6. **Кузнецов А. В., Муравицкий А. Ю.** Доказуемость как модальность // Актуальные проблемы логики и методологии науки.— Киев: Наук. думка, 1980.— С. 193—230.
7. **Solovay R. M.** Provability interpretation of modal logic // Isr. J. math.— 1976.— Vol. 25.— P. 287—304.
8. **Boolos G.** The unprovability of consistency.— Cambridge, 1979.
9. **Segerberg K.** An essay in classical modal logic: filosofiska studier.— Uppsala, 1971.
10. **Клини С. К.** Введение в математику.— М.: Изд-во иностр. лит., 1957.
11. **Кузнецов А. В.** Доказуемостно-интуиционистская логика // Модальные и интенсиональные логики.— М., 1978.— С. 75—79.
12. **Мендельсон Э.** Введение в математическую логику.— М.: Наука, 1976.
13. **Муравицкий А. Ю.** Сильная эквивалентность на интуиционистской модели Крипке и ассерторически равнообъемные логики // Алгебра и логика.— 1981.— С. 20, № 2.— С. 165—189.
14. **Расёва Е., Сикорский Р.** Математика матаматематики.— М.: Наука, 1972.
15. **Эсакия Л. Л.** Диагональные конструкции, формула Лёба и разреженные пространства Кантора // Логико-семантические исследования.— Тбилиси: Мецниереба, 1981.— С. 128—143.
16. **Кузнецов А. В.** Об алгебрах открытых множеств // Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям.— Кишинев: Штиинца, 1979.— С. 72—75.
17. **Magari R.** The diagonalizable algebras // Boll. Unione mat. ital.— 1975.— Vol. 12, N 5.— P. 117—125.
18. **Bernardi C.** On the equational class of diagonalizable algebras // Stud. log.— 1975.— Vol. 34, N 4.— P. 321—331.
19. **Makinson D.** Some embedding theorems for modal logic // Notre Dame J. form. log.— 1971.— Vol. 12, N 2.— P. 252—254.
20. **Кузнецов А. В., Муравицкий А. Ю.** Магариевы алгебры // 14-я Всесоюз. алгебр. конф. Ч. 2.— Новосибирск, 1977.— С. 105—106.
21. **Эсакиа Л. Л.** О многообразиях алгебр Гжегорчика // Исследования по неклассическим логикам и теории множеств.— М.: Наука, 1979.— С. 257—287.
22. **Максимова Л. Л.** Модальные логики конечных слоев // Алгебра и логика.— 1975.— Т. 14, № 3.— С. 304—314.
23. **Сикорский Р.** Булевы алгебры.— М.: Мир, 1969.
24. **Биркгоф Г.** Теория решеток.— М.: Наука, 1984.
25. **Гретцер Г.** Общая теория решеток.— М.: Мир, 1982.
26. **Blok W. J.** Varieties of interior algebras: Dissertation.— University of Amsterdam, 1976.
27. **Эклоф П.** Теория ультрапроизведений для алгебраистов // Справочная книга по математической логике. Т. 1. Теория моделей.— М.: Наука, 1982.— С. 109—140.
28. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы— М.: Наука, 1970.
29. **Grätzer G.** Universal algebras.— New York, 1979.
30. **Goldblatt R.** Arithmetical necessity, provability and intuitionistic logic // Theoria.— 1978.— Vol. 54, N 1.— P. 38—46.
31. **Boolos G.** Provability in arithmetic and schema of Grzegorcyk // Fund. math.— 1980.— Vol. 106, N 1.— P. 41—45.
32. **Lemmon E. J.** (in collaboration with D. Scott) An introduction to modal logic.— Oxford, 1977.
33. **Кузнецов А. В.** О средствах для обнаружения невыводимости или невыразимости // Логический вывод.— М.: Наука, 1979.— С. 5—33.
34. **Lemmon E. J.** Some results of finite axiomatizability in modal logic // Notre Dame J. form. log.— 1965.— Vol. 6, N 4.— P. 301—308.
35. **Rasiowa H.** An algebraic approach to non-classical logics.— Warszawa, 1974.
36. **Blok W. J.** Pretabular varieties of modal algebras // Stud. log.— 1980.— Vol. 39, N 2/3.— P. 101—124.
37. **Муравицкий А. Ю.** О финитной аппроксимируемости исчисления I^{Δ} и немоделируемости некоторого его расширения // Мат. заметки.— 1981.— Т. 29, № 6.— С. 907—916.
38. **Муравицкий А. Ю.** О расширениях логики доказуемости // Там же.— 1983.— Т. 33, № 6.— С. 915—927.

В. В. РЫБАКОВ

О ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА В МОДАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ G

Модальная система G (под именем K4W) введена в [1] по чисто семантическим соображениям: как логика конечных транзитивных иррефлексивных шкал. Она расширяет модальную систему K4 и несовместима с логикой S4 — дает в объединении с S4 абсолютно противоречивую логику. Система G не относилась к традиционно изучаемым логикам, ее особая роль выяснилась после найденной Соловеем [2] интерпретации модального оператора системы G предикатом доказуемости Pr формальной арифметики Пеано и положительного решения на основе свойств G 35-й проблемы из списка Фридмана [3]. Этот успех привлек внимание к G и ряду родственных модальных систем [4, 5].

Допустимость правил вывода исследовалась прежде всего в интуиционистском исчислении высказываний Int [6—8] и известных модальных системах S4, Grz — как модальных напарниках Int — с целью описания с их помощью допустимых правил Int (см. [7—9]), а также «сильных» модальных логиках — S5, S4.3 [10—13]. Выделенное положение G — как претендента на роль логики доказуемости — вызвало интерес к ее допустимым правилам вывода.

В настоящей работе получены следующие основные результаты. Найден критерий допустимости правил вывода в модальной системе G, на его основе построен алгоритм, распознающий допустимость в G, т. е. доказано, что G, как и S4, Grz и Int, является разрешимой по допустимости. Показано, что G не имеет конечного базиса допустимых правил вывода. Рассмотрен вопрос о финитной аппроксимируемости по допустимости систем G, S4, Grz и логики Int.

§ 1. СТРОЕНИЕ СВОБОДНОЙ АЛГЕБРЫ $\mathcal{F}_n(G)$

Как и в [7—12], используем алгебраический подход к допустимости правил вывода. Напомним, что правило вывода $A_1, \ldots, A_n/B$ допустимо в пропозициональной логике λ, если и только если квазитождество $\bigwedge_{i=1}^{n} A_i = 1 \Rightarrow B = 1$ истинно на свободной алгебре $\mathcal{F}_\omega(\lambda)$ счетного ранга ω из многообразия $\mathrm{Var}(\lambda)$ алгебр, соответствующего логике λ. В рамках этого подхода нам понадобится описание строения $\mathcal{F}_n(G)$.

Неоговариваемые ниже определения и обозначения содержатся в [7, 10]. Если $\mathcal{T} = \langle W, R, V\rangle$, где V: $\{p_1, \ldots, p_n\} \to 2^W$ является n-характеристической моделью для логики λ, то свободная алгебра $\mathcal{F}_n(\lambda)$ ранга n из $\mathrm{Var}(\lambda)$ изоморфна подалгебре $\langle W, R\rangle^+(V(p_i))$ алгебры $\langle W, R\rangle^+$, порожденной элементами $V(p_i)$, как свободными порождающими (см. [6, 10, 11]). Перейдем к описанию n-характеристических моделей для G.

Напомним, что схемами аксиом G являются $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$, $\Box A \to \Box\Box A$, $\Box(\Box A \to A) \to \Box A$, постулированными правилами вывода — A, $A \to B/B$, $A/\Box A$. Логика G является финитно аппроксимируемой и аппроксимируется множеством конечных транзитивных иррефлексивных шкал [1].

Пусть $\mathcal{T} = \langle T, R\rangle$ — транзитивная шкала, $X \subseteq T$ (или $a \in T$), через $\langle X\rangle$ ($\langle a\rangle$) обозначаем множество $\{b \mid \exists d \in X(dRb)\}$ ($\{b \mid (aRb)\}$). *Глубиной элемента* $a \in \mathcal{T}$ называем максимальное m такое, что $\exists a_1, \ldots, \exists a_m \in \langle a\rangle \cup \{a\}$, $a = a_1$, a_iRa_{i+1}, $\neg(a_{i+1}Ra_i)$ (если максимального m нет, говорим, что a — бесконечной глубины). Обозначаем через $S_i(\mathcal{T})$ множество элементов из $\mathcal{T}$ глубины не выше i, а через $\mathrm{Sl}_i(\mathcal{T})$ — множество элементов глубины i. Напомним, что *открытой подмоделью* модели $\mathcal{T} = \langle W, R, V\rangle$ называется любое подмножество X множества W такое, что $\langle X\rangle \cup X = X$, с индуцированными из $\mathcal{T}$ отношением R и означиванием V. Истинность формул на элементах открытой подмодели совпадает с истинностью формул на этих элементах в исходной модели.

Вводим последовательность моделей $H_k = \langle H_k, <_k, V_k\rangle$, где $<_k$ — транзитивное иррефлексивное отношение и H_k является открытой подмоделью H_{k+1}, состоящей из элементов модели H_{k+1} глубины не выше k, т. е. $H_k = S_k(H_{k+1})$ и ограничение означивания V_{k+1} на H_k — $V_{k+1} \restriction H_k$ — совпадает с V_k. Через π_i обозначается функция проектирования декартова произведения на i-й сомножитель, $P_n \leftrightharpoons \{p_1, \ldots, p_n\}$.

Пусть $H_1 \rightleftharpoons \{\varnothing\} \times 2^{P_n} \times \{1\}$ и образует относительно $<_1$ множество несравнимых элементов ($\forall x, y \urcorner(x <_1 y)$) — антицепь. Далее, пусть $\forall a \in H_1 a \Vdash_{V_1} p_i \Leftrightarrow p_i \in \pi_2(a)$. Предположим, что модели $H_1, \ldots, H_k$ с приведенными требованиями уже построены. Пусть АС — множество всех антицепей из H_k, содержащих не менее одного элемента глубины k. Вводим множество $S_{k+1} = \mathrm{AC} \times 2^{P_n} \times \{k+1\}$ и полагаем $H_{k+1} \rightleftharpoons S_{k+1} \cup \cup H_k$. На H_{k+1} вводим отношение $\lhd_{k+1}$:

$$\forall x \in S_{k+1},\ \forall y \in H_k[x \lhd_{k+1} y \Leftrightarrow \exists z \in \pi_1(x)\,((z <_k y) \vee (y = z))].$$

Определяем $<_{k+1}$ и V_{k+1}:

$$(<_{k+1}) = (<_k) \cup (\lhd_{k+1}),\ \forall x \in \mathrm{S}_{k+1}(x \in V_{k+1}(p_i) \Leftrightarrow p_i \in \pi_2(x)),$$

$$V_{k+1}(p_i) \cap H_k = V_k(p_i).$$

Иррефлексивность $<_{k+1}$ сразу следует из определения. Проверим транзитивность. Пусть $x <_{k+1} y <_{k+1} t$. Если $x \notin S_{k+1}$, то нужное заключение получаем из транзитивности $<_k$. Пусть $x \in S_{k+1}$. Тогда из $x <_{k+1} y$ либо $y \in \pi_1(x)$, либо $z <_k y$, $z \in \pi_1(x)$. В первом случае прямо по определению $\lhd_{k+1}$ имем $x \lhd_{k+1} t$ и $x <_{k+1} t$. Во втором случае по транзитивности $<_k$ имеем $z <_k t$, и вновь по определению $\lhd_{k+1}$: $x \lhd_{k+1} t$. Следовательно, $x <_{k+1} t$; транзитивность установлена.

Так как H_k — открытая подмодель модели H_{k+1}, корректно следующее определение модели $H(n)$: $H(n) = \langle H\ \ (n), <, V\rangle$, $H(n) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H_k$, $(<) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (<_k)$, $V = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_k$.

Лемма 1. *Модель $H(n)$ является n-характеристической для модальной системы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждая формула, доказуемая в G, истинна на шкале H_k, так как она — конечное множество с иррефлексивным и транзитивным отношением достижимости. Пусть имеет место $A(p_1, \ldots$ $\ldots, p_n) \notin G$. Поскольку G аппроксимируема конечными иррефлексивными транзитивными шкалами, то найдется такая конечная шкала $\mathfrak{X} = \langle \mathfrak{X}, <\rangle$ и модель $\mathfrak{X} = \langle \mathfrak{X}, <, V\rangle$ на ней, что не имеет места $\langle \mathfrak{X}, <, V\rangle \Vdash A$ Строим последовательность моделей $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{X}_i = \langle \mathfrak{X}_i, <, V\rangle$ такую, что $S_i(\mathfrak{X}_i)$ — открытая подмодель модели $H(n)$, глубина $\mathfrak{X}_i$ не выше глубины $\mathfrak{X}$ и формула A ложна на $\mathfrak{X}_i$. Пусть $\mathfrak{X}_0 = \mathfrak{X}$, и предположим, что модель $\mathfrak{X}_i$ с указанными свойствами построена; строим модель $\mathfrak{X}_{i+1}$.

