4. **Boolos G.** On systems of modal logic with provability interpretations // Theoria.— 1980.— Vol. 46, N 1.— P. 7—18.
5. **Максимова Л. Л.** Интерполяционные теоремы в модальных логиках и амальгамируемые многообразия топобулевых алгебр // Алгебра и логика.— 1972.— Т. 18, № 5.— С. 556—586.
6. **Blok W. J.** Pretabular varieties of modal algebras // Stud. Logica.— 1980.— Vol. 39, N 2/3.— P. 101—124.
7. **Rautenberg W.** Modal tableau calculi and interpolation // J. Philos. Logic.— 1983.— V. 12.— P. 403—423.
8. **Максимова Л. Л.** Отсутствие интерполяционного свойства у модальных напарников логики Даммета // Алгебра и логика.— 1982.— Т. 21, № 6.— С. 690—694.
9. **Кузнецов А. В., Муравицкий А. Ю.** Доказуемость как модальность/Актуальные проблемы логики и методологии науки.— Киев: Наук. думка, 1980.— С. 193—229.
10. **Jonsson B., Tarski A.** Boolean algebras with operators // Amer. J. Math.— 1951.— Vol. 73.— P. 891—939.
11. **Месхи В. Ю.** Алгебраический анализ модальных фрагментов временных логик // Логика, семантика, методология.— Тбилиси: Мецниереба, 1978.— С. 113—124.
12. **Максимова Л. Л.** Предтабличные расширения логики S4 Льюиса // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 1.— С. 28—55.
13. **Segelberg K.** An essay in classical modal logic.— Uppsala, 1971.
14. **Максимова Л. Л.** Модальные логики конечных слов // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 5.— С. 304—319.
15. **Czelakowski J.** Logical matrices and the amalgamation property // Stud. Logica.— 1982.— Vol. 41, N 4.— P. 329—341.
16. **Рыбаков В. В.** Модальные логики с *LM*-аксиомами // Алгебра и логика.— 1978.— Т. 17, № 4.— С. 455—467.
17. **Fine K.** Logics containing K4. I // J. Symb. Logic.— 1974.— Vol. 39, N 1.— P. 31—42.

А. С. МОРОЗОВ

О ТЕОРИЯХ КЛАССОВ ГРУПП РЕКУРСИВНЫХ ПЕРЕСТАНОВОК

Изучаются элементарные теории различных классов групп рекурсивных перестановок натурального ряда. Удается показать, что некоторые из этих групп можно охарактеризовать одним предложением в классе всех групп рекурсивных перестановок. Теории таких групп оказываются весьма сложными — это дает возможность получить высокие оценки алгоритмической сложности для теорий некоторых классов групп. В наиболее интересных случаях эти оценки оказываются точными.

В работе доказывается, что множество гёделевых номеров предложений теории конструктивизируемых групп, а также теории групп рекурсивных автоморфизмов, рекурсивно изоморфны арифметике, и, таким образом, имеют тьюрингову сложность $0^{(\omega)}$. Кроме этого доказывается, что эти две теории различны. Получена оценка сложности и для теории всех групп рекурсивных перестановок — множество гёделевых номеров ее предложений есть Π_1^1— полное множество.

Как следствие получается, что все эти теории не могут быть аксиоматизируемы арифметическим множеством аксиом. Отсюда мы получаем «групповой» аналог результата Воота [1]: существует предложение, совместное с теорией групп, но не выполненное ни на одной конструктивизируемой группе (фактически ни на одной группе рекурсивных перестановок). Доказывается также невозможность описать класс всех групп рекурсивных автоморфизмов, как класс всех d-конструктивизируемых групп для подходящей T-степени d.

Методы, используемые в работе,— это результат последовательного развития автором методов Дж. Д. Монка, Р. Мак-Кинзи и др. (см., например, [2]). Приводится некоторая теоретико-модельная характеризация класса всех групп рекурсивных автоморфизмов конструктивных моделей.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Группы рекурсивных перестановок — естественный класс групп, куда попадают, например, все группы рекурсивных автоморфизмов конструктивных моделей, а также все конструктивизируемые группы, в частности группы матриц над полем рациональных чисел, свободные группы и другие, интенсивно изучаемые виды групп. (Все математические понятия, используемые в работе, содержатся в [3, 4].)

С другой стороны, рекурсивные перестановки — это один из видов симметрии, связанных с понятием алгоритма, которое интенсивно изучается в современной математике. Работы в этом направлении показывают, что свойства рекурсивных симметрий часто напоминают свойства обычных симметрий, однако эти симметрии обладают и рядом специфических свойств. Так, модель может иметь континуум автоморфизмов и не иметь ни одного нетривиального рекурсивного автоморфизма [5]. Два элемента модели могут быть изоморфными, но не рекурсивно изоморфными ни в одной конструктивизации этой модели [6]. Группа всех рекурсивных автоморфизмов часто может определять не только тип изоморфизма, но и тип рекурсивного изоморфизма [7]. Имеются также интересные результаты о нормальном строении групп рекурсивных перестановок [8]. Полученные результаты позволяют считать перспективным изучение этого класса.

Перейдем к обозначениям и определениям. Знак «$\rightleftharpoons$» будет обозначать «это есть по определению». Мы будем использовать в работе некоторые стандартные теоретико-групповые сокращения:

$$[x, y] \rightleftharpoons x^{-1}y^{-1}xy, \quad x^y \rightleftharpoons y^{-1}xy.$$

С понятием конструктивной модели можно познакомиться по [3]. Автоморфизм φ конструктивной модели $(\mathfrak{M}, \nu)$ называется *рекурсивным*, если существует такая общерекурсивная функция f, что $\varphi\nu = \nu f$. Пусть $A_r\omega$ — группа всех рекурсивных перестановок ω, а $S(A_r\omega)$ — класс всех ее подгрупп. Функции c^n: $\omega^n \to \omega$ и $r_i^n : \omega \to \omega$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — *канторовские примитивно рекурсивные функции свертки и развертки*:

$$c^n(r_1^n(x), \ldots, r_n^n(x)) = x \text{ и } r_i^n(c^n(x_1, \ldots, x_n)) = x_i.$$

Мы предполагаем также фиксированной некоторую гёделеву нумерацию всех формул в используемых в работе сигнатурах. Остальные обозначения и определения будут введены по ходу работы.

Наша цель — получить возможность говорить о вычислимости на языке теории групп. Для этого мы выделим некоторый подкласс в классе всех групп. Он окажется конечно аксиоматизируемым и содержащим некоторые конструктивизируемые группы. Нам понадобится некоторый класс групп, параметризуемый множествами $X \subseteq \omega$.

Назовем перестановку σ на ω *почти периодической*, если существуют такие $m > 0$, $t > 0$, что $\forall x (x > m \to \sigma(x+t) = \sigma(x) + t)$. Наименьшее среди всех таких $t > 0$, мы назовем *периодом* σ.

Пусть p_i — i-е простое число. Для $X \subseteq \omega$ определим $G_X = \{f | f$ — почти периодическая перестановка такая, что если p_{i+1} делит период f, то $i \in X\}$. Легко проверить, что G_X является подгруппой группы всех рекурсивных перестановок ω. Заметим также, что все перестановки, передвигающие конечное число элементов, лежат в G_X.

§ 2. ОСНОВНАЯ КОНСТРУКЦИЯ

Перейдем к описанию нашего класса групп. При изложении системы аксиом мы не будем стараться получить минимальную или независимую систему аксиом, а попытаемся исходить из соображений наибольшей простоты и наглядности. Обозначим

$$\mathrm{tr}(x) \rightleftharpoons \neg(x=1) \& (x^2=1) \& \forall y([x, y]^6 = 1).$$

А к с и о м а ψ_0: $\exists x\,\mathrm{tr}(x)$.

Покажем, что $G_X \vDash \psi_0$. Пусть $a=(0,\ 1)$ (т. е. a меняет местами 0 и 1, а остальные элементы оставляет на месте). Тогда для всех $y \in G_X$

$$[a,\ y]^6 = (a\cdot a^y)^6 = ((0,\ 1)\cdot(y(0),\ y(1)))^6 = 1.$$

Можно доказать, что если $G_X \vDash \mathrm{tr}[a]$, то при этом a обязательно имеет вид $(a_0,\ a_1)$, где $a_0, a_1 \in \omega$. Доказательство фактически повторит аналогичное доказательство из [2].

