимость свойства S_4 для (X_s, Y_s). Тогда наша пара (X', Y') будет удовлетворять всем требуемым свойствам.

Итак, пусть

$$Y_s \vdash (Q\bar{z}) \mathop{\&}_i \bigvee_j \left(\neg\pi_{ij} \& (\forall \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \rightarrow \bigvee_s \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right),$$

где π_{ij} — позитивная формула или F, а ψ_{ij} — позитивная формула. Но в таком случае найдутся позитивное предложение Δ и наборы $\bar{c}_0, \dots, \bar{c}_k$ такие, что $X_s \vdash \Delta \mathop{\&}_i P(\bar{c}_i)$ и

$$Y \cup \{\Delta\} \cup \{\bar{c} \neq \bar{c}_i \mid i \leqslant k\} \vdash (Q\bar{z}) \mathop{\&}_i \bigvee_j \left(\neg\pi_{ij} \& (\forall \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \rightarrow \bigvee_s \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right).$$

Отсюда заключаем, что

$$Y \vdash Q\bar{z} \mathop{\&}_i \bigvee_j \left(\neg\pi_{ij} \& (\forall \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \rightarrow \bigvee_s \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right) \vee \left(\Delta \rightarrow \bigvee_s \bar{c} = \bar{c}_s\right).$$

Не ограничивая общности и вводя фиктивные наборы, можно считать, что наборов $\bar{c}_i$ и наборов переменных $\bar{y}_i$ — одинаковое число. Поэтому

$$Y \vdash Q\bar{z} \mathop{\&}_i \left(\bigvee_j \left(\neg\pi_{ij} \& (\forall \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \rightarrow \bigvee_s \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right) \vee \right.$$
$$\left. \vee (\forall \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\Delta \mathop{\&}_s \bar{c}_s = \bar{y}_s \rightarrow \bigvee_s \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right),$$

$$Y \vdash (\forall \bar{z}^*) \left[(Q\bar{z}) \mathop{\&}_i \left(\bigvee_j \left(\neg\pi_{ij} \& (\forall y_1 \dots y_k)\left(\psi_{ij} \rightarrow \bigvee_s \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right) \vee \right.\right.$$
$$\left.\left. \vee (\forall \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\Delta \mathop{\&}_s \bar{c}_s = \bar{y}_s \rightarrow \bigvee_s \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right)\right]_{\bar{z}^*}^{\bar{c}^*}.$$

В силу свойства S_4 для (X, Y) получаем

$$X \vdash \neg(\exists \bar{z}^*) \left[(Q'\bar{z}) \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \mathop{\&}_s P(\bar{y}_s)\right) \& \right.\right.$$
$$\left.\left. \& (\exists \bar{y}_1 \dots \bar{y}_k)\left(\Delta \mathop{\&}_s \bar{y}_s = \bar{c}_s \mathop{\&}_s P(\bar{y}_s)\right)\right)\right]_{\bar{z}^*}^{\bar{c}^*}$$

и, следовательно,

$$X \vdash \neg\left((Q'\bar z) \bigvee_i \left(\mathop{\&}_j \left(\pi_{ij} \vee (\exists \bar y_1 \ldots \bar y_k \left(\psi_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar y_s)\right)\right) \mathbin{\&} \left(\Delta \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar c_s)\right)\right)\right),$$

$$X \vdash \neg(Q'\bar z) \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi_{ij} \vee (\exists \bar y_1 \ldots \bar y_k) \left(\psi_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar y_s)\right)\right) \vee \neg\left(\Delta \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar c_s)\right).$$

Но $X_s \vdash \Delta \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar c_s)$, поэтому

$$X_s \vdash \neg(Q'\bar z) \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi_{ij} \vee (\exists \bar y_1 \ldots \bar y_k) \left(\psi_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar y_s)\right)\right).$$

Таким образом, для (X_s, Y_s) свойство S_4 выполнено.

Лемма 3. *Пусть* (X, Y) — *пара, удовлетворяющая свойствам* $S_1 - S_4$ *сигнатуры* Σ', $|\Sigma'| < \varkappa$ *и* $\varphi = \exists y \varphi'$ — *предложение сигнатуры* $\Sigma \cup \cup \{c_i | i < \varkappa\}$. *Предположим также, что не существует пары* (X', Y') *сигнатуры* $\Sigma'' \supseteq \Sigma'$, $|\Sigma''| < \varkappa$, *такой, что* $X' \supseteq X$, $Y \subseteq Y'$ *и* $\neg\varphi \in X'$ *и* (X', Y') *удовлетворяет свойствам* $S_1 - S_4$. *Тогда найдутся сигнатура* $\Sigma'' \supseteq \Sigma'$ *и пара* (X', Y') *сигнатуры* Σ'', *удовлетворяющая свойствам* $S_1 - S_4$, *такая, что* $X' \supseteq X$, $Y' \supseteq Y$ *и* $[\varphi']^y_{c_i} \in X'$, *где* c_i — *некоторая константа сигнатуры* Σ''.

Доказательство. Рассмотрим наименьшее p такое, что c_p не входит в формулу φ, и сигнатуру Σ'. Полагаем

$\Sigma'' \Leftrightarrow \Sigma' \cup \{c_j|$ константа c_j входит в формулу φ или совпадает с $c_p\}$.

Определим $\psi \Leftrightarrow [\varphi']^y_{c_p}$, $X_0 = X \cup \{\psi\}$,

$Y_0 = Y \cup \{\Delta | \Delta$ — позитивное предложение сигнатуры Σ'' и $X_0 \vdash \Delta\} \cup \cup \{\bar c' \neq \bar c | X_0 \vdash P(\bar c')$ и $\bar c'$ — некоторый набор констант сигнатуры $\Sigma''\}$.

Как и в лемме 2, мы замечаем, что пара (X_0, Y_0) удовлетворяет свойствам $S_2 - S_4$. Таким образом, остается лишь доказать, что (X_0, Y_0) удовлетворяет свойству S_1. Вновь, как и в лемме 2, достаточно показать, что Y_0 непротиворечиво. Предположим, что Y_0 противоречиво, тогда найдутся позитивное предложение Δ_0 и наборы $\bar c^0_0, \ldots, \bar c^0_k$ такие, что

$$X_0 \vdash \Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar c^0_s),\ Y \cup \{\Delta_0\} \cup \{\bar c^0_s \neq \bar c \mid s \leqslant k\} \vdash .$$

Поэтому $Y \vdash \Delta_0 \to \bigvee_s \bar c^0_s = \bar c$ и

$$Y \vdash (\forall \bar y_0 \ldots \bar y_k)\left(\left(\Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_s \bar y_s = \bar c^0_s\right) \to \bigvee_s \bar y_s = \bar c\right).$$

Обозначим через $\bar c^*$ все константы из Δ_0, не входящие в сигнатуру Σ', а через $\bar z^*$ — новый набор переменных. В таком случае

$$Y \vdash (\forall \bar z^*)\left[\left(\neg F \mathbin{\&} (\forall \bar y_0 \ldots \bar y_k)\left(\Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_s \bar c^0_s = \bar y_s \to \bigvee \bar y_s = \bar c\right)\right)\right]^{\bar c^*}_{\bar z^*},$$

и по свойству S_4 для (X, Y) имеем

$$X \vdash \neg(\exists \bar z^*)\left[\left(F \vee (\exists \bar y_0 \ldots \bar y_k)\left(\Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_s \bar c^0_s = \bar y_s \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar y_s)\right)\right)\right]^{\bar c^*}_{\bar z^*}.$$

Отсюда заключаем, что $X \vdash \neg\left(\Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar c^0_s)\right)$,

$$X \vdash (\forall \bar z)\left[\neg\left(\Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar c^0_s)\right)\right]^{c_p}_z,\quad X \vdash \neg(\exists \bar z)\left[\Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_s P(\bar c^0_s)\right]^{c_p}_z.$$