Итак, пусть $S_i(\mathfrak{X}_i) \subseteq H(n)$. На модели $\mathfrak{X}_i$ вводим эквивалентность $\sim_i$, полагая эквивалентными элементы глубины $i+1$ с одинаковыми множествами достижимых элементов и одинаковыми означиваниями переменных, т. е.

$$x \sim_i y \Leftrightarrow x, y \in \mathrm{Sl}_{i+1}(\mathfrak{X}_i) \wedge (\langle x\rangle = \langle y\rangle) \wedge$$

$$\wedge\ \forall p_i\,(x \vDash_V p_i \Leftrightarrow y \vDash_V p_i).$$

На фактор-множестве $\mathfrak{X}_i/_{\sim_i}$ по этой эквивалентности вводим индуцированное из $\mathfrak{X}_i$ означивание и отношение $<$: $[x]_{\sim_i} < [y]_{\sim_i} \Leftrightarrow \exists z \in$ $\in [y]_{\sim_i}(x < z)$. Корректность этого определения следует из иррефлексивности $<$ на $\mathfrak{X}_i$ и задания $\sim_i$. Несложно заметить, что $<$ иррефлексивно, транзитивно и $S_i(\mathfrak{X}_i) = S_i(\mathfrak{X}_{i+1})$, где $\mathfrak{X}_{i+1} = \langle \mathfrak{X}_i/_{\sim_i}, <, V\rangle$. Таким образом, модель $S_i(\mathfrak{X}_{i+1})$ является открытой подмоделью модели $H(n)$. Кроме того, $\forall x, y \in \mathrm{Sl}_{i+1}(\mathfrak{X}_{i+1})$ при $x \neq y$ и $\langle x\rangle = \langle y\rangle$ x и y различаются означиваниями переменных (по выбору $\sim_i$). Поэтому $S_{i+1}(\mathfrak{X}_{i+1})$ — открытая подмодель модели $H(n)$.

Глубина модели $\mathfrak{X}_{i+1}$ совпадает с глубиной $\mathfrak{X}_i$, следовательно, глубина $\mathfrak{X}_{i+1}$ не выше глубины $\mathfrak{X}$. Индукцией по длине формулы B легко проверить справедливость соотношения $\forall x \in \mathfrak{X}_i [x]_{\sim_i} \models_V B \Leftrightarrow_x \models_V B$. Из него вытекает ложность A на $\mathfrak{X}_{i+1}$. Продолжая построение последовательности моделей, приходим к модели $\mathfrak{X}_m$, где m — глубина модели $\mathfrak{X}$, тогда $S_m(\mathfrak{X}_m) = \mathfrak{X}_m$ и $\mathfrak{X}_m$ — открытая подмодель модели $H(n)$, причем A ложна на $\mathfrak{X}_m$. Следовательно, формула A ложна и на $H(n)$. Лемма доказана.

Непосредственно из леммы 1 получаем.

Следствие 2. *Свободная модальная алгебра* $\mathcal{F}_n(G)$ *ранга* n *из многообразия модальных алгебр* $\mathrm{Var}(G)$ *изоморфна алгебре* $\langle H(n), <\rangle^+ (V(p_i))$.

Напомним, что элемент x (множество элементов X) модели $\mathcal{T} = \langle W, R, V\rangle$ называется *формульным*, если существует формула A с переменными из области определения V такая, что $\forall y \in \mathcal{T} (y \models_V A \Leftrightarrow y = x (\Leftrightarrow y \in X))$ (условимся такую формулу обозначать $f(x)$ (или соответственно $f(X)$)). В дальнейших доказательствах нам понадобится

Лемма 3. *Все элементы модели* $H(n)$ *являются формульными.*

Доказательство. Доказательство проводим индукцией по глубине элемента. Пусть $a \in S_1(H(n))$. Вводим формулу

$$f(a) \leftrightharpoons \Box (p \wedge \neg p) \wedge \bigwedge_{i \in p(a)} p_i \wedge \bigwedge_{i \notin p(a)} \neg p_i,$$

где $p(a) \leftrightharpoons \{i \mid a \models_V p_i\}$. Очевидно, что из $y \models_V f(a)$ следует $y \in S_1(H(n))$. Причем, если $y \models_V f(a)$, то $p(y) = p(a)$ и ввиду построения первого слоя H_1 — модели $H(n)$, $y = a$ и, следовательно, $\forall y\, y \models_V f(a) \Rightarrow y = a$, т. е. формулы $f(a)$ действительно выделяют элементы $a \in S_1(H(n))$.

Предположим, что формульность всех элементов из $H(n)$ глубины не выше k доказана и $\forall x \in S_k(H(n))$ $f(x)$ — выделяющая x формула.

Рассмотрим элемент $x \in \mathrm{Sl}_{k+1}(H(n))$. Вводим формулы

$$B_x = \bigwedge_{i \in p(x)} p_i \wedge \bigwedge_{i \notin p(x)} \neg p_i, \quad \mathcal{D}_x = B_x \wedge \bigwedge_{y > x} (\Diamond f(y) \wedge \neg f(y)),$$

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{D}_x \wedge \Box \Big(\bigvee_{y > x} f(y)\Big).$$

Нетрудно видеть, что $x \models_V \mathcal{E}_x$. Кроме того, $a \underset{V}{\models} \mathcal{E}_x \Rightarrow (\langle a\rangle = \langle x\rangle)$. Действительно, из $a \models_V \mathcal{E}_x$ следует $a \models_V \mathcal{D}_x$, что влечет $\langle a\rangle \supseteq \langle x\rangle$. С другой стороны, из $a \models_V \mathcal{E}_x$ получаем $a \models_V \Box \Big(\bigvee_{y > x} f(y)\Big)$. Следовательно, $\langle a\rangle \subseteq \langle x\rangle$. Значит, из $a \models_V \mathcal{E}_x$ следует $\langle a\rangle = \langle x\rangle$ и $a \in \mathrm{Sl}_{k+1}(H(n))$. Но при $a \models_V \mathcal{E}_x$ имеем $p(a) = p(x)$, значит, и означивания V на a и x совпадают. А это вместе с a, $x \in \mathrm{Sl}_{k+1}(H(n))$ и $\langle a\rangle = \langle x\rangle$ и заданием шкалы $H(n)$ влечет $a = x$. Таким образом, формулы $\mathcal{E}_x$ выделяют элементы $x \in \mathrm{Sl}_{k+1}(H(n))$. Лемма доказана.

§ 2. КРИТЕРИЙ ДОПУСТИМОСТИ ПРАВИЛ ВЫВОДА В МОДАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ G

Логика называется *разрешимой по допустимости*, если существует алгоритм, распознающий допустимые в ней правила. Модальная система G не является структурно полной. Например, правило вывода $\Box(p \wedge \neg p)/y$ допустимо, но непроизводно в G. Поэтому из разрешимости G [1] прямо не следует разрешимость по допустимости. Доказательство разрешимости по допустимости — основная цель данного параграфа.

Доказательство проводим по той же схеме, что и доказательство разрешимости по допустимости модальных систем S4 и Grz в [7, 8] — находим редуцированную форму квазитождеств, по посылке редуцированной формы квазитождеств вводим специальные реляционные модели, строим критерий допустимости в G на основе свойств этих моделей.

Так как в произвольной булевой алгебре верно соотношение $a=1\,\&\,\&\,b=1 \Leftrightarrow a\bigwedge b=1$, то в дальнейшем достаточно рассматривать только однопосылочные правила вывода и квазитождества. Ниже под квазитождеством всегда понимается квазитождество в сигнатуре алгебры $\mathcal{F}_\omega(G)$. Квазитождества называем *эквивалентными*, если они одновременно истинны либо ложны на любой алгебре из многообразия $\mathrm{Var}(G)$.

Предложение 4. *По любому квазитождеству $f(x_j)=1\Rightarrow g(x_j)=1$ можно эффективно построить эквивалентное ему квазитождество $\tilde{r}(f=1\Rightarrow g=1)$, где $\tilde{r}(f=1\Rightarrow g=1)=(\bigvee\varphi_j=1\Rightarrow \neg x_0=1)$ или $\tilde{r}(f=1\Rightarrow g=1)=(0=1\Rightarrow \neg x_0=1)$, и*

$$\varphi_j=\bigwedge_{i=0}^{n} x_i^{h(j,i,1)}\bigwedge\bigwedge_{i=0}^{n}(\Diamond x_i)^{h(j,i,2)},$$

где x_i — переменные, $k(j,\,i,\,1)$, $k(j,\,i,\,2)\in\{0,\,1\}$ и $x^1=\neg x$, $x^0=x$.

Доказательство. Пусть x_0 — переменная, не имеющая вхождения в квазитождество $f=1\Rightarrow g=1$. Тогда квазитождество $f\bigwedge(\neg g\leftrightarrow x_0)=1\Rightarrow x_0=0$ эквивалентно исходному. Далее доказательство в точности повторяет доказательство леммы 1 из [7] с единственным отличием: в заключительной фазе доказательства в дизъюнктивные члены посылки вводятся все члены $\Diamond x_t$ и x_t, не имеющие в них вхождений, а не только специальные, как в лемме 1 из [7].

Квазитождества в форме $\tilde{r}(f=1\Rightarrow g=1)$, эквивалентные квазитождеству $f=1\Rightarrow g=1$, называем *редуцированной формой квазитождества* $f=1\Rightarrow g=1$, а сами квазитождества вида $\tilde{r}(f=1\Rightarrow g=1)$ — *квазитождествами в редуцированной форме.*

Пусть $q=\tilde{r}(f=1\Rightarrow g=1)$ — квазитождество в редуцированной форме и $q\neq(0=1\Rightarrow\neg x_0=1)$, т. е. q незаведомо тождественно истинно. Вводим обозначения:

$\theta_0(q)=\{\varphi_j|k(j,\,0,\,1)=0\}$, $\theta_1(\varphi_j)=\{x_i|k(j,\,i,\,1)=0\}$,
$\theta_2(\varphi_j)=\{x_i|k(j,\,i,\,2)=0\}$,
$\mathcal{D}(q)$ — множество всех дизъюнктивных членов посылки q.

На любом подмножестве $\mathfrak{X}$ множества $\mathcal{D}(q)$ вводим модель $\langle\mathfrak{X},\,<,\,V\rangle$, где $\forall\varphi_i,\,\varphi_j\in\mathfrak{X}$,

$$\varphi_i<\varphi_j\Leftrightarrow((\theta_2(\varphi_i)\underset{\neq}{\supset}\theta_2(\varphi_j))\,\&\,(\theta_1(\varphi_j)\subseteq\theta_2(\varphi_i))),$$

а означивание V переменных квазитождества q задано следующим образом: $V(x_i)=\{\varphi_j|x_i\in\theta_1(\varphi_j)\}$.

Иррефлексивность и транзитивность $<$ прямо следуют из определения.

Лемма 5. *Пусть квазитождество q имеет редуцированную форму и $\langle H(k),\,<\rangle^+\vDash q$ не имеет места для некоторого $k>0$. Тогда существует $\mathfrak{X}\subseteq\mathcal{D}(q)$ такое, что модель $\langle\mathfrak{X},\,<,\,V\rangle$ обладает свойствами*

1) $\mathfrak{X}\cap\theta_0(q)\neq\varnothing$,

2) *для любого* $\varphi_j\in S_1(\mathfrak{X})$ $\theta_2(\varphi_j)=\varnothing$,

3) $\forall\varphi_j\in\mathfrak{X}$ *в модели* $\langle\mathfrak{X},\,<,\,V\rangle$ $\varphi_j\vDash_V\varphi_j$.

4) *для любого множества ∇ элементов модели $\mathfrak{X}$ существует $\varphi(\nabla)\in\mathfrak{X}$ такое, что*

$$\theta_2(\varphi(\nabla))=\bigcup_{\varphi_j\in\nabla}\theta_1(\varphi_j)\cup\bigcup_{\varphi_j\in\nabla}\theta_2(\varphi_j).$$

Доказательство. Пусть $q=(\bigvee\varphi_j=1\Rightarrow\neg x_0=1)$ и справедливо $\neg(H(k)^+\vDash q)$. Согласно предположению найдутся $a_i\in H(k)^+$, $0\leqslant i\leqslant n$, такие, что

$$\bigvee\varphi_j(a_i)=H(k),\quad \neg a_0\neq1. \tag{1}$$

В качестве $\mathfrak{X}$ выбираем элементы из $\mathcal{D}(q)$, соответствующие дизъюнктивным членам из (1), принимающим ненулевое значение. Докажем, что модель $\langle\mathfrak{X},\,<,\,V\rangle$ обладает нужными свойствами. Из (1) непосредственно следует, что $\mathfrak{X}\cap\theta_0(q)\neq\varnothing$.

Пусть φ_m — максимальный по ($<$) элемент из $\mathfrak{X}$. Так как $\varphi_m(a_i) \neq 0$, найдется элемент $b \in \varphi_m(a_i)$. Если b — максимальный в модели $\langle H(k), <, V\rangle$, то в силу его иррефлексивности $b \in \neg\Diamond a_i$ для любого a_i, $0 \leqslant i \leqslant n$, и, значит, $\theta_2(\varphi_m) = \varnothing$. Предположим, что b не максимальный в $H(k)$. Тогда для некоторого $d \in S_1(H(k))$ имеем $b < d$.

