35. **Cohen R. S., Gold A. Y.** ω-Computations on Turing machines // Theor. Comput. Sci.— 1978.— Vol. 6, N 1.— P. 1—23.
36. **Lindsay P. A.** Alternation and ω-type Turing acceptors // Theor. Comput. Sci.— 1986.— Vol. 43, N 1.— P. 107—115.
37. **Redziejowski R. R.** Infinite-word languages and continuous mappings // Theor. Comput. Sci.— 1986.— Vol. 43, N 1.— P. 59—79.
38. **Роджерс X.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.— М.: Мир, 1972.
39. **Лисовик Л. П., Редько В. Н.** Алгоритмы и формальные системы.— Киев: КГУ, 1981.
40. **Moschovakis Y. N.** Descriptive set theory.— Amsterdam, North-Holland, 1980.
41. **Staiger L.** Projection lemmas for ω-languages // Theor. Comput. Sci.— 1984.— Vol. 32, N 3.— P. 331—337.
42. **Мальцев А. И.** Алгоритмы и рекурсивные функции.— М.: Наука, 1965.
43. **Лузин Н. Н.** Лекции об аналитических множествах и их приложениях.— М.: Гостехиздат, 1953.
44. **Weihrauch K.** Type 2 recursion theory // Theor. Comput. Sci.— 1985.— Vol. 38, N 1.— P. 17—33.
45. **Лисовик Л. П.** К проблеме эквивалентности для преобразователей над Σ-деревьями с конечноповоротными счетчиками // Кибернетика.— 1984.— № 5.— С. 19—24.
46. **Eilenberg S.** Automata, languages and machines, vol. A.— N. Y.: Acad. Press, 1974.
47. **Ершов Ю. Л.** Вычислимые функционалы конечных типов // Алгебра и логика.— 1972.— Т. 11, № 4.— С. 367—437.
48. **Шенфилд Дж.** Математическая логика.— М.: Наука, 1975.
49. **Блюм М.** Об объеме машин // Проблема математической логики.— М.: Мир, 1970.— С. 423—431.
50. **Blum M.** A machine independent theory of the complexity of recursive functions // J. Assoc. Comp. Mach.— 1967.— Vol. 14, N 2.— P. 322—336.
51. **Machtey M., Young P.** An introduction to the general theory of algorithms.— N. Y., North-Holland, 1978.
52. **Smith C. H.** Applications of classical recursion theory to computer science // Recursion theory: its generalisations and applications, Logic colloquium'79.— Cambridge Univ. Press, 1980.— P. 236—247.
53. **Rogers H.** Gödel numberings of partial recursive functions // J. Symb. Logic.— 1958.— Vol. 23.— P. 331—341.
54. **Kleene S. C.** Recursive functionals and quantifiers of finite types. II // Trans. Amer. Math. Soc.— 1963.— Vol. 108.— P. 106—142.
55. **Kleene S. C.** Recursive functionals and quantifiers of finite types revisited. I // Generalized recursion theory. II.— Amsterdam, North-Holland, 1978.
56. **Platek R. A.** Foundations of recursion theory: Dissertation.— Stanford Univ., 1966.
57. **Kreisel G.** Set theoretic problems suggested by the notation of potential totality // Infinitistic methods.— Oxford: Pergamon Press, 1961.— P. 103—140.
58. **Кекрис А. С., Московакис Я. Н.** Рекурсия в высших типах // Справочная книга по математической логике. Ч. 3.— М.: Наука, 1982.— С. 166—223.
59. **Скотт Д.** Набросок математической теории вычислений // Кибер. сб.— М.: Мир, 1977.— С. 107—121.
60. **Ершов Ю. Л.** Теория A-пространств // Алгебра и логика.— 1973.— Т. 12, № 4.— С. 369—416.
61. **Plotkin G. D.** A set-theoretical definition of application. School of artificial intelligence, Memo MIP-R-95.— Edinburgh Univ., 1972.
62. **Freund R.** Real functions and numbers defined by Turing machines // Theor. Comput. Sci.— 1983.— Vol. 23, N 3.— P. 287—304.
63. **Weihrauch K., Kreitz C.** Theory of representations // Ibid.— 1985.— Vol. 38, N 1.— P. 35—53.
64. **Лисовик Л. П.** Конечные преобразователи над вещественными числами // 2-я Всесоюз. конф. по прикл. логике.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.— С. 137—139.

Л. Л. МАКСИМОВА

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В МОДАЛЬНЫХ ЛОГИКАХ БЕСКОНЕЧНОГО СЛОЯ, СОДЕРЖАЩИХ ЛОГИКУ K4

Интерполяционная теорема, доказанная Крейгом для классической логики предикатов в 1957 г., оказала большое влияние на развитие математической логики и явилась истоком большого числа исследований по проблеме интерполяции в различных логических теориях. Имеется много работ, посвященных интерполяционному свойству в различных модальных логиках. Например, доказано, что интерполяционная теорема верна в ряде известных предикатных модальных систем, в том числе в K, K4, S4 [1], и нарушается в предикатной системе S5 [2]. Доказано интерполяционное свойство для ряда пропозициональных модальных логик, в том числе для важных систем G [3] и Grz [4]. В [5] было замечено, что из континуума пропозициональных расширений логики S4 лишь конечное число логик обладает интерполяционным свойством. В этой статье мы рассмотрим более широкое семейство NE(K4) нормальных расширений логики K4 и получим необходимое условие истинности интерполяционной теоремы в так называемых бесконечнослойных логиках. Так как интерполяционное свойство в модальных логиках равносильно амальгамируемости соответствующих многообразий модальных алгебр, полученное необходимое условие сразу дает необходимый признак амальгамируемости бесконечнослойных многообразий K4-алгебр.

Отметим, что число логик из NE(K4) с интерполяционным свойством Крейга (ИСК) бесконечно; используя результаты Блока [6] можно показать, что в NE(K4) существует континуум логик с ИСК. Каждой логике L из NE(K4) соответствует ее так называемый рефлексивный фрагмент $r(L)$, содержащий логику S4. Интерполяционное свойство не сохраняется при переходе от логик к их рефлексивным фрагментам [7]. Тем не менее некоторые результаты об интерполяции в расширениях логики S4 можно перенести на NE(K4).

Логика $L \in$ NE(K4) является бесконечнослойной, если в шкалах, удовлетворяющих L, не ограничены длины цепей. Из [5, 8] следует, что любая бесконечнослойная логика с ИСК, содержащая S4, содержится в логике

$$\mathrm{Grz}.2 = \mathrm{Grz} + (\Box\Diamond p \equiv \Diamond\Box p).$$

В этой статье мы докажем (теорема 4), что для любой бесконечнослойной логики $L \in$ NE(K4), обладающей интерполяционным свойством, ее рефлексивный фрагмент содержится в Grz.2. Как следствие получаем, что интерполяционным свойством не обладают, например, бесконечнослойные логики конечной ширины, логики конечных иррефлексивных n-арных деревьев и т. д. В то же время существуют бесконечнослойные расширения логики G с ИСК, рефлексивные фрагменты которых не обладают ИСК.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Формулы модальной логики строятся из константы 0 и пропозициональных переменных с помощью операторов $\supset$ и $\Box$. Остальные связки &, $\vee$, $\neg$, $\equiv$, $\Diamond$ определяются через исходные обычным образом. Каждая логика из NE(K4) есть множество формул, содержащее тавтологии классической логики высказываний и формулы $\Box(p\supset q)\supset(\Box p\supset\Box q)$, $\Box p\supset\supset\Box\Box p$, а также замкнутое относительно правил подстановки; A, $A\supset B/B$; $A/\Box A$. В частности, элементами NE(K4) являются логики

$$\mathrm{S4} = \mathrm{K4} + (\Box p \supset p),$$
$$\mathrm{Grz} = \mathrm{S4} + ((\Box(\Box p \supset p) \supset p) \supset p),$$
$$\mathrm{Grz}.2 = \mathrm{Grz} + (\Box\Diamond p \equiv \Diamond\Box p),$$
$$\mathrm{G} = \mathrm{K4} + (\Box(\Box p \supset p) \supset \Box p).$$

Рефлексивным фрагментом логики $L \in$ NE(K4) называется логика $r(L) = \{A \mid f(A) \in L\}$, где формула $f(A)$ получается из формулы A заменой каждой ее подформулы вида $\Box B$ формулой $\boxdot B \leftrightharpoons (B\,\&\,\Box B)$. Рефлексивный фрагмент любой логики из NE(K4) является нормальным расширением логики S4. В частности, $r(\mathrm{K4}) = \mathrm{S4}$, $r(G) = \mathrm{Grz}$ [9].

Каждой нормальной модальной логике L соответствует многообразие $V(L)$ модальных алгебр. *Модальной алгеброй* называем алгебру $\mathfrak{A} =$

$= \langle |\mathfrak{A}|; \&, \vee, \supset, \neg, \Box, \Diamond, 0, 1\rangle$, которая удовлетворяет тождествам булевых алгебр для $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, 0, 1 и, кроме того, тождествам $\Box x = \neg\Diamond\neg x$, $\Diamond 0 = 0$, $\Diamond(x \vee y) = \Diamond x \vee \Diamond y$. Под *K4-алгеброй* понимаем модальную алгебру, удовлетворяющую соотношению $\Diamond\Diamond x \leqslant \Diamond x$; *топобулева алгебра* — это K4-алгебра, в которой $x \leqslant \Diamond x$. Если A — формула, то пишем $\mathfrak{A} \models A$, когда в $\mathfrak{A}$ выполняется тождество $A = 1$. Тогда $V(L) = \{\mathfrak{A} \mid (\forall A \in L)\ \ \mathfrak{A} \models A\}$; с другой стороны, $L = \{A \mid (\forall \mathfrak{A} \in V(L))\ \mathfrak{A} \models A\}$.

Реляционная семантика логики K4 строится с помощью шкал $\langle W, R\rangle$ с транзитивным отношением R. Если $W = \langle W, R\rangle$ — транзитивная шкала, то через $W^+ = \langle P(W); \&, \vee, \supset, \neg, \Box, \Diamond, 0, 1\rangle$ обозначается K4-алгебра, где $P(W)$ есть семейство всех подмножеств W, $X \supset Y = (W \backslash X) \cup Y$, $0 = \varnothing$, $\Diamond X = \{x \mid (\exists y \in X)\, xRy\}$ и т. д. Справедлива

Теорема о представлении K4-алгебр [10]. *Любая K4-алгебра $\mathfrak{A}$ изоморфно вложима в алгебру $W_{\mathfrak{A}}^+$ для подходящей транзитивной шкалы $W_{\mathfrak{A}}$. Если $\mathfrak{A}$ конечна, то $\mathfrak{A} \cong W_{\mathfrak{A}}^+$.*

Представляющая шкала $W_{\mathfrak{A}} = \langle W_{\mathfrak{A}}, R_{\mathfrak{A}}\rangle$ есть множество $W_{\mathfrak{A}}$ всех ультрафильтров алгебры $\mathfrak{A}$ с отношением $\Phi_1 R_{\mathfrak{A}} \Phi_2 \Leftrightarrow (\forall x \in \mathfrak{A})(x \in \Phi_2 \Rightarrow \Diamond x \in \Phi_1)$. Изоморфизм $\varphi\colon \mathfrak{A} \to W_{\mathfrak{A}}^+$ определяется условием $\varphi(x) = \{\Phi \in W_{\mathfrak{A}} \mid x \in \Phi\}$ для любого $x \in \mathfrak{A}$. В случае, когда $\mathfrak{A}$ конечна, шкала $W_{\mathfrak{A}}$ изоморфна шкале $\mathrm{At}\,\mathfrak{A} = \langle \mathrm{At}\,\mathfrak{A}, R\rangle$, где $\mathrm{At}\,\mathfrak{A}$ — множество всех атомов $\mathfrak{A}$ и $aRb \Leftrightarrow a \leqslant \Diamond b$ для любых атомов a, b.

Далее, K4-алгебра $\mathfrak{A}$ является топобулевой в том и только том случае, если $R_{\mathfrak{A}}$ рефлексивно. В [11] показано, что существует взаимно однозначное соответствие между конгруэнциями на модальной алгебре и открытыми фильтрами на этой алгебре. Фильтр ∇ называется *открытым*, если $\Box x \in \nabla$ для любого $x \in \nabla$. Открытому фильтру ∇ на модальной алгебре $\mathfrak{A}$ соответствует конгруэнция $x \sim_\nabla y \Leftrightarrow (x \equiv y) \in \nabla$.

Обозначим $\mathfrak{A}/_\nabla = \mathfrak{A}/_{\sim\nabla}$. Если Θ — конгруэнция, то $\nabla(\Theta) = \{x \mid x\Theta 1\}$ есть открытый фильтр, причем $\sim^{\nabla}(\Theta) = \Theta$.

Приведем без доказательства утверждения, аналогичные соответствующим утверждениям для топобулевых алгебр [6, 12]. Под *конусом шкалы* $\langle W, R\rangle$ понимаем шкалу $\langle W_1, R_1\rangle$, где $W_1 \subseteq W$, $R_1 = R \cap W^2$ $(\forall x \in W_1)(\forall y \in W)(xRy \Rightarrow y \in W_1)$. Для $x \in W$ обозначаем $W^x = \{y \in W \mid y = x \vee xRy\}$. Шкала W называется *острой*, если $W = W^x$ для некоторого x.

Лемма 1. (а) *Пусть ∇ есть открытый фильтр на K4-алгебре $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}/_\nabla$. Тогда $W_{\mathfrak{A}_1} \cong \langle W_1, R_1\rangle$,* где $W_1 = \{\Phi \in W_{\mathfrak{A}} \mid \nabla \subseteq \Phi\}$, $R_1 = R_{\mathfrak{A}} \cap W_1^2$.

(б) *Пусть $\mathfrak{A}$ — K4-алгебра, $\Phi \in W_{\mathfrak{A}}$. Тогда $\nabla = \{x \mid (x \,\&\, \Box x) \in \Phi\}$ есть открытый фильтр на $\mathfrak{A}$ и $W_{\mathfrak{A}}^{\Phi} \cong W_{\mathfrak{A}}/_\nabla$.*

(в) *Если $W_1 = \langle W_1, R_1\rangle$ — конус шкалы $W = \langle W, R\rangle$,* то $h(X) = X \cap W_1$ *для $X \subseteq W$ есть гомоморфизм из W^+ на W_1^+.*

(г) *Пусть $\mathfrak{A}$ — K4-алгебра, $W = \langle W, R\rangle$ — конус в $\langle W_{\mathfrak{A}}, R_{\mathfrak{A}}\rangle$. Тогда $h\colon \mathfrak{A} \to W^+$, где $h(x) = \{\Phi \in W \mid x \in \Phi\}$, есть гомоморфизм.*

Пусть $W = \langle W, R\rangle$, $W_1 = \langle W_1, R_1\rangle$ — транзитивные шкалы. Отображение $\theta\colon W \to W_1$ называется *p-морфизмом*, если $\theta(W) = W_1$ и $(\forall x \in W)(\forall y \in W_1)\ [\theta(x) R_1 y \Leftrightarrow (\exists z \in W)(xRz \wedge \theta(z) = y)]$.