Если $G \vDash \mathrm{tr}[a]$, то элемент a назовем *транспозицией* G. Это название оправдывается приведенными выше рассуждениями.

Введем новые сокращения:

$$P(x,\ y) \leftrightharpoons \mathrm{tr}(x) \,\&\, \mathrm{tr}(y) \,\&\, [x,\ y] \neq 1,$$

$$E(x_0, x_1, y_0, y_1) \leftrightharpoons \mathop{\&}_{i,j=0,1} (x_i y_j)^3 = 1 \,\&\, \mathop{\&}_{i,j=0,1} \big((x_i = y_j \,\&\, x_{1-i} \neq y_{1-j}) \to$$
$$\to x_{1-i} \neq x_i^{-1} y_{1-j} x_i\big).$$

Заметим, что $G_0 \vDash P[a,\ b]$ тогда и только тогда, когда a и b — транспозиции, у которых имеется общий передвигаемый элемент. Кроме этого,

$$G_0 \vDash P[a_0,\ b_0] \,\&\, P[a_1,\ b_1] \,\&\, E[a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1]$$

выполняется тогда и только тогда, когда общие передвигаемые элементы у пар транспозиций $\langle a_0,\ b_0\rangle$ и $\langle a_1,\ b_1\rangle$ совпадают.

А к с и о м а ψ_1: $\exists x \exists y P(x,\ y)$.

А к с и о м а ψ_2: $\forall x_0 y_0 x_1 y_1 x_2 y_2 \left(\mathop{\&}_{i=0}^{2} P(x_i,\ y_i)\right) \to [(E(x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1) \,\&$
$\&E(x_1,\ y_1,\ x_2,\ y_2) \to E(x_0,\ y_0,\ x_2,\ y_2)))\&E(x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1) \to E(x_1,\ y_1,\ x_0,\ y_0)]$.

Если произвольная группа G удовлетворяет предложению $\psi_0 \,\&\, \psi_1 \,\&\, \psi_2$, то согласно ψ_2 отношение $E(x_0,\ y_0,\ x_1,\ y_1)$ задает эквивалентность на непустом (по ψ_1) множестве $\{\langle x,\ y\rangle \in G^2 | G \vDash P(x,\ y)\}$. Действительно, рефлексивность этого отношения легко следует из определения E, а аксиома ψ_2 утверждает его транзитивность и симметричность.

Получившееся фактор-множество множества $\{\langle x,\ y\rangle \in G^2 | G \vDash P(x,\ y)\}$ по этому отношению мы обозначим A_G. Легко видеть, что $G_X \vDash \mathop{\&}_{i=0}^{2} \psi_i$, так как элементы множества A_{G_X} можно отождествить с натуральными числами ввиду того, что пара транспозиций $\langle x,\ y\rangle$ такая, что $[x,\ y] \neq 1$ однозначно задает натуральное число, которое передвигается как x, так и y.

Пусть $G \vDash \mathop{\&}_{i=0}^{2} \psi_i$. Зададим действие группы G на A_G следующим образом: элементу $g \in G$ и классу эквивалентности $[\langle x,\ y\rangle]$, определяемому парой $\langle x,\ y\rangle$, мы сопоставим класс $\mathrm{ap}(g,\ [\langle x,\ y\rangle]) = [\langle x^g,\ y^g\rangle]$. Это определение, очевидно, корректно, так как групповое сопряжение является автоморфизмом.

Заметим, что в случае $G = G_X$, если элементу $a \in A_G$ соответствует число m (общий передвигаемый элемент), то элементу $\mathrm{ap}(g,\ a)$ соответствует число $g(m)$.

Пусть $G \vDash \mathop{\&}_{j=0}^{2} \psi_j$. Рассмотрим двусортную модель $\mathfrak{M}_G = \langle G,\ A_G,\ \mathrm{ap},\ \circ\rangle$. Из наших построений следует

Лемма 1. *Если $G \vDash \mathop{\&}_{j=0}^{2} \psi_j$, то $\mathfrak{M}_G$ элементарно определима в G формулами без параметров.*

Ввиду этой леммы по всякой формуле $\varphi(\bar{x})$ языка модели $\mathfrak{M}_G$, в которой все переменные $\bar{x}$ имеют тип G, можно построить формулу $\varphi^*(\bar{x})$ групповой сигнатуры такую, что для любого набора $\bar{g}$ элементов G выполнено $\mathfrak{M}_G \models \varphi[\bar{g}] \Leftrightarrow G \models \varphi^*[\bar{g}]$. Зафиксируем некоторую операцию $*$, обладающую вышеупомянутым свойством.

В дальнейшем мы будем писать $g(a)$ вместо $\mathrm{ap}(g, a)$. Буквы a, b, x, ... мы будем использовать для обозначения элементов множества A_G, а буквы f, g, h, ...— элементов множества G. Будем также широко использовать следующие сокращения и обозначения: для $f \in G$

$$\mathrm{sp}(f) \leftrightharpoons \{a \in A_G \mid f(a) \neq a\} \text{ — носитель } f,$$

$$\mathrm{st}(f) \leftrightharpoons \{a \in A_G \mid f(a) = a\} \text{ — стабилизатор } f,$$

$$x \in \mathrm{st}(f) \leftrightharpoons f(x) = x, \quad x \in \mathrm{sp}(f) \leftrightharpoons f(x) \neq x, \quad x \notin \mathrm{sp}(f) \leftrightharpoons f(x) = x,$$

$$\mathrm{st}(f) \subseteq \mathrm{st}(g) \leftrightharpoons \forall x (f(x) = x \to g(x) = x)$$

и т. п.

Аксиома ψ_3: $[\forall g (\forall x (g(x) = x) \to g = 1)]^*$.

Эта аксиома утверждает, что действие G на A_G точное, т. е. любой элемент однозначно определен своим действием на множестве A_G. Остается заметить, что для всех $X \subseteq \omega$ имеем $G_X \models \psi_3$.

Теперь можно рассматривать группу G, удовлетворяющую аксиомам $\psi_0 - \psi_3$, как подгруппу группы перестановок множества A_G.

Аксиома ψ_4 (аксиома бесконечности): $[\exists f \exists g \exists h (\mathrm{st}(h) \subset \mathrm{st}(g) \& \neg \neg (\mathrm{st}(g) \subset \mathrm{st}(h)) \& \forall x (x \in \mathrm{st}(g) \leftrightarrow f(x) \in \mathrm{st}(h)))]^*$.

Эта аксиома утверждает, что для некоторых g и h из G множество $\mathrm{st}(g)$ эквивалентно собственному подмножеству $\mathrm{st}(h)$. Поэтому следующая лемма очевидна.

Лемма 2. *Пусть* $G \models \underset{j=0}{\overset{4}{\&}} \psi_j$. *Тогда множество* A_G *бесконечно и, следовательно,* G *— бесконечная группа.*

Лемма 3. *Для всех* $X \subseteq \omega$ *справедливо* $G_X \vdash \psi_4$.

Доказательство. Определим g_0, g_1, $h_0 \in G_X$ так:

$$g_0(2m) = 2m+1, \quad g_0(2m+1) = 2m, \quad g_1(2m+2) = 2m+1,$$

$$g_1(2m+1) = 2m+2, \quad h_0(4m+1) = 4m+3, \quad h_0(4m+3) = 4m+1$$

при $m \geqslant 0$, а на остальные элементы g_0, g_1 и h_0 действуют тождественно. Поскольку периоды g_0, g_1 равны 2, а у h_0 период равен 4, то g_0, g_1, $h_0 \in G_X$. В качестве g выберем элемент h_0, в качестве h — элемент $h_0 \cdot (0, 3)$, а в качестве f — элемент $g_1 g_0$. Тогда f взаимно однозначно отображает $\mathrm{st}(g) = \mathrm{st}(h_0) = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ на $\mathrm{st}(h) = \mathrm{st}((0, 3) \cdot h_0) = \{2, 4, 6, \ldots\}$. Лемма доказана.

Аксиома ψ_5: $[\forall a \forall b (a \neq b \to \exists f (\mathrm{tr}(f) \& \forall z \quad f(z) \neq z \leftrightarrow (z = a \vee z = b)))]^*$.

Аксиома ψ_6: $\forall x \forall y (\mathrm{tr}(x) \& \mathrm{tr}(y) \to \exists z (x = y^z))$.