Определим теперь пару (X_1, Y_1) сигнатуры

$$\Sigma_1 \Leftrightarrow \Sigma \cup \{c_j | c_j \text{ входит в формулу } \varphi\},$$

положив $X_1 \rightleftharpoons X \cup \{\neg\varphi\}$ и

$$Y_1 \rightleftharpoons Y \cup \{\Delta | \Delta \text{ — позитивное предложение сигнатуры } \Sigma_1 \text{ и } X_1 \vdash \Delta\} \cup$$
$$\cup \{\bar{c}' \neq \bar{c} | \bar{c}' \text{ — набор констант сигнатуры } \Sigma_1 \text{ и } X_1 \vdash P(\bar{c}')\}.$$

Как и в лемме 2, мы видим, что пара (X_1, Y_1) удовлетворяет свойствам $S_2 - S_4$ и $\neg\varphi \in X_1$. Но в таком случае пара (X_1, Y_1) не удовлетворяет свойству S_1. Поэтому множество Y_1 противоречиво и найдутся позитивное предложение Δ_1 и наборы $\bar{c}_0^1, \ldots, \bar{c}_k^1$ такие, что $X_1 \vdash \Delta_1 \mathop{\&}\limits_s \& P(\bar{c}_s^1)$ и $Y \cup \{\Delta_1\} \cup \{\bar{c}_s^1 \neq \bar{c} \mid s \leqslant k\} \vdash$. Итак, $Y \vdash \Delta_1 \to \bigvee\limits_s \bar{c}_s^1 = \bar{c}$ и

$$Y \vdash (\forall \bar{z}^*)\left[(\forall \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_k)\left(\Delta_1 \mathop{\&}\mathop{\&}\limits_s \bar{y}_s = \bar{c}_s^1 \to \bigvee\limits_s \bar{y}_s = \bar{c}\right]_{\bar{z}^*}^{\bar{c}^*}.$$

Таким образом, получаем, что

$$X \vdash \neg(\exists \bar{z}^*)\left[\left(\Delta_1 \mathop{\&}\mathop{\&}\limits_s P(\bar{c}_s^1)\right)\right]_{\bar{z}^*}^{\bar{c}^*}, \quad X \vdash \neg\left(\Delta_1 \mathop{\&}\mathop{\&}\limits_s P(\bar{c}_s^1)\right).$$

Отсюда

$$X \vdash \neg\left((\exists z)\left[\Delta_0 \mathop{\&}\mathop{\&}\limits_s P(\bar{c}_s^0)\right]_z^{c_p} \vee \left(\Delta_1 \mathop{\&}\mathop{\&}\limits_s P(\bar{c}_s^1)\right)\right).$$

Но $X \cup \{\neg\varphi\} \vdash \Delta_1 \mathop{\&}\mathop{\&}\limits_s P(\bar{c}_s^1)$ и $X \cup \{\psi\} \vdash \Delta_0 \mathop{\&}\mathop{\&}\limits_s P(\bar{c}_s^0)$. Следовательно,

$$X \cup \{\varphi\} \vdash \exists z\left[\Delta_0 \mathop{\&}\mathop{\&}\limits_s P(\bar{c}_s^0)\right]_z^{c_p}.$$

Поэтому

$$X \vdash (\exists z)\left[\Delta_0 \mathop{\&}\mathop{\&}\limits_s P(\bar{c}_s^0)\right]_z^{c_p} \vee \left(\Delta_1 \mathop{\&}\mathop{\&}\limits_s P(\bar{c}_s^1)\right),$$

но тогда X противоречиво, что невозможно из-за свойства S_1 для (X, Y).

Таким образом, мы показали, что пара (X_0, Y_0) удовлетворяет свойствам $S_1 - S_4$, а так как $X_0 \vdash \varphi$, то, положив $X' \rightleftharpoons X_0 \cup \{\varphi\}$ и $Y' \rightleftharpoons Y_0$, получаем пару (X', Y'), которая уже удовлетворяет всем требованиям леммы.

Лемма 4. *Если (X, Y) — пара сигнатуры Σ', удовлетворяющая свойствам $S_1 - S_4$, и φ — предложение сигнатуры $\Sigma \cup \{c_i | i < \varkappa\}$, то существует пара (X', Y') сигнатуры*

$$\Sigma'' \rightleftharpoons \Sigma' \cup \{c_i | c_i \text{ входит в предложение } \varphi\}$$

такая, что $X \subset X'$, $Y \subset Y'$, $\varphi \in Y'$ или $\neg\varphi \in Y'$ и (X', Y') удовлетворяет свойствам $S_1 - S_4$.

Доказательство. Определим

$$Y_0' \rightleftharpoons Y \cup \{\varphi\}, \quad Y_1' \rightleftharpoons Y \cup \{\neg\varphi\},$$

$$X_s \rightleftharpoons X \cup \left\{\neg(Q'\bar{z}) \bigvee\limits_i \mathop{\&}\limits_j \left(\pi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\Psi_{ij} \mathop{\&}\mathop{\&}\limits_s P(\bar{y}_s)\right)\right) \middle| \ \pi_{ij} \text{ — позитивная}\right.$$
$$\text{формула или } F, \text{ а } \psi_{ij} \text{ — позитивная формула, обе сигнатуры } \Sigma'',$$
$$\left. Y_s' \vdash Q\bar{z} \mathop{\&}\limits_i \bigvee\limits_j \left(\neg\pi_{ij} \mathop{\&} (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \to \bigvee\limits_s \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right)\right\},$$

и для $s \in \{0, 1\}$

$$Y_s \rightleftharpoons Y_s' \cup \{\Delta \mid X_s \vdash \Delta \text{ и } \Delta \text{ — позитивное предложение сигнатуры } \Sigma''\} \cup$$
$$\cup \{\bar{c} \neq \bar{c} \mid X_s \vdash P(\bar{c}') \text{ и } \bar{c}' \text{ — набор констант сигнатуры } \Sigma''\}.$$

Заметим, что пары (X_0, Y_0) и (X_1, Y_1) непосредственно в силу конструкции удовлетворяют свойствам S_2 и S_3. Покажем, что они удовлетворяют и свойству S_4. Пусть

$$Y_s \vdash Q\bar{z} \mathop{\&}_{i} \bigvee_{j} \left(\neg \pi_{ij} \,\&\, (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\psi_{ij} \to \bigvee_{s} \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right),$$

где π_{ij} — позитивная формула или F, а ψ_{ij} — позитивная формула. В таком случае найдутся позитивная формула Δ и наборы $\bar{c}_0, \ldots, \bar{c}_k$ такие, что $X_s \vdash \Delta \,\&\, \mathop{\&}_{s} P(\bar{c}_s)$,

$$Y'_s \cup \{\Delta\} \cup \{\bar{c}_i \neq \bar{c} \mid i \leqslant k\} \vdash Q\bar{z} \mathop{\&}_{i} \bigvee_{j} \left(\neg \pi_{ij} \,\&\, (\forall \bar{y}_1 \ldots \bar{y}_k) \left(\psi_{ij} \to \bigvee_{s} \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right).$$

Без ограничения общности можем считать, что число наборов $\bar{c}_0, \ldots, \bar{c}_k$ и $\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_k$ в формуле одно и то же (иначе введем в формулу новые переменные, равные $\bar{y}_0$, или набор констант, равных $\bar{c}_0$). Из вышедоказанного получаем, что

$$Y'_s \vdash Q\bar{z} \mathop{\&}_{i} \left(\bigvee_{j} \left(\neg \pi_{ij} \,\&\, (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\psi_{ij} \to \bigvee_{s} \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right) \vee \left(\Delta \to \bigvee_{s} \bar{c}_s = \bar{c}\right)\right),$$

$$Y'_s \vdash (Q\bar{z}) \left(\mathop{\&}_{i} \left(\bigvee_{j} \left(\neg \pi_{ij} \,\&\, (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\psi_{ij} \to \bigvee_{s} \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right) \vee \right.\right.$$

$$\left.\left. \vee \left(\neg F \,\&\, (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\Delta \,\&\, \mathop{\&}_{s} \bar{y}_s = \bar{c}_s \to \bigvee_{s} \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right)\right)\right).$$