Согласно (1) $d \in \varphi_j(a_i)$ для некоторого $\varphi_j \in \mathfrak{X}$. Из $b \in \varphi_m(a_i)$, $d \in \varphi_j(a_i)$ и $b < d$, очевидно, следует $\theta_2(\varphi_m) \supseteq \theta_2(\varphi_j)$. Как показано выше, поскольку d — максимальный в $H(k)$, то $\theta_2(\varphi_j) = \varnothing$. Пусть $x_i \in \theta_1(\varphi_j)$. Тогда из $d \in \varphi_j(a_i)$ получаем $d \in a_i$, откуда $b < d$ и, наконец, $b \in \Diamond a_i$. Таким образом, $x_i \in \theta_2(\varphi_m)$. Следовательно, при $\theta_2(\varphi_m) \neq \varnothing$ получаем $\varphi_m < \varphi_j$, что противоречит максимальности φ_m. Поэтому справедливо $\theta_2(\varphi_m) = \varnothing$, и второе свойство из формулировки леммы доказано.

Доказательства остальных свойств — 3 и 4 — выделим в отдельные леммы.

Лемма 6. *Для любого* $\varphi_j \in \mathfrak{X}$ *в модели* $\langle \mathfrak{X}, <, V\rangle$ *справедливо соотношение* $\varphi_j \models_V \varphi_j$.

Доказательство. Прямо из определения означивания V на $\mathfrak{X}$ следует, что на φ_j истинна при V немодальная часть из конъюнкции φ_j. Рассмотрим модальную часть.

Предположим, что $\varphi_j \in \mathfrak{X}$ и $\varphi_j \models_V \Diamond x_i$. Тогда найдется $\varphi_m \in \mathfrak{X}$ такое, что $\varphi_j < \varphi_m$ и $\varphi_j \models_V x_i$. Последнее, согласно определению V, означает $x_i \in \theta_1(\varphi_m)$. В свою очередь, из определения отношения $<$ и из $\varphi_j < \varphi_m$ имеем $\theta_2(\varphi_j) \supseteq \theta_1(\varphi_m)$. Следовательно, $x_i \in \theta_2(\varphi_j)$.

Теперь предположим, что $x_i \in \theta_2(\varphi_j)$. Так как $\varphi_j \in \mathfrak{X}$, то найдется элемент $a \in \varphi_j(a_i)$. Рассмотрим множество $\varkappa(\varphi_j)$ элементов модели $H(k)$, где

$$\varkappa(\varphi_j) = \bigcup_{\varphi_d \in X} \varphi_d(a_i), \quad X = \{\varphi_d \mid \varphi_d \in \mathfrak{X},\ \theta_2(\varphi_d) = \theta_2(\varphi_j)\}.$$

Тогда $a \in \varkappa(\varphi_j)$ и либо a максимальный (по $<$) в $\varkappa(\varphi_j)$, либо $a < b$, где b — максимальный элемент множества $\varkappa(\varphi_j)$. Пусть, в зависимости от имеющего место случая, $c = a$ или $c = b$. Тогда $c \in \varphi_r(a_i)$, где $\theta_2(\varphi_r) = \theta_2(\varphi_j)$. Поэтому $c \in \Diamond a_i$. Следовательно, найдется $d \in H(k)$ такое, что $c < d$ и $d \in a_i$. Ввиду (1) найдется $\varphi_\alpha \in \mathfrak{X}$ такое, что $d \in \varphi_\alpha(a_i)$. Из $d \in a_i$ получаем $x_i \in \theta_1(\varphi_\alpha)$. Но так как $c < d$ и $c \in \varphi_r(a_i)$, то $\theta_2(\varphi_r) \supseteq \theta_2(\varphi_\alpha)$ и $\theta_2(\varphi_r) \supseteq \theta_1(\varphi_\alpha)$. Вспомним, что элемент c был максимальным в $\varkappa(\varphi_j)$ и $c < d$. Поэтому из $c < d$ имеем $\theta_2(\varphi_j) \neq \theta_2(\varphi_\alpha)$. Таким образом, $\theta_2(\varphi_j) \supset \theta_2(\varphi_\alpha)$ и $\theta_2(\varphi_j) \supseteq \theta_1(\varphi_\alpha)$, следовательно, $\varphi_j < \varphi_\alpha$. Так как $x_i \in \theta_1(\varphi_\alpha)$, получаем $\varphi_\alpha \models_V x_i$, откуда $\varphi_j \models_V \Diamond x_i$.

Итак, доказано соотношение $x_i \in \theta_2(\varphi_j) \Leftrightarrow \varphi_j \models_V \Diamond x_i$. Из него и истинности на φ_j при V немодальной части φ_j получаем $\varphi_j \models_V \varphi_j$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Для любого* $\nabla \subseteq \mathfrak{X}$ *существует* $\varphi(\nabla) \in \mathfrak{X}$ *такое, что*

$$\theta_2(\varphi(\nabla)) = \bigcup_{\varphi_j \in \nabla} \theta_1(\varphi_j) \cup \bigcup_{\varphi_j \in \nabla} \theta_2(\varphi_j).$$

Доказательство. Пусть $\nabla \subseteq \mathfrak{X}$, $\nabla = \{\varphi_j \mid \varphi_j \in \mathfrak{X} \cap \nabla\}$. В каждом подмножестве $\varphi_j(a_i)$ модели $H(k)$ выбираем по одному максимальному (по $<$ в $H(k)$) элементу b_j, $\varphi_j \in \nabla$. Среди элементов b_j выбираем антицепь всех минимальных по $<$ элементов, пусть это будут элементы $\{b_1, \ldots, b_m\}$. Согласно построению модели $H(k)$ существует элемент $c \in H(k)$ такой, что

$$\langle c\rangle = \langle b_1\rangle \cup \ldots \cup \langle b_m\rangle \cup \{b_1, \ldots, b_m\}. \tag{2}$$

Ввиду (1) элемент c входит в некоторое множество $\varphi_t(a_i)$, где $\varphi_t \in \mathfrak{X}$. Покажем, что в качестве $\varphi(\nabla)$ можно взять элемент φ_t.

Предположим, что $x_i \in \theta_2(\varphi_t)$. Тогда из $c \in \varphi_t(a_i)$ получаем $c \in \Diamond a_i$ и из (2) следует, что либо $b_r \in a_i$ для некоторого r, $1 \leqslant r \leqslant m$, либо

$b_r \in \Diamond a_i$, где $1 \leqslant r \leqslant m$. В первом случае из $b_r \in \varphi_r(a_i)$ и $b_r \in a_i$ получаем $x_i \in \theta_1(\varphi_r)$, а во втором из $b_r \in \varphi_r(a_i)$ и $b_r \in \Diamond a_i$ вытекает $x_i \in \in \theta_2(\varphi_r)$. Таким образом,

$$x_i \in \bigcup_{\varphi_j \in \nabla} \theta_1(\varphi_j) \cup \bigcup_{\varphi_j \in \nabla} \theta_2(\varphi_j).$$

Обратно, пусть $x_i \in \theta_2(\varphi_j)$, $\varphi_j \in \nabla$. Из $b_j \in \varphi_j(a_i)$ получаем $b_j \in \Diamond a_i$. Кроме того, для некоторого $b_\alpha \in \{b_1, \ldots, b_m\}$ имеет место $b_\alpha < b_j$ либо $b_j \in \{b_1, \ldots, b_m\}$. Тогда из (2) получаем $c < b_\alpha < b_j$ либо $c < b_j$. В обоих случаях $c \in \Diamond a_i$. Это вместе с $c \in \varphi_t(a_i)$ дает $x_i \in \theta_2(\varphi_t)$.

Предположим теперь, что $x_i \in \theta_1(\varphi_j)$, где $\varphi_j \in \nabla$. Тогда из $b_j \in \in \varphi_j(a_i)$ получаем $b_j \in a_i$. Но либо $c < b_j$, $b_j \in \{b_1, \ldots, b_m\}$, либо существует $b_\alpha \in \{b_1, \ldots, b_m\}$ такое, что $c < b_\alpha < b_j$. Из транзитивности $<$ в обоих случаях получаем $c \in \Diamond a_i$. Но $c \in \varphi_t(a_i)$, следовательно, $x_i \in \theta_2(\varphi_t)$. Лемма доказана.

Из лемм 6 и 7 следует, что модель $\langle \mathfrak{X}, <, V\rangle$ удовлетворяет свойствам 1—4 из леммы 5. Лемма 5 доказана.

Обратимся теперь к достаточному условию для ложности квазитождества в редуцированной форме на свободной модальной алгебре $\mathcal{F}_\omega(G)$.

Лемма 8. *Если q — квазитождество в редуцированной форме и существует $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{D}(q)$ такое, что модель $\langle \mathfrak{X}, <, V\rangle$ обладает свойствами 1—4 из леммы 5, то q ложно на свободной модальной алгебре $\mathcal{F}_\omega(G)$.*

Доказательство. Пусть $q = (\vee\varphi_j = 1 \Rightarrow \neg x_0 = 1)$, $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{D}(q)$ и на $\langle \mathfrak{X}, <, V\rangle$ выполняются свойства 1—4 из леммы 5. Рассмотрим n-характеристическую модель $H(n)$ логики G, где n больше суммы числа дизъюнктивных членов из $\mathcal{D}(q)$ и числа переменных из q, увеличенного на единицу.

Докажем, что модель $\langle \mathfrak{X}, <, V\rangle$ является открытой подмоделью модели $H(n)$. Для любого $\varphi_j \in S_1(\mathfrak{X})$ по свойству 2 из леммы 5 $\theta_2(\varphi_j) = \varnothing$. Поэтому если $\varphi_j \in S_1(\mathfrak{X})$ и $\varphi_i \in S_1(\mathfrak{X})$ и $\varphi_j \neq \varphi_i$, то $\theta_1(\varphi_j) \neq \theta_1(\varphi_i)$. Следовательно, разные элементы из $S_1(\mathfrak{X})$ различаются в $\langle \mathfrak{X}, <, V\rangle$ и означиванием переменных V. Поэтому $S_1(\mathfrak{X})$ как модель является открытой подмоделью модели $S_1(\langle H(n), <, V\rangle)$ (относительно означивания V из $\mathfrak{X}$ переменных из q).

Предположим, что мы уже доказали, что $S_t(\mathfrak{X})$ как модель с означиванием V из $\langle \mathfrak{X}, <, V\rangle$ является открытой подмоделью модели $S_t(H(n))$. Пусть φ_α, $\varphi_\beta \in \mathrm{Sl}_{t+1}(\mathfrak{X})$ и $\varphi_\alpha \neq \varphi_\beta$. При $\langle\varphi_\alpha\rangle = \langle\varphi_\beta\rangle$, согласно свойству 3 из леммы 5, выполнимому на $\mathfrak{X}$, имеем $\theta_2(\varphi_\alpha) = \theta_2(\varphi_\beta)$. Поэтому при $\theta_1(\varphi_\alpha) = \theta_2(\varphi_\beta)$ имели бы $\varphi_\alpha = \varphi_\beta$, следовательно, элементы φ_α и φ_β различаются означиванием V.

Следовательно, $S_t(\mathfrak{X})$ — открытая подмодель модели $S_t(H(n))$ и $\forall\varphi_\alpha \in \mathrm{Sl}_{t+1}(\mathfrak{X})$ (согласно построению $H(n)$) соответствует элемент из $\mathrm{Sl}_{t+1}(H(n))$ с точно таким же, как и у φ_α, множеством достижимых в $S_t(\mathfrak{X})$ элементов и точно таким же означиванием переменных. Из этого прямо следует, что $S_{t+1}(\mathfrak{X})$ является открытой подмоделью модели $S_{t+1}(H(n))$.

Продолжая это рассуждение вплоть до $S_\xi(\mathfrak{X})$, где ξ — глубина $\mathfrak{X}$, получаем, что $\langle \mathfrak{X}, <, V\rangle$ — открытая подмодель модели $H(n)$. Зафиксируем вложение $\mathfrak{X}$ в $H(n)$ как открытой подмодели. Элементы $\varphi_j \in \mathfrak{X}$ отождествляем с соответствующими элементами $H(n)$. Строим последовательность подмножеств $\overset{t}{\varphi}_\alpha$ основного множества $H(n)$ модели $\langle H(n), <, V\rangle$, где $\varphi_\alpha \in \mathfrak{X}$, $0 \leqslant t \leqslant r$, r — число дизъюнктивных членов посылки квазитождества q из $\mathfrak{X}$ такую, что при $\alpha \neq \beta$ $\overset{t}{\varphi}_\alpha \cap \overset{t}{\varphi}_\beta = \varnothing$, $\overset{t}{\varphi}_\alpha \subseteq \subseteq \overset{t+1}{\varphi}_\alpha$, $\varphi_\alpha \in \overset{t}{\varphi}_\alpha$.

Определяем подмножества $\overset{0}{\varphi}_\alpha$ как одноэлементные: $\forall\varphi_\alpha \in \mathfrak{X}$ $\overset{0}{\varphi}_\alpha \leftrightharpoons \leftrightharpoons \{\varphi_\alpha\}$. Зафиксируем некоторый максимальный в $\mathfrak{X}$ по $<$ элемент φ_μ и переопределим множество φ_μ^0 следующим образом:

$$\varphi_\mu^0 \leftrightharpoons \{\varphi_\mu\} \cup \left(S_1\left(H(n)\Big| \bigcup_{\varphi_\alpha \in \mathfrak{X}, \alpha \neq \mu} \varphi_\alpha^0\right)\right),$$

т. е. в φ_μ^0 включаем и все элементы глубины 1, не содержащиеся среди элементов $\mathfrak{X}$.