Если $\theta\colon W \to W_1$ является p-морфизмом, то $\psi(X) = \theta^{-1}(X)$ для $X \subseteq W_1$ есть мономорфизм из W_1^+ в W^+.

Пусть $\mathfrak{A} = \langle |\mathfrak{A}|, \&, \vee \supset, \neg, \Box, \Diamond, 0, 1\rangle$ — K4-алгебра. Обозначим $\boxdot x \Leftrightarrow (x \,\&\, \Box x)$, $\diamonddot x \Leftrightarrow (x \vee \Diamond x)$, где $x \in |\mathfrak{A}|$. Алгебра $\mathfrak{A}^{\top} = \langle |\mathfrak{A}|, \&, \vee, \supset,$

$\neg, \boxdot, \diamond, 0, 1\rangle$ является топобулевой алгеброй, будем называть ее *топобулевым редуктом алгебры* $\mathfrak{A}$.

Алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^{\top}$ имеют одну и ту же решетку конгруэнций, которая изоморфна решетке открытых фильтров алгебры $\mathfrak{A}$ [11].

Если $W = \langle W, R\rangle$ — транзитивная шкала, $\mathrm{Wr} = \langle W, \mathrm{Rr}\rangle$, где $\mathrm{Rr} = R \cup \{\langle x, x\rangle | x \in W\}$, то $(W^{+})^{\top} = (Wr)^{+}$.

Если V — многообразие K4-алгебр, то обозначим через $r(V)$ многообразие топобулевых алгебр, порожденное семейством $\{\mathfrak{A}^{\top} | \mathfrak{A} \in V\}$. Для любых термов t_1, t_2 сигнатуры $\&$, $\vee$, $\supset$, $\neg$, $\Box$, $\Diamond$, 0, 1 имеет место соотношение

$$r(V) \models t_1 = t_2 \Leftrightarrow V \models f(t_1) = f(t_2), \tag{1}$$

где $f(\Box t) = \boxdot f(t)$, $f(\Diamond t) = \Diamond f(t)$, $f(t \circ t') = f(t) \circ f(t')$, где $\circ \in \{\&, \vee, \supset\}$, $f(\neg t) = \neg f(t)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Если L — K4-логика, то, очевидно, $r(V(L)) = V(r(L))$.

§ 2. БЕСКОНЕЧНОСЛОЙНЫЕ ЛОГИКИ И МНОГООБРАЗИЯ

Логика $L \in \mathrm{NE}(\mathrm{K4})$ называется *бесконечнослойной*, если $\varphi_n \notin L$ для всех n, где $\varphi_0 = 0$, $\varphi_{n+1} = p_{n+1} \supset \Box(\Box \neg p_{n+1} \supset \varphi_n)$.

Пусть $W = \langle W, R\rangle$ — транзитивная шкала. Следуя [6], будем называть *R-цепью длины n* конечную последовательность $x_1, \ldots, x_n$ элементов W такую, что $x_i R x_{i+1} \wedge \neg x_{i+1} R x_i$ для $0 < i < n$. *Высотой* $h(W)$ называется супремум длин R-цепей шкалы W. Очевидно, $h(\mathrm{Wr}) = h(W)$. *Высота $h(x)$ элемента $x \in W$* есть $h(W^x)$.

Если $\mathfrak{A}$ есть K4-алгебра, то $h(\mathfrak{A}) \leftrightharpoons h(W_{\mathfrak{A}})$. В [6] показано, что $\mathfrak{A} \models \varphi_n \Leftrightarrow h(\mathfrak{A}) \leqslant n$. Поэтому семейство $\mathrm{KT}(n) = \{\mathfrak{A} | h(\mathfrak{A}) \leqslant n\}$ — многообразие. Многообразие V называется *бесконечнослойным*, если $V \not\subseteq \mathrm{KT}(n)$ для любого $n < \omega$. Таким образом, логика $L \in \mathrm{NE}(\mathrm{K4})$ является бесконечнослойной тогда и только тогда, когда $V(L)$ — бесконечнослойное многообразие.

Сформулируем в виде леммы некоторые известные результаты.

Лемма 2. (а) *Для любого $n < \omega$ многообразие* $\mathrm{KT}(n) = \{\mathfrak{A} | h(\mathfrak{A}) \leqslant n\}$ *локально-конечно* [13, теорема II.6.5].

(б) *Если $\mathfrak{B}$ — конечно-порожденная* K4-*алгебра и* $h(\mathfrak{B}) = \omega$, *то для любого $n < \omega$ существует гомоморфный образ $\mathfrak{B}_n$ алгебры $\mathfrak{B}$ такой, что* $h(\mathfrak{B}_n) = n$ [6, лемма 1.10].

Теорема 1. *Для любого многообразия V* K4-*алгебр следующие условия эквивалентны*:

(а) *V — бесконечнослойное многообразие,*

(б) *$r(V)$ — бесконечнослойное многообразие топобулевых алгебр.*

(в) *V не является локально-конечным,*

(г) *свободная однопорожденная алгебра многообразия V бесконечна.*

Доказательство. Очевидно, из (г) следует (в), а из (в) — (а) по лемме 2а.

(а) $\Rightarrow$ (б). Заметим, что для любой K4-алгебры $\mathfrak{A}$ имеет место $h(\mathfrak{A}) = h(\mathfrak{A}^{\top})$. Действительно, для представляющих шкал $W_{\mathfrak{A}} = \langle W_{\mathfrak{A}}, R_{\mathfrak{A}}\rangle$ и $W_{\mathfrak{A}^T} = \langle W_{\mathfrak{A}^T}, R_{\mathfrak{A}^T}\rangle$ справедливы соотношения $W_{\mathfrak{A}} = W_{\mathfrak{A}^T}$,

$$\Phi_1 R_{\mathfrak{A}^T} \Phi_2 \Leftrightarrow [\Phi_1 R_{\mathfrak{A}} \Phi_2 \text{ или } \Phi_1 = \Phi_2]. \tag{2}$$

Покажем это. Очевидно, $\Phi_1 R_{\mathfrak{A}} \Phi_2 \Rightarrow \Phi_1 R_{\mathfrak{A}^T} \Phi_2$, $\Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow \Phi_1 R_{\mathfrak{A}^T} \Phi_2$. Допустим $\neg \Phi_1 R_{\mathfrak{A}} \Phi_2$, $\Phi_1 \neq \Phi_2$. Тогда $x \in \Phi_2$, $\Diamond x \notin \Phi_1$ для некоторого x и $y \in \Phi_1$, $\neg y \in \Phi_2$ для некоторого y. Отсюда $z = x \& \neg y \in \Phi_2$. Имеем $z \leqslant \neg y \notin \Phi_1$, $\Diamond z \leqslant \Diamond x \in \Phi_1$, поэтому $\Diamond z = z \vee \Diamond z \notin \Phi_1$. Таким образом, $\neg \Phi_1 R_{\mathfrak{A}^T} \Phi_2$ и (2) доказано. Это означает, что $W_{\mathfrak{A}^T} = (W_{\mathfrak{A}}) r$, т. е. $h\left(W_{\mathfrak{A}^T}\right) = h(W_{\mathfrak{A}})$ и $h(\mathfrak{A}^{\top}) = h(\mathfrak{A})$.

Поскольку для любого n существует $\mathfrak{A}\in V$ с $h(\mathfrak{A})>n$, то многообразие $r(V)$ также содержит алгебры с какими угодно большими высотами, и (б) справедливо.

(б)$\Rightarrow$(г). Пусть $r(V)$ — бесконечнослойное многообразие топобулевых алгебр. Вследствие [14, предложение 2.4], $r(V)$ содержит бесконечную топобулеву алгебру $\mathfrak{B}=\langle|\mathfrak{B}|, \&, \vee, \supset, \neg, \Box, \Diamond, 0, 1\rangle$, порожденную одним элементом a. Если в $\mathfrak{B}$ выполняется неравенство $t_1(a)\neq t_2(a)$ для некоторых термов $t_1(a)$, $t_2(a)$, то в многообразии $r(V)$ не выполняется тождество $t_1(x)=t_2(x)$ и, стало быть, ввиду (1) в V не выполняется тождество $f(t_1(x))=f(t_2(x))$. Это означает, что $\overline{\overline{\mathcal{F}_1(V)}}\geqslant\overline{\overline{\mathfrak{B}}}=\omega$, где $\mathcal{F}_1(V)$ — свободная в V однопорожденная алгебра. Лемма доказана.

Пусть a — элемент К4-алгебры $\mathfrak{A}$. *Интервалом* $(a]_{\mathfrak{A}}$ *алгебры* $\mathfrak{A}$ называем алгебру $\mathfrak{B}$ с носителем $\{x\in\mathfrak{A}|x\leqslant a\}$ и операциями $x\,\&_{\mathfrak{B}}y=x\,\&\,y$, $x\vee_{\mathfrak{B}}y=x\vee y$, $x\supset_{\mathfrak{B}}y=(x\supset y)\,\&\,a$, $\neg_{\mathfrak{B}}y=\neg y\,\&\,a$, $0_{\mathfrak{B}}=0_{\mathfrak{A}}$, $1_{\mathfrak{B}}=a$, $\Box_{\mathfrak{B}}x=a\,\&\,\Box(a\supset x)$, $\Diamond_{\mathfrak{B}}x=\Diamond x\,\&\,a$. для всех x, $y\in|\mathfrak{B}|$.

При переходе от $\mathfrak{A}$ к $(a]_{\mathfrak{A}}$ сохраняются тождества булевой алгебры и некоторые тождества, содержащие модальные операции. Имеет место

Лемма 3 (об интервалах). *Пусть $\mathfrak{A}$ — К4-алгебра и $a\in|\mathfrak{A}|$. Тогда*

(а) *интервал $\mathfrak{B}=(a]_{\mathfrak{A}}$ есть К4-алгебра;*

(б) *если $a\leqslant\Box a$, то отображение $g:\mathfrak{A}\to(a]_{\mathfrak{A}}$, где $g(y)=y\,\&\,a$ для $y\in|\mathfrak{A}|$, есть гомоморфизм на $(a]_{\mathfrak{A}}$, причем $(a]_{\mathfrak{A}}\cong\mathfrak{A}/\Phi(a)$, где $\Phi(a)=\{x|a\leqslant x\}$;*

(в) *если $a\leqslant\Box a$ и $\mathfrak{C}$ — подалгебра интервала $\mathfrak{B}=(a]_{\mathfrak{A}}$, то множество*

$$A_1=\{x\vee y|x\in|\mathfrak{A}|\quad x\leqslant\neg a\wedge y\in|\mathfrak{C}|\}$$

образует подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, причем $a\in A_1$ и $\mathfrak{C}=(a]_{A_1}$.

Доказательство. (а) Проверяется непосредственно.

(б) Отмечено в [6, с. 105].

(в) Сначала заметим, что множество A_1 замкнуто относительно операций $\vee$, $\neg$ и $\Diamond$. Пусть z, $w\in A_1$, т. е. $z=x\vee y$, $w=u\vee v$, где $x,u\in|\mathfrak{A}|$, $x\leqslant\neg a$, $u\leqslant\neg a$; y, $v\in|\mathfrak{C}|$. Тогда

$$z\vee w=(x\vee u)\vee(y\vee v)\in A_1,\tag{3}$$

так как $x\vee v\leqslant\neg a$, $y\vee v=y\vee_{\mathfrak{B}}v=y\vee_{\mathfrak{C}}v\in|\mathfrak{C}|$. Далее, $\neg(x\vee y)=(\neg x\,\&\,\neg y)\,\&\,(\neg a\vee a)=(\neg x\,\&\,\neg y\,\&\,\neg a)\vee(\neg x\,\&\,\neg y\,\&\,a)$. Поскольку $\neg x\geqslant a$, то $\neg x\,\&\,\neg y\,\&\,a=\neg y\,\&\,a=\neg_{\mathfrak{B}}y\in|\mathfrak{C}|$. Так как $\neg x\,\&\,\neg y\,\&\,\neg a\leqslant\neg a$, то получаем

$$\neg z=\neg(x\vee y)\in A_1.\tag{4}$$

Докажем, наконец, что

$$\Diamond z=\Diamond(x\vee y)\in A_1.\tag{5}$$

Имеем $\Diamond(x\vee y)=\Diamond x\vee\Diamond y$. Так как $x\leqslant\neg a$ и $a\leqslant\Box a$, то $\Diamond x\leqslant\Diamond\neg a=\neg\Box a\leqslant\neg a$. Далее, $\Diamond y=(\Diamond y\,\&\,\neg a)\vee(\Diamond y\,\&\,a)=(\Diamond y\,\&\,\neg a)\vee\Diamond_{\mathfrak{B}}y$.

Поскольку $\Diamond x\vee(\Diamond y\,\&\,\neg a)\leqslant\neg a$ и $\Diamond_{\mathfrak{B}}y\in|\mathfrak{C}|$, то $\Diamond z=\Diamond(x\vee y)=(\Diamond x\vee(\Diamond y\,\&\,\neg a))\vee\Diamond_{\mathfrak{B}}y\in A_1$, и (5) доказано.

Из (3)—(5) заключаем, что A_1 образует подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, так как остальные операции выражаются через $\vee$, $\neg$, $\Diamond$. Поскольку $0\leqslant\neg a$ и $=1_{\mathfrak{B}}=a$, то $a=0\vee a\in A_1$. Очевидно, $y\in(a]_{A_1}$ для любого $y\in|\mathfrak{C}|$. Пусть теперь $z\in(a]_{A_1}$. Тогда $z=x\vee y$, где $x\leqslant\neg a$, $y\in|\mathfrak{C}|$. Получаем $x\leqslant\neg a\,\&\,z\leqslant\neg a\,\&\,a=0$, т. е. $z=y\in|\mathfrak{C}|$. Так как $\mathfrak{C}$ и $(a]_{A_1}$ являются подалгебрами $\mathfrak{B}=(a]_{\mathfrak{A}}$, то $(a]_{A_1}=\mathfrak{C}$.

Справедлива

Лемма 4 [6, теорема 1.9]. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *конечно-порожденная* K4-*алгебра*, g: $\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — *гомоморфизм из* $\mathfrak{A}$ *на конечную алгебру* $\mathfrak{B}$. *Тогда существует* $a \in |\mathfrak{A}|$ *такой, что* $a \leqslant \Box a$ *и* $g_1 = g|(a]_{\mathfrak{A}}$ *есть изоморфизм между интервалом* $(a]_{\mathfrak{A}}$ *и* $\mathfrak{B}$.