Пусть $\bar{c}^*$ — константы формулы φ, не лежащие в Σ', а $\bar{z}^*$ — новые переменные, соответствующие этим константам. Тогда

$$Y'_s \vdash (\forall \bar{z}^*) \left[(Q\bar{z}) \left(\mathop{\&}_{i} \left(\bigvee_{j} \left(\neg \pi_{ij} \,\&\, (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\psi_{ij} \to \bigvee_{s} \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right)\right) \vee \right.\right.$$

$$\left.\left. \vee \left(\neg F \,\&\, (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\Delta \,\&\, \mathop{\&}_{s} \bar{y}_s = \bar{c}_s \to \bigvee_{s} \bar{y}_s = \bar{c}\right)\right)\right)\right]^{\bar{c}^*}_{\bar{z}^*}.$$

По определению X_s имеем

$$X_s \vdash \neg (\exists \bar{z}^*) \left[(Q'\bar{z}) \bigvee_{i} \left(\mathop{\&}_{j} \left(\pi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\psi_{ij} \,\&\, \mathop{\&}_{s} P(\bar{y}_s)\right)\right)\right) \,\& \right.$$

$$\left. \& \left(F \vee \left(\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k\right) \left(\Delta \,\&\, \mathop{\&}_{s} \bar{y}_s = \bar{c}_s \,\&\, \mathop{\&}_{s} P(\bar{y}_s)\right)\right)\right]^{\bar{c}^*}_{\bar{z}^*}.$$

Отсюда заключаем, что

$$X_s \vdash \neg Q'\bar{z} \bigvee_{i} \mathop{\&}_{j} \left(\pi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\psi_{ij} \,\&\, \mathop{\&}_{s} P(\bar{y}_s)\right)\right) \vee \left(\Delta \,\&\, \mathop{\&}_{s} P(\bar{c}_s)\right).$$

Так как $X_s \vdash \Delta \,\&\, \mathop{\&}_{s} P(\bar{c}_s)$, то

$$X_s \vdash \neg Q'\bar{z} \bigvee_{i} \mathop{\&}_{j} \left(\pi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\psi_{ij} \,\&\, \mathop{\&}_{s} P(\bar{y}_s)\right)\right)$$

и для (X_s, Y_s) выполнено свойство S_4. Таким образом, если мы покажем, что (X_0, Y_0) или (X_1, Y_1) удовлетворяет свойству S_1, то лемма будет доказана. Заметим, что непротиворечивость Y_s влечет непротиворечивость X_s, а поэтому достаточно доказать, что Y_0 или Y_1 непротиворечиво. Допустим, что это не так, т. е. что Y_0 и Y_1 — противоречивые множества формул. Тогда найдутся позитивные формулы Δ_s и наборы $\bar{c}_0^s, \ldots, \bar{c}_k^s$ такие, что для $s \in \{0, 1\}$ множество $Y'_s \cup \{\Delta_s\} \cup \{\bar{c}_i^s \neq \bar{c} \mid i \leqslant k\}$ противоречиво и $X_s \vdash \Delta_s \,\&\, \mathop{\&}_{\delta} P(\bar{c}_\delta^s)$. Отсюда можем заключить, что

$$Y \cup \{\varphi\} \vdash (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\Delta_0 \,\&\, \mathop{\&}_{\delta} \bar{y}_\delta = \bar{c}_\delta^1 \to \bigvee_{\delta} \bar{y}_\delta = \bar{c}\right),$$

$$Y \cup \{\neg \varphi\} \vdash (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\Delta_1 \,\&\, \mathop{\&}_{\delta} \bar{y}_\delta = \bar{c}_\delta^1 \to \bigvee_{\delta} \bar{y}_\delta = \bar{c}\right).$$

Кроме того, для $\delta \in \{0, \ldots, t\}$ и $s \in \{0, 1\}$ найдутся формулы

$$\varphi_\delta^s = Q\bar{z}^\delta \mathop{\&}_i \bigvee_j \left(\neg \pi_{ij}^s \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij}^s \to \bigvee_g \bar{y}_g = \bar{c}\right)\right)$$

такие, что π_{ij}^δ — позитивная формула или F, ψ_{ij}^δ — позитивная формула, $Y_s' \vdash \varphi_\delta$ и

$$X \cup \{\bar{\varphi}_0^s, \ldots, \bar{\varphi}_t^s\} \vdash \Delta_s \& \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}_\delta^s),$$

где

$$\bar{\varphi}_\delta^s \Leftrightarrow \neg Q'\bar{z}^\delta \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \& \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\right)\right).$$

Заметим, что $\mathop{\&}_\delta \varphi_\delta^s$ вновь эквивалентна формуле того же вида, а именно формуле

$$\varphi^s \Leftrightarrow Q\bar{z}^0 \ldots Q\bar{z}^t \left(\mathop{\&}_i \bigvee_{f \in \mathcal{F}} \left(\neg \left(\bigvee_\delta \pi_{if(\delta)}^\delta\right) \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\left(\bigvee_\delta \psi_{if(\delta)}^\delta\right) \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}\right)\right)\right),$$

где $\mathcal{F}$ — множество отображений из $\{0, \ldots, t\}$ в P, т. е. во множество значений индекса j, а $\mathop{\&}_\delta \bar{\varphi}_\delta^s$ эквивалентна формуле

$$Q'\bar{z}^0 \ldots Q'\bar{z}^t \left(\bigvee_i \mathop{\&}_{f \in \mathcal{F}} \left(\left(\bigvee \pi_{if(\delta)}^\delta\right) \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\left(\bigvee_\delta \psi_{if(\delta)}^\delta\right) \& \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\right)\right)\right).$$

Поэтому мы можем взять лишь одну формулу. Другими словами, существуют формулы такие, что

$$Y_s' \vdash (Q\bar{z}^s)\left(\mathop{\&}_i \bigvee_j \left(\neg \pi_{ij}^s \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij}^s \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}\right)\right)\right),$$

$$X \cup \left\{\neg Q'\bar{z}^s \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi_{ij}^s \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij}^s \& \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\right)\right)\right\} \vdash \Delta_s \& \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}_\delta).$$

Отсюда мы получаем, что

$$Y_s' \vdash (Q\bar{z}^s) \mathop{\&}_i \bigvee_j \left(\neg \pi_{ij}^s \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij}^s \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}\right)\right) \&$$
$$\& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\left(\Delta_s \& \mathop{\&}_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}_\delta^s\right) \to V\bar{y}_\delta = \bar{c}\right).$$

Следовательно,

$$Y \vdash \left((Q\bar{z}^0)\left(\mathop{\&}_i \bigvee_j \neg \pi_{ij}^0 \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij}^0 \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}\right)\right) \&\right.$$
$$\& \left.\left(\neg F \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\left(\Delta_0 \& \mathop{\&}_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}_\delta^0\right) \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}\right)\right)\right) \vee$$
$$\vee \left((Q\bar{z}^1)\left(\mathop{\&}_i \bigvee_j \neg \pi_{ij}^1 \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij}^1 \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}\right)\right) \&\right.$$
$$\& \left.\left(\neg F \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\Delta_1 \& \mathop{\&}_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}_\delta^1 \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}\right)\right)\right).$$

Теперь, воспользовавшись свойством S_4, легко заключить, что

$$X \vdash \neg \left(\left((Q'\bar{z}^0)\left(\bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi_{ij}^0 \vee \left(\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k\right)\left(\psi_{ij}^0 \& \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\right)\right)\right) \vee \left(\Delta_0 \& \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}_\delta^0)\right)\right) \&\right.$$
$$\& \left.(Q'\bar{z}^1)\left(\bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi_{ij}^1 \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij}^1 \& \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\right)\right) \vee \left(\Delta_1 \& \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}_\delta^1)\right)\right)\right),$$

но тогда

$$X \vdash \neg \left(Q'\bar{z}^0 \left(\bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi_{ij}^0 \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij}^0 \& \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\right)\right) \vee \left(\Delta_0 \& \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}_\delta^0)\right)\right) \vee\right.$$

$$\vee \neg \left((Q'\bar z_1) \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi^1_{ij} \vee (\exists \bar y_0 \ldots \bar y_k) \left(\psi^1_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar y_\delta) \right) \right) \vee \left(\Delta_1 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar c^1_\delta) \right) \right).$$

Из вышедоказанного также имеем для $s \in \{0, 1\}$

$$X \vdash Q'\bar z^s \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi^s_{ij} \vee (\exists \bar y_0 \ldots \bar y_k) \left(\psi^s_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar y_\delta) \right) \right) \vee \left(\Delta_s \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar c^s_\delta) \right),$$

но в таком случае X противоречиво, что невозможно по условию.