Предположим, что множества φ_α^t, где $t \geqslant 0$ уже построены. Пусть $\varphi_{\alpha 1}, \ldots, \varphi_{\alpha(t+1)}$ — произвольные $t+1$ элементов из $\mathfrak{X}$. Ввиду условия 4 леммы 5, выполнимого на $\mathfrak{X}$, для $\nabla = \{\varphi_{\alpha 1}, \ldots, \varphi_{\alpha(t+1)}\}$ найдется $\varphi(\nabla) \in \mathfrak{X}$ такое, что

$$\theta_2(\varphi(\nabla)) = \bigcup_{\varphi_j \in \nabla} \theta_1(\varphi_j) \cup \bigcup_{\varphi_j \in \nabla} \theta_2(\varphi_j). \tag{3}$$

Зафиксируем $\varphi(\nabla)$ для любого такого ∇.

Если имеет место

(А) $$\theta_1(\varphi(\nabla)) \subseteq \theta_2(\varphi(\nabla)),$$

то подмножество $[\varphi_{\alpha 1}^t, \ldots, \varphi_{\alpha(t+1)}^t]$ модели определяем равенством

$$[\varphi_{\alpha 1}^t, \ldots, \varphi_{\alpha(t+1)}^t] \leftrightharpoons \neg\left(\bigcup_{\varphi_\beta \in \mathfrak{X}} \varphi_\beta^t\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha_j \in \{\alpha 1, \ldots, \alpha(t+1)\}} \Diamond\, \varphi_{\alpha_j}^t\right) \cap \left(\bigcap_{j \notin \{\alpha 1, \ldots, \alpha(t+1)\}} \neg \Diamond\, \varphi_j^t\right).$$

Если же имеет место

(Б) $$\theta_1(\varphi(\nabla)) \not\subseteq \theta_2(\varphi(\nabla)),$$

то $[\varphi_{\alpha 1}^t, \ldots, \varphi_{\alpha(t+1)}^t] \subseteq H(n)$ определяем равенством

$$[\varphi_{\alpha 1}^t, \ldots, \varphi_{\alpha(t+1)}^t] \leftrightharpoons \neg\left(\bigcup_{\varphi_\beta \in \mathfrak{X}} \varphi_\beta^t\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha_j \in \{\alpha 1, \ldots, \alpha(t+1)\}} \Diamond\, \varphi_{\alpha_j}^t\right) \cap$$
$$\cap \left(\bigcap_{j \notin \{\alpha 1, \ldots, \alpha(t+1)\}} \neg \Diamond\, \varphi_j^t\right) \cap \neg \Diamond \left(\neg\left(\bigcup_{\varphi_\beta \in \mathfrak{X}} \varphi_\beta^t\right) \cap \left(\bigcap_{\alpha_j \in \{\alpha 1, \ldots, \alpha(t+1)\}} \Diamond\, \varphi_{\alpha_j}^t\right) \cap\right.$$
$$\left.\cap \left(\bigcap_{j \notin \{\alpha 1, \ldots, \alpha(t+1)\}} \neg \Diamond\, \varphi_j^t\right)\right).$$

Пусть $\varphi(\nabla) = \varphi_j$. Множество $[\varphi_{\alpha 1}^t, \ldots, \varphi_{\alpha(t+1)}^t]$ присоединяем к множеству φ_j^t. Поступив так со всеми ∇, состоящими из $t+1$ элементов, и расширив указанным образом множества φ_j^t, получаем множества φ_j^{t+1}.

Покажем, что $\varphi_\alpha^{t+1} \cap \Omega_\beta^{t+1} = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$. Действительно, сами присоединяемые множества $[\varphi_{\alpha 1}^t, \ldots, \varphi_{\alpha(t+1)}^t]$ не пересекаются между собою и не пересекаются с множествами φ_j^t, $\varphi_j \in \mathfrak{X}$. Кроме того, каждое из присоединяемых множеств присоединялось только к одному множеству φ_j^t. Следовательно, множества φ_j^{t+1} не будут пересекаться.

Указанным образом строим все множества φ_j^t $0 \leqslant t \leqslant r$. Пусть построение завершено. Обратимся к доказательству некоторых свойств построенной последовательности множеств. Доказательства свойств выделим в отдельные леммы.

Лемма 9. *При* $0 \leqslant t \leqslant r-1$ *из* $x \in H(n), x \notin \bigcup \varphi_j^t$, $\varphi_j \in \mathfrak{X}$ *следует, что для некоторых* $\varphi_i \in \mathfrak{X}$, $1 \leqslant i \leqslant t+1$, *справедливо* $x \in \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant t+1} \Diamond\, \varphi_i^t$.

Доказательство проведем индукцией по t. Пусть $t=0$ и $x \notin \bigcup \varphi_j^0$. Но в силу определения φ_μ имеем $\bigcup \varphi_j^0 \supseteq S_1(H(n))$. Следовательно, $x \notin S_1(H(n))$ и существует $y \in S_1(H(n))$ такое, что $x < y$. Кроме того, $y \in \varphi_i^0$ при некотором $\varphi_i \in \mathfrak{X}$. Тогда $x \in \Diamond\, \varphi_i^0$, что и требовалось. Пусть для $t=k$ утверждение леммы доказано. Предположим, что $x \in H(n)$ и $x \notin \bigcup \varphi_j^{k+1}$. В силу $\varphi_j^{k+1} \supseteq \varphi_j^k$, тогда и $x \notin \bigcup \varphi_j^k$. Это по индукционному предположению дает $x \in \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k+1} \Diamond \varphi_i^k$ для некоторых $\varphi_i \in \mathfrak{X}$. Рассмотрим множество $[\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{k+1}^k]$. Согласно построению элементов φ_α^{k+1} это множество включалось в φ_ξ^{k+1}, где $\varphi_\xi = \varphi(\nabla)$, $\nabla = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1}\}$ и $\varphi(\nabla)$ удовлетворяло (3).

Пусть в определении множества $[\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{k+1}^k]$ имело место (А). Тогда если $x \in \neg \Diamond \varphi_j^k$ при $j \neq 1, \ldots, k+1$, то $x \in [\varphi_j^k, \ldots, \varphi_{k+1}^k]$ и $x \in \in \varphi_\xi^{k+1}$ — противоречие. Поэтому найдется $\varphi_{k+2} \in \mathfrak{X}$ такое, что $x \in \Diamond \varphi_{k+2}^k$ и $\varphi_{k+2} \notin \nabla$. Тогда $x \in \Diamond \varphi_{k+2}^{k+1}$ и справедливо $x \in \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k+2} \Diamond \varphi_i^{k+1}$.

Предположим, что в определении множества $[\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{k+1}^k]$ имело место (Б). Тогда при $x \notin \Diamond \varphi_j^k$, $\varphi_j \notin \nabla$ либо $x \in [\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{k+1}^k]$, либо существуют элементы y, достижимые по $<$ из x и обладающие свойствами: $y \notin \bigcup \varphi_j^k$, $y \in \Diamond \varphi_j^k$, $\varphi_j \in \nabla$ и $y \notin \Diamond \varphi_j^k$, $\varphi_j \notin \nabla$. В первом случае, так как множество $[\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{k+1}^k]$ мы присоединяли к множествам φ_ξ^k при построении φ_ξ^{k+1}, получаем $x \in \varphi_\xi^{k+1}$ — противоречие с $x \notin \bigcup \varphi_j^{k+1}$.

Рассмотрим второй случай. Выбираем максимальное в $H(n)$ по $<$ y с указанным свойством. Согласно определению множества $[\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{k+1}^k]$ в случае (Б) получаем $y \in [\varphi_1^k, \ldots, \varphi_{k+1}^k]$ и $y \in \varphi_\xi^{k+1}$, где $\varphi_\xi = \varphi(\nabla)$ и $\nabla = = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1}\}$. Тогда $x \in \Diamond \varphi_\xi^{k+1}$ и, поскольку $\varphi(\nabla)$ удовлетворяло (3),

$$\theta_1(\varphi_\xi) = \theta_1(\varphi(\nabla)) \not\subseteq \bigcup_{j \in \{1, \ldots, k+1\}} \theta_1(\varphi_j).$$

Следовательно, $\varphi_\xi \notin \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1}\}$ и $\varphi_{k+2} \rightleftharpoons \varphi_\xi$,

$$x \in \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k+1} \Diamond \varphi_i^k \cap \Diamond \varphi_{k+2}^{k+1} \subseteq \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant k+2} \Diamond \varphi_i^{k+1},$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Напомним, что r — число дизъюнктивных членов в $\mathfrak{X}$ и r — максимальный верхний индекс в последовательности построенных множеств φ_j^k, $0 \leqslant k \leqslant r$.

Лемма 10. *Для любого* $x \in H(n)$ $x \in \bigcup \varphi_j^r$.

Доказательство. Предположим, что $x \notin \bigcup \varphi_j^{r-1}$. Тогда согласно лемме 9 $x \in \bigcap_{1 \leqslant i \leqslant r} \Diamond \varphi_i^{r-1}$. Так как $\varphi_j \in \mathfrak{X}$, отличных от $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$, нет, то имеем $\forall \varphi_j \in \mathfrak{X}$ $x \in \Diamond \varphi_j^{r-1}$.

Предположим, что в определении множества $[\varphi_1^{r-1}, \ldots, \varphi_r^{r-1}]$ имел место случай (А). Тогда $x \in [\varphi_1^{r-1}, \ldots, \varphi_r^{r-1}]$. Следовательно, $x \in \varphi_j^r$, где $\varphi_j = \varphi(\nabla)$ и $\nabla = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\}$. Таким образом, $x \in \bigcup \varphi_j^r$.

Предположим, что в определении множества $[\varphi_1^{r-1}, \ldots, \varphi_r^{r-1}]$ имел место случай (Б). Тогда $\varphi(\nabla) \in \mathfrak{X}$, где $\nabla = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_r\} = \mathfrak{X}$, и $\theta_1(\varphi(\nabla)) \not\subseteq \not\subseteq \theta_2(\varphi(\nabla))$, где по (3) получаем $\theta_1(\varphi(\nabla)) \not\subseteq \bigcup_{\varphi_j \in \nabla = \mathfrak{X}} \theta_1(\varphi_j)$. Но это противоречит $\varphi(\nabla) \in \mathfrak{X}$. Так что случай (Б) невозможен. Лемма доказана.

Из того, что $\varphi_j^r \cap \varphi_i^r \neq \varnothing$ при $j \neq i$, и леммы 10 следует, что означивание Ψ переменных x_i квазитождества q на шкале $\langle H(n), <\rangle$, задаваемое соотношением

$$\forall x \in \varphi_j^r \ x \models_\Psi x_i \Leftrightarrow x_i \in \theta_1(\varphi_j),$$

определено корректно.

Лемма 11. *Для любого* $x \in \varphi_j^r$ *в модели* $\langle H(n), <, \Psi\rangle$ *справедливо* $x \models_\Psi \varphi_j$.

Доказательство проводим индукцией по минимальному индексу t такому, что $x \in \varphi_j^t$. Предположим, что $x \in \varphi_j^0$, т. е. $x \in \{\varphi_j\}$, $j \neq \mu$, или же $x \in \varphi_\mu^0$. Во втором случае x — максимальный в $H(n)$ по $<$, и означивание Ψ на x совпадает с означиванием V на φ_μ в модели $\langle\mathfrak{X}, <, V\rangle$. Причем φ_μ — максимальный в $\mathfrak{X}$ по $<$, и согласно свойству 3 леммы 5, выполнимому на модели $\langle\mathfrak{X}, <, V\rangle$, имеем $\varphi_\mu \models_V \varphi_\mu$. Но так как означивания Ψ и V на x, φ_μ совпадают, получаем $x \models_\Psi \varphi_\mu$. Пусть имел место первый случай: $x \in \{\varphi_j\}$, $x = \varphi_j$. Заметим, что вновь по свойству 3 леммы 5 в модели $\langle\mathfrak{X}, <, V\rangle$, как открытой подмодели модели $\langle H(n), <, V\rangle$, справедливо $\varphi_j \models_V \varphi_j$. Пусть $y \in \langle\varphi_j\rangle$. Тогда $y \in \mathfrak{X}$ и $y = \varphi_\xi$, поскольку $\mathfrak{X}$ — открытая подмодель модели $\langle H(n), <, V\rangle$. Поэтому $y = \varphi_\xi \in \varphi_\xi^0$ и $y \models_\Psi x_i \Leftrightarrow x_i \in \theta_1(\varphi_\xi)$, но по определению V в $\mathfrak{X}$ $\varphi_\xi \models_V x_i \Leftrightarrow x_i \in \theta_1 \varphi_\xi)$. Следовательно, означивания V и Ψ на y совпадают. Таким образом, модели $\langle\langle\varphi_j\rangle, <, V\rangle$ и $\langle\langle\varphi_j\rangle, <, \Psi\rangle$ изоморфны. Тогда из $\varphi_j \models_V \varphi_j$ получаем $\varphi_j \models_\Psi \varphi_j$ и $x = \varphi_j$, т. е. $x \models_\Psi \varphi_j$. При $t = 0$ утверждение леммы доказано.