Если $\mathfrak{A}$ — K4-алгебра, то, как было отмечено, множество $\mathrm{At}\,\mathfrak{A}$ атомов алгебры $\mathfrak{A}$ образует шкалу с транзитивным отношением $xRy \leftrightharpoons x \leqslant \Diamond y$ для $x, y \in \mathrm{At}\,\mathfrak{A}$. Для $x \in \mathrm{At}\,\mathfrak{A}$ определяем $h_{\mathfrak{A}}(x)$ как высоту шкалы $(\mathrm{At}\,\mathfrak{A})^x$.

Очевидно, для любого $a \in A$ множество $\nabla_a = \{x \in \mathfrak{A} | a \leqslant \Box x\}$ является открытым фильтром. Из леммы 4 легко вытекает

Лемма 5. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *конечно-порожденная* K4-*алгебра*, $c \in \mathrm{At}\,\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}/\nabla_c$ *конечна, где* $\nabla_c = \{x \in \mathfrak{A} | c \leqslant \Box x\}$. *Тогда* $\mathfrak{A}_1$ *изоморфна подходящему интервалу* $\mathfrak{B} = (a]_{\mathfrak{A}}$, *где* $a \leqslant \Box a$, *причем для любого* $x \in \mathfrak{A}$

$$x \in \mathrm{At}\mathfrak{B} \Leftrightarrow x \in \mathrm{At}\mathfrak{A} \wedge c \leqslant \Diamond x,$$

$$x \in \mathrm{At}\mathfrak{B} \Rightarrow h_{\mathfrak{B}}(x) \leqslant h_{\mathfrak{A}}(x).$$

В частности, $h(\mathfrak{B}) = h_{\mathfrak{B}}(c) \leqslant h_{\mathfrak{A}}(c)$.

Доказательство. По лемме 4 существует $a \in |\mathfrak{A}|$ такой, что $a \leqslant \Box a$ и g: $(a]_{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}_1$ есть изоморфизм, где $g(x) = x/\nabla_c$ для $x \in \mathfrak{B} = (a]_{\mathfrak{A}}$. Очевидно, $\mathrm{At}\,\mathfrak{B} \subseteq \mathrm{At}\,\mathfrak{A}$. Пусть $x \in \mathrm{At}\,\mathfrak{A}$. Тогда $x \in \mathrm{At}\mathfrak{B} \Leftrightarrow x = x \,\&\, a > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow g(\neg x) < 1 \Leftrightarrow \neg x \notin \nabla_c \Leftrightarrow \boxdot \neg x \not\geqslant c \Leftrightarrow c \leqslant \Diamond x$. Если $x, y \in \mathrm{At}\,\mathfrak{B}$, то $x, y \in \mathrm{At}\,\mathfrak{A}$ и $x \leqslant \Diamond_{\mathfrak{A}} y \Leftrightarrow x \leqslant a \,\&\, \Diamond_{\mathfrak{A}} y = \Diamond_{\mathfrak{B}} y$. Отсюда $h_{\mathfrak{B}}(x) \leqslant h_{\mathfrak{A}}(x)$ для любого $x \in \mathrm{At}\,\mathfrak{B}$. Лемма доказана.

Введем обозначения для $n, m \geqslant 1$:

$$\mathrm{Atom}(x) \leftrightharpoons (x \neq 0 \wedge \forall y (x \leqslant y \vee x \,\&\, y = 0)),$$

$$H_n(x) \leftrightharpoons \neg(\exists y_1 \ldots y_{n+1}) \Big[\bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n+1} \mathrm{Atom}(y_i) \wedge x = y_1 \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant n} (y_i \leqslant \Diamond y_{i+1} \wedge y_{i+1} \leqslant \neg \Diamond y_i) \Big],$$

$$A(n, m) \leftrightharpoons \forall c \Big[\mathrm{Atom}(c) \wedge H_n(c) \Rightarrow (\exists x_1 \ldots x_m)(\forall y) \Big(\bigvee_{1 \leqslant i \leqslant m} (\boxdot(y \equiv x_i) \geqslant c) \Big) \Big].$$

Лемма 6. (а) *Для любой* K4-*алгебры* $\mathfrak{A}$ *формула* $A(n, m)$ *истинна в* $\mathfrak{A}$ *в том и только том случае, если мощность фактор-алгебры* $\mathfrak{A}/\nabla$ *не превосходит* m *для любого атома* c *высоты* $h_{\mathfrak{A}}(c) \leqslant n$.

(б) *Для любого* n *существует* $m = m(n)$ *такое, что* $\mathfrak{A} \models A(n, m(n))$ *для любой конечной однопорожденной алгебры* $\mathfrak{A}$.

Доказательство. (а) Очевидно, так как для любого атома c алгебры $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \models H_n(c) \Leftrightarrow h_{\mathfrak{A}}(c) \leqslant n,$$

и для любых $x, y \in |\mathfrak{A}|$

$$\boxdot(x \equiv y) \geqslant c \Leftrightarrow (x \equiv y) \in \nabla_c \Leftrightarrow x/\nabla_c = y/\nabla_c.$$

(б) Ввиду леммы 2(а) для любого $n < \omega$ мощность $m(n)$ однопорожденной свободной алгебры в $\mathrm{KT}(n)$ конечна. Докажем, что $\mathfrak{A} \models A(n, m(n))$ для любой конечной однопорожденной K4-алгебры $\mathfrak{A}$. Пусть c — любой атом в $\mathfrak{A}$ высоты $h_{\mathfrak{A}}(c) \leqslant n$. Так как $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}/\nabla_c$ конечна, то по лемме 5 $\mathfrak{A}_1$ изоморфна подходящему интервалу $\mathfrak{B} = (a]_{\mathfrak{A}}$, где $a \leqslant \Box a$, и $h(\mathfrak{A}_1) = h(\mathfrak{B}) \leqslant h_{\mathfrak{A}}(c) \leqslant n$. Отсюда $\mathfrak{A}_1 \in \mathrm{KT}(n)$, $\overline{\overline{\mathfrak{A}_1}} = \overline{\overline{\mathfrak{A}/\nabla_c}} \leqslant m(n)$. Ввиду леммы 6(а) $\mathfrak{A} \models A(n, m(n))$, что и требовалось.

Теперь будет доказана

Теорема 2. *Пусть $L \in NE(\mathrm{K4})$ — бесконечнослойная логика. Тогда существует бесконечная последовательность конечных транзитивных, острых шкал W_n, удовлетворяющих условиям*

1) *W_n — собственный конус в W_{n+1},*

2) *$W_n^+ \models L$.*

Доказательство. Ввиду теоремы 1 существует бесконечная однопорожденная алгебра $\mathfrak{A}$ такая, что $\mathfrak{A} \models L$ и $\mathfrak{A}$ бесконечна. Вследствие леммы 2(а) $h(\mathfrak{A}) = \omega$. По лемме 2(б) для любого $n < \omega$ существует гомоморфный образ $\mathfrak{A}_n$ алгебры $\mathfrak{A}$ такой, что $h(\mathfrak{A}_n) = n$; очевидно, каждая алгебра $\mathfrak{A}_n$ является однопорожденной, а значит, конечной по лемме 2(а). Следовательно, для любого n алгебра $\mathfrak{A}_n$ изоморфна Q_n^+, где $Q_n = \mathrm{At}\,\mathfrak{A}_n$ с отношением $aR_nb \Leftrightarrow a \leqslant \Diamond b$ для любых a, $b \in \mathrm{At}\,\mathfrak{A}_n$. Имеем $h(\mathfrak{A}_n) = h(Q_n) = n$, т. е. в $\mathfrak{A}_n$ существуют атомы $c_1, \ldots, c_n$ такие, что $c_i \leqslant \neg\Diamond c_{i+1}$, $c_{i+1} \leqslant \Diamond c_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и $h_{\mathfrak{A}_n}(c_i) = i$ для $i \leqslant n$.

Возьмем множество Σ, состоящее из следующих формул:

1) тождества многообразия $V(L)$,

2) $A(1, m(1))$, $A(2, m(2))$, ... из леммы 6(б),

3) $\mathrm{Atom}(c_n)$, $H_n(c_n)$, $c_{n+1} \leqslant \Diamond c_n$, $c_n \leqslant \neg\Diamond c_{n+1}$ для $n = 1, 2, \ldots$.

Докажем, что множество Σ выполнимо. Ввиду локальной теоремы достаточно показать, что выполнимо любое конечное подмножество $\Sigma_0 \subset \Sigma$. По лемме 6(б) все формулы $A(k, m(k))$ истинны во всех $\mathfrak{A}_n$. Кроме того, $\mathfrak{A}_n \in V(L)$ для любого n. Если n — наибольший индекс констант c_i, входящих в формулы из Σ_0, то все формулы из Σ_0 типа 3 выполнимы в $\mathfrak{A}_n$.

Таким образом, Σ выполнимо. Пусть $\mathfrak{B}$ — алгебра, в которой выполнены все формулы из Σ. Тогда $\mathfrak{B} \in V(L)$, в $\mathfrak{B}$ существуют атомы c_1, $c_2, \ldots$, причем $h_{\mathfrak{B}}(c_n) = n$, $c_{n+1} \leqslant \Diamond c_n$, $c_n \leqslant \neg\Diamond c_{n+1}$ для всех n.

Положим теперь $\mathfrak{B}_n = {}^{\mathfrak{B}}/_{\nabla_{c_n}}$. По лемме 6(а) $\overline{\overline{\mathfrak{B}}}_n \leqslant m(n)$, т. е. $\mathfrak{B}_n$ конечна. Поэтому $\mathfrak{B}_n \cong W_n^+$, где $W_n = \mathrm{At}\,\mathfrak{B}_n$, $xR_ny \Leftrightarrow x \leqslant \Diamond_{\mathfrak{B}_n} y$ для x, $y \in \mathrm{At}\,\mathfrak{B}_n$. Очевидно, W_n конечна и $W_n^+ \models L$. Имеем ${}^{x}/_{\nabla_{c_n}} > 0 \Leftrightarrow {}^{\neg x}/_{\nabla_{c_n}} < 1 \Leftrightarrow \neg x \notin \nabla_{c_n} \Leftrightarrow c_n \leqslant \Diamond x \Rightarrow {}^{c_n}/_{\nabla_{c_n}} \leqslant \Diamond \left({}^{x}/_{\nabla_{c_n}}\right)$ для любого $x \in \mathfrak{B}$. Поэтому W_n — острая шкала с наименьшим элементом ${}^{c_n}/_{\nabla_{c_n}}$.

Заметим, наконец, что $\nabla_{c_{n+1}} \subset \nabla_{c_n}$, $\nabla_{c_n} \neq \nabla_{c_{n+1}}$ для любого n. В самом деле, $x \notin \nabla_{c_n} \Leftrightarrow \Box x \ngeqslant c_n \Leftrightarrow c_n \leqslant \neg\Box x \Rightarrow c_{n+1} \leqslant \Diamond c_n \leqslant \neg\Box x \Rightarrow c_{n+1} \nleqslant \Box x \Rightarrow x \notin \nabla_{c_{n+1}}$, $\Box\neg c_{n+1} \geqslant c_n$, $\Box\neg c_{n+1} \ngeqslant c_{n+1}$, т. е. $c_{n+1} \in {}^{\nabla_{c_n}}/_{\nabla_{c_{n+1}}}$. Ввиду леммы 1(а) W_n изоморфно собственному конусу W_{n+1}. Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $L \in \mathrm{NE}(\mathrm{K4})$ — бесконечнослойная логика. Тогда для любого $k \geqslant 0$ существует алгебра $\mathfrak{C} \in V(L)$, удовлетворяющая условиям*

1) *$\mathfrak{C}$ содержит атомы $f_0, \ldots, f_k$, где $f_i \leqslant \Diamond f_{i+1}$, $f_{i+1} \leqslant \neg\Diamond f_i$ для всех $i < k$; $f_k \leqslant \Diamond x$ для любого такого $x \in \mathfrak{C}$, что $0 < x \leqslant \neg\Diamond f_k = w$;*

2) *интервал $(w]_{\mathfrak{C}}$ изоморфен W^+, где W — шкала, содержащая подмножество $\{b_1, b_2, \ldots\}$ такое, что $b_{n+1}Rb_n \wedge \neg b_nRb_{n+1}$ для всех n и $(\forall u \in W)(\exists n)\, b_nRu$.*

Доказательство. По теореме 1 существует последовательность конечных транзитивных, острых шкал $W_n = \langle W_n, R_n \rangle$ таких, что $W_n^+ \models L$ и W_n есть собственный конус в W_{n+1}. Пусть b_n — начальный элемент шкалы W_n, т. е. $W_n = \{x \mid x = b_n \vee b_nR_nx\}$. Положим $W = \bigcup\limits_{n<\omega} W_n$,

$R = \bigcup\limits_{n<\omega} R_n$. Имеем $b_{n+1}Rb_n \wedge \neg\, b_nRb_{n+1}$. Возьмем

$$\mathfrak{B} = \frac{\prod\limits_{n\in\mathbf{N}} W_n^+}{D},$$

где D — неглавный ультрафильтр. Тогда $\mathfrak{B} \in V(L)$.

Определим для $i \leqslant k$

$$f_i'(n) \rightleftharpoons \begin{cases} \{b_{n-i}\}, \text{ если } n \geqslant i, \\ \varnothing, \text{ если } n < i, \end{cases}$$

$f_i \rightleftharpoons {f_i'}/_D$. Тогда все f_i являются атомами в $\mathfrak{B}$ и справедливы соотношения

$$f_i \leqslant \Diamond f_{i+1},\ f_{i+1} \leqslant \neg \Diamond f_i \text{ для } 0 \leqslant i < k, \tag{6}$$

поскольку для $n \geqslant i+1$ в W_n^+ имеют место неравенства

$$\{b_{n-i}\} \leqslant \Diamond \{b_{n-(i+1)}\}, \qquad \{b_{n-(i+1)}\} \leqslant \neg \Diamond \{b_{n-i}\}.$$

Определим g: $W^+ \to \mathfrak{B}$, положив для $X \subseteq W$

$$X'(n) = \begin{cases} X \cap (W_n \setminus \Diamond_{W_n}\{b_{n-k}\}), \text{ если } n \geqslant k, \\ \varnothing \text{ в противном случае,} \end{cases}$$

$g(X) = {X'}/_D$. Докажем следующую лемму.

Лемма 7. Отображение g есть мономорфизм W^+ в интервал $(w]_{\mathfrak{B}}$, где $w = \neg \Diamond f_k$.

Доказательство. Введем вспомогательное отображение g_1: $: W^+ \to \mathfrak{B}$, полагая для $X \subseteq W$ $g_1(X) = {X^*}/_D$, где $X^*(n) = X \cap W_n$. Тогда g_1 — гомоморфизм из W^+ в $\mathfrak{B}$, так как W_n есть конус в W для любого n и равенство $X^*(n) = X \cap W_n$ определяет гомоморфизм из W^+ в W_n^+ ввиду леммы 1(в). Поскольку для любых n, X имеем $X'(n) = X^*(n)\ \&$ $\&\, \neg \Diamond f_k'(n)$, то $g(X) = g_1(X) \,\&\, w$ и, следовательно, по лемме 3(б) g — гомоморфизм из W^+ в интервал $(w]_{\mathfrak{B}}$.