Лемма 5. *Пусть пара* (X, Y) *сигнатуры* $\Sigma'(|\Sigma'| < \varkappa)$ *удовлетворяет свойствам* $S_1 - S_4$ *и* $\varphi = \exists y \varphi'$. *Предположим, что не существует пары* (X', Y') *сигнатуры*

$$\Sigma'_1 = \Sigma' \cup \{c_i \mid c_i \text{ входит в формулу } \varphi\}$$

такой, что $X' \supset X$, $Y' \supset Y$, $\neg\varphi \in Y'$ *и* (X', Y') *удовлетворяет свойствам* $S_1 - S_4$. *Тогда существуют константа* c_ρ, $\rho < \varkappa$, *и пара* (X', Y') *сигнатуры*

$$\Sigma'_0 = \Sigma' \cup \{c_i \mid c_i \text{ входит в формулу } \varphi\} \cup \{c_\rho\}$$

такие, что $X' \supseteq X$, $Y' \supseteq Y$, $\psi \leftrightharpoons [\varphi']^y_{c_\rho} \in Y'$ *и* $\varphi \in Y'$ *и пара* (X', Y') *удовлетворяет свойствам* $S_1 - S_4$.

Доказательство. Определим $Y'_1 \leftrightharpoons Y \cup \{\neg\varphi\}$, $Y'_0 = Y \cup \{\psi\}$,

$$X_s \leftrightharpoons X \cup \left\{ \neg Q'\bar z \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi_{ij} \vee (\exists \bar y_0 \ldots \bar y_k) \left(\psi_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar y_\delta) \right) \right) \middle| \pi_{ij} \text{ — позитивная} \right.$$

формула или F, ψ_{ij} — позитивная формула сигнатуры Σ'_s и

$$\left. Y'_s \vdash Q\bar z \mathop{\&}_i \bigvee_j \left(\neg \pi_{ij} \mathbin{\&} (\forall \bar y_0 \ldots \bar y_k) \left(\psi_{ij} \to \bigvee_\delta \bar y_\delta = \bar c \right) \right) \right\},$$

$Y_s \leftrightharpoons Y'_s \cup \{\Delta \mid \Delta$ — позитивная формула сигнатуры Σ'_s и $X_s \vdash \Delta\} \cup$
$\cup \{\bar c' \neq \bar c \mid \bar c'$ — набор константных символов сигнатуры Σ'_s и $X_s \vdash P(\bar c')\}$.

Достаточно доказать, что (X_0, Y_0) удовлетворяет условиям $S_1 - S_4$. Пусть это не так. Как и в лемме 4, легко заметить, что пары (X_0, Y_0) и (X_1, Y_1) удовлетворяют свойствам $S_2 - S_4$. Поэтому в силу нашего предположения пара (X_1, Y_1) не удовлетворяет S_1 и, следовательно, Y_1 — противоречивое множество. В таком случае найдутся позитивные предложения Δ_0, Δ_1 и наборы $\bar c^0_0, \ldots, \bar c^0_k$ и $\bar c^0_1, \ldots, \bar c^1_k$ такие, что

$$Y'_1 \cup \{\Delta_1\} \cup \{\bar c^1_\delta \neq \bar c \mid \delta \leqslant k\} \vdash, \quad X_1 \vdash \Delta_1 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar c^1_\delta),$$

а также

$$Y'_0 \cup \{\Delta_0\} \cup \{\bar c^0_\delta \neq \bar c \mid \delta \leqslant k\} \vdash, \quad X_0 \vdash \Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar c^0_\delta).$$

Как и в лемме 4 мы можем найти формулы π^s_{ij}, ψ^s_{ij} такие, что π^s_{ij} — позитивная формула или F, а ψ^s_{ij} — позитивная формула и

$$Y'_s \vdash (Q\bar z^s) \mathop{\&}_i \bigvee_j \left(\neg \pi^s_{ij} \mathbin{\&} (\forall \bar y_0 \ldots \bar y_k) \left(\psi^s_{ij} \to \bigvee_\delta \bar y_\delta = \bar c \right) \right),$$

$$X \cup \left\{ \neg Q'\bar z^s \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi^s_{ij} \vee (\exists \bar y_0 \ldots \bar y_k) \left(\psi^s_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar y_\delta) \right) \right) \vdash \Delta_s \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar c^s_\delta) \right\}.$$

Отсюда заключаем, что

$$Y'_s \vdash Q\bar z^s \mathop{\&}_i \bigvee_j (\neg \pi^s_{ij} \mathbin{\&} (\forall \bar y_0 \ldots \bar y_k)(\psi^s_{ij} \to V \bar y_\delta = \bar c)) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} (\forall \bar y_0 \ldots \bar y_k) \left(\left(\Delta_s \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta \bar c^s_\delta = \bar y_\delta \right) \to \bigvee_\delta \bar y_\delta = \bar c \right),$$

поэтому

$$Y \cup \{\varphi\} \vdash [\exists z)\Big[(Q\bar{z}^0) \mathop{\&}_i \bigvee_j \Big(\urcorner \pi^0_{ij} \mathbin{\&} (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big(\psi^0_{ij} \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}\Big)\Big) \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big(\Big(\Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta \bar{c}^0_\delta = \bar{y}_\delta\Big) \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}\Big)\Big]^{c_\rho}_z.$$

Следовательно,

$$Y \vdash (\forall \bar{z}^*)\Big[(\exists z)\Big[(Q\bar{z}^0) \mathop{\&}_i \bigvee_j (\urcorner \pi^0_{ij} \mathbin{\&} (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)(\psi^0_{ij} \to \bigvee \bar{y}_\delta = \bar{c})) \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} \Big(\urcorner F \mathbin{\&} (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big(\Big(\Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta \bar{c}^0_\delta = \bar{y}_\delta\Big) \to \bigvee \bar{y}_\delta = \bar{c}\Big)\Big)\Big]^{c_\rho}_z \vee \Big((Q\bar{z}^1) \mathop{\&}_i \bigvee_j \Big(\urcorner \pi^1_{ij} \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big(\psi^1_{ij} \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}\Big)\Big) \mathbin{\&} \Big(\urcorner F \mathbin{\&} (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big(\Delta_1 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta \bar{c}^1_\delta = \bar{y}_\delta \to$$

$$\to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}\Big)\Big)\Big)\Big]^{\bar{c}^*}_{\bar{z}^*}.$$