Пусть при $t \leqslant k$ утверждение леммы доказано и $x \in \varphi_j^{k+1} | \varphi^k$, где $\varphi_j = \varphi(\nabla)$ и $\nabla = \{\varphi_{\alpha 1}, \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}\}$, и $x \in [\varphi_{\alpha 1}^k, \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}^k]$ и $\varphi(\nabla)$, (φ_j) удовлетворяет (3). В соответствии с определением Ψ на x имеем $x \models_\Psi \varphi_j^-$, где φ^- — немодальная часть конъюнкции φ_j (т. е. в φ_j^- вошли только конъюнктивные члены из φ_j, не содержащие модальной связки $\Diamond$).

Предположим, что $x_i \in \theta_2(\varphi_j)$. Тогда согласно (3) $x_i \in \theta_1(\varphi_m)$, $\varphi_m \in \nabla$ или $x_i \in \theta_2(\varphi_m)$, $\varphi_m \in \nabla$. Пусть $x_i \in \theta_1(\varphi_m)$. Ввиду $x \in [\varphi_{\alpha 1}^k, \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}^k]$ имеем $x \in \Diamond\varphi_m^k$. Следовательно, найдется $y \in H(n)$, где $x < y$, и $y \in \varphi_m^k$. По индуктивному предположению тогда $y \models_\Psi \varphi_m$. Но $x_i \in \theta_1(\varphi_m)$ означает по определению $\models_\Psi$, что $y \models_\Psi x_i$. Поэтому $x \models_\Psi \Diamond x_i$.

Пусть $x_i \in \theta_2(\varphi_m)$, где $\varphi_m \in \nabla$. Тогда из $x \in [\varphi_{\alpha 1}^k, \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}^k]$ получаем $x \in \Diamond \varphi_m^k$. Поэтому найдется $y \in H(n)$ такое, что $x < y$ и $y \in \varphi_m^k$. Снова по индукционному предположению $y \models_\Psi \varphi_m$. Но $x_i \in \theta_2(\varphi_m)$, следовательно, $y \models_\Psi \Diamond x_i$ и $x \models_\Psi \Diamond x_i$. Таким образом, доказано соотношение

$$x_i \in \theta_2(\varphi_j) \Rightarrow x \models_\Psi \Diamond x_i.$$

Обратно, предположим, что $x \models_\Psi \Diamond x_i$. Тогда найдется $y \in H(n)$, где $x < y$ и $y \models_\Psi x_i$. Напомним, что $x \in [\varphi_{\alpha 1}^k, \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}^k]$.

Предположим вначале, что $y \in \bigcup \varphi_j^k$, т. е. $y \in \varphi_\alpha^k$ при некотором $\varphi_\alpha \in \mathfrak{X}$. Тогда из $x < y$ получаем, что $x \in \Diamond \varphi_\alpha^k$. Кроме того, из $x \in [\varphi_{\alpha 1}^k, \ldots \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}^k]$ вытекает $\varphi_\alpha \in \{\varphi_{\alpha 1}, \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}\}$. По индукционному предположению из $y \in \varphi_\alpha^k$ имеем $y \models_\Psi \varphi_\alpha$, следовательно, $x_i \in \theta_1(\varphi_\alpha)$. Вспомним, что $\varphi_j = \varphi(\nabla)$ и $\varphi(\nabla)$ и удовлетворяло соотношению (3). Поэтому

$$\theta_2(\varphi_j) \supseteq \bigcup_{\varphi_\beta \in \nabla} \theta_1(\varphi_\beta).$$

Таким образом, из $x_j \in \theta_1(\varphi_\alpha)$ и $\varphi_\alpha \in \{\varphi_{\alpha 1}, \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}\} = \nabla$ получаем $x_i \in \theta_2(\varphi_j)$.

Рассмотрим теперь случай $y \notin \bigcup \varphi_j^k$. В определении множества $[\varphi_{\alpha 1}^k, \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}^k]$ возможны случаи (А) и (Б).

Предположим, что имело место (А). Тогда $\theta_1(\varphi(\nabla)) \subseteq \theta_2(\varphi(\nabla))$ и $\varphi(\nabla) = \varphi_j$. Из $y \notin \bigcup \varphi_j^k$, $\varphi_j \in \mathfrak{X}$ по лемме 9 получаем $y \in \bigcap_{1 \leqslant \delta \leqslant k+1} \Diamond \varphi_\delta^k$. Из $x < y$ и $x \in [\varphi_{\alpha 1}^k, \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}^k]$ следует, что

$$\{\varphi_{\alpha 1}, \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}\} \rightleftharpoons \nabla = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+1}\}$$

и $y \in [\varphi_{\alpha 1}^k, \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}^k]$. Но тогда $y \in \varphi_j^{k+1} \setminus \varphi_j^k$ и из $y \models_\Psi x_i$ получаем $x_i \in \theta_1(\varphi_j)$. Но из $\theta_1(\varphi(\nabla)) \subseteq \theta_2(\varphi(\nabla))$ и $\varphi(\nabla) = \varphi_j$ вытекает $x_i \in \theta_2(\varphi_j)$. Итак, $x_i \in \theta_2(\varphi_j)$.

Предположим, что имело место (Б). Вновь из $y \notin \bigcup \varphi_j^k$ по лемме 9 получаем $y \in \bigcap_{1 \leqslant \delta \leqslant k+1} \Diamond \varphi_\delta^k$. Так как $x < y$, то, как и ранее, $\{\varphi_1, \ldots$

$\ldots, \varphi_{k+1}\} = \{\varphi_{\alpha 1}, \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}\} = \nabla$, следовательно,

$$y \in \neg \left(\bigcup \varphi_j^k \right) \cap \left(\bigcap_{\varphi_\alpha \in \nabla} \Diamond \varphi_\alpha^k \right) \cap \left(\bigcap_{\varphi_\alpha \notin \nabla} \neg \Diamond \varphi_\alpha^k \right). \tag{4}$$

Но (4) противоречит $x \in [\varphi_{\alpha 1}^k, \ldots, \varphi_{\alpha(k+1)}^k]$ и (Б), поэтому в предположении $y \notin \bigcup \varphi_j^k$ случай (Б) невозможен.

Таким образом, доказали, что $x \models_\Psi \Diamond x_j \Rightarrow x_i \in \theta_2(\varphi_j)$ и $x_i \in \theta_2 \times \times (\varphi_j) \Leftrightarrow x \models_\Psi \Diamond x_i$. Последнее соотношение вместе с $x \models_\Psi \varphi_j^-$ дает $x \models \models_\Psi \varphi_j$. Лемма доказана.

Вернемся к доказательству леммы 8. В силу соотношения, связывающего истинность формул на элементах модели и вхождение этих элементов в подмножества модели, являющиеся значениями терма, получаемого из формулы, на истинностных значениях переменных, имеем

$$\forall x \in H(n)\, x \in \varphi_j(\Psi(x_i)) \Leftrightarrow x \models_\Psi \varphi_j(x_i).$$

В силу лемм 10, 11 и указанного соотношения

$$\bigvee_{\varphi_i \in \mathfrak{X}} \varphi_j(\Psi(x_i)) = H(n),$$

значит,

$$\bigvee_{\varphi_j \in \mathscr{D}(q)} \varphi_j(\Psi(x_j)) = H(n).$$

Кроме того, по свойству 1 из леммы 5 $\mathfrak{X} \cap \theta_0(q) \neq \varnothing$. Значит, $x_0 \in \theta_1(\varphi_j)$, где $\varphi_j \in \mathfrak{X}$. Тогда $\varphi_j \in \varphi_j^r$ и $\varphi_j \in \Psi(x_0) \neq \varnothing$. Таким образом, квазитождество q ложно на алгебре $\langle H(n), <\rangle^+$ при значении переменных $x_i = \Psi(x_i)$.

По следствию 2 имеем $\mathscr{F}_n(G) \cong \langle H(n), <\rangle^+(V(p_i))$. Поэтому для завершения доказательства леммы 8 достаточно показать, что все $\Psi(x_i)$ являются элементами алгебры $\mathscr{F}_n(G)$. Так как

$$\Psi(x_i) = \bigcup_{x_i \in \theta_1(\varphi_j)} \varphi_j^r,$$

то достаточно показать, что $\forall \varphi_j \in \mathfrak{X}\ \varphi_j^t \in \mathscr{F}_n(G)$. Делаем это индукцией по t. В силу леммы 3 любой элемент модели $\langle H(n), <, V\rangle$ является формульным. Значит, все φ_α^0 входят в алгебру $\langle H(n), <, V\rangle(V(p_i))$. Предположим, уже доказано, что элементы φ_α^t, $\varphi_\alpha \in \mathfrak{X}$ входят в $\langle H(n), <\rangle^+(V(p_i))$. Множества φ_α^{t+1} получаются из множеств φ_α^t присоединением множеств вида $[\varphi_{\alpha 1}^t, \ldots, \varphi_{\alpha(t+1)}^t]$. Поэтому достаточно показать формульность в $H(n)$ последних множеств. Пусть $f(\varphi_\alpha^t)$ — выделяющие множества φ_α^t формулы. Если при определении множества $[\varphi_{\alpha 1}^t, \ldots$ $\ldots, \varphi_{\alpha(t+1)}^t$ имело место (А), то это множество будет выделяться формулой (где $\nabla = \{\varphi_{\alpha 1}, \ldots, \varphi_{\alpha(t+1)}\}$)

$$F = \neg \left(\bigwedge_{\varphi_\alpha \in \mathfrak{X}} f(\varphi_\alpha^t) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\varphi_\alpha \in \nabla} \Diamond f(\varphi_\alpha^t) \right) \wedge \left(\bigwedge_{\varphi_\alpha \notin \nabla} \neg \Diamond f(\varphi_\alpha^t) \right),$$

а если при определении $[\varphi_{\alpha 1}^t, \ldots, \varphi_{\alpha(t+1)}^t]$ имело место (Б), то данное множество выделяется формулой $F \wedge \neg \Diamond F$. Продолжая доказательство по индукции, получаем, что $\varphi_j^r \in \mathscr{F}_n(G)$. Лемма доказана.

Непосредственно из предложения 4 и лемм 5, 8 и следствия 2 вытекает.

Теорема 12. (Критерий допустимости в G). *Правило вывода A/B допустимо в модальной системе G, если и только если $\tilde{r}(A = 1 \Rightarrow B = 1) = (0 = 1 \Rightarrow \neg x_0 = 1)$ или для любого подмножества $\mathfrak{X}$ множества $\mathscr{D}(\tilde{r}(A = 1 \Rightarrow B = 1))$ в модели $\langle \mathfrak{X}, <, V\rangle$ нарушается одно из следующих условий*:

1) $\mathfrak{X} \cap \theta_0(\tilde{r}(A = 1 \Rightarrow B = 1)) \neq \varnothing$,

2) $\forall \varphi_j \in \mathfrak{X}$ *в модели* $\langle \mathfrak{X}, <, V\rangle$ $\varphi_j \models_V \varphi_j$,

3) *для любого* $\nabla \subseteq \mathfrak{X}$ *существует* $\varphi(\nabla) \in \mathfrak{X}$ *такое, что* $\theta_2(\varphi(\nabla)) = \bigcup_{\varphi_j \in \nabla} \theta_1(\varphi_j) \cup \bigcup_{\varphi_j \in \nabla} \theta_2(\varphi_j)$.

Заметим, что свойство 2 из леммы 5 не вошло в перечень условий, так как оно является следствием свойства 3 из леммы 5 и приводилось отдельно лишь для удобства доказательства.

Непосредственно из теоремы 12 и предложения 4 следует

Теорема 13. *Модальная система G является разрешимой по допустимости.*

В силу соответствия между допустимыми правилами G и квазитождествами, истинными на $\mathscr{F}_\omega(G)$, из теоремы 13 получаем, что квазиэкваациональная теория алгебры $\mathscr{F}_\omega(G)$ разрешима.

Замечание. Несложно проверить, что система G, как и логики S4 и Grz, обладает дизъюнктивным свойством: из $\Box A \vee \Box B \in G$ следует $A \in G$ или $B \in G$. Действительно, предположим, что $A \notin G$ и $B \notin G$. Тогда, в силу аппроксимируемости системы G конечными иррефлексивными транзитивными шкалами [1], найдутся две такие шкалы $\langle T_1, < \rangle$ и $\langle T_2, < \rangle$, причем $\langle T_1, < \rangle \models G$, $\langle T_2, < \rangle \models G$ и $\urcorner(\langle T_1, < \rangle \models A)$, $\urcorner(\langle T_2, < \rangle \models B)$. Возьмем шкалу $\mathscr{T}$, состоящую из шкал $\langle T_1, < \rangle$, $\langle T_2, < \rangle$ и иррефлексивной точки, из которой достижимы элементы шкал $\langle T_1, < \rangle$ и $\langle T_2, < \rangle$, а элементы шкал T_1 и T_2 взаимно недостижимы. Тогда легко видеть, что $\mathscr{T} \models G$ и $\urcorner(\mathscr{T} \models \Box A \vee \Box B)$. Следовательно, $\Box A \vee \Box B \notin G$.

Кроме того, для любой формулы A $A \in G \Leftrightarrow \Box A \in G$. Действительно, если $A \in G$, то и $\Box A \in G$, так как G замкнута относительно правила $x/\Box x$. Если $A \notin G$, то A ложна на некоторой иррефлексивной транзитивной шкале $\langle T, < \rangle$. Возьмем шкалу W, полученную из T присоединением иррефлексивного элемента, из которого достижимы все элементы из T. Тогда, очевидно, $\urcorner(W \models \Box A)$, т. е. $\Box A \notin G$.