Аксиомы ψ_5 и ψ_6 в сочетании с предыдущими обеспечат нам, что транспозиции — это те и только те элементы G, которые передвигают ровно два элемента A_G, и любые два различных элемента A_G определяют некоторую транспозицию. Из этого следует, что для любой перестановки π множества A_G такой, что множество $\{a \in A_G \mid \pi(a) \neq a\}$ конечно, найдется такой элемент $g \in G$, что действие g на A_G совпадает с действием π.

Очевидно, что $G_X \models \psi_5 \& \psi_6$ для всех $X \subseteq \omega$.

Аксиома ψ_7 (аксиома дополнения): $[\forall f ((\exists x \exists y (x \neq y \& x \in \mathrm{st}(f) \& \& y \in \mathrm{st}(f))) \to \exists g \forall x (x \in \mathrm{st}(f) \longleftrightarrow x \notin \mathrm{st}(g)))]^*$.

Другими словами, если $|\mathrm{st}(f)| > 1$, то существует g такое, что $\mathrm{st}(f) \cup \mathrm{st}(g) = A_G$, но $\mathrm{st}(f) \cap \mathrm{st}(g) = \varnothing$. Легко видеть, что $G_X \models \psi_7$ для всех $X \subseteq \omega$

формула

$$\mathrm{fin}(f) \leftrightharpoons [\neg \exists g h s (\mathrm{sp}(g) \subset \mathrm{sp}(h) \& \mathrm{sp}(h) \subset \mathrm{sp}(f) \& \\ \& \neg (\mathrm{sp}(h) \subset \mathrm{sp}(g)) \& s(\mathrm{sp}(h)) = \mathrm{sp}(g)]^*$$

выделяет такие элементы $g \in G$, у которых множество $\mathrm{sp}(f)$ «конечно» с точки зрения группы G. Как показывает следующая лемма, в группе G_X это обычная конечность.

Лемма 4. *Для всех* $X \subseteq \omega$ *имеем* $G_X \models \mathrm{fin}[f] \Leftrightarrow |\mathrm{sp}(f)| < \omega$.

Предположим, что $G_X \models \mathrm{fin}[f]$, но $\mathrm{sp}(f)$ бесконечно. Поскольку f почти периодическая, пусть m есть ее период. Существует число m_0 такое, что $\{m_0 + mt | t < \omega\} \subseteq \mathrm{sp}(f)$. Рассмотрим перестановки h, g и s, определенные так:

$$h(m_0 + 4mt) \Leftrightarrow m_0 + 4mt + 2m, \quad h(m_0 + 4mt + 2m) \Leftrightarrow m_0 + 4mt$$

при $t \geqslant 0$ и $h(n) \Leftrightarrow n$ в остальных случаях;

$$g(m_0 + 4mt + 2m) \Leftrightarrow m_0 + 4mt + 4m, \quad g(m_0 + 4mt + 4m) \Leftrightarrow m_0 + 4mt + 2m$$

при $t \geqslant 0$ и $g(n) \Leftrightarrow n$ в остальных случаях;

$$s(m_0 + 2mt) \Leftrightarrow m_0 + 2mt + 2m, \quad s(m_0 + m) \Leftrightarrow m_0,$$
$$s(m_0 + m + 2mt + 2m) \Leftrightarrow m_0 + 2mt + m$$

при $t \geqslant 0$ и $s(n) \Leftrightarrow n$ в остальных случаях.

Поскольку в периодах перестановок h, g и s содержатся простые множители из периода f, а также $p_0 = 2$, то легко видеть, что h, g, $s \in \in G_X$. Непосредственная проверка показывает, что g, h и s удовлетворяют условию $\mathrm{sp}(g) \underset{\neq}{\subset} \mathrm{sp}(h) \subset \mathrm{sp}(f) \,\&\, s(\mathrm{sp}(h)) = \mathrm{sp}(g)$, что противоречит чит предположению о том, что $G_X \models \mathrm{fin}[f]$. В обратную сторону доказательство очевидно. Лемма доказана.

Заметим, что если $G \models \underset{i=1}{\overset{6}{\&}} \psi_i$ и f есть произведение конечного числа транспозиций, то $G \models \mathrm{fin}[f]$. Обозначим через $N(v_0, v_1)$ следующую формулу:

$$v_0^2 = 1 \,\&\, v_1^2 = 1 \,\&\, \exists^1 x(v_1(x) = x) \,\&\, \forall x(v_0(x) \neq (x) \,\&\, \urcorner \exists f(\mathrm{fin}(f) \,\&$$
$$\&\, \exists x(x \in \mathrm{sp}(f)) \,\&\, v_0(\mathrm{sp}(f)) \subseteq \mathrm{sp}(f) \,\&\, v_1(\mathrm{sp}(f)) \subseteq \mathrm{sp}(f).$$

(Здесь $\exists^1 x$ означает «существует единственный $x \ldots$».) Пусть $G \models \underset{j=0}{\overset{7}{\&}} \psi_j$ и $G \models N^*[g_0, g_1]$. Тогда для любого элемента A_G его орбита при действии g_0 и g_1 будет бесконечной, и единственная среди этих орбит будет иметь вид $\{a_0, g_0(a_0), g_1, g_0(a_0), g_0g_1g_0(a_0), \ldots\}$, где $g_1(a_0) = a_0$ и все перечисленные в фигурных скобках элементы различны. Орбиты элементов A_G при действии g_0 и g_1 — это «заготовка» основного множества для модели арифметики.

Заметим, что g_0 и g_1 из G_X, описанные в доказательстве леммы 3, удовлетворяют формуле N и орбита при действии этими элементами получается всего одна.

Определим еще одну формулу от x, y, v_0, v_1, которую мы будем обозначать $x <_{v_0 v_1} y$:

$$x <_{v_0 v_1} y \Leftrightarrow \urcorner(x = y) \,\&\, \forall f([\exists u(u \in \mathrm{st}(v_1) \cap \mathrm{sp}(f) \,\&\, y \in \mathrm{sp}(f) \,\&$$
$$\forall z((z \neq y \,\&\, z \in \mathrm{sp}(f) \to$$

$(v_0(z) \in \mathrm{sp}(f) \,\&\, v_1(z) \in \mathrm{sp}(f)))] \to x \in \mathrm{sp}(f))$.

Пусть g_0 и g_1 — определенные как выше элементы группы G_0. Тогда для любых x, $y \in A_{G_X}$ условие $G_X \models x <_{g_0 g_1} y$ выполняется тогда и только тогда, когда x встречается прежде, чем y в перечислении a_0, $g_0(a_0)$, $g_1g_0(a_0)$, $g_0g_1g_0(a_0)$, $\ldots$, где a_0 таков, что $g_1(a_0) = a_0$.

Если $G \models \underset{j=0}{\overset{7}{\&}} \psi_j$, то $G \models N^*[g_0, g_1] \,\&\, x <_{g_0 g_1} y$, где x и y принадлежат орбите неподвижного элемента a_0 для g_1, тогда и только тогда, когда x встречается прежде, чем y в перечислении a_0, $g_0(a_0)$, $g_1g_0(a_0)$, $\ldots$, т. е. формула $x <_{g_0g_1} y$ определяет нечто, похожее на порядок на натуральных числах.

Определим

$$S(x, y, g_0, g_1) \leftrightharpoons x <_{g_0g_1} y \,\&\, \neg\exists z\left(x <_{g_0g_1} z \,\&\, z <_{g_0g_1} y\right).$$

Эта формула определяет отношение, которое на орбите

$$\{a_0 <_{g_0g_1} g_0(a_0) <_{g_0g_1} g_1g_0(a_0) <_{g_0g_1} g_0g_1g_0(a_0) \dots\},$$

где $g_1(a_0) = a_0$, дает операцию взятия непосредственно следующего элемента.