Теперь, воспользовавшись свойством S_4 для (X, Y), получим

$$X \vdash \urcorner \Big((\forall z)\Big[(Q'\bar{z}^0) \bigvee_i \mathop{\&}_j \Big(\pi^0_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big(\psi^0_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\Big)\Big) \vee$$

$$\vee \Big(\Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}^0_\delta)\Big)\Big]^{c_\rho}_z \mathbin{\&} \Big((Q'\bar{z}^1) \bigvee_i \mathop{\&}_j \Big(\pi^1_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big(\psi^1_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\Big)\Big) \vee$$

$$\vee \Big(\Delta_1 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}^1_\delta)\Big)\Big)\Big),$$

$$X \vdash (\exists z)\Big[\urcorner (Q'\bar{z}^0)\Big(\bigvee_i \mathop{\&}_j \Big(\pi^0_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big(\psi^0_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\Big)\Big) \vee$$

$$\vee \Big(\Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}^0_0)\Big)\Big)\Big]^{c_\rho}_z \vee \urcorner(Q\bar{z}^1)\Big(\bigvee_i \mathop{\&}_j \Big(\pi^1_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big)\Big(\psi^1_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\Big)\Big) \vee$$

$$\vee \Big(\Delta_1 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}^1_\delta)\Big)\Big).$$

В результате

$$X \vdash \urcorner (\forall z)\Big((Q'\bar{z}^0) \bigvee_i \mathop{\&}_j \Big(\pi^0_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big(\psi^0_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\Big) \vee$$

$$\vee \Big(\Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}^0_\delta)\Big)\Big) \vee \urcorner\Big((Q'\bar{z}^1) \bigvee_i \mathop{\&}_j \Big(\pi^1_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big(\psi^1_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\Big)\Big) \vee$$

$$\vee \Big(\Delta_1 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}^1_\delta)\Big)\Big).$$

С другой стороны, для $s \in \{0, 1\}$

$$X \vdash Q'\bar{z}^s \bigvee_i \mathop{\&}_j (\pi^s_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big(\psi^s_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\Big)\Big) \vee \Big(\Delta_s \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}^s_\delta)\Big),$$

отсюда

$$X \vdash (\forall z)\Big(\Big[(Q'\bar{z}^0) \bigvee_i \mathop{\&}_j \Big(\pi^0_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big(\psi^0_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\Big)\Big) \vee$$

$$\vee \Big(\Delta_0 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}^0_\delta)\Big)\Big]^{c_\rho}_z\Big),$$

$$X \vdash (Q'\bar{z}^1) \bigvee_i \mathop{\&}_j \Big(\pi^1_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\Big(\psi^1_{ij} \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\Big)\Big) \vee \Big(\Delta_1 \mathbin{\&} \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}^1_\delta)\Big).$$

Но в таком случае X противоречиво, что невозможно в силу свойства S_1 для (X, Y).

Лемма 6. *Пусть* (X_ξ, Y_ξ), $\xi < \delta$,— *последовательность множеств формул сигнатуры* Σ_ξ, *удовлетворяющих свойствам* $S_1 - S_4$ *таких, что* $X_\xi \subseteq X_\eta$ *и* $Y_\xi \subseteq Y_\eta$ *для* $\xi \leqslant \eta$. *Тогда пара* $\left(\bigcup_{\xi<\delta} X_\xi, \bigcup_{\xi<\delta} Y_\xi\right)$ *также удовлетворяет свойствам* $S_1 - S_4$.

Доказательство непосредственно следует из монотонности последовательности пар.

Теперь будет доказана основная

Теорема. *В аксиоматизируемом классе все эпиморфизмы сильные тогда и только тогда, когда для любого предикатного символа* P *выполнена* SE-*аксиома.*

Доказательство. Необходимость получается из леммы 1.

Докажем достаточность, предположив, что в классе $\mathscr{K}$ все эпиморфизмы сильные, но найдется предикатный символ P, для которого не выполнена в классе $\mathscr{K}$ никакая SE-аксиома.

Теперь будем строить две модели $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ из класса $\mathscr{K}$ и эпиморфизм λ, не являющийся сильным. Для этого построим их диаграммы в расширенной константами сигнатуре, а затем с помощью этих констант определим искомый гомоморфизм.

Рассмотрим кардинал $\varkappa > \max(|\Sigma_0|, \omega)$, где Σ_0 — сигнатура класса $\mathscr{K}$, а ω — первый бесконечный кардинал, и рассмотрим сигнатуру $\Sigma^* \rightleftharpoons \Sigma_0 \cup \{c_i | i < \varkappa\}$, полученную обогащением сигнатуры Σ_0 новыми константными символами c_i для ординалов $i < \varkappa$. Искомые диаграммы будем строить в этой сигнатуре Σ^*.

Пусть φ_ξ, $\xi < \varkappa$,— все предложения языка $\Sigma^* \rightleftharpoons \Sigma_0 \cup \{c_i | i < \varkappa\}$. Для ξ, $0 \leqslant \xi < \varkappa$, будем строить пары (T_ξ, Π_ξ) сигнатуры $\Sigma_\xi(|\Sigma_\xi| < \varkappa)$ такие, что

а) (T_ξ, Π_ξ) удовлетворяют свойствам $S_1 - S_4$,

б) $T_\xi \supseteq T_\eta$, $\Pi_\xi \supseteq \Pi_\eta$ для $\xi \geqslant \eta$,

в) для любого предельного ординала η и $n \in \omega$ имеет место

$$\varphi_{\eta+n} \in T_{\eta+2n+2} \text{ или } \neg\varphi_{\eta+n} \in T_{\eta+2n+2},$$

$$\varphi_{\eta+n} \in T_{\eta+2n+1} \text{ или } \neg\varphi_{\eta+n} \in \Pi_{\eta+2n+1},$$

причем если $\varphi_{\eta+n} \in T_{\eta+2n+2}$, $\varphi_{\eta+n} = \exists y \varphi'$, то найдется c_ξ такой, что $[\varphi']^y_{c_\xi} \in T_{\eta+2n+2}$, и если $\varphi_{\eta+n} \in \Pi_{\eta+2n+1}$, $\varphi_{\eta+n} = \exists y \varphi'$, то найдется c_ξ такой, что $[\varphi']^y_{c_\xi} \in \Pi_{\eta+2n+1}$,

г) T_0 и Π_0 содержат все аксиомы класса $\mathscr{K}$.

Взяв затем $T_\infty \rightleftharpoons \bigcup_{\xi<\varkappa} T_\xi$, $\Pi_\infty \rightleftharpoons \bigcup_{\xi<\varkappa} \Pi_\xi$, мы получим, что (T_∞, Π_∞) удовлетворяют свойствам $S_1 - S_4$ и T_∞, Π_∞ — полные теории сигнатуры Σ^* с множеством свидетелей $C \rightleftharpoons \{c_i | i < \varkappa\}$ (см. [3]), что следует непосредственно из их конструирования.

Пусть $\mathfrak{N}_\infty$ — модель, сконструированная из констант для T_∞ и $\mathfrak{M}_\infty$ для Π_∞. Такие модели существуют по лемме 2.1.2 из [3]. Определим $\lambda\colon \mathfrak{N}_\infty \to \mathfrak{M}_\infty$, положив $\lambda\left(3n_{\mathfrak{N}_\infty}(c_i)\right) \rightleftharpoons 3n_{\mathfrak{M}_\infty}(c_i)$. Это определение корректно, так как $\mathfrak{N}_\infty \models c_i = c_j$ влечет $c_i = c_j \in T_\infty$ и, в силу $S_1 - S_4$, равенство $c_i = c_j$ из Π_∞. Заметим, что λ — гомоморфизм и на все $\mathfrak{M}_\infty$, т. е. λ — эпиморфизм $\mathfrak{N}_\infty$ на $\mathfrak{M}_\infty$, но не сильный. Предположим, что он сильный. Тогда по построению $\mathfrak{N}_\infty \models \neg P(c_0, \ldots, c_n)$, $\mathfrak{M}_\infty \models P(c_0, \ldots, c_n)$ и должны существовать $c_{j_0}, \ldots, c_{j_n}$ такие, что $\mathfrak{N}_\infty \models P\left(c_{j_0}, \ldots, c_{j_n}\right)$ и $\lambda\left(3\text{H}\left(c_{j_\delta}\right)\right) = \lambda\left(3\text{H}(c_\delta)\right)$ для $\delta \leqslant n$. Следовательно, $P\left(c_{j_0}, \ldots, c_{j_n}\right) \in T_\xi$, $\xi < \varkappa$. Отсюда $\bar{c}' \neq \bar{c} \in \Pi_{\xi+1}$ и $\mathfrak{M}_\infty \models \bar{c}' \neq \bar{c}$, где $\bar{c}' = \left(c_{j_0}, \ldots, c_{j_n}\right)$. Таким образом,

$$\lambda\left(3H_{\mathfrak{N}_\infty}\left(c_{j_0}\right), \ldots, 3H_{\mathfrak{N}_\infty}\left(c_{j_n}\right)\right) \neq \lambda\left(3H_{\mathfrak{M}_\infty}(c_0), \ldots, 3H_{\mathfrak{M}_\infty}(c_n)\right).$$

Полученное противоречие показывает, что таким образом мы можем сконструировать модели $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ из аксиоматизируемого класса $\mathscr{K}$ и эпиморфизм λ: $\mathfrak{M}\to\mathfrak{N}$, не являющийся сильным, что противоречит предположению о классе $\mathcal{K}$ и, значит, для предикатного символа P должна выполняться в $\mathcal{K}$ некоторая SE-аксиома.