Остается доказать, что $g(X) \neq g(Y)$ при $X \neq Y$ для любых X, $Y \subseteq$ $\subseteq W$. Пусть $a \in W$. Тогда $a \in W_l$ для некоторого l. Следовательно, $\neg aRb_{l+1}$, т. е. $a \notin \Diamond_{W_n}\{b_{l+1}\}$ для любого $n \geqslant l+1$, а, значит, $a \notin$ $\notin \Diamond_{W_n}\{b_{n-k}\}$ для любого $n \geqslant l+k+1$. Поэтому

$$\{a\}'(n) = \{a\} \neq \varnothing \text{ для } n \geqslant l+k+1. \tag{7}$$

Отсюда

$$g(\{a\}) > 0 \text{ для любого } a \in W. \tag{8}$$

Пусть теперь X, $Y \subseteq W$, $X \nsubseteq Y$. Тогда $a \in X \setminus Y$ для некоторого $a \in W$. Ввиду (8) получаем $g(X) \,\&\, \neg g(Y) = g(X\setminus Y) \geqslant g(\{a\}) > 0$, т. е. $g(X) \nleqslant$ $\nleqslant g(Y)$. Лемма доказана.

Окончание доказательства теоремы 3. В силу лемм 7 и 3(в) существует подалгебра $\mathfrak{C}$ алгебры $\mathfrak{B}$ с носителем

$$C = \{x \vee y \mid x \in |\mathfrak{B}| \wedge x \leqslant \neg w \wedge y \in g(W^+)\},$$

причем $w \in C$ и $g(W^+) = (w]_{\mathfrak{C}}$. Очевидно, $\mathfrak{C} \in V(L)$ и $\mathfrak{C}$ удовлетворяет условию 2 теоремы 3. Так как $f_i \leqslant \Diamond f_k = \neg w$ для любого $i \leqslant k$, то все f_i входят в C. Пусть $x \in \mathfrak{C}$, $0 < x \leqslant w$. Тогда $x = g(X)$ для подходящего непустого множества $X \subseteq W$. Пусть a — любой элемент из X. Ввиду соотношения (7) $\{a\}'(n) = \{a\}$ для всех $n \geqslant l+k+1$, где $a \in W_l$. Поскольку имеет место $b_{n-k}R_na$ для всех $n \geqslant l+k+1$, то $\{n \mid f_k'(n) \leqslant$ $\leqslant \Diamond_{W_n}\{a\}'(n)\} \in D$ и, следовательно, $f_k \leqslant \Diamond_{\mathfrak{B}}\, g(\{a\}) \leqslant \Diamond_{\mathfrak{B}}\, g(X) = \Diamond_{\mathfrak{B}} x$. Учитывая (6), получаем условие 1 теоремы. Теорема 3 доказана.

§ 3. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Говорим, что *логика L обладает интерполяционным свойством Крейга* (ИСК), если выполнено условие: для любых формул A, B, если $(A\supset B)\in L$, то существует формула C, содержащая лишь общие переменные формул A и B и такая, что $(A\supset C)\in L$ и $(C\supset B)\in L$.

Наряду с ИСК рассмотрим *интерполяционное свойство выводимости* (ИСВ): для любых формул A, B, если $A\vdash_L B$, существует формула C, содержащая лишь общие переменные формул A и B и такая, что $A\vdash_L C$ и $C\vdash_L B$.

Запись $A\vdash_L B$ означает, что существует вывод B из $L\cup\{A\}$, не использующий правила подстановки. Можно показать, что ИСК влечет ИСВ в любой нормальной модальной логике. Заметим, что в логиках из NE(K4) справедлива эквивалентность $A\vdash_L B\Leftrightarrow\vdash_L(\boxdot A\supset B)$. Поэтому ИСВ равносильно ИСК с тем ограничением, что формула A имеет вид $\boxdot A_1$. Как следствие, в нормальных расширениях логики S4 свойство ИСВ равносильно свойству ИТКН, рассмотренному в [5, 8].

Лемма 8. *Пусть* $L\in \mathrm{NE(K4)}$. *Тогда*

(а) *L обладает* ИСВ *в том и только том случае, если $V(L)$ амальгамируемо* (см. [15]);

(б) *L обладает* ИСК *в том и только том случае, если $V(L)$ сверхамальгамируемо.*

Доказательство. (а) Доказано в [15]. (б) Аналогично [5, теорема 1].

Напомним, что многообразие V называется *амальгамируемым*, если для любых алгебр $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2\in V$ и мономорфизмов i_1: $\mathfrak{A}_0\to\mathfrak{A}_1$, i_2: $\mathfrak{A}_0\to\mathfrak{A}_2$ существуют $\mathfrak{A}\in V$ и мономорфизмы ε_1: $\mathfrak{A}_1\to\mathfrak{A}$, ε_2: $\mathfrak{A}_2\to\mathfrak{A}$ такие, что $\varepsilon_1 i_1=\varepsilon_2 i_2$, и *сверхамальгамируемым*, если, кроме того, для любых $x\in\mathfrak{A}_1$, $y\in\mathfrak{A}_2$

$$\varepsilon_1(x)\leqslant\varepsilon_2(y)\Leftrightarrow(\exists z\in\mathfrak{A}_0)\,(x\leqslant i_1(z)\wedge i_2(z)\leqslant y).$$

Для доказательства основной теоремы 4 нам потребуется ряд лемм и определений.

Без труда проверяется следующая

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная* K4-*алгебра,* α: $\mathrm{At}\,\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ — *отображение из* $\mathrm{At}\,\mathfrak{A}$ *в* K4-*алгебру* $\mathfrak{B}$, *удовлетворяющее для всех атомов a, b из $\mathfrak{A}$ условиям*

(а) $\alpha(a)>0$,

(б) $\alpha(a)\,\&\,\alpha(b)=0$ *при* $a\neq b$,

(в) $a\leqslant\Diamond b\Rightarrow\alpha(a)\leqslant\Diamond\alpha(b)$, $a\nleqslant\Diamond b\Rightarrow\alpha(a)\leqslant\neg\Diamond\alpha(b)$,

(г) $\bigvee\limits_{x\in\mathrm{At}\,\mathfrak{A}}\alpha(x)=1$.

Тогда продолжение $\bar\alpha$: $\mathfrak{A}\to\mathfrak{B}$ *отображения* α, *где* $\bar\alpha(y)=\bigvee\{\alpha(x)\,|\,x\in\mathrm{At}\,\mathfrak{A}\wedge x\leqslant y\}$, *есть мономорфизм из $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$.*

Пусть $Q=\langle Q, R\rangle$ — транзитивная рефлексивная шкала, $\mathfrak{B}$ — K4-алгебра. Отображение α: $Q\to\mathfrak{B}$ назовем *топобулевым вложением*, если для всех a, $b\in Q$ выполнены условия

а) $\alpha(a)>0$,

б) $\alpha(a)\,\&\,\alpha(b)=0$ при $a\neq b$,

в) $aRb\Rightarrow\alpha(a)\leqslant\Diamond\alpha(b)$, $\neg aRb\Rightarrow\alpha(a)\leqslant\neg\Diamond\alpha(b)$,

г) $\bigvee\limits_{x\in Q}\alpha(x)=1$.

Из леммы 9 и теоремы о представлении K4-алгебр сразу вытекает

Лемма 10. *Пусть Q — конечная рефлексивная транзитивная шкала, $\mathfrak{B}$ — K4-алгебра,* α: $Q\to\mathfrak{B}$ — *топобулево вложение. Тогда* $\bar\alpha$: $Q^+\to\mathfrak{B}^\top$ *где* $\bar\alpha(X)=\bigvee\limits_{a\in X}\alpha(a)$ *для* $X\subseteq Q$, *есть мономорфизм топобулевой алгебры Q^+ в топобулев редукт $\mathfrak{B}^\top$ K4-алгебры $\mathfrak{B}$.*

Как правило, интервал K4-алгебры не является ее подалгеброй. Однако к некоторым K4-алгебрам бесконечной высоты применима

Лемма 11. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — K4-*алгебра*, u, v, w — *элементы* $\mathfrak{A}$, *удовлетворяющие условиям*

(а) $u \& v = u \& w = v \& w = 0$, $u \vee v \vee w = 1$, $\Diamond u \leqslant u \leqslant \Diamond v \leqslant u \vee v$, $v \leqslant \Diamond x$ *для любого* $x \leqslant w$, $x > 0$, (б) *интервал* $(w]_{\mathfrak{A}}$ *содержит бесконечное множество атомов* $c_1, c_2, \ldots$, *где* $c_{n+1} \leqslant \Diamond c_n$, $c_n \leqslant \neg \Diamond c_{n+1}$ *для любого* n *и* $\forall z (0 < z \leqslant w \Rightarrow \exists n (c_n \leqslant \Diamond z))$.

Тогда для любого неглавного ультрафильтра Φ *на* $\mathbf{N}$ *следующее отображение* i_Φ: $(u \vee w]_{\mathfrak{A}} \to \mathfrak{A}$ *есть мономорфизм*:

$$i_\Phi(x) = \begin{cases} x, \text{ если } \{n \mid c_n \leqslant x\} \notin \Phi, \\ x \vee v, \text{ если } \{n \mid c_n \leqslant x\} \in \Phi. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{B} = (u \vee w]_{\mathfrak{A}}$, x, $y \in \mathfrak{B}$. Очевидно, $i_\Phi(\neg x) = \neg i_\Phi(x)$, $i_\Phi(x \& y) = i_\Phi(x) \& i_\Phi(y)$, $x > 0 \Rightarrow i_\Phi(x) \geqslant x > 0$, т. е. i_Φ сохраняет булевы операции и является одно-однозначным. Остается проверить равенство $i_\Phi(\Diamond_{\mathfrak{B}} x) = \Diamond_{\mathfrak{A}} i_\Phi(x)$.

Случай 1: $x \& w = z > 0$. Тогда по условию (б) $c_k \leqslant \Diamond_{\mathfrak{A}} z$ для некоторого k. Отсюда для любого $n \geqslant k$ имеем $c_n \leqslant c_k \vee \Diamond c_k \leqslant \Diamond_{\mathfrak{A}} z \leqslant \Diamond_{\mathfrak{A}} x$ и $c_n \leqslant \Diamond_{\mathfrak{A}} x \& (u \vee w) = \Diamond_{\mathfrak{B}} x$. Поэтому $i_\Phi(\Diamond_{\mathfrak{B}} x) = \Diamond_{\mathfrak{B}} x \vee v = (\Diamond_{\mathfrak{A}} x \& (u \vee w)) \vee \vee v = (\Diamond_{\mathfrak{A}} x \vee v) \& (u \vee v \vee w) = \Diamond_{\mathfrak{A}} x \vee v = \Diamond_{\mathfrak{A}} x$, так как $u \vee v \vee w = 1$, $v \leqslant \Diamond_{\mathfrak{A}} z \leqslant \Diamond_{\mathfrak{A}} x$. С другой стороны, $\Diamond_{\mathfrak{A}} x \leqslant \Diamond_{\mathfrak{A}} i_\Phi(x) \leqslant \Diamond_{\mathfrak{A}} (x \vee v) = \Diamond_{\mathfrak{A}} x \vee \Diamond_{\mathfrak{A}} v = \Diamond_{\mathfrak{A}} x$. Таким образом, $\Diamond_{\mathfrak{A}} i_\Phi(x) = \Diamond_{\mathfrak{A}} x = i_\Phi(\Diamond_{\mathfrak{B}} x)$.

Случай 2: $x \& w = 0$. Тогда $x \leqslant (u \vee w) \& \neg w = u \& \neg w = u$, $\Diamond_{\mathfrak{A}} x \leqslant \Diamond_{\mathfrak{A}} u \leqslant u$, $\Diamond_{\mathfrak{B}} x = \Diamond_{\mathfrak{A}} x \& (u \vee w) = \Diamond_{\mathfrak{A}} x \leqslant u$, $\{n \mid c_n \leqslant \Diamond_{\mathfrak{B}} x\} = \{n \mid c_n \leqslant x\} = \varnothing \notin \Phi$, $i_\Phi(\Diamond_{\mathfrak{B}} x) = \Diamond_{\mathfrak{B}} x = \Diamond \mathfrak{A} x = \Diamond_{\mathfrak{A}} i_\Phi(x)$. Лемма доказана.

Приступим теперь к доказательству основной теоремы.

Теорема 4. *Пусть* $L \in \mathrm{NE}(\mathrm{K4})$ — *бесконечнослойная логика, обладающая* ИСВ. *Тогда* $r(L) \subseteq \mathrm{Grz} \cdot 2 = \mathrm{Grz} + (\Box \Diamond p \equiv \Diamond \Box p)$.

Доказательство. Шкала $\langle W, R \rangle$ называется *рефлексивным деревом*, если R — рефлексивный частичный порядок, W имеет наименьший элемент и $(\forall x, y, z)$ $(x \leqslant z \wedge y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant y \vee y \leqslant x)$.

Отметим, что справедлива

Лемма 12. *Логика* Grz. 2 *полна относительно класса конечных, рефлексивных, частично упорядоченных шкал вида* $T' = T \cup \{e\}$, *где* T — *конечное дерево, у которого все максимальные цепи имеют одинаковую длину*, $e \notin T$, e — *наибольший элемент* T'.

Доказательство. Напомним [13], что логика Grz полна относительно класса шкал с рефлексивным частичным порядком. Логика Grz. 2 аксиоматизируема с помощью добавления LM-формулы [16] к Grz и, следовательно, тоже финитно аппроксимируема [16], а значит, и полна относительно класса конечных шкал с рефлексивным частичным порядком, имеющих наименьший и наибольший элементы. Поэтому достаточно показать, что любую такую шкалу можно получить из шкалы, удовлетворяющей условию леммы, с помощью p-морфизма.

Пусть $\langle S, \leqslant \rangle$ — конечная частично упорядоченная шкала с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом a, $S_1 = S \setminus \{a\}$. Пусть $k = h(S_1)$. Обозначим через T множество последовательностей $\langle z_1, \ldots, z_n \rangle$, где $0 < n \leqslant k$, $z_1, \ldots, z_n \in S_1$, $z_1 = 0$, и для любого $i < n$ либо $z_i < z_{i+1}$, либо z_i является максимальным элементом в S_1 и $z_i = z_{i+1}$. Для $x, y \in T$ полагаем $x \leqslant_T y \Leftrightarrow x$ есть начальный отрезок y. Очевидно, T — конечное дерево с наименьшим элементом 0, причем длина любой максимальной цепи в T равна k. Нетрудно проверить, что θ: $T \to S_1$, где $\theta(\langle z_1, \ldots, z_n \rangle) = z_n$, есть p-морфизм из T на S_1. Положим $T' = T \cup \{e\}$, где $e \notin T$; $z \leqslant_{T'} y \Leftrightarrow ((z, y \in T \wedge z \leqslant_T y) \vee y = e)$. Тогда θ': $T' \to S$, где $\theta' | T = \theta$, $\theta'(e) = a$, есть p-морфизм из T' на S. Лемма доказана.