Теперь определим формульно аналоги операций сложения и умножения:

$$\varphi_+(x, y, z, v_0, v_1) \leftrightharpoons \exists f(\exists t(v_1(t) = z \,\&\, f\ (t) = x) \,\&\, \forall t(t <_{v_0v_1} y \to$$
$$\to \exists q(S(t, q, v_0, v_1) \,\&\, S(f(t), f(q), v_0, v_1)) \,\&\, \&\, (y) = z),$$
$$\varphi_\cdot(x, y, z, v_0, v_1) \leftrightharpoons \exists f(\exists t(v_1(t) = t \,\&\, f(t) = t) \,\&\, \forall t\left(t <_{v_0v_1} y \to\right.$$
$$\to \exists q(S(t, q, v_0, v_1) \,\&\, \varphi_+(f(t), x, f(q), v_0, v_1))) \,\&\, f(y) = z).$$

Лемма 5. *Пусть* $G \models \underset{j=0}{\overset{7}{\&}} \psi_j \,\&\, N^*[g_0, g_1]$, a_0 *таков, что* $g_1(a_0) = a_0$, s — *операция следования на упорядоченном множестве* $\{a_0 <_{g_0g_1} g_0(a_0) < <_{g_0g_1} g_0g_1(a_0) \dots\}$. Тогда для любых $m, n, k < \omega$

1) $\mathfrak{M}_G \models s^m(a_0) <_{g_0g_1} s^n(a_0) \Leftrightarrow m < n$,
2) $\mathfrak{M}_G \models S[s^m(a_0), s^n(a_0), g_0, g_1] \Leftrightarrow m + 1 = n$,
3) $\mathfrak{M}_G \models \varphi_+[s^m a_0), s^n(a_0), s^k(a_0), g_0, g_1] \Leftrightarrow m + n = k$.
4) $\mathfrak{M}_G \models \varphi_\cdot[s^m(a_0), s^n(a_0), s^k(a_0), g_0, g_1] \Leftrightarrow m \cdot n = k$.

Доказательство очевидно.

Пусть $\mathrm{oper}(v_0, v_1) \leftrightharpoons \forall xy\exists^1 z\varphi_+(x, y, z, v_0, v_1) \,\&\, \forall xy\exists^1 z\varphi_\cdot(x, y, z, v_0, v_1) \,\&\, \forall x\exists^1 zS(x, z, v_0, v_1)$. Если $G \models \underset{j=0}{\overset{7}{\&}} \psi_j \,\&\, N^*[g_0, g_1] \,\&\, \mathrm{oper}^*[g_0, g_1]$, то в G элементарно определима с параметрами g_0 и g_1 модель $\mathfrak{N}_G^{g_0g_1} \leftrightharpoons \langle G; A_G; s_{g_0g_1}, +_{g_0g_1}, \bullet_{g_0g_1}, 0_{g_0g_1}, <_{g_0g_1}, \mathrm{ap}, \circ\rangle$, где операции $s_{g_0g_1}$, $+_{g_0g_1}$, $\bullet_{g_0g_1}$ задаются соответственно формулами s, φ_+, $\varphi_\cdot$, $0_{g_0g_1}$ определяется, как решение уравнения $g_1(x) = x$, а отношение $<_{g_0g_1}$ задается формулой $x <_{g_0g_1} y$. Заметим при этом, что начальный сегмент $\{0_{g_0g_1}, g_0(0_{g_0g_1}), g_1g_0(0_{g_0g_1}), \dots\}$ замкнут относительно операций $s_{g_0g_1}$, $+_{g_0g_1}$, $\bullet_{g_0g_1}$, $0_{g_0g_1}$ и образует стандартную модель арифметики.

В дальнейшем мы будем опускать индексы $_{g_0g_1}$, так как всегда из контекста будет понятно, о каких операциях идет речь.

Заметим, что по всякой формуле $\varphi(\bar{x})$ с переменными типа G языка модели $\mathfrak{N}_G^{g_0g_1}$ эффективно строится формула $\varphi^\wedge(\bar{x}, v_0, v_1)$ группового языка такая, что для любых $\bar{f} \in G$ справедливо

$$\mathfrak{N}_G^{g_0g_1} \models \varphi[\bar{f}] \Leftrightarrow G \models \varphi^\wedge[\bar{f}, v_0, v_1].$$

Для удобства мы будем считать, что операция $\wedge$ является расширением операции $*$. В дальнейшем мы будем обозначать эту операцию тем же символом $*$.

Рассмотрим следующий список из 9 аксиом в сигнатуре $\sigma = \langle s, +, \cdot, 0, <\rangle$:

A1: $s(x) \neq 0$,	A5: $x \cdot 0 = 0$,
A2: $s(x) = s(y) \to x = y$,	A6: $x \cdot s(y) = x \cdot y + x$,
A3: $x + 0 = x$,	A7: $\neg(x < 0)$,
A4: $x + s(y) = s(x + y)$,	A8: $x < s(y) \leftrightarrow x < y \vee x = y$,

A9: $(x<y \vee x=y \vee y<x) \& (x<y \& y<z \rightarrow x<z) \& \urcorner (x \subset x)$.

Пусть формула Ar языка модели $\mathfrak{N}_G^{g_0g_1}$ утверждает, что на $\langle A_G, s_{g_0g_1}, +_{g_0g_1}, \cdot_{g_0g_1}, 0_{g_0g_1}, \langle_{g_0g_1}\rangle$ выполнены универсальные замыкания аксиом A1 — A9.

Теперь мы, наконец, можем ввести аксиому ψ_8:

Аксиома ψ_8: $\exists v_0 v_1 [N(v_0, v_1) \& \operatorname{oper}(v_0, v_1) \& \mathrm{Ar}^*(v_0, v_1)]^*$.

Легко видеть, что $G_X \models \psi_8$, так как в качестве v_0 и v_1 можно взять g_0 и g_1, определенные при описании группы G_X, и в этом случае $\langle A_G, s_{g_0g_1}, \ldots \rangle$ изоморфна стандартной модели арифметики.

Пусть теперь $G \models \mathop{\&}\limits_{j=0}^{8} \psi_j$. Возьмем в G такие элементы g_0 и g_1, что

$$\mathfrak{M}_G \models [N[g_0, g_1] \& \operatorname{oper}[g_0, g_1] \& \mathrm{Ar}^*[g_0, g_1]]^*.$$

Обозначим формулу $[N(v_0, v_1) \& \operatorname{oper}(v_0, v_1) \& \mathrm{Ar}^*(v_0, v_1)]^*$ через $N_0(v_0, v_1)$. Следующая лемма играет решающую роль в последующих результатах.

Лемма 6. *Пусть* $G \models \mathop{\&}\limits_{j=0}^{s} \psi_j$, $G \models N_0[g_0, g_1]$ *и* $G \leqslant A_r\omega$. *Тогда для любого элемента* $f \in G$ *множество* $\{k \mid s_{g_0g_1}^k(0_{g_0g_1}) \in \operatorname{st}(f)\}$ *рекурсивно.*

Доказательство. С самого начала можно считать, что дополнение множества, о котором говорится в лемме, бесконечно. Определим последовательность $(\tau_j)_{j<\omega}$ элементов из G следующим образом: пусть τ_0 будет транспозицией, переставляющей в точности $0_{g_0g_1}$ и $s(0_{g_0g_1})$ из A_G (как элемент $A_r\omega$ он может действовать совершенно по-другому); если элемент τ_n уже определен, то τ_{n+1} определяется так:

$$\tau_{n+1} \leftrightharpoons \begin{cases} \tau_n^{g_0\tau_0}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \tau_n^{g_1}, & \text{если } n \text{ четно,} \end{cases}$$

где g_0 и g_1 берутся такие, как в аксиоме ψ_8.

Пусть q — общерекурсивная функция, выдающая по i клиниевский номер τ_i, как рекурсивной функции из $A_r\omega$. Как легко видеть, τ_i переставляет в точности $0_{g_0g_1}$ и $s^{i+1}(0_{g_0g_1})$ из A_G.