Пусть теперь $\mathcal{A}\leftrightharpoons \mathrm{Th}(\mathcal{K})$ — теория класса $\mathcal{K}$, $\bar{c}=(c_0, \ldots, c_n)$ — набор константных символов и P — $(n+1)$-местный предикатный символ. Тогда

$$T_0\leftrightharpoons \mathcal{A}\cup\{\neg P(c_0,\ldots,c_n)\}\cup\left\{\left[\neg\left(Q'\bar{z}\right)\bigvee_i \mathop{\&}_j\left(\pi_{ij}\vee(\exists\bar{y}_0\ldots\bar{y}_k)\left(\psi_{ij}\mathop{\&}\mathop{\&}_s P(\bar{y}_s)\right)\right)\right]_{\bar{c}}^{\bar{x}}\right|,$$

π_{ij} — тождественно ложная или позитивная, ψ_{ij} — позитивная формулы и

$$\mathcal{A}\vdash(\forall\bar{x})\left(P(\bar{x})\to(Q\bar{z})\mathop{\&}_i\bigvee_j\left(\pi_{ij}\mathop{\&}(\forall\bar{y}_0\ldots\bar{y}_k)\left(\psi_{ij}\to\bigvee_s \bar{y}_s=\bar{x}\right)\right)\right),\ \text{где}\ \forall'\leftrightharpoons$$
$$\leftrightharpoons\exists\ \text{и}\ \exists'\leftrightharpoons\forall\ \text{и}\ Q_i\in\{\forall,\exists\}.$$

Определим теперь

$\Pi_0\leftrightharpoons\mathcal{A}\cup\{P(c_0, \ldots, c_n)\}\cup\{\Delta|\Delta$ — позитивное предложение сигнатуры $\Sigma_0\cup\{c_0, \ldots, c_n\}$ и $T_0\vdash\Delta\}\cup\{\bar{c}'\neq\bar{c}|T_0\vdash P(\bar{c}')$ и $\bar{c}'$ — набор констант сигнатуры $\Sigma_0\cup\{c_0, \ldots, c_n\}\}$.

Вначале покажем, что пара (T_0, Π_0) удовлетворяет свойствам S_1 — S_4. Выполнимость свойств S_2 и S_3 следует непосредственно из определения.

Покажем, что (T_0, Π_0) удовлетворяет свойству S_1. Допустим, что T_0 противоречиво, тогда найдутся наборы $\left(\pi_{ij}^s, \psi_{ij}^s\right)$ такие, что

$$\mathcal{A}\vdash(\forall\bar{x})\left(P(\bar{x})\to(Q_s\bar{z}^s)\mathop{\&}_i\bigvee_j\left(\neg\pi_{ij}^s\mathop{\&}\left(\forall\bar{y}_1^s\ldots\bar{y}_k^s\right)\left(\psi_{ij}^s\to\bigvee_\delta\bar{y}_\delta^s=\bar{x}\right)\right)\right),$$

для любых i, j, s формула π_{ij}^s позитивная или тождественно ложная, а ψ_{ij}^s — позитивная формула, но множество

$$\mathcal{A}\cup\{\neg P(\bar{c})\}\cup\left\{\left[\neg Q_s'\bar{z}^s\bigvee_i\mathop{\&}_j\left(\pi_{ij}^s\vee\left(\exists\bar{y}_0^s\ldots\bar{y}_k^s\right)\left(\psi_{ij}^s\mathop{\&}\mathop{\&}_\delta P\left(\bar{y}_\delta^s\right)\right)\right]_{\bar{c}}^{\bar{x}}\right|s\leqslant t\right\}$$

противоречиво. Отсюда

$$\mathcal{A}\cup\{\neg P(\bar{c})\}\vdash\left[\bigvee_s\left(Q_s'\bar{z}_s\right)\bigvee_i\mathop{\&}_j\left(\pi_{ij}^s\vee\left(\exists\bar{y}_0^s\ldots\bar{y}_k^s\right)\left(\psi_{ij}^s\mathop{\&}\mathop{\&}_\delta P\left(\bar{y}_\delta^s\right)\right)\right)\right]_{\bar{c}}^{\bar{x}},$$

$$\mathcal{A}\vdash(\forall\bar{x})\left(\neg P(\bar{x})\to\bigvee_s\left(Q_s'\bar{z}_s\right)\bigvee_i\mathop{\&}_j\left(\pi_{ij}^s\vee\left(\exists\bar{y}_0^s\ldots\bar{y}_k^s\left(\psi_{ij}^s\mathop{\&}\mathop{\&}_\delta P\left(\bar{y}_\delta^s\right)\right)\right)\right)\right).$$

Без ограничения общности мы можем предполагать, что кванторные приставки $Q_p\bar{z}_p$ и $Q_q\bar{z}_q$ для $p\neq q$ не имеют общих переменных, а в таком случае

$$\mathcal{A}\vdash(\forall\bar{x})\left(\neg P(\bar{x})\to Q_0'\bar{z}_0\ldots Q_t'\bar{z}_t\bigvee_{s=0}^{t}\bigvee_{i=0}^{m}\mathop{\&}_{j=0}^{l}\left(\pi_{ij}^s\vee\left(\exists\bar{y}_0^s\ldots\bar{y}_k^s\right)\left(\psi_{ij}^s\mathop{\&}\mathop{\&}_\delta P\left(\bar{y}_\delta^s\right)\right)\right)\right).$$

Следовательно,

$$\mathcal{A}\vdash(\forall\bar{x})\left(\neg P(\bar{x})\to Q_0'\bar{z}_0\ldots Q_t'\bar{z}_t\ldots\bigvee_i\mathop{\&}_{f\in\mathcal{F}}\left(\bigvee_s\pi_{if(s)}^s\vee\right.\right.$$
$$\left.\left.\bigvee_s\left(\exists\bar{y}_0^s\ldots\bar{y}_k^s\right)\left(\psi_{if(s)}^s\mathop{\&}\mathop{\&}_\delta P\left(\bar{y}_\delta^s\right)\right)\right)\right),$$

где $\mathcal{F}$ — множество всех отображений из $\{0, \ldots, t\}$ в $\{0, \ldots, l\}$. Но тогда

$$\mathcal{A}\vdash(\forall\bar{x})\left(\neg P(\bar{x})\to Q_0'\bar{z}_0\ldots Q_t'\bar{z}_t\bigvee_i\mathop{\&}_{f\in\mathcal{F}}\left(\left(\bigvee_s\pi_{if(s)}^s\right)\vee\right.\right.$$
$$\left.\left.\vee\left(\exists\bar{y}_0^0\ldots\bar{y}_k^0\ldots\bar{y}_0^t\ldots\bar{y}_k^t\right)\left(\left(\bigvee_s\left(\psi_{if(s)}^s\mathop{\&}\mathop{\&}_\delta\mathop{\&}_{p\neq s}\bar{y}_\delta^p=\bar{y}_\delta^s\right)\mathop{\&}\mathop{\&}_p\mathop{\&}_\delta P\left(\bar{y}_\delta^p\right)\right)\right)\right).\qquad(1)$$