Пусть L — данная бесконечнослойная логика. Теперь наша цель — построить для любой шкалы T', удовлетворяющей условию леммы 12, топобулево вложение T' в подходящую алгебру из $V(L)$. Тогда, ввиду леммы 10 $T'^{+}\in r(V(L))=V(r(L))$, следовательно, по лемме 12 $V(\mathrm{Grz.}\,2)\subseteq V(r(L))$ и $r(L)\subseteq \mathrm{Grz.}\,2$.

Зафиксируем любое $k\geqslant 0$. Так как L — бесконечнослойная логика, то $V(L)$ содержит алгебру $\mathfrak{C}$, удовлетворяющую условиям теоремы 3. Зафиксируем эту алгебру $\mathfrak{C}$. Напомним, что выполнены условия

(A1) $\mathfrak{C}$ содержит атомы $f_0, \ldots, f_k$, где $f_i\leqslant \Diamond f_{i+1}$, $f_{i+1}\leqslant \neg\Diamond f_i$ для всех $i<k$; $f_k\leqslant \Diamond x$ для любого x такого, что $0<x\leqslant \neg\Diamond f_k=w$.

(A2) Интервал $(w]_{\mathfrak{C}}$ является атомным, содержит бесконечную последовательность атомов $c_1, c_2, \ldots$ такую, что $c_{n+1}\leqslant \Diamond c_n$, $c_n\leqslant \neg\Diamond c_{n+1}$ для всех n, $\forall x\,(0<x\leqslant w\Rightarrow \exists n\,(c_n\leqslant \Diamond x))$.

(A3) Существует $x_0\in\mathfrak{C}$ такой, что $c_{2n}\leqslant x_0$, $c_{2n+1}\leqslant \neg x_0$ для всех n.

Лемма 13. *Обозначим в* $\mathfrak{C}$: $a_0=\Diamond f_0$, $a_{i+1}=\Diamond f_{i+1}\,\&\,\neg\Diamond f_i$ *для* $0\leqslant i<k$. *Тогда для всех* $i, j\in\{0,\ldots,k\}$

(а) $a_i>0, a_i\,\&\,w=a_i\,\&\,\neg\Diamond f_k=0,\ i\neq j\Rightarrow a_i\,\&\,a_j=0$,

(б) $a_0\vee\ldots\vee a_k\vee w=1$,

(в) $\Diamond a_i\leqslant a_0\vee\ldots\vee a_i=\Diamond f_i$,

(г) $w\leqslant\Box w$, $\Diamond w=1$,

(д) $i\leqslant j\Rightarrow a_i\leqslant\Diamond a_j$, $i>j\Rightarrow a_i\leqslant\neg\Diamond a_j$.

Доказательство. (а) Имеем $a_i\geqslant f_i>0$ для всех i, $\Diamond f_i\leqslant\Diamond\Diamond f_{i+1}\leqslant\Diamond f_{i+1}$. Поэтому

$$\Diamond f_0<\Diamond f_1<\ldots<\Diamond f_k, \tag{9}$$

$$a_i\,\&\,w=a_i\,\&\,\neg\Diamond f_k\leqslant\Diamond f_i\,\&\,\neg\Diamond f_k=0,$$

$$i<j\Rightarrow a_i\,\&\,a_j\leqslant\Diamond f_i\,\&\,\neg\Diamond f_{j-1}\leqslant\Diamond f_{j-1}\,\&\,\neg\Diamond f_{j-1}=0.$$

(б) Очевидно.

(в) Ввиду (9) $a_0\vee\ldots\vee a_i=\Diamond f_i$ поэтому $\Diamond a_i\,\&\,\neg(a_0\vee\ldots\vee a_i)=\Diamond(\Diamond f_i\,\&\,\neg\Diamond f_{i-1})\,\&\,\neg\Diamond f_i\leqslant\Diamond\Diamond f_i\,\&\,\neg\Diamond f_i=\Diamond(f_i\vee\Diamond f_i)\,\&\,\neg f_i\,\&\,\neg\Diamond f_i\leqslant\Diamond f_i\,\&\,\neg\Diamond f_i=0$. Отсюда $\Diamond a_i=a_i\vee\Diamond a_i\leqslant a_0\vee\ldots\vee a_i$.

(г) $\Box w=\Box(\neg f_k\,\&\,\neg\Diamond f_k)=\neg\Diamond f_k\,\&\,\neg\neg\Diamond f_k=\neg\Diamond f_k\geqslant w$. Имеем $f_k\leqslant\Diamond w$ в силу условия (A1), поэтому $\neg w=\Diamond f_k\leqslant\Diamond\Diamond w=\Diamond w\vee\Diamond\Diamond w=\Diamond w$, $1=w\vee\neg w\leqslant w\vee\Diamond w=\Diamond w$.

(д) Пусть $i\leqslant j$. Тогда ввиду (9) и $f_j\leqslant a_j$ имеем

$$a_i\leqslant\Diamond f_i\leqslant\Diamond f_j\leqslant\Diamond a_j.$$

Пусть $i>j$. Тогда согласно (в) и (а), $a_i\,\&\,\Diamond a_j\leqslant a_i\&(a_0\vee\ldots\vee a_j)=0$, т. е. $a_i\leqslant\neg\Diamond a_j$. Лемма доказана.

Важное свойство алгебры $\mathfrak{C}$ выражает

Лемма 14. *Для* $0\leqslant n\leqslant k$ *обозначим*

$$v_n=\neg(\Diamond f_n\vee w)=\neg\Diamond f_n\,\&\,\Diamond f_k,\quad \mathfrak{C}_n=(\neg v_n]_{\mathfrak{C}}=(\Diamond f_n\vee w]_{\mathfrak{C}}.$$

Тогда для любого неглавного ультрафильтра Φ *на* $\mathbf{N}$ *отображение* i_Φ: $\mathfrak{C}_n\to\mathfrak{C}$ *вида*

$$i_\Phi(x)=\begin{cases}x, & \text{если } \{i\mid c_i\leqslant x\}\notin\Phi,\\ x\vee v_n, & \text{если } \{i\mid c_i\leqslant x\}\in\Phi,\end{cases}$$

есть мономорфизм.

Доказательство. При $n=k$ имеем $v_n=0$, $\mathfrak{C}_n=\mathfrak{C}$, $i_\Phi(x)=x$, поэтому лемма верна. Пусть $n<k$. Используя лемму 11, положим $u=\Diamond f_n$, $v=v_n=\neg(\Diamond f_n\vee w)$. Тогда $u\,\&\,v=u\,\&\,w=v\,\&\,w=0$, $u\vee v\vee\vee w=1$. Далее, $\Diamond u=\Diamond(f_n\vee\Diamond f_n)=\Diamond f_n\vee\Diamond\Diamond f_n=\Diamond f_n\leqslant u$, $f_n\leqslant\Diamond f_{n+1}$, $n+1\leqslant k$, $f_{n+1}\leqslant\Diamond f_k\,\&\neg\Diamond f_n=v_n$, поэтому $u=f_n\vee\Diamond f_n\leqslant\Diamond f_{n+1}\leqslant\Diamond v_n=\Diamond v$. Покажем, что $\Diamond v\leqslant u\vee v$. В самом деле, $\Diamond v\,\&\neg(u\vee v)=\Diamond v\,\&\,w=\Diamond(\Diamond f_k\,\&\,\neg\Diamond f_n)\,\&\,\neg\Diamond f_k\leqslant\Diamond\Diamond f_k\,\&\,\neg\Diamond f_k=0$, т. е. $\Diamond u\leqslant u\vee v$. Наконец, пусть $0<x\leqslant w$. Тогда $f_k\leqslant\Diamond x$ по условию (A1) и $v=\Diamond f_k\,\&\,\neg\Diamond f_n\leqslant\Diamond f_k=f_k\vee\Diamond f_k\leqslant\Diamond x$.

Таким образом, выполнены все условия леммы 11; отсюда сразу следует лемма 14.

Указанная алгебра $\mathfrak{C}$ будет использована при построении топобулевых вложений шкал высоты $(k+2)$.

Для любого рефлексивного дерева T обозначим через T' шкалу с носителем $T\cup\{e\}$, где $e\notin T$, и порядком $x\leqslant_{T'}y\Leftrightarrow((x,\ y\in T\wedge\wedge x\leqslant_T y)\vee y=e)$. Для $x\in T$ полагаем $T(x)=\{y\in T\mid x\leqslant_T y\vee y\leqslant_T x\}$, $T'(x)=T(x)\cup\{e\}$ с индуцированным порядком, $T^{<}(x)=\{y\mid y\leqslant x\}$, $d(x)=h(T^{<}(x))-1=\overline{\overline{T^{<}(x)}}-1$.

Лемма 15. *Пусть T — конечное рефлексивное дерево, все максимальные цепи которого имеют длину $(k+1)$. Тогда для любого $x\in T$ существуют алгебра $\mathfrak{A}_x\in V(L)$ и α_x: $T'(x)\to\mathfrak{A}_x$, удовлетворяющие условиям*

(а) *α_x — топобулево вложение $T'(x)$ в $\mathfrak{A}_x$,*

(б) *существует мономорфизм φ_x: $\mathfrak{C}\to\mathfrak{A}_x$ такой, что $\alpha_x(e)=\varphi_x(w)$, $\alpha_x(y)=\varphi_x(a_{d(y)})$ для $y\in T^{<}(x)$.*

Доказательство проводим индукцией по $h(x)$.

Базис индукции. Пусть $h(x)=1$, т. е. x — максимальный элемент в T. Тогда $T'(x)$ есть цепь длины $(k+2)$, т. е. $T'(x)=\{y_0,\ \ldots,\ y_k,\ e\}$, где $y_0<y_1<\ldots<y_k=x<e$, $T^{<}(x)=T(x)$. Полагаем $\mathfrak{A}_x=\mathfrak{C}$, $\varphi_x(z)=z$ для $z\in\mathfrak{C}$, $\alpha_x(y_i)=a_i$, $\alpha_x(e)=w$. Тогда (а) выполнено ввиду леммы 13, а (б) очевидно.

Шаг индукции. Пусть $k+1\geqslant h(x)>1$, $x_1,\ \ldots,\ x_m$, $m>1$,— все покрытия x в T. Тогда $T'(x)=T'(x_1)\cup\ldots\cup T'(x_m)$, $T'(x_n)=T^{<}(x)\cup\{x_n\}$, $h(x)=h(x_n)+1$, $d(x_n)=d(x)+1$ для всех $n\leqslant m$. По индукционной гипотезе для любого $n\leqslant m$ существуют $\mathfrak{A}_{x_n}\in V(L)$, топобулево вложение α_{x_n}: $T'(x_n)\to\mathfrak{A}_{x_n}$ и мономорфизм φ_{x_n}: $\mathfrak{C}\to\mathfrak{A}_{x_n}$, причем $\alpha_{x_n}(e)=\varphi_{x_n}(w)$, $\alpha_{x_n}(y)=\varphi_{x_n}(a_{d(y)})$ для $y\in T^{<}(x_n)$. Требуемое утверждение есть частный случай нижеследующей леммы при $n=m$, $\mathfrak{A}_x=\mathfrak{B}_m$, $\alpha_x=\alpha_m$, $\varphi_x=\varphi_m$.

Лемма 16. *Для любого $n\leqslant m$ существуют $\mathfrak{B}_n\in V(L)$, α_n: $T'(x_1)\cup\ldots\cup T'(x_n)\to\mathfrak{B}_n$ и φ_n: $\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}_n$, удовлетворяющие условиям*

(i_1) *α_n — топобулево вложение,*

(i_2) *φ_n — мономорфизм такой, что $\alpha_n(e)=\varphi_n(w)$, $\alpha_n(y)=\varphi_n(a_{d(y)})$ для $y\in T^{<}(x)$.*

Доказательство проводится индукцией по n. При $n=1$ достаточно положить $\mathfrak{B}_1=\mathfrak{A}_{x_1}$, $\alpha_1=\alpha_{x_1}$, $\varphi_1=\varphi_{x_1}$.

Предположим, что утверждение доказано для $j\leqslant n<m$, докажем его для $j=n+1$. Пусть Φ_1, Φ_2 — неглавные ультрафильтры на $\mathbf{N}$, Φ_1 содержит множество четных, а Φ_2 — множество нечетных чисел. Для $l=1,\ 2$ определяем i_{Φ_l}: $\mathfrak{C}_{d(x)}\to\mathfrak{C}$ условием

$$i_{\Phi_l}(z)=\begin{cases} z, & \text{если } \{i\mid c_i\leqslant z\}\notin\Phi_l,\\ z\vee v_{d(x)}, & \text{если } \{i\mid c_i\leqslant z\}\in\Phi_l,\end{cases}$$

где $v_{d(x)}=\Diamond f_k\ \&\ \neg\Diamond f_{d(x)}$. Ввиду леммы 14 i_{Φ_l} являются мономорфизмами. Учитывая индукционную гипотезу, имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & T'(x_1)\cup\ldots\cup T'(x_n) \arrow[d, "\alpha_n"] \\
 & \mathfrak{C} \arrow[r, "\varphi_n"] & \mathfrak{B}_n \\
\mathfrak{C}_{d(x)} \arrow[ur, "i_{\Phi_1}"] \arrow[dr, "i_{\Phi_2}"'] & & \\
 & \mathfrak{C} \arrow[r, "\psi"'] & \mathfrak{A}_{x_{n+1}} \\
 & & T'(x_{n+1}) \arrow[u, "\beta"']
\end{tikzcd}$$

Здесь i_{Φ_1}, i_{Φ_2}, φ_n, $\psi=\varphi_{x_{n+1}}$ — мономорфизмы, α_n, $\beta=\alpha_{x_{n+1}}$ — топобулевы вложения, $\beta(e)=\psi(w)$, $\beta(y)=\psi(a_{d(y)})$ для $y\in T^{<}(x_{n+1})$, $\alpha_n(e)=\varphi_n(w)$, $\alpha_n(y)=\varphi_n(a_{d(y)})$ для $y\in T^{<}(x)$.

Так как $V(L)$ амальгамируемо и $\mathfrak{B}_n$, $\mathfrak{A}_{x_{n+1}}\in V(L)$, то существуют $\mathfrak{B}\in V(L)$ и мономорфизмы $\varepsilon_1\colon \mathfrak{B}_n\to\mathfrak{B}$, $\varepsilon_2\colon \mathfrak{A}_{x_{n+1}}\to\mathfrak{B}$ такие, что $\varepsilon_1\varphi_n i_{\Phi_1}=\varepsilon_2\psi i_{\Phi_2}$. Для доказательства леммы 16 положим $\mathfrak{B}_{n+1}=\mathfrak{B}$ и определим $\alpha_{n+1}\colon T'(x_1)\cup\ldots\cup T'(x_{n+1})\to\mathfrak{B}$, $\varphi_{n+1}\colon \mathfrak{C}\to\mathfrak{B}$ так, чтобы выполнялись условия (i₁) и (i₂).