Пусть $f(0_{g_0g_1}) = s_{g_0g_1}^m(0_{g_0g_1})$ и $\sigma \in G$ однозначно определяется следующим условием:

$$\sigma(x) \leftrightharpoons \begin{cases} s_{g_0g_1}^m(0_{g_0g_1}), & \text{если } x = 0, \\ 0_{g_0g_1}, & \text{если } x = s_{g_0g_1}^m(0_{g_0g_1}), \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко видеть, что $\sigma f(0_{g_0g_1}) = 0_{g_0g_1}$ и $\operatorname{st}(f)$ отличается от $\operatorname{st}(\sigma f)$ на конечное число элементов. Сначала докажем, что $\{k \mid s_{g_0g_1}^k(0_{g_0g_1}) \in \operatorname{st}(\sigma f)\} \in \Pi_1^0$. Пусть общерекурсивная функция k выдает по j клиниевский номер функции $\tau_j^{\sigma f}$, т. е. $\varkappa_{k(j)} = \tau_j^{\sigma f}$, где $\varkappa$ — клиниевская нумерация частично рекурсивных функций [9]. Имеем цепочку эквивалентностей для $j \in \omega$:

$$s^j(0_{g_0g_1}) \in \operatorname{st}(\sigma f) \leftrightarrow \sigma f(s_{g_0g_1}^j(0_{g_0g_1})) = s_{g_0g_1}^j(0_{g_0g_1}) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (j = 0 \vee \tau_{j \dot- 1}^{\sigma f} = \tau_{j \dot- 1}) \leftrightarrow (j = 0 \vee \varkappa_{k(j \dot- 1)} = \varkappa_{q(j \dot- 1)}) \leftrightarrow$$

$$\forall t\, (j = 0 \vee \varkappa_{k(j \dot- 1)}(t) = \varkappa_{q(j \dot- 1)}(t)),$$

так как $k(j \dot- 1)$ и $q(j \dot- 1)$ — номера рекурсивных функций. Поскольку $\operatorname{st}(\sigma f)$ и $\operatorname{st}(f)$ почти совпадают, $\{k \mid s_{g_0g_1}^k(0_{g_0g_1}) \in \operatorname{st}(f)\} \in \Pi_1^0$. Рассмотрим элемент $f_1 \in G$ такой, что $\mathrm{st}(f) \cup \mathrm{st}(f_1) = A_G$ и $\mathrm{st}(f) \cap \mathrm{st}(f_1) = \varnothing$, существующий по аксиоме ψ_7. Аналогично для f_1 устанавливается, что $\{k \mid s^k_{g_0 g_1}(0_{g_0 g_1}) \in \mathrm{st}(f_1)\} \in \Pi^0_1$. По теореме Поста отсюда заключаем, что искомое множество рекурсивно. Лемма доказана.

Лемма 7. *Существует формула* $N_1(v_0, v_1)$ *языка теории групп такая, что*

1) $N_1(v_0, v_1) \to N_0(v_0, v_1)$,

2) *Если* $G \leqslant A_r\omega$ *и* $G \models \mathop{\&}\limits_{j=0}^{8} \psi_j \;\&\; N_1[g_0, g_1]$, то $\langle A_G; s_{g_0 g_1}, +_{g_0 g_1}, \ldots \rangle$ *изоморфна стандартной модели арифметики.*

Доказательство. Пусть A и B — пара рекурсивно-перечислимых рекурсивно-неотделимых множеств [4, 9], f_A и f_B — примитивно-рекурсивные функции, перечисляющие A и B соответственно, а формулы арифметики ψ_A и ψ_B представляют функции f_A и f_B, т. е. для всех $n \in \omega$

$$A1 \div A9 \vdash \psi_A(s^n(0), y) \leftrightarrow y = s^{f_A(n)}(0),$$

$$A1 \div A9 \vdash \psi_B(s^n(0), y) \leftrightarrow y = s^{f_B(n)}(0).$$

Таким формулы существуют [10]. Рассмотрим предложение ψ языка модели $\mathfrak{N}^{g_0 g_1}_G$:

$$\psi \Leftrightarrow \forall a \exists f [\forall y (y < a \;\&\; \exists x \psi_A(x, y) \to \mathrm{ap}(f, y) = y) \;\&\; \forall y (y < a \;\&\; \exists x \psi_A(x, y) \to \mathrm{ap}(f, y) \neq y)].$$

Определим $N_1(v_0, v_1) \Leftrightarrow N_0(v_0, v_1) \;\&\; \psi^*(v_0, v_1)$. Условие 1 леммы выполнено очевидным образом.

Пусть теперь $G \leqslant A_r$ и $G \models \mathop{\&}\limits_{j=0}^{8} \psi_j \;\&\; N_1[g_0, g_1]$. Предположим, что заключение 2 леммы не выполнено. Тогда в A_G существует элемент a такой, что $s^n_{g_0 g_1}(0_{g_0 g_1}) <_{g_0 g_1} a$ для всех $n < \omega$. По свойству ψ_A, ψ_B получаем, что

$$A_0 = \{y < a \mid \mathfrak{N}^{g_0 g_1}_G \models \exists x \psi_A(x, y)\} \supset \{s^n_{g_0 g_1}(0_{g_0 g_1}) \mid n \in A\},$$

$$B_0 = \{y < a \mid \mathfrak{N}^{g_0 g_1}_G \models \exists x \psi_B(x, y)\} \supset \{s^n_{g_0 g_1}(0_{g_0 g_1}) \mid n \in B\}.$$

По свойству ψ существует такой элемент $f \in G$, что

$$A_0 \cap \{b \mid b < a\} \subset \mathrm{st}(f) \cap \{b \mid b < a\}, \quad B_0 \cap \{b \mid b < a\} \subset \mathrm{sp}(f) \cap \{b \mid b < a\}.$$

Отсюда в силу нестандартности a

$$\{n \mid s^n_{g_0 g_1}(0_{g_0 g_1}) \in A_0\} \subset \{n \mid s^n_{g_0 g_1}(0_{g_0 g_1}) \in \mathrm{st}(f)\},$$

$$\{n \mid s^n_{g_0 g_1}(0_{g_0 g_1}) \in B_0\} \subset \{n \mid s^n_{g_0 g_1}(0_{g_0 g_1}) \in \mathrm{sp}(f)\}.$$

Учитывая то, что $A \subset \{n \mid s^n_{g_0 g_1}(0_{g_0 g_1}) \in A_0\}$ и $B \subset \{n \mid s^n_{g_0 g_1}(0_{g_0 g_0}) \in B_0\}$, а также лемму 6, заключаем, что множества A и B рекурсивно отделимы; противоречие. Лемма доказана.

§ 3. ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ТЕОРИЙ

Теорема 1. *Существует предложение* φ_0 *языка теории групп такое, что для всякой группы* $G \leqslant A_r\omega$ $G \models \varphi_0$ *тогда и только тогда, когда* $G \cong A_r\omega$.

Доказательство. Пусть $\lambda(x, y, z)$ — такая формула арифметики, которая истинна на стандартной модели в том и только том случае, когда $\varkappa_x(y) = z$ и $\varkappa_x$ является перестановкой на ω. Рассмотрим следующее предложение:

$$\varphi_0 \Leftrightarrow \exists v_0 v_1 [N_1(v_0, v_1) \mathbin{\&} (\forall f \exists x \forall y \exists z (f(y) = z \mathbin{\&} \lambda(x, y, z)) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \forall x (\exists yz \lambda(x, y, z) \to \exists f \forall y \exists z (f(y) = z \mathbin{\&} \lambda(x, y, z))))^* (v_0, v_1)]^* \mathbin{\&} \underset{j=0}{\overset{8}{\&}} \psi_j.$$

Если φ_0 выполнено на $G \leqslant A_r\omega$, то для некоторых g_0 и g_1 из G модель $\langle A_G; s_{g_0g_1}, +_{g_0g_1}, \ldots\rangle$ изоморфна стандартной модели арифметики, причем $f \in G$ пробегают в точности рекурсивные перестановки A_G, если отождествить это множество с натуральным рядом. Построение изоморфизма теперь очевидно. Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Теория конструктивизируемых групп не совпадает с теорией класса групп рекурсивных автоморфизмов конструктивных моделей.*

Доказательство. Предложение φ_0 из теоремы 1 несовместно с классом конструктивизируемых групп, так как группа $A_r\omega$ не конструктивизируема [11], но совместно с классом групп всех рекурсивных автоморфизмов конструктивных моделей, потому что группа $A_r\omega$ есть группа рекурсивных автоморфизмов бесконечной модели с пустой сигнатурой.

Теорема 2. *Пусть $X \subseteq \omega$ — такое множество, что класс $\{X\}$ является арифметическим. Тогда существует такое предложение φ_X языка теории групп, что для всех $G \leqslant A_r\omega$*

$$G \vDash \varphi_X \textit{ тогда и только тогда, когда } G \cong G_X.$$

Доказательство. Пусть $R(P)$ — такое предложение языка арифметики, расширенного одноместным предикатным символом P, что для любого $A \subseteq \omega$ выполнено следующее: $\langle \omega;\ s, +, \cdot, 0, <, A\rangle \vDash R(P)$ тогда и только тогда, когда $P = X$. Можно считать, что все элементарные подформулы R, содержащие P имеют вид $P(x)$ где x — некоторая переменная. Заменим все такие подформулы на следующие утверждения, записанные в сигнатуре $\langle s, +, \cdot, 0, <, \mathrm{ap}, \circ\rangle$; «$x$ есть номер простого делителя периода некоторой перестановки типа G». В результате получим предложение R'.