Однако из выбора наборов π^s_{ij}, ψ^s_{ij} следует, что

$$\mathscr{A} \vdash (\forall \bar{x}) \left(P(\bar{x}) \to Q_0 \bar{z}_0 \ldots Q_t \bar{z}_t \mathop{\&}_s \mathop{\&}_i \bigvee_j \left(\neg \pi^s_i \& (\forall \bar{y}^s_0 \ldots \bar{y}^s_k) \left(\psi^s_{ij} \to \bigvee_\delta \bar{y}^s_\delta = \bar{x} \right) \right) \right).$$

Используя эквивалентные преобразования, мы аналогично вышедоказанному получаем

$$\mathscr{A} \vdash (\forall \bar{x}) \Big(P(\bar{x}) \to Q_0 \bar{z}_0 \ldots Q_t \bar{z}_t \mathop{\&}_i \bigvee_f \Big(\mathop{\&}_s \neg \pi^s_{if(s)} \,\&$$

$$\mathop{\&}_s (\forall \bar{y}^s_0 \ldots \bar{y}^s_k) \left(\psi^s_{if(s)} \to \bigvee_\delta \bar{y}^s_\delta = \bar{x} \right) \Big) \Big).$$

Следовательно,

$$\mathscr{A} \vdash (\forall \bar{x}) \Big(P(\bar{x}) \to Q_0 \bar{z}_0 \ldots Q_t \bar{z}_t \mathop{\&}_i \bigvee_{f \in \mathscr{F}} \Big(\neg \Big(\bigvee_s \pi^s_{if(s)} \Big) \,\&$$

$$\& (\forall \bar{y}^0_0 \ldots \bar{y}^0_k \ldots \bar{y}^t_0 \ldots \bar{y}^t_k) \left(\bigvee_s \left(\psi^s_{if(s)} \& \mathop{\&}_{p \neq s} \mathop{\&}_\delta \bar{y}^p_\delta \neq \bar{y}^s_\delta \right) \to \bigvee_{p,\delta} \bar{y}^p_\delta = \bar{x} \right) \Big) \Big), \quad (2)$$

где $\mathscr{F}$ — множество всех отображений из $\{0, \ldots, t\}$ в множество значений индекса j. Но конъюнкция формул из (1), (2), как легко видеть, будет SE-аксиомой для P, что невозможно по предположению.

Итак, T_0 непротиворечиво. Докажем, что и Π_0 непротиворечиво. Допустим, что это не так. Тогда найдутся позитивное предложение Δ и $\bar{c}^i$ такие, что $\mathscr{A} \cup \{P(\bar{c})\} \cup \{\Delta\} \cup \{\bar{c}^i \neq \bar{c} \mid i \leqslant k\} \vdash$, а $T_0 \vdash \Delta$ и $T_0 \vdash \bar{c}^i \neq \bar{c}$. Отсюда $\mathscr{A} \vdash P(\bar{c}) \to (\Delta \to V\bar{c}^i \neq \bar{c})$, поэтому

$$\mathscr{A} \vdash (\forall \bar{x}) (P\bar{x}) \to (\neg F \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) (\Delta \,\&\, \mathop{\&}_i \bar{y}_i = \bar{c}^i \to \bar{y}_i = \bar{c}))).$$

Но в этом случае

$$\neg (F \vee \Big[(\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \Big[\Big(\Delta \,\&\, \mathop{\&}_i \bar{y}_i = \bar{c}^i \Big) \Big]^{\bar{c}}_{\bar{x}} \,\&\, \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta) \Big]^{\bar{x}}_{\bar{c}} \in T_0.$$

Последняя формула эквивалентна формуле $\neg(\Delta \,\&\, \mathop{\&}_i P(\bar{c}^i))$, значит, $T_0 \vdash \neg(\Delta \,\&\, \mathop{\&}_i P(\bar{c}^i))$, $T_0 \vdash \Delta$ и $T_0 \vdash P(\bar{c}^i)$. Но тогда T_0 противоречиво, что невозможно в силу ранее доказанного.

Покажем теперь, что пара (T_0, Π_0) удовлетворяет свойству S_4. Пусть

$$\Pi_0 \vdash (Q\bar{z}) \mathop{\&}_i \bigvee_j \left(\neg \pi_{ij} \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\psi_{ij} \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c} \right) \right).$$

Тогда найдутся позитивное предложение Δ и наборы $\bar{c}_0, \ldots, \bar{c}_k$ такие, что

$$\mathscr{A} \cup \{P(\bar{c})\} \cup \{\Delta\} \cup \{\bar{c}^i \neq \bar{c} \mid i \leqslant k\} \vdash (Q\bar{z}) \mathop{\&}_i \bigvee_j (\neg \pi_{ij} \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) (\psi_{ij} \to$$

$$\to \bigvee_\sigma \bar{y}_\delta = \bar{c})),$$

$T_0 \vdash \Delta$ и $T_0 \vdash P(\bar{c}^i)$ для $i \leqslant k$.

Легко понять, что число наборов переменных $\bar{y}_i$ можно увеличить, добавив новые $\bar{y}_j$ и для них в ψ_{ij} добавив конъюнктивные члены $\bar{y}_j = \bar{y}_0$. Вид формул при этом не изменится, поэтому можно предполагать, что число наборов констант $\bar{c}_0, \ldots, \bar{c}_k$ и число переменных $\bar{y}_0, \ldots, \bar{y}_k$ в формуле одно и то же.

Из вышесказанного заключаем, что

$$\mathscr{A} \vdash P(\bar{c}) \to (Q\bar{z}) \mathop{\&}_i \bigvee_j \left(\neg \pi_{ij} \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\psi_{ij} \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c} \right) \right) \vee$$

$$\vee (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\Delta \,\&\, \mathop{\&}_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}^\delta \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c} \right),$$

$$\mathscr{A} \vdash (\forall \bar{x}) \Big(P(\bar{x}) \to \Big[(Q\bar{z}) \mathop{\&}_i \bigvee_j (\neg \pi_{ij} \& (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) (\psi_{ij} \to \bigvee \bar{y}_\delta = \bar{x}) \vee$$

$$\vee (\forall \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k) \left(\Delta \,\&\, \mathop{\&}_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c}^\delta \to \bigvee_\delta \bar{y}_\delta = \bar{c} \right) \Big]^{\bar{c}}_{\bar{x}} \Big).$$

Но из определения T_0 имеем

$$T_0 \vdash \neg(Q\bar{z}) \bigvee_i \mathop{\&}_j (\pi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \,\&\, \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\right) \,\&\, \left(\Delta \,\&\, \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}^\delta)\right),$$

$$T_0 \vdash \neg(Q\bar{z}) \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \,\&\, \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\right)\right) \vee \neg\left(\Delta \,\&\, \mathop{\&}_\delta P(\bar{c}^\delta)\right).$$

Отсюда

$$T_0 \vdash \neg(Q\bar{z}) \bigvee_i \mathop{\&}_j \left(\pi_{ij} \vee (\exists \bar{y}_0 \ldots \bar{y}_k)\left(\psi_{ij} \,\&\, \mathop{\&}_\delta P(\bar{y}_\delta)\right)\right).$$

Таким образом, для (T_0, Π_0) выполнено свойство S_4.

Итак, мы построили пару (T_0, Π_0), удовлетворяющую свойствам $S_1 - S_4$. Определим теперь для каждого ξ, $0 < \xi < \varkappa$, пару (T_ξ, Π_ξ), удовлетворяющую нужным нам свойствам. Пусть для $\delta < \xi$ мы уже построили такую пару (T_δ, Π_δ).