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & T'(x_1)\cup\ldots\cup T(x_n) \arrow[d, "\alpha_n"] & & \\
 & \mathfrak{C} \arrow[r, "\varphi_n"] & \mathfrak{B} \arrow[dr, "\varepsilon_1"] & & \\
\mathfrak{C}_{d(x)} \arrow[ur, "i_{\varphi_1}"] \arrow[ddr, "i_{\varphi_2}"'] & & & & T'(x_1)\cup\ldots\cup T'(x_{n+1}) \arrow[dl, dashed, "\alpha_{n+1}"] \\
 & & & \mathfrak{B} & \\
 & \mathfrak{C} \arrow[r, "\psi"'] & \mathfrak{A}_{x_{n+1}} \arrow[ur, "\varepsilon_2"'] & & \mathfrak{C} \arrow[ul, dashed, "\varphi_{n+1}"] \\
 & & T'(x_{n+1}) \arrow[u, "\beta"] & &
\end{tikzcd}$$

Полагаем

$$\alpha_{n+1}(y)=\begin{cases}\varepsilon_1\alpha_n(y) & \text{для}\quad y\in T(x_1)\cup\ldots\cup T(x_n),\\ \varepsilon_2\beta(y) & \text{для}\quad y\in T(x_{n+1}),\\ \varepsilon_1\alpha_n(e)\mathbin{\&}\varepsilon_2\beta(e) & \text{для}\quad y=e.\end{cases}$$

Определение корректно, так как $(T(x_1)\cup\ldots\cup T(x_n))\cap T(x_{n+1})=T^{<}(x)$ и для $y\in T^{<}(x)$ имеют место соотношения $d(y)\leqslant d(x)$ и $\varepsilon_1\alpha_n(y)=$ $=\varepsilon_1(\varphi_n(a_{d(y)}))=\varepsilon_1\varphi_n i_{\Phi_1}(a_{d(y)})=\varepsilon_2\psi i_{\Phi_2}(a_{d(y)})=\varepsilon_2\psi(a_{d(y)})=\varepsilon_2\beta(y)$, т. е.

$$\varepsilon_1\alpha_n(y)=\varepsilon_2\beta(y)\quad\text{для}\quad y\in T^{<}(x). \tag{10}$$

В $\mathfrak{C}$ обозначим: $v=v_{d(x)}=\Diamond f_k\mathbin{\&}\neg\Diamond f_{d(x)}=a_{d(x)+1}\vee\ldots\vee a_k$ (см. лемму 13 (а)—(в)). Тогда $\Diamond f_{d(x)}\vee v\vee w=1$, $\Diamond f_{d(x)}\mathbin{\&}v=\Diamond f_{d(x)}\mathbin{\&}w=v\mathbin{\&}w=0$.

Определяем $\varphi_{n+1}\colon\mathfrak{C}\to\mathfrak{B}$, полагая для $z\in\mathfrak{C}$

$$\varphi_{n+1}(z)\leftrightharpoons[\varepsilon_1\varphi_n(z\mathbin{\&}w)\mathbin{\&}\varepsilon_2\psi(w)]\vee\varepsilon_1\varphi_n(z\mathbin{\&}\Diamond f_{d(x)})\vee\varepsilon_1\varphi_n(z\mathbin{\&}v)\vee\varepsilon_2\psi(z\mathbin{\&}v).$$

Очевидно,

$$\begin{gathered}z_1\leqslant z_2\Rightarrow\varphi_{n+1}(z_1)\leqslant\varphi_{n+1}(z_2),\\ \varphi_{n+1}(0)=0,\ \varphi_{n+1}(z_1\vee z_2)=\varphi_{n+1}(z_1)\vee\varphi_{n+1}(z_2).\end{gathered}\tag{11}$$

Заметим, что для любого $z\in\mathfrak{C}$

$$\begin{aligned}\varepsilon_1\varphi_n(z\mathbin{\&}\Diamond f_{d(x)})&=\varepsilon_1\varphi_n i_{\Phi_1}(z\mathbin{\&}\Diamond f_{d(x)})=\varepsilon_2\psi i_{\Phi_2}(z\mathbin{\&}\Diamond f_{d(x)})=\\ &=\varepsilon_2\psi(z\mathbin{\&}\Diamond f_{d(x)}),\end{aligned}\tag{12}$$

а значит,

$$\begin{gathered}\varphi_{n+1}(z)=[\varepsilon_1\varphi_n(z\mathbin{\&}w)\mathbin{\&}\varepsilon_2\psi(w)]\vee\varepsilon_1\varphi_n(z\mathbin{\&}\neg w)\vee\varepsilon_2\psi(z\mathbin{\&}\neg w),\\ \varphi_{n+1}(1)=[\varepsilon_1\varphi_n(w)\mathbin{\&}\varepsilon_2\psi(w)]\vee\varepsilon_1\varphi_n(\neg w)\vee\\ \vee\varepsilon_2\psi(\neg w)\geqslant\varepsilon_1\varphi_n(w\vee\neg w)\mathbin{\&}\varepsilon_2\psi(w\vee\neg w)=1.\end{gathered}\tag{13}$$

Далее,

$$\varphi_{n+1}(w)=\varepsilon_1\varphi_n(w)\mathbin{\&}\varepsilon_2\psi(w)=\alpha_{n+1}(e),\tag{14}$$

$$l \leqslant d(x) \Rightarrow a_l \leqslant \Diamond f_{d(x)} \Rightarrow \varphi_{n+1}(a_l) = 0 \vee \varepsilon_1\varphi_n(a_l \,\&\, \Diamond f_{d(x)}) \vee 0 =$$
$$= \varepsilon_1\varphi_n(a_l) = \varepsilon_1\alpha_n(y) = \alpha_{n+1}(y), \text{ где } d(y) = l, \tag{15}$$
$$d(x) < l \leqslant k \Rightarrow a_l \leqslant v \Rightarrow \varphi_{n+1}(a_l) = \varepsilon_1\varphi_n(a_l) \vee \varepsilon_2\psi(a_l). \tag{16}$$

Проверим, что φ_{n+1} — мономорфизм. Заметим, что из (А3) следует $v \leqslant i_{\Phi_1}(x_0)$, $v \leqslant \neg\, i_{\Phi_2}(x_0)$, $\varepsilon_1\varphi_n(v) \,\&\, \varepsilon_2\psi(v) \leqslant \varepsilon_1\varphi_n i_{\Phi_1}(x_0) \,\&\, \neg\,\varepsilon_2\psi i_{\Phi_2}(x_0) = \varepsilon_2\psi i_{\Phi_2}(x_0 \,\&\, \neg x_0) = \varepsilon_2\psi i_{\Phi_2}(0) = 0$, т. е.

$$\varepsilon_1\varphi_n(v) \,\&\, \varepsilon_2\psi(v) = 0. \tag{17}$$

Далее,

$$[\varepsilon_1\varphi_n(w) \,\&\, \varepsilon_2\psi(w)] \,\&\, \varepsilon_1\varphi_n(\Diamond f_{d(x)}) = \varepsilon_1\varphi_n(0) \,\&\, \varepsilon_2\psi(w) = 0,$$
$$[\varepsilon_1\varphi_n(w) \,\&\, \varepsilon_2\psi(w)] \,\&\, \varepsilon_1\varphi_n(v) = 0, \tag{18}$$
$$[\varepsilon_1\varphi_n(w) \,\&\, \varepsilon_2\psi(w)] \,\&\, \varepsilon_2\psi(v) = 0,$$
$$\varepsilon_1\varphi_n(\Diamond f_{d(x)}) \,\&\, \varepsilon_1\varphi_n(v) = 0,$$
$$\varepsilon_1\varphi_n(\Diamond f_{d(x)}) \,\&\, \varepsilon_2\psi(v) = 0 \text{ по (12).}$$

Учитывая (17) и (18), получаем

$$\varphi_{n+1}(z_1 \,\&\, z_2) = \varphi_{n+1}(z_1) \,\&\, \varphi_{n+1}(z_2), \tag{19}$$
$$\varphi_{n+1}(z) \,\&\, \varphi_{n+1}(\neg z) = 0. \tag{20}$$

Из (11), (20) заключаем

$$\neg\varphi_{n+1}(z) = \varphi_{n+1}(\neg z). \tag{21}$$

Заметим теперь, что

$$z > 0 \Rightarrow \varphi_{n+1}(z) > 0. \tag{22}$$

Пусть $z > 0$. Тогда $z \,\&\, w > 0$, или $z \,\&\, \Diamond f_{d(x)} > 0$, или $z \,\&\, v > 0$. Имеем

$$\begin{aligned} z \,\&\, \Diamond f_{d(x)} > 0 &\Rightarrow \varphi_{n+1}(z) \geqslant \varepsilon_1\varphi_n(z \,\&\, \Diamond f_{d(x)}) > 0, \\ z \,\&\, v > 0 &\Rightarrow \varphi_{n+1}(z) \geqslant \varepsilon_1\varphi_n(z \,\&\, v) > 0. \end{aligned} \tag{23}$$

Допустим $z \,\&\, w > 0$. Тогда ввиду (А2) существует атом z_0 в $(w]_{\mathfrak{C}}$ такой, что $z_0 \leqslant z \,\&\, w$. Поскольку z_0 — атом в $\mathfrak{C}$, то

$$\varepsilon_1\varphi_n(z_0) = \varepsilon_1\varphi_n i_{\Phi_1}(z_0) = \varepsilon_2\psi i_{\Phi_2}(z_0) = \varepsilon_2\psi(z_0), \tag{24}$$
$$\varphi_{n+1}(z_0) = \varepsilon_1\varphi_n(z_0) \,\&\, \varepsilon_2\psi(w) = \varepsilon_2\psi(z_0) \,\&\, \varepsilon_2\psi(w) =$$
$$= \varepsilon_2\psi(z_0) = \varepsilon_1\varphi_n(z_0) > 0. \tag{25}$$

Из (25) и (11) получаем

$$\varphi_{n+1}(z) \geqslant \varphi_{n+1}(z \,\&\, w) \geqslant \varphi_{n+1}(z_0) > 0.$$

Отсюда и из (23) следует (22).

Покажем теперь, что

$$\varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}} z) = \Diamond_{\mathfrak{B}}\varphi_{n+1}(z). \tag{26}$$

Возможны два случая.

Случай 1: $z \,\&\, w > 0$. Ввиду (А2) существует атом $z_0 \in \mathfrak{C}$ такой, что $z_0 \leqslant z \,\&\, w$. По (А1) $f_k \leqslant \Diamond_{\mathfrak{C}} z_0$,

$$\neg\, w = \Diamond_{\mathfrak{C}} f_k \leqslant \Diamond_{\mathfrak{C}} z_0 \leqslant \Diamond_{\mathfrak{C}} z, \tag{27}$$
$$\varphi_{n+1}(\neg\, w) \leqslant \varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}} z). \tag{28}$$

Так как $\varepsilon_1\varphi_n$, $\varepsilon_2\psi$ — мономорфизмы, то

$$\varepsilon_1\varphi_n(z_0) = \varepsilon_2\psi(z_0) \leqslant \varepsilon_1\varphi_n(z \,\&\, w) \,\&\, \varepsilon_2\psi(w) \leqslant \varphi_{n+1}(z),$$
$$\neg\,\varepsilon_1\varphi_n(w) = \varepsilon_1\varphi_n(\neg w) \leqslant \varepsilon_1\varphi_n(\Diamond_{\mathfrak{C}} z_0) = \Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_1\varphi_n(z_0) \leqslant \Diamond_{\mathfrak{B}}\varphi_{n+1}(z),$$
$$\neg\,\varepsilon_2\psi(w) \leqslant \varepsilon_2\psi(\Diamond_{\mathfrak{C}} z_0) = \Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_2\psi(z_0) \leqslant \Diamond_{\mathfrak{B}}\varphi_{n+1}(z)$$

и, следовательно,

$$\varphi_{n+1}(\neg w) \overset{(21)}{=} \neg\varphi_{n+1}(w) \leqslant \Diamond_{\mathfrak{B}}\varphi_{n+1}(z). \quad (29)$$

Далее,

$$\varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}}z) \,\&\, \varphi_{n+1}(w) \overset{(19)}{=} \varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}}z \,\&\, w) \overset{(11)}{=} \varepsilon_1\varphi_n(\Diamond_{\mathfrak{C}}z \,\&\, w) \,\&\, \varepsilon_2\psi(w) =$$
$$= \varepsilon_1\varphi_n(\Diamond_{\mathfrak{C}}z) \,\&\, \varepsilon_1\varphi_n(w) \,\&\, \varepsilon_2\psi(w) = \Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_1\varphi_n(z) \,\&\, \varphi_{n+1}(w). \quad (30)$$

Отсюда $\varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}}z) \overset{(21)}{=} [\varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}}z) \,\&\, \varphi_{n+1}(w)] \vee [\varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}}z) \,\&$ $\& \,\varphi_{n+1}(\neg w)] \overset{(30,28)}{=} [\Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_1\varphi_n(z) \,\&\, \varphi_{n+1}(w)] \vee \varphi_{n+1}(\neg w) = \Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_1\varphi_n(z) \vee$ $\vee\, \varphi_{n+1}(\neg w)$, т. е.

$$\varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}}z) = \Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_1\varphi_n(z) \vee \varphi_{n+1}(\neg w). \quad (31)$$

С другой стороны, из (13)

$$\Diamond_{\mathfrak{B}}\varphi_{n+1}(z) = \Diamond_{\mathfrak{B}}[\varepsilon_1\varphi_n(z \,\&\, w) \,\&\, \varepsilon_2\psi(w)] \vee \Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_1\varphi_n(z \,\&\, \neg w) \vee \Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_2\psi(z \,\&\, \neg w). \quad (32)$$

Поскольку $\Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_2\psi(z \,\&\, \neg w) \leqslant \Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_2\psi(\neg w) = \varepsilon_2\psi(\Diamond_{\mathfrak{C}} \neg w) \leqslant \varepsilon_2\psi(\neg w) \leqslant$ $\leqslant \varphi_{n+1}(\neg w)$, то из (32) и (31) получаем

$$\Diamond_{\mathfrak{B}}\varphi_{n+1}(z) \leqslant \varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}}z). \quad (33)$$

Докажем обратное неравенство. В $\mathfrak{C}$ справедливо $w \leqslant \Box w$ (лемма (13(г)), поэтому

$$\varphi_{n+1}(w) = \varepsilon_1\varphi_n(w) \,\&\, \varepsilon_2\psi(w) \leqslant \varepsilon_1\varphi_n(\Box w) \,\&\, \varepsilon_2\psi(\Box w) =$$
$$= \Box\varepsilon_1\varphi_n(w) \,\&\, \Box\varepsilon_2\psi(w) = \Box\varphi_{n+1}(w). \quad (34)$$

Так как любая $K4$-алгебра удовлетворяет условию $y \leqslant \Box y \Rightarrow \Diamond y_1 \,\&\, y \leqslant$ $\leqslant \Diamond(y_1 \,\&\, y)$, то

$$\varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}}z) \,\&\, \varphi_{n+1}(w) \overset{(30)}{=} \Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_1\varphi_n(z) \,\&\, \varphi_{n+1}(w) \leqslant \Diamond_{\mathfrak{B}}(\varepsilon_1\varphi_n(z) \,\&\, \varphi_{n+1}(w)) =$$
$$= \Diamond_{\mathfrak{B}}(\varepsilon_1\varphi_n(z) \,\&\, \varepsilon_1\varphi_n(w) \,\&\, \varepsilon_2\psi(w)) = \Diamond_{\mathfrak{B}}(\varepsilon_1\varphi_n(z \,\&\, w) \,\&\, \varepsilon_2\psi(w)) \overset{(32)}{\leqslant}$$
$$\leqslant \Diamond_{\mathfrak{B}}\varphi_{n+1}(z). \quad (35)$$

Из (29) и (35) получаем

$$\varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}}z) \leqslant \Diamond_{\mathfrak{B}}\varphi_{n+1}(z). \quad (36)$$

Тогда из (33) и (36) сразу следует (26).