Предположим теперь, что $G \vDash \exists v_0 v_1 [N_1(v_0, v_1) \mathbin{\&}$ («каждый элемент $f \in G$ является почти периодическим»$)^*$ $(v_0, v_1) \mathbin{\&} (R')^* (v_0, v_1) \mathbin{\&} \underset{j=0}{\overset{8}{\&}} \psi_j]$ (это и будет φ_X). В этом случае, как нетрудно видеть, $\mathfrak{N}_G^{g_0g_1} \models R(Q)$, где Q — множество номеров простых делителей периодов элементов G. При этом модель $\langle A_G; s_{g_0g_1}, +_{g_0g_1}, \ldots\rangle$ изоморфна стандартной модели арифметики. Отсюда следует, что $Q = X$. Таким образом $G \cong G_X$. Теорема доказана.

Следствие 2.1. *Существует предложение φ_ω языка теории групп такое, что для всех $G \leqslant A_r\omega$ $G \vDash \varphi_\omega$ тогда и только тогда, когда G изоморфна группе всех почти периодических перестановок ω.*

Замечание. Можно доказать и теорему, обратную к теореме 2: если группа G_X может быть охарактеризована одним предложением в классе $S(A_r\omega)$, то класс $\{X\}$ арифметический. Приведем набросок доказательства. Нужно сначала построить такое предложение $R(Y)$, что $\langle \omega, s, +, \cdot, 0, <, A\rangle \vDash R(Y)$ тогда и только тогда, когда Y есть множество всех клиниевских номеров перестановок, образующих группу, изоморфную G_X. Пусть в этой формуле все элементарные подформулы с Y имеют вид $Y(x)$, где x — некоторая переменная. Заменим все такие подформулы на арифметическую формулу, утверждающую, что «$\varkappa_x$ — почти периодическая перестановка и для всех p_{i+1}, делящих ее период, справедливо $i \in X_0$» (здесь X_0 — новый дополнительный одноместный предикат). Мы получим формулу $R'(X_0)$. Предположим, что $\langle \omega, s, +, \cdot, 0, <, B\rangle \vDash R'(X_0)$. Пусть A — множество всех таких $x \in \omega$, что $\varkappa_x$ — почти периодическая перестановка, и если p_{i+1} делит ее период, то $i \in B$. Тогда

$\langle\omega, \ldots, A\rangle \models R(Y)$. Следовательно, $\{\varkappa_y | y \in A\}$ образуют группу, изоморфную G_X. Это означает, что $G_X \cong G_B$. Отсюда $B = X$, так как любые две пары g_0 и g_1, g_0' и g_1' такие, что $G_X \models N_1[g_0, g_1] \& N_1[g_0', g_1']$, сопряжены в G_X и, следовательно, изоморфны. Нетрудно теперь убедиться, что $\langle\omega, s, +, \cdot, \circ, <, X\rangle \models R'(X_0)$, т. е. класс $\{X\}$ арифметический.

Теорема 3. *Множество номеров теории класса* $S(A_r\omega)$ *является* Π_1^1*-полным множеством.*

Доказательство. Сначала докажем, что $\mathrm{Th}(S(A_r\omega)) \in \Pi_1^1$. Пусть $\varphi(\bar{x})$ — формула теории групп. По ней можно построить формулу $t(\varphi)$ следующим образом: сначала приведем ее к эквивалентному виду, в котором встречаются лишь связки $\exists$, $\neg$ и &, а все атомарные подформулы имеют вид $x = y$ или $x \circ y = z$, где x, y и z — некоторые переменные.

Пусть $\mathrm{eq}(x, y)$ — формула арифметики, утверждающая, что $\varkappa_x = \varkappa_y$, а $\mathrm{mult}(x, y, z)$ — формула того же языка, утверждающая, что $\varkappa_x \circ \varkappa_y = \varkappa_z$. Заменим в φ все вхождения подформул $x = y$ на $\mathrm{eq}(x, y)$, $x \circ y = z$ — на $\mathrm{mult}(x, y, z)$, все кванторы $\exists x \ldots$ — на $\exists x (X(x) \& \ldots)$. Полученная формула и будет $t(\varphi)$.

Пусть $R(X)$ — формула языка арифметики, расширенной одноместным предикатом X, утверждающая, что $\{\varkappa_n | n \in X\}$ образует группу, состоящую из рекурсивных перестановок ω. Тогда нетрудно видеть, что $\varphi \in \mathrm{Th}(S(A_r\omega))$ тогда и только тогда, когда на стандартной модели арифметики выполняется $\forall X (R(X) \to t(\varphi)(X))$. Эта формула может быть равномерно по $\ulcorner\varphi\urcorner$ (гёделеву номеру φ) приведена к виду $\forall X Q(X)$, где Q — Σ_2^0-предикат. Таким образом, существует такой Σ_2^0-предикат U, что

$$\varphi \in \mathrm{Th}(S(A_r\omega)) \Leftrightarrow \forall X (\ulcorner\varphi\urcorner, X)$$

Отсюда следует, что $\mathrm{Th}(S(A_r\omega)) \in \Pi_1^1$.

Покажем теперь, что всякое Π_1^1-множество сводится к $\mathrm{Th}(S(A_r\omega))$. Пусть $n \in A \Leftrightarrow \forall X R(X, n)$, где R — арифметический предикат и формула $R'(x)$ языка модели $\mathfrak{N}_G^{g_0 g_1}$ получается из $R(X, x)$ заменой всех подформул вида $y \in X$ на формулу языка модели $\mathfrak{N}_G^{g_0 g_1}$, утверждающей, что найдется $f \in G$ такое, что его период делится на p_{y+1}. Докажем, что

$$\forall X R(X, n) \Leftrightarrow S(A_r\omega) \models \Big[\mathop{\&}_{j=0}^{8} \psi_j \to \big(\forall_{g_0 g_1} (N_1(g_0, g_1) \to ((\forall f \exists a \exists t \neq 0\, \forall x >$$

$$> a f(x + t) = f(x) + t)^* \to (R'(s^n(0)))^*)\Big].$$

Пусть на $G \in S(A_r\omega)$ выполнены все посылки импликаций формулы, указанной в правой части. Тогда G — почти периодическая группа. Пусть $X = \{i | p_{i+1}$ делит период некоторого $f \in G\}$. Для этого X справедливо $R(X, n)$ и, следовательно, $G \models (R'(s^n(0)))^*[g_0, g_1]$, где g_0 и g_1 удовлетворяют формуле N_1.

В обратную сторону, пусть $X \subseteq \omega$. Тогда на G_X выполнена наша формула. Возьмем $g_0 = \prod\limits_{i > \omega} (2i, 2i + 1)$ и $g_1 = \prod\limits_{i < \omega} (2i + 1, 2i + 2)$. Тогда $G_X \models R'(s^n(0))^*[g_0, g_1]$. Отсюда получается, что $R(X, n)$. Таким образом, $A \leqslant_1 \mathrm{Th}(S(A_r\omega))$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Множество гёделевых номеров теории класса* $\mathcal{K}_0$ *всех конструктивизируемых групп рекурсивно изоморфно арифметике.*

Доказательство. Достаточно показать, что обе эти теории 1-сводятся друг к другу.

Пусть φ — предложение языка арифметики. Тогда φ истинно в стандартной модели тогда и только тогда, когда на любой конструктивизируемой группе выполняется предложение

$$\mathop{\&}_{j=0}^{8} \psi_j \to (\forall v_0 v_1 (N_1(v_0, v_1) \to \varphi^*(v_0, v_1))).$$

Действительно, если G — конструктивизируемая группа, удовлетворяющая $\mathop{\&}_{j=0}^{8} \psi_j$ (например, можно взять G_ω), $G \models N_1[g_0, g_1]$ и φ истинно в стандартной модели арифметики, то $\mathfrak{N}_g^{g_0 g_1} \models \varphi$, откуда получаем, что $G \models \varphi^*[g_0, g_1]$. Наоборот, пусть φ — предложение языка теории групп. Используя стандартные методы, можно записать в языке арифметики следующее утверждение: $\forall m \forall k((\varkappa_m(c(x, y))$ — характеристическая функция эквивалентности $\sim_m$ на $\omega) \& \varkappa_k(c(x, y))$ определяет бинарную операцию $\circ_k$ на ω, согласованную с $\sim_m) \& (\langle \omega/\sim_m, {}^{\circ k}/\sim_m \rangle$ есть группа$) \to$ (на $\langle \omega/\sim_m, {}^{\circ k}/\sim_m \rangle$ выполняется φ). Полученное арифметическое утверждение мы обозначим φ'. Легко видеть, что преобразование φ в φ' можно выбрать эффективным. Очевидно, что φ истинно на всех конструктивизируемых группах тогда и только тогда, когда φ' истинно в стандартной модели арифметики.