Если ξ — предельный ординал, то полагаем $T_\xi = \bigcup_{\delta<\xi} T_\delta$ и $\Pi_\xi = \bigcup_{\delta<\xi} \Pi_\delta$. Тогда пара (T_ξ, Π_ξ) по лемме 6 удовлетворяет свойствам $S_1 - S_4$.

Если ξ непредельный, то $\xi = \eta + 2n + 1$ или $\xi = \eta + 2n + 2$, где η — предельный ординал или $\eta = 0$.

Пусть $\varphi = \varphi_{\eta+n}$. В первом случае, когда $\xi = \eta + 2n + 1$, проверим, существует ли пара (X', Y') сигнатуры

$$\Sigma' = \Sigma_{\xi-1} \cup \{c_i | c_i \text{ входит в предложение } \varphi\}$$

такая, что $X \subset X'$, $Y \subset Y'$, $\neg\varphi \in Y'$ и (X', Y') удовлетворяет свойствам $S_1 - S_4$. Если такая пара существует, то $\Sigma_\xi \rightleftharpoons \Sigma'$, $T_\xi \rightleftharpoons X'$ и $\Pi_\xi \rightleftharpoons Y'$. Если такой пары нет и φ не начинается с квантора $\exists$, то по лемме 4 найдется пара (X', Y') сигнатуры Σ', удовлетворяющая свойствам $S_1 - S_4$, причем $X \subseteq X'$, $Y \subseteq Y'$ и $\varphi \in Y'$. В этом случае также полагаем $\Sigma_\xi \rightleftharpoons \Sigma'$, $T_\xi \rightleftharpoons X'$ и $\Pi_\xi \rightleftharpoons Y'$. Если же $\varphi = \exists y \varphi'$, то в силу леммы 5, положив $\Sigma_\xi \rightleftharpoons \Sigma' \cup \{c_p\}$, где константный символ c_p не входит в Σ', можем построить пару (X', Y') сигнатуры Σ_ξ такую, что $X \subseteq X'$, $Y \subset Y'$, $[\varphi']^y_{c_p} \in Y'$, $\varphi \in Y'$ и пара (X', Y') удовлетворяет свойствам $S_1 - S_4$. В этом случае также полагаем $T_\xi \rightleftharpoons X'$ и $\Pi_\xi \rightleftharpoons Y'$. Нетрудно видеть, что во всех рассмотренных случаях (T_ξ, Π_ξ) удовлетворяет всем требуемым свойствам.

Во втором случае, когда $\xi = \eta + 2n + 2$, мы проверяем, существует ли пара (X', Y') сигнатуры Σ' такая, что $X \subset X'$, $Y \subset Y'$, $\neg\varphi \in X'$ и (X', Y') удовлетворяет свойствам $S_1 - S_4$. Если такая пара существует, то $\Sigma_\xi = \Sigma'$, $T_\xi \rightleftharpoons X'$ и $\Pi_\xi \rightleftharpoons Y'$. Если такой пары не существует и φ не начинается с квантора $\exists$, то по лемме 2 найдется пара (X', Y') сигнатуры Σ' такая, что $X \subseteq X'$, $Y \subseteq Y'$, $\varphi \in Y'$ и (X', Y') удовлетворяет свойствам $S_1 - S_4$. В этом случае также полагаем $\Sigma_\xi \rightleftharpoons \Sigma'$, $T_\xi \rightleftharpoons X'$, $\Pi_\xi \rightleftharpoons Y'$. Если же $\varphi = \exists y \varphi'$, то в силу леммы 3, положив $\Sigma_\xi \rightleftharpoons \Sigma' \cup \{c_p\}$, где c_p — константный символ, не входящий в Σ', можем найти пару (X', Y') сигнатуры Σ_ξ такую, что $X \subseteq X'$, $Y \subseteq Y'$, $[\varphi']^y_{c_p} \in X'$, $\varphi \in X'$ и пара (X', Y') удовлетворяет свойствам $S_1 - S_4$. Положив $T_\xi \rightleftharpoons X'$ и $\Pi_\xi \rightleftharpoons Y'$, мы очевидным образом выполним все условия.

Таким образом, мы сконструировали искомую последовательность пар множеств, и теорема доказана.

Следствие. *Если в аксиоматизируемом классе* $\mathcal{K}$ *сигнатуры* Σ *все эпиморфизмы сильные, то для любой сигнатуры* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma'$ *найдется расширение* $\Sigma'(\Sigma_0 \subseteq \Sigma' \subseteq \Sigma)$ *такое, что* $|\Sigma'| \leqslant |\Sigma_0| + \omega$, *и в классе* $\mathcal{K} \upharpoonright \Sigma'$ *все эпиморфизмы сильные.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Мальцев А. И.** Некоторые вопросы теории классов моделей // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда. Т. 1.— Л., 1963.— С. 169—198.
2. **Гончаров С. С.** Аксиоматизируемые классы с сильными гомоморфизмами // 6-я Всесоюз. конф. по мат. логике.— Новосибирск, 1984.— С. 43.

3. **Чэн Ч., Кейслер Г.** Теория моделей.— М.: Мир, 1977.
4. **Andreka H., Nemeti I.** Generalization of the concept of variety and quasivariety to partial algebras though categori theory.— Diss. Math., 1983.
5. **Sain I.** On classes of algebraic systems closed with respect to quotients // Universal algebra and applications.— Banach center publicationes: Warszaw, 1982.— P. 127—131.

Л. П. ЛИСОВИК

ЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЧНО НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

В работе развивается операциональный подход к понятию функции, предполагающий понимание функции как действия. Рассматриваемые здесь функции задаются посредством различных преобразователей и, в частности, посредством макропреобразователей над размеченными деревьями. Этот подход соответствует принципу Фреге, согласно которому понятие функции первично по отношению к понятию множества. В § 1 отражен процесс развития понятия функции. В § 2 исследуются свойства конкретных классов функций и операторов, заданных преобразователями. Строится и развивается Δ-исчисление (§ 3), в котором устанавливаются теоремы, определяющие «логические свойства частично непрерывных функций». Обсуждаются также аксиоматические теории, близкие к Δ-исчислению. В § 4 рассмотрены модели Δ-исчисления, определяемые на основе § 2, 3. Последний параграф дает достаточно общую классификацию функций (в частности, функций в канторовом пространстве) по трем основным типам: R, Z, V. Она основана на классификации машин Тьюринга с оракулом, причем в общем случае допускаются недетерминированные машины Тьюринга с оракулом, имеющие несколько входных лент, одну выходную ленту, бесконечный процесс обработки входных данных и осциллирование относительно выходной ленты.

Автор благодарен В. Ю. Сазонову за полезные замечания.

§ 1. ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Известны следующие основные подходы к понятию функции *): геометрический (Декарт), аналитический (И. Бернулли, Эйлер), строгий (предельный) (Больцано, Коши, Вейерштрасс), теоретико-множественный или классический (Дедекинд, Кантор), интуиционистский (Брауэр), конструктивный (Тьюринг, Банах и Мазур, Марков) и др., см. [3—5], операциональный. Последний, так же как интуиционистский и конструктивный подходы, противостоит классическому пониманию функции как соответствия между элементами двух множеств. Операциональный подход существенно предполагается в λ-исчислении (Карри, Черч) [6], в теории категорий [7] и получает все большее распространение в функциональном анализе (см. [4], а также рецензию [8] на монографию [9]).

С момента возникновения абстрактного понятия функциональной зависимости (Декарт) основой понятия функции служит понятие непрерывной функции. Ему соответствует классическое понятие непрерывного оператора в топологическом пространстве (Риман, Хаусдорф [10]). Интересно, что различные конструктивные (рекурсивные) трактовки (см. [4, 5, 11, 12]) подразумевают, что каждая вычислимая вещественная функция с необходимостью должна быть непрерывной. Классически (экстенсионально) понятие непрерывной вещественной функции описы-

*) Приведенная схема лишь отмечает основные этапы формирования понятия функции. Развернутое представление об истории этого понятия дают, например, книги [1, 2].