Случай 2: $z \,\&\, w = 0$. Тогда $z \leqslant \neg w$, $\Diamond_{\mathfrak{C}}z \leqslant \Diamond \neg w \leqslant \neg w$, откуда

$$\varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}}z) \overset{(13)}{=} \varepsilon_1\varphi_n(\Diamond_{\mathfrak{C}}z \,\&\, \neg w) \vee \varepsilon_2\psi(\Diamond_{\mathfrak{C}}z \,\&\, \neg w) = \varepsilon_1\varphi_n(\Diamond_{\mathfrak{C}}z) \vee$$
$$\vee\, \varepsilon_2\psi(\Diamond_{\mathfrak{C}}z) = \Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_1\varphi_n(z) \vee \Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_2\psi(z),$$

$$\Diamond_{\mathfrak{B}}\varphi_{n+1}(z) \overset{(13)}{=} \Diamond_{\mathfrak{B}}(\varepsilon_1\varphi_n(z \,\&\, \neg w) \vee \varepsilon_2\psi(z \,\&\, \neg w)) = \Diamond_{\mathfrak{B}}(\varepsilon_1\varphi_n(z) \vee \varepsilon_2\psi(z)) =$$
$$= \varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}}z),$$

т. е. получили (26). Ввиду (11), (14), (15), (19), (21), (22), (26), выполняется условие (i_2) леммы 16.

Осталось доказать (i_1). Так как α_n и β — топобулевы вложения и ε_1, ε_2 — мономорфизмы, то $\alpha_{n+1}(y) = \varepsilon_1\alpha_n(y) > 0$ для $y \in T(x_1) \cup \ldots$ $\ldots \cup T(x_n)$, $\alpha_{n+1}(y) = \varepsilon_2\beta(y) > 0$ для $y \in T(x_{n+1})$. Из (14) имеем $\alpha_{n+1}(e) =$ $= \varphi_{n+1}(w) > 0$, так как φ_{n+1} — мономорфизм. Таким образом,

$$\alpha_{n+1}(y) > 0 \text{ для всех } y \in T'(x_1) \cup \ldots \cup T'(x_{n+1}). \quad (37)$$

Далее,

$$\bigvee \left\{\alpha_{n+1}(y) \mid y \in \bigcup_{l \leqslant n+1} T'(x_l)\right\} = 1. \tag{38}$$

В самом деле,

$$\bigvee \left\{\alpha_{n+1}(y) \mid y \in \bigcup_{l \leqslant n+1} T'(x_l)\right\} = \alpha_{n+1}(e) \vee \bigvee \left\{\alpha_{n+1}(y) \mid y \in \bigcup_{l \leqslant n} T(x_l)\right\} \vee$$

$$\vee \bigvee \{\alpha_{n+1}(y) \mid y \in T(x_{n+1})\} = [\varepsilon_1\alpha_n(e) \mathbin{\&} \varepsilon_2\beta(e)] \vee$$

$$\vee\, \varepsilon_1\left[\bigvee \left\{\alpha_n(y) \mid y \in \bigcup_{l \leqslant n} T(x_l)\right\}\right] \vee \varepsilon_2[\bigvee\{\beta(y) \mid y \in T(x_{n+1})\}] =$$

$$= [\varepsilon_1\alpha_n(e) \mathbin{\&} \varepsilon_2\beta(e)] \vee \varepsilon_1(\neg\,\alpha_n(e)) \vee \varepsilon_2(\neg\,\beta(e)) \geqslant (\varepsilon_1\alpha_n(e) \vee \varepsilon_1(\neg\,\alpha_n(e))) \mathbin{\&}$$

$$\mathbin{\&} (\varepsilon_2\beta(e) \vee \varepsilon_2(\neg\,\beta(e))) = 1.$$

Проверим для $y, z \in T'(x_1) \cup \ldots \cup T'(x_{n+1})$, что

$$y \neq z \Rightarrow \alpha_{n+1}(y) \mathbin{\&} \alpha_{n+1}(z) = 0. \tag{39}$$

Возможны четыре случая,

Случай 1: $y, z \in T(x_1) \cup \ldots \cup T(x_n)$. Тогда

$$\alpha_{n+1}(y) \mathbin{\&} \alpha_{n+1}(z) = \varepsilon_1(\alpha_n(y) \mathbin{\&} \alpha_n(z)) = \varepsilon_1(0) = 0.$$

Случай 2: $y, z \in T(x_{n+1})$. Тогда $\alpha_{n+1}(y) \mathbin{\&} \alpha_{n+1}(z) = \varepsilon_2(\beta(y) \mathbin{\&} \beta(z)) = 0$.

Случай 3: $y = e$, $z \neq e$. Тогда $\alpha_{n+1}(y) \mathbin{\&} \alpha_{n+1}(z) = \varepsilon_1\alpha_n(e) \mathbin{\&} \varepsilon_2\beta(e) \mathbin{\&} \alpha_{n+1}(z) = 0$.

Случай 4: $y \in (T(x_1) \cup \ldots \cup T(x_n)) \setminus T(x_{n+1})$, $z \in T(x_{n+1}) \setminus (T(x_1) \cup \ldots \cup T(x_n))$. Тогда

$$\alpha_{n+1}(y) = \varepsilon_1\alpha_n(y) \leqslant \varepsilon_1(\neg\,[\alpha_n(e) \vee \bigvee\{\alpha_n(y') \mid y' \in T^{\prec}(x)\}]) =$$

$$= \varepsilon_1\left(\neg\left(\varphi_n(w) \vee \bigvee_{l \leqslant d(x)} \varphi_n(a_l)\right)\right) = \varepsilon_1\varphi_n(v)$$

ввиду леммы 13 (а), (б) и равенства $v = a_{d(x)+1} \vee \ldots \vee a_k$;

$$\alpha_{n+1}(z) = \varepsilon_2\beta(z) \leqslant \varepsilon_2(\neg\,[\beta(e) \vee \bigvee\{\beta(z') \mid z' \in T^{\prec}(x)\}]) =$$

$$= \varepsilon_2\left(\neg\left(\psi(w) \vee \bigvee_{l \leqslant d(x)} \psi(a_l)\right)\right) = \varepsilon_2\psi(v),$$

$$\alpha_{n+1}(y) \mathbin{\&} \alpha_{n+1}(z) \leqslant \varepsilon_1\varphi_n(v) \mathbin{\&} \varepsilon_2\psi(v) \overset{(17)}{=} 0.$$

Итак, (39) доказано.

Покажем, что для всех $y, z \in T'(x_1) \cup \ldots \cup T'(x_{n+1})$

$$z \leqslant y \Rightarrow \alpha_{n+1}(z) \leqslant \Diamond\, \alpha_{n+1}(y). \tag{40}$$

Если $z \leqslant y$, то (а) $z, y \in T'(x_1) \cup \ldots \cup T'(x_n)$ или (б) $z, y \in T'(x_{n+1})$. В случае (а) $\alpha_n(z) \leqslant \Diamond_{\mathfrak{B}_n}\alpha_n(y)$, $\varepsilon_1\alpha_n(z) \leqslant \varepsilon_1(\Diamond_{\mathfrak{B}_n}\alpha_n(y)) = \Diamond_{\mathfrak{B}}\varepsilon_1\alpha_n(y)$.

Отсюда $y \neq e \Rightarrow \alpha_{n+1}(z) \leqslant \Diamond\, \alpha_{n+1}(y)$. Пусть $y = e$. Так как по лемме 13(г) $\Diamond_{\mathfrak{C}} w = 1$, то по (26) и (14)

$$\Diamond\, \alpha_{n+1}(e) = \Diamond\, \varphi_{n+1}(w) = \varphi_{n+1}(\Diamond_{\mathfrak{C}} w) = 1, \tag{41}$$

а значит, $\alpha_{n+1}(z) \leqslant \Diamond\, \alpha_{n+1}(e)$ и (40) в случае (а) доказано. Случай (б) рассматривается аналогично.

Докажем, наконец, что для всех $y \in T'(x_1) \cup \ldots \cup T'(x_{n+1})$ справедливо

$$z \nleqslant y \Rightarrow \alpha_{n+1}(z) \leqslant \neg\, \Diamond\, \alpha_{n+1}(y). \tag{42}$$

Возможны следующие случаи:

(а) $z, y \in T(x_1) \cup \ldots \cup T(x_n)$,

(б) $z, y \in T(x_{n+1})$,

(в) $z \in (T(x_1) \cup \ldots \cup T(x_n)) \setminus T^<(x)$, $y \in T(x_{n+1}) \setminus T^<(x)$,
(г) $z \in T(x_{n+1}) \setminus T^<(x)$, $y \in (T(x_1) \cup \ldots \cup T(x_n)) \setminus T^<(x)$,
(д) $z = e$, $y \neq e$.

В случае (а) $z \not\leqslant y \Rightarrow \alpha_n(z) \leqslant \neg \Diamond \alpha_n(y) \Rightarrow \alpha_{n+1}(z) = \varepsilon_1 \alpha_n(z) \leqslant \leqslant \varepsilon_1 (\neg \Diamond \alpha_n(y)) = \neg \Diamond \alpha_{n+1}(y)$, т. е. (42) выполнено. Случай (б) рассматривается аналогично.

В случае (в) $\alpha_n(z) \leqslant \neg [\alpha_n(e) \vee \bigvee \{\alpha_n(z') \mid z' \leqslant x\}] \overset{(\mathrm{i}_2)}{=} \neg \Big[\varphi_n(w) \vee \bigvee_{l \leqslant d(x)} \varphi_n(a_l)\Big] = \varphi_n(v)$, $\beta(y) \leqslant \psi(v)$. Поэтому

$$\alpha_{n+1}(z) \,\&\, \Diamond \alpha_{n+1}(y) \leqslant \varepsilon_1 \varphi_n(v) \,\&\, \Diamond \varepsilon_2 \psi(v). \tag{43}$$

Докажем, что

$$\varepsilon_1 \varphi_n(v) \,\&\, \Diamond \varepsilon_2 \psi(v) = 0. \tag{44}$$

Имеем в $\mathfrak{C}$ ввиду леммы 13 (в)

$$\Diamond \varepsilon_2 \psi(v) = \varepsilon_2 \psi(\Diamond v) \leqslant \varepsilon_2 \psi(\Diamond f_{d(x)} \vee v) = \varepsilon_2 \psi(\Diamond f_{d(x)}) \vee \varepsilon_2 \psi(v) \overset{(12)}{=} = \varepsilon_1 \varphi_n(\Diamond f_{d(x)}) \vee \varepsilon_2 \psi(v).$$

Отсюда и из (17) и (18) следует (44), а из (44) и (43) получаем $\alpha_{n+1}(z) \leqslant \neg \Diamond \alpha_{n+1}(y)$. Аналогично в случае (г) $\alpha_{n+1}(z) \,\&\, \Diamond \alpha_{n+1}(y) \leqslant \leqslant \varepsilon_2 \psi(v) \,\&\, \Diamond \varepsilon_1 \varphi_n(v) = 0$, т. е. $\alpha_{n+1}(z) \leqslant \neg \Diamond \alpha_{n+1}(y)$.

Случай (д). Пусть для определенности $y \in T(x_1) \cup \ldots \cup T(x_n)$. Поскольку α_n — топобулево вложение и $e \not\leqslant y$, то $\alpha_n(e) \,\&\, \Diamond \alpha_n(y) = 0$. Отсюда $\alpha_{n+1}(e) \,\&\, \Diamond \alpha_{n+1}(y) \leqslant \varepsilon_1 \alpha_n(e) \,\&\, \varepsilon_1 (\Diamond \alpha_n(y)) = 0$, т. е. $\alpha_{n+1}(e) \leqslant \leqslant \neg \Diamond \alpha_{n+1}(y)$. Аналогично рассматривается $y \in T(x_{n+1})$. Лемма 16, а вместе с ней и лемма 15, доказаны.

Окончание доказательства теоремы 4. Пусть шкала T' удовлетворяет условиям леммы 12, t_0 — наименьший элемент T'. Применяя лемму 15, при $x = t_0$ получаем, что существуют $\mathfrak{A}_{t_0} \in V(L)$ и топобулево вложение из $T' = T'(t_0)$ в $\mathfrak{A}_{t_0}$. Отсюда, как уже отмечалось выше, следует $r(L) \subseteq \mathrm{Grz.2}$, что и требовалось. Теорема доказана.

Напомним [17], что логика $L \in \mathrm{NE(K4)}$ является *логикой конечной ширины,* если существует такое $k < \omega$, что в острых шкалах, удовлетворяющих L, мощность любого множества попарно несравнимых элементов не превосходит k.

Следствие. (а) *Никакая бесконечнослойная логика конечной ширины не обладает* ИСВ.

(б) *Для любого $n < \omega$ логика конечных иррефлексивных n-арных деревьев не обладает* ИСВ.

Доказательство. Если L — логика конечной ширины, то $r(L)$ — тоже логика конечной ширины, а, значит, $r(L) \not\subseteq \mathrm{Grz.2}$. Если L — логика конечных иррефлексивных n-арных деревьев, то $r(L)$ характеризуется конечными рефлексивными n-арными деревьями и не содержится в Crz. 2. Поэтому утверждение сразу вытекает из теоремы 4.