Таким образом, эти две теории 1-сводятся друг к другу. Но множества номеров этих теорий являются цилиндрами, поэтому они 1-сводятся друг к другу [9]. Отсюда получаем изоморфизм этих теорий.

Теорема 5. *Теория класса $\mathscr{K}_r$ всех групп рекурсивных автоморфизмов конструктивных моделей рекурсивно изоморфна арифметике.*

Доказательство проводится аналогично доказательству предыдущей теоремы.

Поскольку всякая конструктивизируемая группа может быть реализована, как группа всех рекурсивных автоморфизмов некоторой конструктивной модели (это легко следует из [12], теории классов $\mathscr{K}_0$, $\mathscr{K}_r$ и $S(A_r\omega)$ соотносятся следующим образом: $\mathrm{Th}(S(A_r\omega)) \subsetneq \mathrm{Th}(\mathscr{K}_r) \subsetneq \mathrm{Th}(\mathscr{K}_0)$, причем первая из них Π_1^1-полна, а остальные изоморфны $\varnothing^{(\omega)}$.

Два множества A и B назовем *арифметически неотделимыми*, если не существует арифметического множества R такого, что $A \subset R$ и $B \subset \overline{R}$.

Теорема 6. *Существует предложение φ теории групп такое, что*

1) *φ совместно с теорией конструктивизируемых групп,*

2) *для любого класса $\mathscr{K} \subseteq S(A_r\omega)$ из совместности $\mathrm{Th}(\mathscr{K}) \cup \{\varphi\}$ следует, что $\varnothing^{(\omega)}$ 1-сводится к множеству номеров формул $\mathrm{Th}(\mathscr{K})$, а множества номеров предложений из $\mathrm{Th}(\mathscr{K})$ и множество номеров, опровержимых на $\mathscr{K}$ предложений, арифметически неотделимы.*

Доказательство. Возьмем в качестве φ предложение $\exists v_0 v_1 N_1(v_0, v_1)$. Тогда $G_\omega \models \varphi$ и для любого предложения ψ языка арифметики $\mathscr{K} \models \varphi \to (\forall v_0 v_1 (N_1(v_0, v_1) \to \psi^*(v_0, v_1))$ тогда и только тогда, когда ψ истинно в стандартной модели арифметики. Отсюда следует и арифметическая неотделимость. Теорема доказана. (Теорему 6 можно считать аналогом [13].)

Теорема 7. *Пусть $X \subseteq \omega$ таково, что класс $\{X\}$ арифметический. Если $\mathscr{K} \subseteq S(A_r\omega)$ содержит G_X, то X 1-сводится к множеству номеров $\mathrm{Th}(\mathscr{K})$.*

Мы дадим схему доказательства. Пусть φ_X — предложение группового языка, построенное как в теореме 2. Тогда $n \in X \Leftrightarrow \mathscr{K} \models \varphi_X \to (\forall v_0 v_1 (N_1(v_0, v_1) \to (\exists f$ с периодом, который делится на $p_{n+1})$. Последнее утверждение можно переписать в эквивалентном виде формулой теории групп.

Теорема 8. *Теории*

1) *всех групп рекурсивных перестановок,*

2) *групп всех рекурсивных автоморфизмов конструктивных моделей,*

3) *конструктивизируемых групп не совпадают с теорией класса всех групп. Первая из них не может быть аксиоматизирована никаким*

гиперарифметическим множеством аксиом, а вторая и третья — никакими арифметическими множествами аксиом.

Непосредственно из теорем 3—5 следует

Теорема 9. *Существует предложение, совместное с теорией групп, не выполненное ни на одной группе рекурсивных перестановок, и, в частности, ни на одной группе рекурсивных автоморфизмов конструктивной модели, ни на одной конструктивизируемой группе.*

В [1] Воот доказал, что существует предложение, не имеющее конструктивизируемых моделей. Теорема 9 утверждает, что это верно даже в классе групп.

Следствие 9.1. *Существует $0'$-рекурсивная группа, не реализуемая как группа рекурсивных перестановок, и тем более как группа всех рекурсивных автоморфизмов конструктивной модели.*

Доказательство. Пусть φ — предложение из теоремы 9. Искомая группа строится методом Хенкина [3] по теории групп с добавленным предложением φ.

Ранее автором в [14] было доказано, что группа $A_r\omega$ конструктивизируема с оракулом H тогда и только тогда, когда $\deg H \geqslant 0''$. Таким образом, верно

Следствие 9.2. *Класс всех групп рекурсивных автоморфизмов не может быть описан как класс всех H-конструктивизируемых групп для подходящего оракула H.*

§ 4. ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИИ ГРУППЫ $A_r\omega$ И ГРУПП РЕКУРСИВНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ КОНСТРУКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ

Здесь будет дана некоторая теоретико-модельная характеризация группы $A_r\omega$ и групп рекурсивных автоморфизмов конструктивных моделей.

Теорема 10. *Существует предложение φ языка теории групп такое, что группа $A_r\omega$ является единственной с точностью до изоморфизма моделью φ, содержащей всего лишь две нетривиальные нормальные подгруппы. Все остальные модели φ содержат не менее трех различных нормальных подгрупп. Иначе говоря, $A_r\omega$ есть единственная модель φ, обладающая минимальным числом нормальных подгрупп.*

Доказательство. Пусть $P(x, y, z, t)$ — формула языка арифметики, представляющая рекурсивный предикат $\varkappa_x^t(y) = z$. (Благодаря этой формуле приобретают некоторый смысл функции $\varkappa_x$, где x — нестандартное число.) Положим

$$\begin{gathered}
\varphi_0 \rightleftharpoons \forall n \forall x \exists^{\leqslant 1} y \exists t P(n, x, y, t) \,\&\, \forall f \exists n \forall x \exists t P(n, x, f(x), t) \,\&\\
\&\, \forall n (\{\forall x \exists t y P(n, x, y, t) \,\&\, \exists m (\forall x \exists t y P(m, x, y, t) \,\&\\
\&\, (\forall x y z t_0 t_1 P(n, x, y, t_0) \,\&\, P(m, y, z, t_1) \to x = z)\} \to\\
\to \exists f \forall x \exists t P(n, x, f(x), t)),\\
\varphi_1 \rightleftharpoons \exists v_0 v_1 (N_1(v_0, v_1) \,\&\, \varphi_0 \,\&\, \forall f ((\exists b \forall x (x \in \mathrm{sp}(f) \to x < b) \leftrightarrow \mathrm{fin}(f)) \,\&\\
\&\, \forall b \neq 0 \exists f f(x) \neq x \leftrightarrow (x < b \vee x = b))^*
\end{gathered}$$

и $\varphi = \varphi_1 \,\&\, \mathop{\&}\limits_{j=0}^{8} \psi_j \,\&\, GT$, где GT — аксиомы теории групп. Пусть $G \vDash \varphi$ и $G \vDash N_1[g_0, g_1]$. Предположим, что $\langle A_G, +_{g_0 g_1}, \ldots \rangle$ — нестандартная модель арифметики A1 — A9.

Покажем, что группа

$$G^* = \{f \in G \mid \exists b \, \forall x \in \mathrm{sp}(f) \, x <_{g_0 g_1} b\}$$

нормальна в G. Пусть $h \in G$ и $f \in G^*$. По φ_1 справедливо $G \vDash \mathrm{fin}(f)$. Тогда $G \vDash \mathrm{fin}(f^h)$, поскольку формула fin больше не содержит параметров. Отсюда получаем, что $f^h \in G^*$. Мы доказали, что $G^* \lhd G$.

Рассмотрим теперь группы $A = \{f \in G | f$ разлагается в произведение четного числа транспозиций$\}$ и $\mathrm{Fin} = \{f \in G |\ |\mathrm{sp}(f)| < \omega\}$. Очевидно, что $1 \underset{\neq}{\trianglelefteq} A \underset{\neq}{\trianglelefteq} \mathrm{Fin} \underset{\neq}{\trianglelefteq} G^* \underset{\neq}{\trianglelefteq} G$ — нормальный ряд в группе. Когда $\langle A_G, +_{g_0 g_1}, \ldots \rangle$ нестандартная модель арифметики, выполняется $\mathrm{Fin} \neq G^*$. Таким образом, у G имеются две различные нетривиальные нормальные подгруппы. Из полученного противоречия следует, что модель $\langle A_G, \ldots \rangle$ стандартная. В этом случае легко доказывается, что $G \cong A_r\omega$. Как доказано в [8], эта группа имеет всего лишь две нетривиальные нормальные группы: A и Fin. Теорема доказана.