Произвольная универсальная формула сигнатуры алгебры $\mathscr{F}_\omega(G)$ на $\mathrm{Var}(G)$ эквивалентна конъюнкции формул вида $f = 1 \Rightarrow g_1 = 1 \vee \ldots \vee g_n = 1$. Любая такая формула, в силу сделанного выше замечания, эквивалентна на $\mathscr{F}_\omega(G)$ формуле $f = 1 \Rightarrow \left(\bigvee_{i=1}^{n} \Box g_i\right) = 1$. Поэтому из теоремы 13 непосредственно следует

Теорема 14. *Универсальная теория свободной алгебры $\mathscr{F}_\omega(G)$ является разрешимой.*

§ 3. О БАЗИСЕ ДОПУСТИМЫХ ПРАВИЛ СИСТЕМЫ G

Проблема А. В. Кузнецова о конечности состоит в определении, имеет ли логика конечный базис допустимых правил. Для модальных систем S4 и Grz и интуиционистского исчисления высказываний в [8, 9] получено отрицательное решение. Основа подхода к этим задачам — соответствие между базисами допустимых правил и базисами квазитождеств свободной алгебры счетного ранга многообразия алгебр, соответствующего логике. Ниже применяется именно этот подход к изучению базиса допустимых правил G. Неоговариваемые обозначения и определения можно найти в [9].

Согласно лемме 1 из [9], множество $\{A_i/B_i \mid i \in I\}$ образует базис допустимых правил G, если и только если множество квазитождеств $\{A_i = 1 \Rightarrow B_i = 1 \mid i \in I\} \cup \{A = 1 \mid A \in G\}$ является базисом квазитождеств свободной алгебры $\mathscr{F}_\omega(G)$.

Строим последовательность иррефлексивных транзитивных шкал E_n^i, $i < \omega$. Пусть $E_n^1 = \langle E_k^1, <_1 \rangle$ — $(2^n + 1)$-элементная антицепь по $<_1$; $T(E_n^1)$ — множество всевозможных антицепей (содержащих один или более элементов) во множестве E_n^1;

$$E_n^2 = \langle E_n^1 \cup (T(E_n^1) \setminus \{E_n^1\}), <_2 \rangle,$$

где $(<_2)=(<_1)\cup(\lhd)$, $x\lhd y\Leftrightarrow((x\in T(E_n^1))\wedge(y\in E_n^1)\wedge(y\in x))$. Предположим, что E_n^i уже построено, $i\geqslant 2$. Тогда, через $T(E_n^i)$ обозначаем множество всех антицепей из E_n^i по $<_i$, содержащих не менее одного элемента глубины i. Полагаем

$$E_n^{i+1}=\langle E_n^i\cup T(E_n^i),\ <_{i+1}\rangle,$$

где $(<_{i+1})\supset(<_i)$ и

$$\forall x,\ y\in E_n^{i+1} x\lhd y\Leftrightarrow((x\in T(E_n^i))\wedge(y\in E_n^i)\wedge(y\in x)),$$

$(<)$ — транзитивное отношение $(\leqslant_i)\cup(\lhd)$.

Легко видеть, что $E_n^{i+1}\supseteq E_n^i$ и E_n^i является открытой подшкалой шкалы E_n^{i+1}. Поэтому корректно следующее определение шкалы $\langle E_n$. $<\rangle$: $E_n=\bigcup\limits_{i\geqslant 1}E_n^i$, $(<)=\bigcup\limits_{i\geqslant 1}(<_i)$.

Построенные шкалы E_n устроены весьма похоже на шкалы E_n из работ [8, 9]. Две нижеследующие леммы также доказываются подобно соответствующим леммам из этих работ. Но прямая ссылка на эти леммы не проходит, и нам придется воспроизвести доказательства.

Лемма 15. *При $n\geqslant 2$ n-порожденные подалгебры алгебры E_n^+ входят в квазимногообразие, порожденное свободной алгеброй $\mathcal{F}_\omega(G)$.*

Доказательство. Пусть $a_i\subseteq E_n$, $i\leqslant n$, и $\mathfrak{B}(a_i)$ — порождаемая элементами a_i подалгебра алгебры E_n^+. Тогда для некоторых двух элементов x, $y\in S_1(E_n)$ и любого a_i либо x, $y\in a_i$, либо x, $y\notin a_i$. Пусть L_n — шкала, получающаяся из E_n слиянием элементов x и y в один элемент $[x, y]$, т. е. $L_n=\langle(E_n\backslash\{x, y\})\cup\{[x, y]\}, <\rangle$, где $<$ на $E_n\backslash\{x, y\}$ совпадает с $<$ из $\langle E_n, <\rangle$ и $\forall t(t<[x, y]\Leftrightarrow(t<x)\vee(t<y))$.

Пусть $b_i\subseteq L_n$, где $b_i\rightleftharpoons(a_i\cap(E_n\backslash\{x, y\}))\cup c$,

$$c=\begin{cases}\varnothing, & x\notin a_i,\\ [x, y], & x\in a_i,\end{cases}$$

$\mathfrak{A}(b_i)$ — подалгебра алгебры L_n^+, порождаемая элементами b_i, $i\leqslant n$. Алгебры $\mathfrak{B}(a_i)$ и $\mathfrak{A}(b_i)$ являются изоморфными. Действительно, для любого терма Ψ

$x\in\Psi(a_1, \ldots, a_n)\Leftrightarrow y\in\Psi(a_1, \ldots, a_n)$, что легко показать индукцией по длине Ψ. Также индукцией по длине Ψ проверяется, что

$$[x, y]\in\Psi(b_1, \ldots, b_n)\Leftrightarrow x,\ y\in\Psi(a_1, \ldots, a_n),$$
$$\forall r\in E_n\backslash\{x, y\}(r\in\Psi(a_1, \ldots, a_n)\Leftrightarrow r\in\Psi(b_1, \ldots, b_n)).$$

На основании этого заключаем, что отображение f из $\mathfrak{B}(a_i)$ в $\mathfrak{A}(b_i)$, переводящее $\Psi(a_1, \ldots, a_n)$ в $\Psi(b_1, \ldots, b_n)$, определено корректно и является изоморфизмом. Таким образом, $\mathfrak{A}(b_i)\cong\mathfrak{B}(a_i)$ и для доказательства леммы достаточно показать, что $\mathfrak{A}(b_i)\in Q(\mathcal{F}_\omega(G))$.

Докажем, что существует p-морфизм шкалы $H(n)$ на шкалу L_n. Так как $S_1(L_n)$ состоит из 2^n элементов, то, очевидно, существует p-морфизм f_1 шкалы $S_1(H(n))$ на шкалу $S_1(L_n)$-тривиальный. Согласно построению L_n для каждой антицепи $\varkappa$ из $S_1(L_n)$ существует $a\in S_2(L_n)$ (причем не более трех таких элементов) со свойством $\langle a\rangle=\varkappa$. Так как шкалы $S_1(H(n))$ и $S_1(L_n)$ изоморфны, то это позволяет построить p-морфизм f_2 из $S_2(H(n))$ на $S_2(L_n)$. Действительно, вначале для каждого $a\in\mathrm{Sl}_2(L_n)$ находим элемент b из $\mathrm{Sl}_2(H(n))$ такой, что $f_1(\langle b\rangle)=\langle a\rangle$, и отображаем его с помощью f_2 в a. Получаем частичное отображение из $\mathrm{Sl}_2(\mathrm{H}(n))$ на $\mathrm{Sl}_2(L_n)$. Для каждого $c\in\mathrm{Sl}_2(H(n))$, еще не включенного в область определения f_2, существует $e\in\mathrm{Sl}_2(L_n)$ такое, что $f_1(\langle c\rangle)=\langle e\rangle$. Элемент c отображаем f_2 в e. Очевидно, что получили p-морфизм f_2 из $S_2(H(n))$ на $S_2(L_n)$ $(f_2\restriction S_1(H(n))\rightleftharpoons f_1)$.

Предположим, что уже найден p-морфизм f_i шкалы $S_i(H(n))$ на шкалу $S_i(L_n)$, причем сохраняющий глубину элементов. (Вообще, любой p-морфизм конечных G-шкал сохраняет глубину). Рассмотрим элемент $a \in \mathrm{Sl}_{i+1}(L_n)$. Возьмем прообраз множества $\langle a \rangle$ при f_i: $f_i^{-1}(\langle a \rangle)$. Так как f_i сохраняет глубину, в $f_i^{-1}(\langle a \rangle)$ существуют элементы глубины i. Причем в силу построения L_n существует не более двух элементов — $\tilde{a}_j$, $\tilde{a}_j \neq a$, $j = 1, 2$, из $\mathrm{Sl}_{i+1}(L_n)$ таких, что $\langle a \rangle = \langle a_j \rangle$. Согласно построению $H(n)$ существует более трех элементов из $\mathrm{Sl}_{i+1}(H(n))$ таких, что множество достижимых из них элементов есть в точности $f^{-1}(\langle a \rangle)$. Зафиксируем три таких элемента: b, $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$. Элемент b отображаем посредством f_{i+1} в a (и в случае существования указанных $\tilde{a}_j$ в них отображаем $\tilde{b}_j$). Получаем частичное отображение f_{i+1} из $\mathrm{Sl}_{i+1}(H(n))$ на $\mathrm{Sl}_{i+1}(L_n)$. Пусть элемент $c \in \mathrm{Sl}_{i+1}(H(n))$ еще не включен в область определения f_{i+1}. Тогда $f_i(\langle c \rangle)$ содержит элементы глубины i и существует $a(c) \in \mathrm{Sl}_{i+1}(L_n)$ такой, что $\langle a(c) \rangle = f_i(\langle c \rangle)$. Зафиксировав такой элемент $a(c)$, элемент c отображаем f_{i+1} в $a(c)$. Получаем отображение f_{i+1} из $\mathrm{Sl}_{i+1}(H(n))$ на $\mathrm{Sl}_{i+1}(L_n)$. На $S_i(H(n))$ f_{i+1} доопределяем как f_i. Проверим, что f_{i+1} является p-морфизмом.

Покажем вначале, что из $x < y$ следует $f_{i+1}(x) < f_{i+1}(y)$. Очевидно, достаточно рассмотреть случай $x \in \mathrm{Sl}_{i+1}(H(n))$. Тогда если x не был включен в область определения f_{i+1} на первом этапе задания f_{i+1}, то $x = c$, $a(c) \in \mathrm{Sl}_{i+1}(L_n)$, где $\langle a(c) \rangle = f_i(\langle c \rangle)$. Тогда $y \in \langle c \rangle$ и $f_{i+1}(y) = f_i(y)$, т. е. $f_{i+1}(y) \in \langle a(c) \rangle$, $f_{i+1}(c) = a(c)$. Если x вошло в область определения f_{i+1} на первом этапе задания f_{i+1}, то $x = b$ или $x = \tilde{b}_j$ и $f_{i+1}(b) = a$ или $f_{i+1}(\tilde{b}_j) = \tilde{a}_j$. Тогда из $x < y$ имеем $y \in \langle b \rangle$. Значит, $y \in f_i^{-1}(\langle a \rangle)$и $f_i(y) = f_{i+1}(y) \in \langle a \rangle = \langle a_j \rangle$, $f_{i+1}(y) > f_{i+1}(x)$.

Покажем теперь, что из $f_{i+1}(x) < f_{i+1}(y)$ следует $\exists r (x < r) \,\&\, f_{i+1}(r) = f_{i+1}(y)$. Как и ранее, достаточно рассматривать случай $x \in \mathrm{Sl}_{i+1}(H(n))$. Пусть x не включался в область определения f_{i+1} на первом этапе, тогда $x = c$, $f_{i+1}(c) = a(c)$, где $\langle a(c) \rangle = f_i(\langle c \rangle)$. Тогда из $a(c) < f_{i+1}(y)$, т. е. $f_{i+1}(y) \in \langle a(c) \rangle$ и $f_{i+1}(y) = f_i(r)$, где $r \in \langle c \rangle$, получаем $f_{i+1}(r) = f_{i+1}(y)$, $x < r$.

Если x включался в область определения f_{i+1} на первом этапе, то $x = b$ или $x = \tilde{b}_j$, где $f_{i+1}(b) = a$ или $f_{i+1}(\tilde{b}_j) = \tilde{a}_j$. Тогда $f_{i+1}(y) \in \langle a \rangle$ и, так как $\langle b \rangle = \langle \tilde{b}_j \rangle = f_i^{-1}(\langle a \rangle)$, то как как $f_{i+1}(y) = f_i(y)$, то существует $r \in \langle b \rangle = \langle \tilde{b}_j \rangle$ такое, что $f_i(r) = f_i(y)$. Значит, $x < r$ и $f_{i+1}(r) = f_{i+1}(y)$.

Таким образом, f_{i+1} — p-морфизм. Вводим отображение f: $H(n) \to L_n$, где $f = \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i$. Так как все f_i были расширяющими друг друга p-морфизмами, то и f является p-морфизмом «на».

В силу двойственности между p-морфизмами шкал и отношением изоморфного вложения алгебр, строимых на шкалах, заключаем, что L_n^+ является подалгеброй алгебры $H(n)^+$.