Отметим, что Раутенберг [7, с. 423] приводит контрпример к интерполяционному свойству Крейга в исчислении $\mathrm{G.3} = G + (\Box(\Box p \supset q) \vee \vee \Box(\Box q \supset p))$, указывая, что этот контрпример сообщила ему автор настоящей статьи. Однако формула в [7] приведена с опечатками и в действительности выводима уже в K, а значит, имеет интерполянт. В качестве искомого контрпримера к ИСК в любом бесконечнослойном расширении логики $\mathrm{K4.3} = \mathrm{K4} + (\Box(\Box p \supset q) \vee \Box(\Box q \supset p))$ следует взять формулу $(P \supset Q)$, где

$$P \leftrightharpoons (\Box(p_1 \supset \Box q_1) \,\&\, \Diamond(p_2 \,\&\, \neg \Box q_1)), Q \leftrightharpoons (\Diamond(p_1 \,\&\, \neg \Box q_2) \supset \Diamond(p_2 \,\&\, \,\&\, \neg \Box q_2)).$$

Приведем другой контрпример, который является также контрпримером к ИСВ в расширениях логики K4.3. Напомним, что для этого достаточно найти верную в L формулу вида $(\Box A \supset B)$, не имеющую интерполянта.

Предложение 1. *Формула* $(\Box A \supset B)$, *где*

$$A \leftrightharpoons \Box((p_1 \supset \Box q_1)\&(\Box(p_2 \supset \Box q_1) \supset q_1)\&(\Box q_1 \supset p_1 \vee p_2)),$$

$$B \leftrightharpoons (\Box((p_2 \supset \Box q_2)\&(\Box(p_1 \supset \Box q_2) \supset q_2)\&(\Box q_2 \supset p_1 \vee p_2)) \supset p_1 \vee p_2),$$

верна в K4.3 *и не имеет интерполянта в любом бесконечнослойном расширении логики* K4.3.

Доказательство. Нетрудно показать, что формула $(\Box A \supset B)$ верна в любой транзитивной шкале, удовлетворяющей условию $\forall xy(xRy \vee yRx \vee x = y)$, а значит, принадлежит K4.3 ввиду полноты K4.3 относительно класса шкал с этим условием. Докажем, что эта формула не имеет интерполянта в любой бесконечнослойной $L \in \mathrm{NE}(\mathrm{K4})$. Пусть $\mathfrak{C}$ — алгебра из $V(L)$, удовлетворяющая условиям теоремы 3 при $k = 1$. Алгебра $\mathfrak{C}$ имеет атомы $f_0, f_1, c_1, c_2, \ldots$ $(c_n \leqslant w = \neg \Diamond f_1)$, и элемент $x_0 \leqslant w$ такой, что $c_{2n} \leqslant x_0$ и $c_{2n+1} \& x_0 = 0$ для любого $n \geqslant 0$; $a_0 = \Diamond f_0$, $a_1 = \Diamond f_1 \& \neg \Diamond f_0$.

Допустим, что существует формула $C(p_1, p_2)$ такая, что $(\Box A \supset C(p_1, p_2)) \in L$ и $(C(p_1, p_2) \supset B) \in L$. Определим означивания v_1 и v_2 в $\mathfrak{C}$, полагая

$$v_1p_1 = \neg x_0 \& w, \qquad v_2p_1 = \neg(x_0 \vee a_0),$$
$$v_1p_2 = x_0 \vee a_1, \qquad v_2p_2 = x_0,$$
$$v_1q_1 = w, \qquad v_2q_2 = w.$$

Тогда $\Box(v_1p_2 \supset w) = \Box(v_2p_1 \supset w) = \Box(a_0 \vee w) \leqslant w$, поэтому

$$1 = v_1(\Box A) \leqslant v_1C(p_1, p_2),$$
$$v_2C(p_1, p_2) \leqslant v_2B = v_2(p_1 \vee p_2) = \neg a_0 < 1.$$

Пусть $\mathfrak{C}_0 = (\neg a_1]_{\mathfrak{C}} = (a_0 \vee w]_{\mathfrak{C}}$, Φ_1, Φ_2 — ультрафильтры на $\mathbf{N}$, Φ_1 содержит множество четных, а Φ_2 — множество нечетных чисел. Определяем мономорфизмы $i_{\Phi_1}\colon \mathfrak{C}_0 \to \mathfrak{C}$ и $i_{\Phi_2}\colon \mathfrak{C}_0 \to \mathfrak{C}$ так, как в лемме 14. Определяем означивание v_0 в $\mathfrak{C}_0$:

$$v_0p_1 = \neg x_0 \& w, \quad v_0p_2 = x_0.$$

Тогда $i_{\Phi_1}v_0p_1 = v_1p_1$, $i_{\Phi_1}v_0p_2 = v_1p_2$, $i_{\Phi_2}v_0p_1 = v_2p_1$, $i_{\Phi_2}v_0p_2 = v_2p_2$. Отсюда $i_{\Phi_1}v_0C(p_1, p_2) = v_1C(p_1, p_2) = 1$, $i_{\Phi_2}v_0C(p_1, p_2) = v_2C(p_1, p_2) < 1$. Так как i_{Φ_1} и i_{Φ_2} — мономорфизмы, то $v_0C(p_1, p_2) = 1$ и $v_0C(p_1, p_2) < 1$. Получили противоречие. Следовательно, интерполянта $C(p_1, p_2)$ не существует. Предложение доказано.

Остановимся на семействе NE(G) нормальных расширений G. Логика G обладает ИСК [3] и имеет в качестве рефлексивного фрагмента логику Grz [9], обладающую ИСК [4]. Для любой $L \in \mathrm{NE}(\mathrm{G})$ имеем $r(L) \in \mathrm{NE}(\mathrm{Grz})$. Из результатов [5, 8] следует, что логика Grz имеет в точности 6 непротиворечивых расширений с ИСК, в том числе две бесконечнослойные логики Grz и Grz.2. В [7] доказано, что для любого обладающего ИСК расширения L логики Grz существует $L' \in \mathrm{NE}(\mathrm{G})$ такая, что L' также обладает ИСК и $r(L') = L$. Кроме того, в [7] замечено, что конечнослойные логики $G + \Box^n 0$ обладают ИСК, в то время как их рефлексивные фрагменты не имеют ИСВ. Мы покажем, что такие логики есть и в бесконечном слое.

Предложение 2. *В* NE(G) *существует бесконечное семейство бесконечнослойных логик с* ИСК, *у которых рефлексивные фрагменты различны и не обладают* ИСВ.

Доказательство. Рассмотрим следующую последовательность формул:

$$\varepsilon_k(X) = \Box^{k+2}0 \vee \boxdot(\Box 0 \supset X) \vee \boxdot(\Box 0 \supset \neg X), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Пусть $G\varepsilon_k = G + \varepsilon_k$. Имеем $G\varepsilon_0 \supseteq G\varepsilon_1 \supseteq \ldots$. Покажем, что $G\varepsilon_k$ обладает ИСК. Прежде всего заметим, что для любого k в G доказуемы формулы

$$\varepsilon_k(0), \ \varepsilon_k(\Box X), \ \varepsilon_k(X) \& \varepsilon_k(Y) \supset \varepsilon_k(X \supset Y).$$

Тогда с помощью индукции по построению формулы нетрудно доказать, что для любой формулы $B(X_1, \ldots, X_n)$ доказуема в G формула

$$\varepsilon_k(X_1) \& \ldots \& \varepsilon_k(X_n) \supset \varepsilon_k(B(X_1, \ldots, X_n)).$$

Отсюда следует, что для любой формулы $C(X_1, \ldots, X_n)$ из $G\varepsilon_k \vdash C(X_1, \ldots, X_n)$ следует

$$G \vdash \varepsilon_k(X_1) \& \ldots \& \varepsilon_k(X_n) \supset C(X_1, \ldots, X_n).$$

Пусть теперь $(A(p, q) \supset B(q, r)) \in G\varepsilon_k$. Тогда

$$G \vdash \varepsilon_k(p) \& \varepsilon_k(q) \& \varepsilon_k(r) \supset (A(p, q) \supset B(q, r)),$$
$$G \vdash \varepsilon_k(p) \& \varepsilon_k(q) \& A(p, q) \supset (\varepsilon_k(r) \supset B(q, r)).$$

Поскольку G обладает ИСК [3], то существует $C(q)$ такая, что

$$G \vdash \varepsilon_k(p) \& \varepsilon_k(q) \& A(p, q) \supset C(q),$$
$$G \vdash C(q) \supset (\varepsilon_k(r) \supset B(q, r)).$$

Отсюда

$$G\varepsilon_k \vdash A(p, q) \supset C(q), \quad G\varepsilon_k \vdash C(q) \supset B(q, r).$$

Таким образом, $G\varepsilon_k$ обладает ИСК для любого $k \geqslant 0$.

Пусть S — острая шкала, удовлетворяющая G, т. е. иррефлексивная, транзитивная шкала с обрывом возрастающих цепей. Тогда S удовлетворяет ε_k в том и только том случае, если $h(S) \leqslant k + 2$ или S имеет лишь один максимальный элемент.

Пусть S_k — острая шкала высоты $(k+2)$ с двумя максимальными элементами, удовлетворяющая G. Тогда неверно $S_k \vDash f(A_k)$, где

$$A_k \leftrightharpoons \Box \Diamond p \vee \Box \Diamond \neg p \vee \sigma_{k+1},$$
$$\sigma_0 \leftrightharpoons 0, \quad \sigma_{n+1} \leftrightharpoons \Box(p_{n+1} \vee \Box(p_{n+1} \supset \sigma_n)),$$

поэтому $f(A_k) \notin G\varepsilon_k$. С другой стороны, можно проверить, что $G \vdash \Box^{k+2}0 \supset f(\sigma_{k+2})$, $G \vdash \boxdot(\Box 0 \supset p) \supset \boxdot \Diamond p$, поэтому $G \vdash \varepsilon_k(p) \supset f(A_{k+1})$, а значит, $f(A_{k+1}) \in G\varepsilon_k$. Отсюда следует, что $A_{k+1} \in r(G\varepsilon_k) \setminus r(G\varepsilon_l)$ при $l > k$. Поэтому $r(G\varepsilon_k) \neq r(G\varepsilon l)$ при $k \neq l$.

Отметим, что любая логика $L \in NE(S4)$, обладающая ИСВ, удовлетворяет также условию: для любых формул A и B без общих переменных: $(\Box A \vee \Box B) \in L \Rightarrow (\Box A \in L$ или $\Box B \in L)$. Это условие нарушается в $r(G\varepsilon_k)$ для любого k. Действительно, как было замечено, $A_{k+1} \in r(G\varepsilon_k)$, однако $(\Box \Diamond p \vee \Box \Diamond \neg p) \notin r(G\varepsilon_k)$ и $\sigma_{k+2} \notin r(G\varepsilon_k)$. В самом деле, формула $\boxdot \Diamond p \vee \boxdot \Diamond \neg p$ опровергается в шкале S_0, удовлетворяющей $G\varepsilon_k$, а формула $f(\sigma_{k+2})$ опровергается в линейно упорядоченной иррефлексивной шкале из $(k+3)$ элементов, которая также удовлетворяет $G\varepsilon_k$. Таким образом, $r(G\varepsilon_k)$ не обладает ИСВ. Предложение доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Gabbay D.** Craig's interpolation theorem for modal logics // Conference in math. logic.— London, 70.— Berlin: Springer-Verlag, 1972.— P. 111—127.
2. **Fine K.** Failures of the interpolation lemma in quantified modal logic // J. Symb. Logic.— 1979.— Vol. 44.— N 2.— P. 201—206.
3. **Smorynski C.** Beth s theorem and self-referental sentences // Logic Colloq. 77.— Amsterdam, North-Holland, 1978.— P. 253—261.

4. **Boolos G.** On systems of modal logic with provability interpretations // Theoria.— 1980.— Vol. 46, N 1.— P. 7—18.
5. **Максимова Л. Л.** Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр // Алгебра и логика.— 1972.— Т. 18, № 5.— С. 556—586.
6. **Blok W. J.** Pretabular varieties of modal algebras // Stud. Logica.— 1980.— Vol. 39, N 2/3.— P. 101—124.
7. **Rautenberg W.** Modal tableau calculi and interpolation // J. Philos. Logic.— 1983.— V. 12.— P. 403—423.
8. **Максимова Л. Л.** Отсутствие интерполяционного свойства у модальных напарников логики Даммета // Алгебра и логика.— 1982.— Т. 21, № 6.— С. 690—694.
9. **Кузнецов А. В., Муравицкий А. Ю.** Доказуемость как модальность/Актуальные проблемы логики и методологии науки.— Киев: Наук. думка, 1980.— С. 193—229.
10. **Jonsson B., Tarski A.** Boolean algebras with operators // Amer. J. Math.— 1951.— Vol. 73.— P. 891—939.
11. **Месхи В. Ю.** Алгебраический анализ модальных фрагментов временных логик // Логика, семантика, методология.— Тбилиси: Мецниереба, 1978.— С. 113—124.
12. **Максимова Л. Л.** Предтабличные расширения логики S4 Льюиса // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 1.— С. 28—55.
13. **Segelberg K.** An essay in classical modal logic.— Uppsala, 1971.
14. **Максимова Л. Л.** Модальные логики конечных слов // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 5.— С. 304—319.
15. **Czelakowski J.** Logical matrices and the amalgamation property // Stud. Logica.— 1982.— Vol. 41, N 4.— P. 329—341.
16. **Рыбаков В. В.** Модальные логики с LM-аксиомами // Алгебра и логика.— 1978.— Т. 17, № 4.— С. 455—467.
17. **Fine K.** Logics containing K4. I // J. Symb. Logic.— 1974.— Vol. 39, N 1.— P. 31—42.

А. С. МОРОЗОВ

О ТЕОРИЯХ КЛАССОВ ГРУПП РЕКУРСИВНЫХ ПЕРЕСТАНОВОК

Изучаются элементарные теории различных классов групп рекурсивных перестановок натурального ряда. Удается показать, что некоторые из этих групп можно охарактеризовать одним предложением в классе всех групп рекурсивных перестановок. Теории таких групп оказываются весьма сложными — это дает возможность получить высокие оценки алгоритмической сложности для теорий некоторых классов групп. В наиболее интересных случаях эти оценки оказываются точными.

В работе доказывается, что множество гёделевых номеров предложений теории конструктивизируемых групп, а также теории групп рекурсивных автоморфизмов, рекурсивно изоморфны арифметике, и, таким образом, имеют тьюрингову сложность $0^{(\omega)}$. Кроме этого доказывается, что эти две теории различны. Получена оценка сложности и для теории всех групп рекурсивных перестановок — множество гёделевых номеров ее предложений есть Π^1_1— полное множество.

Как следствие получается, что все эти теории не могут быть аксиоматизируемы арифметическим множеством аксиом. Отсюда мы получаем «групповой» аналог результата Воота [1]: существует предложение, совместное с теорией групп, но не выполненное ни на одной конструктивизируемой группе (фактически ни на одной группе рекурсивных перестановок). Доказывается также невозможность описать класс всех групп рекурсивных автоморфизмов, как класс всех d-конструктивизируемых групп для подходящей T-степени d.

Методы, используемые в работе,— это результат последовательного развития автором методов Дж. Д. Монка, Р. Мак-Кинзи и др. (см., например, [2]). Приводится некоторая теоретико-модельная характеризация класса всех групп рекурсивных автоморфизмов конструктивных моделей.