Теорема 11. *Существует предложение $\varphi(\dot{R})$ языка теории групп с добавленным одноместным предикатом такое, что множество подмножеств $A_r\omega$, реализуемых как группы рекурсивных автоморфизмов некоторой рекурсивной модели, совпадает с* $\{X \subseteq \omega | (A_r\omega, X) \models \varphi(R)\}$, (здесь R интерпретируется как X).

Мы дадим набросок доказательства. Пусть $\theta(n)$ — формула арифметики, утверждающая, что $r_1^3(n)$, $r_2^3(n)$ и $r_3^3(n)$ — номера общерекурсивных функций, при этом $W_{f(x)} \cap W_{g(x)} = \varnothing$ для всех $x < \omega$ и $W_{f(x)} \cup W_{g(x)} = \omega$, где $f(x) = \varkappa_{r_2^3(n)}(x)$, а $g(x) = \varkappa_{r_3^3(n)}(x)$. Она утверждает, что натуральное n кодирует конструктивную модель. Следующее утверждение можно записать формулой $\varphi_0(f, n)$ в языке $\langle s, +, 0, <, \mathrm{ap}, R \rangle$:

$$\forall \bar{m}, \bar{s}\Big(\big(\text{длина кортежа } \bar{s} \text{ равна } d = \varkappa_{r_1^3(n)}(m)\big) \to \Big(c^d(\bar{s}) \in W_{\varkappa_{r_2^3(n)}}(m) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow c^d(f(\bar{s})) \in W_{\varkappa_{r_2^3(n)}}(m)\Big)\Big).$$

Оно утверждает, что f является автоморфизмом модели, которая кодируется числом n.

Формула $\varphi(R) = \exists v_0 v_1 (N_1(v_0, v_1) \& \exists n(\theta(n) \& \forall f(R(f) \leftrightarrow \varphi_0(f, n))))^*$, где $*$ определяется как раньше но с дополнительным условием $(R(f))^* = R(f)$, является искомой. Она утверждает, что для некоторой конструктивной модели R совпадает с группой всех ее автоморфизмов из $A_r\omega$. Теорема доказана.

Теоремы 10 и 11 дают некоторое теоретико-модельное описание всех групп рекурсивных автоморфизмов. Отметим также следующее утверждение, которое является прямым следствием [15].

Предложение. *Пусть G — конечно порожденная группа. Она может быть реализована как группа всех рекурсивных автоморфизмов конструктивной модели в том и только том случае, когда она конструктивизируема.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Vaught R. L.** Sentences true in all constructive models // J. Symb. Log.— 1960.— Vol. 25, N 1.— P. 39—53.
2. **McKenzie R.** Automorphism groups of denumerable boolean algebras // Canad. J. Math.— 1977.— Vol. 29, N 3.— P. 466—471.
3. **Ершов Ю. Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели.— М.: Наука, 1980.
4. **Роджерс Х.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.— М.: Мир, 1972.
5. **Дзгоев В. Д.** Рекурсивные автоморфизмы конструктивных алгебраических систем // 15-я Всесоюз. алгебраическая конф. (Тезисы).— Новосибирск.— Т. 2.— С. 93.
6. **Кудайбергенов К. Ж.** Об эффективно однородных моделях // 6-я Всесоюз. конф. по мат. логике (тезисы).— Тбилиси.— 1982.— С. 92.
7. **Морозов А. С.** Группы рекурсивных автоморфизмов конструктивных булевых алгебр // Алгебра и логика.— 1983.— Т. 22, № 2.— С. 138—158.
8. **Kent C. F.** Constructive analogues of the group of permutations of the natural numbers // Trans. Amer. Math. Soc.— 1962.— Vol. 104, N 2.— P. 347—362.
9. **Мальцев А. И.** Алгоритмы и рекурсивные функции.— М.: Наука, 1986.
10. **Шенфилд Дж.** Математическая логика.— М.: Наука, 1975.
11. **Нуртазин А. Т.** О конструктивных группах // 4-я Всесоюз. конф. по мат. логике (тезисы).— Кишинев.— 1976.— С. 106.

12. **Birkhoff G.** Sobre los grupos de automorphismos // Revista Union Math. Argent. Assoc. Argent.— 1946.— Vol. 11.— P. 155—157.
13. **Vaught R. L.** Non recursive enumerability of the set sentences true in all constructive models // Bull. Amer. Math. Soc.— 1957.— N 63.— P. 230.
14. **Морозов А. С.** Перестановки натурального ряда и неявная определимость // Алгебра и логика.— 1988.— Т. 27, № 1.— С. 19—36.
15. **Морозов А. С.** О вычислимых группах автоморфизмов моделей // Там же.— 1986.— Т. 25, № 4.— С. 415—424.

А. Ю. МУРАВИЦКИЙ

СООТВЕТСТВИЕ РАСШИРЕНИЙ ДОКАЗУЕМОСТНО-ИНТУИЦИОНИСТСКОЙ ЛОГИКИ РАСШИРЕНИЯМ ЛОГИКИ ДОКАЗУЕМОСТИ

Данная работа является подробным изложением и развитием результатов, впервые анонсированных в [1] и уточненных в [2]. Рассматриваются пропозициональные логики I^Δ и G, известные своими доказуемостными интерпретациями и заданные одноименными исчислениями, получающимися из интуиционистского исчисления высказываний с постулированным правилом подстановки путем добавления одноместной связки Δ, и следующих постулатов: аксиом $(p \supset \Delta p)$, $((\Delta p \supset p) \supset p)$, $(\Delta p \supset (q \vee (q \supset p)))$ — для I^Δ и аксиом $(\neg\neg p \supset p)$, $(\Delta(p \supset q) \supset$ $\supset (\Delta p \supset \Delta q))$, $(\Delta(\Delta p \supset p) \supset \Delta p)$ и правила вывода $a/\Delta a$ — для G. Нормальное расширение логики L ($=I^\Delta$ или G) — это совокупность формул, содержащая все аксиомы исчисления L и замкнутая относительно всех его правил вывода. Показывается, что решетка $\mathscr{L}I^\Delta$ расширений логики I^Δ и решетка $\mathscr{L}G$ расширений логики G имеют единственный (общий) коатом — логику $I^\Delta + (\neg\neg p \supset p)$, которая равна замкнутому объединению $I^\Delta + G$. Основной результат: существует решеточный изоморфизм τ решетки $\mathscr{L}I^\Delta$ на $\mathscr{L}G$ такой, что для любого расширения L логики I^Δ

а) L таблично (предтаблично, финитно аппроксимируемо, конечно аксиоматизируемо, моделируемо) тогда и только тогда, когда таково τL,

б) правило $\Delta a/a$ допустимо в L тогда и только тогда, когда оно допустимо в τL.

§ 1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Исследование пропозициональных логик в последние годы, начиная с систематического изучения промежуточных логик (см. обзор [3]), устойчиво склонялось к выделению некоторой совокупности логик, являющейся совокупностью расширений какой-либо одной известной логики, чтобы рассмотреть в этой совокупности «отношения между логиками или некоторые структуры», выявленные в ней [3]. При этом логика, т. е. элемент такой совокупности, понимается как «алгебраическая система, имеющая некоторое структурное сходство с логикой в обычном смысле и... не является логикой, на основе которой может или должна быть построена некоторого рода математика» [3]. Развитие этой точки зрения на примерах изучения совокупностей расширений интуиционистского пропозиционального исчисления I и нормальных расширений исчисления строгой импликации Льюиса $S4$ привело к сравнительному их исследованию, начатому в [4] и систематически проведенному в [5]. Именно в [5] было установлено, что существует гомоморфное отображение решетки $\mathscr{L}S4$ нормальных расширений логики исчисления $S4$ на решетку $\mathscr{L}I$ расширений логики исчисления I и изоморфное вложение $\mathscr{L}I$ в $\mathscr{L}S4$.

Оставаясь в рамках этой традиции, мы рассмотрим две пропозициональные логики — логику доказуемости G и доказуемостно-интуиционистскую логику I^Δ — вместе с их нормальными расширениями. Исход-