В силу предложения 4, следствия 2 и лемм 5, 8, алгебра $H(n)^+$ входит в квазимногообразие, порождаемое алгеброй $\mathcal{F}_\omega(G)$. Поэтому в данное квазимногообразие входит и L_n^+ (как подалгебра $H^+(n)$), а также и алгебра $\mathfrak{A}(b_i)$ (как подалгебра алгебры L_n^+) и, наконец, алгебра $\mathfrak{B}(a_i)$ (как изоморфная копия $\mathfrak{A}(b_i)$). Лемма доказана.

Лемма 16. *При $n \geqslant 2$ E_n^+ не входит в квазимногообразие, порождаемое алгеброй $\mathcal{F}_\omega(G)$.*

Доказательство. Построим квазитождество r_n, истинное на $\mathcal{F}_\omega(G)$ и ложное на E_n^+. Пусть

$$\varphi_m = \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 2^n+1} \Diamond x_i \wedge \Diamond y_0 \wedge \neg y_0 \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 2^n+1} \neg x_i \wedge x_0 \wedge \neg \Diamond x_0,$$

$$\psi_m = \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 2^n+1} \Diamond x_i \wedge \Diamond y_0 \wedge \neg y_0 \wedge \bigwedge_{1 \leqslant i \leqslant 2^n+1} \neg x_i \wedge x_0 \wedge \Diamond x_0,$$

$$\varphi_i = \bigwedge_{1\leqslant j\neq i\leqslant 2^n+1} \neg x_j \wedge x_i \wedge \neg\Diamond y_0 \wedge \neg y_0 \wedge \bigwedge_{0\leqslant i\leqslant 2^n+1} \neg\Diamond x_i \wedge \neg x_0,$$

$$\xi \subseteq \{1, 2, \ldots, 2^n+1\},\ 1 \leqslant \overline{\overline{\xi}} \leqslant 2^n,$$

$$\varphi_\xi = \bigwedge_{i\in\xi} \Diamond x_i \wedge \bigwedge_{i\notin\xi, i\neq 0} \neg\Diamond x_i \wedge \neg\Diamond y_0 \wedge y_0 \wedge \bigwedge_{0\leqslant i\leqslant 2^n+1} \neg x_i \wedge \neg\Diamond x_0,$$

$$\psi_\xi = \bigwedge_{i\in\xi} \Diamond x_i \wedge \bigwedge_{i\notin\xi, i\neq 0} \neg\Diamond x_i \wedge \Diamond y_0 \wedge y_0 \wedge y_0 \wedge \bigwedge_{0\leqslant i\leqslant 2^n+1} \neg x_i \wedge \neg\Diamond x_0,$$

$$r_n = \psi_m \vee \varphi_m \vee \bigvee_i \varphi_i \vee \bigvee_\xi \varphi_\xi \vee \bigvee_\xi \psi_\xi \Rightarrow \neg x_0 = 1.$$

Вначале докажем, что $\mathcal{F}_\omega(G) \Vdash r_n$. В самом деле, квазитождество r_n имеет редуцированную форму. Согласно следствию 2 и лемме 5 достаточно показать, что у $\mathcal{D}(r_n)$ нет подмножеств $\mathfrak{X}$ таких, что $\langle \mathfrak{X}, <, V\rangle$ обладает свойствами 1—4 из леммы 5. Если $\mathfrak{X} \subseteq \mathcal{D}(r_n)$ обладает свойством 1, то $\varphi_m \in \mathfrak{X}$ или $\psi_m \in \mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X}$ обладает свойством 3, то $\varphi_m \Vdash_V \varphi_m$ или $\psi_m \Vdash_V \psi_m$. Тогда, вновь по свойству 3, все φ_i, $1 \leqslant i \leqslant 2^n+1$, входят в $\mathfrak{X}$. Возьмем $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_{2^n+1}\}$ в качестве множества ∇. На ∇ не выполняется свойство 4 из леммы 5. В самом деле, получаем, что $\theta_2(\varphi(\nabla)) \supseteq \{x_1, \ldots, x_{2^n+1}\}$. Поэтому в качестве $\varphi(\nabla)$ могут выступать только φ_m или ψ_m. Но $y_0 \in \theta_2(\varphi_m)$ и $y_0 \in \theta_2(\psi_m)$. В то же время

$$y_0 \notin \bigcup_{1\leqslant i\leqslant 2^n+1} \theta_1(\varphi_i) = \{x_1, \ldots, x_{2^n+1}\},\quad y_0 \notin \bigcup_{1\leqslant i\leqslant 2^n+1} \theta_2(\varphi_i) = \varnothing.$$

Следовательно, $\mathfrak{X}$ не может обладать свойством 4. Таким образом, $\mathcal{F}_\omega(G) \models r_n$.

Обратимся теперь к доказательству ложности r_n на E_n^+. Пусть $S_1(E_n) = \{a_1, \ldots, a_{2^n+1}\}$. Определяем подмножества φ_m^0, ψ_m^0, φ^0, φ_ξ^0, ψ_ξ^0 множества E_n. Положим $\varphi_i^0 \rightleftharpoons \{a_i\}$. Для $\xi \subset \{1, 2, \ldots, 2^n+1\}$, $1 \leqslant \overline{\overline{\xi}} \leqslant 2^n$,

$$\varphi_\xi^0 \rightleftharpoons \{x \mid x \in \mathrm{Sl}_2(E_n),\ a_i \in \langle x\rangle \Leftrightarrow i \in \xi\},$$

$$\psi_\xi^0 \rightleftharpoons \{x \mid x \in E_n \setminus S_2(E_n),\ a_i \in \langle x\rangle \Leftrightarrow i \in \xi\}.$$

Пусть

$$\varphi_m^0 \rightleftharpoons \{x \mid x \in E_n,\ \langle x\rangle \cap S_1(E_n) = S_1(E_n),$$
$$\forall y((x<y) \Rightarrow \langle y\rangle \cap S_1(E_n) \neq S_1(E_n))\},$$
$$\psi_m^0 \rightleftharpoons \{x \mid x \in E_n,\ \langle x\rangle \cap S_1(E_n) = S_1(E_n),$$
$$\exists y((x<y) \,\&\, \langle y\rangle \cap S_1(E_n) = S_1(E_n))\}$$

Введенные множества, очевидно, не пересекаются и

$$\psi_m^0 \vee \varphi_m^0 \vee \bigvee_i \varphi_i^0 \vee \bigvee_\xi \varphi_\xi^0 \vee \bigvee_\xi \psi_\xi^0 = E_n. \tag{5}$$

Рассматриваем x_i, y_0 как пропозициональные переменные и вводим означивание V на шкале E_n, где при $1 \leqslant i \leqslant 2^n+1$ имеет место $V(x_i) = \varphi_i^0$, $V(x_0) = \psi_m^0 \cup \varphi_m^0$, $V(y_0) = \bigcup_\xi (\varphi_\xi^0 \cup \psi_\xi^0)$.

Покажем, что в модели $\langle E_n, <, \psi\rangle$ верны соотношения

$$\forall x \in \varphi_i^0\ x \Vdash_V \varphi_i,\quad \forall x \in \varphi_\xi^0\ x \Vdash_V \varphi_\xi,$$
$$\forall x \in \psi_\xi^0\ x \Vdash_V \psi_\xi,\quad \forall x \in \varphi_m^0\ x \Vdash_V \varphi_m, \tag{6}$$
$$\forall x \in \psi_m^0\ x \Vdash_V \psi_m.$$

Соотношения $\forall x \in \varphi_i^0 x \Vdash_V \varphi_i$, $\forall x \in \varphi_\xi^0 x \Vdash_V \varphi_\xi$ очевидны. Пусть $x \in \psi_\xi^0$. Тогда $x < a_i$, $i \in \xi$ и $a_i \Vdash_V x_i$, т. е. $x \Vdash_V \Diamond x_i$, $i \in \xi$. При $i \notin \xi$, $i \neq 0$ $x \nless a_i$ и, значит, $x \Vdash_V \Diamond x_i$, $i \notin \xi$, $i \neq 0$. По определению $V\ \neg(x \Vdash_V x_i)$. Так как $x \in E_n \setminus S_2(E_n)$, то найдется y, где $x < y$ и $y \in S_2(E_n)$. Тогда $y \in \varphi_\xi^0$ при некотором ξ. Значит, $y \| \!- _V y_0$ и $x \| \!- _V \Diamond y_0$. Кроме того, $\langle x \rangle \cap S_1(E_n) \neq S_1(E_n)$, поэтому $x < y \Rightarrow y \notin \psi_m^0 \cup \varphi_m^0$ и $x \| \!- _V \neg \Diamond x_0$. Итак, $x \| \!- _V \psi_\xi$.

Предположим, что $x \in \varphi_m^0$. Тогда, очевидно, $x \| \!- _V \Diamond x_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n + 1$, $x \| \!- _V \neg x_i$, $1 \leqslant i \leqslant 2^n + 1$, и $x \| \!- _V \neg y_0$, $x \| \!- _V x_0$. Так как из $x < y$ следует $\langle y \rangle \cap S_1(E_n) \neq S_1(E_n)$ и $y \notin \varphi_m^0 \cup \psi_m^0$, то $y \| \!- _V \neg x_0$, т. е. $x \| \!- _V \neg \Diamond x_0$. Поскольку элементов, из которых были бы достижимы все элементы первого слоя $S_1(E_n)$ в $\mathrm{Sl}_2(E_n)$, нет, то $x \in E_n \setminus S_2(E_n)$. Но тогда из x достижим некоторый элемент y из $\mathrm{Sl}_2(E_n)$. Но $y \in \varphi_\xi^0$ при некотором φ_ξ. Значит, $y \| \!- _V y_0$ и $x \| \!- _V \Diamond y_0$. Следовательно, $x \| \!- _V \varphi_m$.

Предположим теперь, что $x \in \psi_m^0$. Тогда, как и в случае $x \in \varphi_m^0$, имеем $x \in E_n \setminus S_2(E_n)$ и $x \| \!- _V \Diamond y_0$. Выбираем из $\langle x \rangle$ максимальный по $<$ элемент x_1 такой, что $\langle x_1 \rangle \cap S_1(E_n) = S_1(E_n)$. Тогда $x_1 \in \varphi_m^0$, следовательно, $x_1 \| \!- _V x_0$ и $x \| \!- _V \Diamond x_0$. Проверка истинности на x остальных конъюнктивных членов ψ_m ведется как и в случае $x \in \varphi_m^0$. Таким образом, $x \| \!- _V \varphi_m$, и соотношения (6) доказаны.

Из вида формул φ_i, φ_ξ, ψ_ξ, φ_m, ψ_m следует, что на элементе модели не могут быть истинны одновременно две разные формулы. Поэтому в силу (5) и (6)

$$\forall x \in E_n \big(x \| \!- _V \varphi_i \Leftrightarrow x \in \varphi_i^0\big) \,\&\, \big(x \| \!- _V \varphi_\xi \Leftrightarrow x \in \varphi_\xi^0\big) \,\&\, \big(x \| \!- _V \psi_\xi \Leftrightarrow x \in \psi_\xi^0\big) \,\&$$
$$\& \big(x \| \!- _V \varphi_m \Leftrightarrow x \in \varphi_m^0\big) \,\&\, \big(x \| \!- _V \psi_m \Leftrightarrow x \in \psi_m^0\big). \tag{7}$$

Переходя от истинности формул на элементах модели $\langle E_n, <, V \rangle$ к значениям термов в алгебре E_n^+ на основе соотношения

$$x \in A(V(x_i), V(y_0)) \Leftrightarrow x \| \!- _V A(x_i, y_0)$$

и учитывая (5), получаем

$$\psi_m \vee \varphi_m \vee \bigvee_i \varphi_i \vee \bigvee_\xi \varphi_\xi \vee \bigvee_\xi \psi_\xi (V(x_i), V(x_0)) = E_n,$$
$$V(x_0) \subseteq \varphi_m^0 \neq \varnothing.$$

Следовательно, квазитождество r_n ложно на E_n^+ при значениях переменных $x_i = V(x_i)$, $y_0 = V(y_0)$. Ранее доказано, что $\mathcal{F}_\omega(G) \| \!- r_n$, откуда $E_n^+ \notin Q(\mathcal{F}_\omega(G))$. Лемма доказана.

Из лемм 15, 16 вытекает, что свободная алгебра $\mathcal{F}_\omega(G)$ не имеет базиса квазитождеств от конечного числа переменных. Таким образом, учитывая соответствие базисов квазитождеств $\mathcal{F}_\omega(G)$ и базисов допустимых правил G, приведенное в начале параграфа, получаем, что справедлива

Теорема 17. *Модальная система G не имеет базисов допустимых правил от конечного числа переменных, в частности конечных базисов.*

Пусть $\overset{*}{r}_n$ правило вывода, соответствующее квазитождеству r_n из леммы 16. Так как в лемме 16 показано, что $\mathcal{F}_\omega(G) \models r_n$, то все правила вывода $\overset{*}{r}_n$ допустимы в G. В лемме 16 также показано, что $E_n^+ \models r_n$. Кроме того, по лемме 15 все n-порожденные подалгебры алгебры E_n^+ входят в $Q(\mathcal{F}_\omega(G))$. Из этого несложно выводится, что квазитождество $r_{(2^n+4)}$ не является следствием квазитождеств $r_2, \ldots, r_n$ и что правила вывода $\overset{*}{r}_{(2^2+4)}, \overset{*}{r}_{(2(2^2+4))}, \ldots$ образуют бесконечную последовательность независимых допустимых в G правил.

§ 4. ОТСУТСТВИЕ ФИНИТНОЙ АППРОКСИМИРУЕМОСТИ G ПО ДОПУСТИМОСТИ

Модальная логика λ (суперинтуиционистская логика λ) называется *финитно аппроксимируемой по допустимости*, если для любого недопустимого в λ правила вывода r существует конечная модальная (псевдобулева) алгебра $\mathfrak{B}$, отделяющая правило r от всех допустимых в λ правил r_i (т. е. на $\mathfrak{B}$ истинны все квазитождества r_i^*, соответствующие правилам r_i, но ложно квазитождество r^*, соответствующее правилу r). Вначале докажем один вспомогательный результат.

Лемма 18. *Если $T=\langle T, R\rangle$, $T_1=\langle T_1, R\rangle$ — шкалы, T конечно и T^+ — подалгебра T_1^+, то существует р-морфизм из T_1 на T.*

Доказательство. Пусть T^+ является подалгеброй T_1^+. По заданию алгебр T^+ и T_1^+, T (соответственно T_1) является множеством всех атомов алгебры T^+ (соответственно T_1^+). Обозначим это символически $T=\mathrm{At}(T^+)$, $T_1=\mathrm{At}(T_1^+)$. Тогда из $a\in\mathrm{At}(T^+)$ имеем $a=\bigcup\limits_{i\in I}a_i$, где $a_i\in\mathrm{At}(T_1)$. Следовательно, отображение φ: $T_1\to T$, где $\varphi(a_i)=a$, есть отображение T_1 на T. Проверим, что φ является p-морфизмом.

Пусть a_iRb_i. Тогда $a_i\in\Diamond b_i$. Предположим, что $\neg(aRb)$, тогда $a\nleqslant\Diamond b$. Значит, поскольку a, $\Diamond b\in T^+$ и a — атом из T^+, $a\cap\Diamond b=0$. Но $a_i\leqslant a$, и из a_iRb_i имеем $a_i\leqslant\Diamond b_i$, и из $b_i\leqslant b$ получаем $\Diamond b_i\leqslant\Diamond b$. Следовательно, $a_i\leqslant\Diamond b$; кроме того, $a_i\leqslant a$ и $a\cap\Diamond b=0$. Тогда, тем более, $a_i\cap\Diamond b=0$; противоречие. Итак, aRb.

Предположим, что a, $b\in T$ и aRb. Тогда $a\leqslant\Diamond b$, но $a_i\leqslant a$, поэтому и $a_i\leqslant\Diamond b$. Элемент b является объединением атомов из T_1^+: $b=\bigcup\limits_{i\in I}b_i$. Поэтому найдется b_j, $j\in I$, такое, что a_iRb_j, $\varphi(a_i)=a$, $\varphi(b_j)=b$. Таким образом, φ — p-морфизм. Лемма доказана.

Результат нижеследующей теоремы для системы G известен; в [14, с. 217—218] показано, что квазимногообразие, порождаемое $\mathcal{F}_\omega(G)$, вообще не имеет нетривиальных конечных алгебр. Для систем S4 и Grz он тоже сравнительно легко получается из известных фактов. Цель нижеприводимого доказательства — единообразное и независимое (для S4 и Grz) получение результата для всех трех систем — G ,S4, Grz.

Теорема 19. *Модальные системы G,* S4 *и* Grz *не являются финитно аппроксимируемыми по допустимости.* ♠

Доказательство. Вначале рассмотрим систему G. Пусть $\mathfrak{B}$ — конечная алгебра, на которой истинны все квазитождества, соответствующие допустимым правилам для G. Тогда $\mathfrak{B}$ входит в квазимногообразие, порождаемое $\mathcal{F}_\omega(G)$. Так как $\mathfrak{B}$ — конечна, то $\mathfrak{B}\cong\mathcal{T}^+$ для некоторой шкалы $\mathcal{T}$ (например, в качестве $\mathcal{T}$ можно взять множество атомов $\mathfrak{B}$ с отношением $aRb\Leftrightarrow a\leqslant\Diamond b$ — следствие теоремы Стоуна о представлении).

Заметим, что согласно предположению 4 следствию 2 и леммам 5, 8 квазимногообразия, порождаемые алгеброй $\mathcal{F}_\omega(G)$ и классом K_0 алгебр $H^+(n)$, $n\geqslant 1$, совпадают. В свою очередь, квазимногообразия $Q(K_0)$ и $Q(K_1)$, где K_1 — класс всех алгебр, на которых истинны все универсальные формулы, истинные на классе K_0, тоже совпадают.

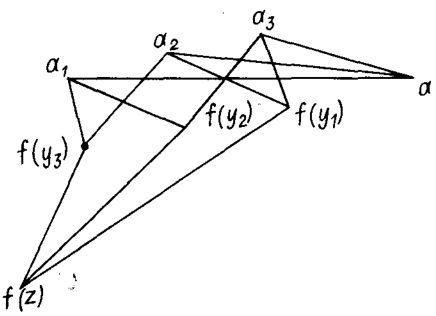
Так как K_1 — аксиоматизируемый класс, то ввиду [15, с. 295], квазимногообразие $Q(K_1)$ совпадает с классом $S\Pi(K_1)_e$ (где S — оператор взятия подалгебр, а Π — оператор взятия прямых произведений). Таким образом, для некоторых $\mathfrak{B}_i$, $i\in I$, алгебра $\mathcal{T}^+$ является подалгеброй $\Pi\mathfrak{B}_i$, $i\in I$, где $\mathfrak{B}_i\in K_1$. Заметим, что так как $\mathcal{T}^+$ конечна, то можем считать, что $I<\omega$. Пусть π_i — гомоморфизм проектирования $\Pi\mathfrak{B}_i$ на i-й сомножитель $\mathfrak{B}_i$. Тогда $\pi_i(\mathcal{T}^+)$ — конечная подалгебра алгебры $\mathfrak{B}_i$ (как гомоморфный образ конечной алгебры). Несложно показать, что $\mathcal{T}^+$ будет подалгеброй алгебры $\Pi\pi_i(\mathcal{T}^+)$, $i\in I$. Кроме того, так как $\mathfrak{B}_i\in K_1$ — универсально аксиоматизируемому классу, то и подалгебры $\pi_i(\mathcal{T}^+)$ входят в K_1. Таким образом, получаем, что $\mathcal{T}^+$ является подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}_1\times\ldots\times\mathfrak{A}_k$, где $\mathfrak{A}_i$ — конечные алгебры из K_1.

Поскольку $\mathfrak{A}_i$ — конечны и $\mathfrak{A}_i\in K_1$, каждая из $\mathfrak{A}_i$ вкладывается в некоторую алгебру $H^+(n_i)$. Поэтому $\mathcal{T}^+$ является подалгеброй алгебры $H^+(n_1)\times\ldots\times H^+(n_k)$. Но алгебра $H^+(n_1)\times\ldots\times H^+(n_k)$ изоморфна алгебре $(H(n_1)+\ldots+H(n_k))^+$, где «+» — операция прямой суммы шкал. Поэтому $\mathcal{T}^+$ — подалгебра алгебры $(H(n_1)+\ldots+H(n_k))^+$. Вследствие леммы 18 существует p-морфизм f шкалы $(H(n_1)+\ldots+H(n_k))^+$ на шкалу $\mathcal{T}$.

Предположим, что существуют элементы a, a_1, a_2, $a_3\in\mathcal{T}$ такие, что aRa_i, $1\leqslant i\leqslant 3$, $\neg(a_iRa)$, $\neg(a_iRa_j)$, $i\neq j$. Возьмем x — прообраз a при f, т. е. $f(x)=a$ и $x\in H(n_i)$. Поскольку f — p-морфизм, найдутся x_1, x_2, $x_3\in H(n_i)$, где $x_i\in\langle x\rangle$ и $f(x_i)=a_i$. Так как разные a_i несравнимы по R, то x_i образуют в $H(n_i)$ трехэлементную антицепь. Согласно построению $H(n_i)$ существуют элементы y_1, y_3, $y_2\in H(n_i)$ такие, что антицепь минимальных элементов в $\langle y_i\rangle$ есть $\{x_1, x_2, x_3\}\backslash\{x_i\}$. Тогда $f(y_i)\in\mathcal{T}$ и $\forall i$, $1\leqslant i\leqslant 3$, $f(x_j)=a_j$, $j\neq i$, $1\leqslant j\leqslant 3$.

Заметим, что $\neg(f(y_i)Rf(x_i))$. Иначе нашлось бы $b>y_i$ такое, что $f(b)=f(x_i)=a_i$. Но тогда $b\in\{x_1, x_2, x_3\}\backslash\{x_i\}$ или $b>x_j$, где $x_j\in\{x_1, x_2, x_3\}\backslash\{x_i\}$. Тогда либо $f(b)=f(x_j)=a_j$ — противоречие, либо $x_j<b$ и $f(x_j)=a_jRf(b)$, т. е. a_jRa_i — противоречие. Так что, действительно, $\neg(f(y_i)Rf(x_i))$.

Ввиду $\mathcal{T}^+\in\mathrm{Var}(G)$ получаем, что $\mathcal{T}$ транзитивна, поэтому $f(y_i)$ образуют трехэлементную антицепь в $\mathcal{T}$. Кроме того, по построению $H(n_i)$ в $H(n_i)$ найдется элемент $z\in H(n_i)$ такой, что в $\langle z\rangle\{y_1, y_2, y_3\}$ образует антицепь минимальных элементов. Тогда $f(z)$ $Rf(y_i)$, $1\leqslant i\leqslant 3$. Сложившаяся ситуация изображается следующей диаграммой:



Теперь, рассматривая $f(y_i)$ как a_i и $f(z)$ как a, повторяем приведенное рассуждение и приходим к противоречию с конечностью $\mathcal{T}$. Итак, предположение о существовании элементов a_i, a с указанными свойствами неверно. В этом случае на $\mathcal{T}$ истинна формула φ_2, утверждающая, что ширина шкалы не выше двух:

$$\varphi_2=\neg\left(\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant 3}\neg x_i\wedge\bigwedge_{1\leqslant i\leqslant 3}\Diamond\left(x_i\wedge\bigwedge_{1\leqslant j\neq i\leqslant 3}\neg\Diamond x_j\right)\right).$$

Тогда $\mathcal{T}^+\models\varphi_2$ и $\mathfrak{B}\models\varphi_2$. Но правило вывода $(P\to P)/\varphi_2$ недопустимо в G.

Таким образом, недопустимое в G правило вывода $(P\to P)/\varphi_2$ нельзя отделить от допустимых в G правил конечной алгебры, и система G не является финитно аппроксимируемой по допустимости. Это доказательство дословно подходит и для модальных систем S4 и Grz — нужно лишь вместо $H(n)$ использовать n-характеристические шкалы для S4 и Grz вида $\mathcal{T}(n)$ и $\mathcal{U}(n)$ из [5] и соответственно [9]. Теорема доказана.

Доказательство отсутствия финитной аппроксимируемости систем S4 и Grz можно получить иначе. Из теорем 2, 3 и следствия 6 работы [6] следует, что интуиционистское исчисление высказываний Int не является финитно аппроксимируемым по допустимости. Ввиду теорем о сведении из [7] и [9] логики S4 и Grz являются модальными напарниками Int по допустимости: правило A/B допустимо в Int, если и только если $T(A)/T(B)$ допустимо в λ, где $\lambda=\mathrm{S4}$ или $\lambda=\mathrm{Grz}$. А отсюда и из результата для Int следует его аналог для S4 и Grz. Заметим, что верно и обратно: из отсутствия финитной аппроксимируемости Grz по допустимости следует аналогичный результат для Int. Вначале покажем, что справедлива

Лемма 20. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— псевдобулева алгебра и* $\mathfrak{A} \in Q(\mathcal{F}_\omega(\mathrm{Int}))$, *тогда обертывающая* $\mathfrak{A}$ *топобулева алгебра* $S(\mathfrak{A})$ *входит в* $Q(\mathcal{F}_\omega(\mathrm{Grz}))$.

Доказательство. Пусть $S(\mathfrak{A}) \notin Q(\mathcal{F}_\omega(\mathrm{Grz}))$. Тогда найдется квазитождество $q = (f(x_i) = 1 \Rightarrow g(x_i) = 1)$ такое, что $\neg(S(\mathfrak{A}) \models q)$ и $\mathcal{F}_\omega(\mathrm{Grz}) \models q$. Из строения $S(\mathfrak{A})$ следует, что

$$\neg(S(\mathfrak{A}) \models \Box f(\varphi_i(\Box y_i)) = 1 \Rightarrow \Box g(\varphi_i(\Box y_j)) = 1),$$

где φ_i — некоторые термы. Но формулы $\Box f(\varphi_i(\Box y_j))$ и $\Box g(\varphi_i(\Box y_j))$ эквивалентны в Grz некоторым формулам $T(A)$ и $T(B)$. Следовательно, $\neg(S(\mathfrak{A}) \models T(A) = 1 \Rightarrow T(B) = 1)$, где $\mathcal{F}_\omega(\mathrm{Grz}) \models T(A) = 1 \Rightarrow T(B) = 1$. Тогда $\neg(\mathfrak{A} \models A = 1 \Rightarrow B = 1)$ и $\mathcal{F}_\omega(\mathrm{Int}) \models A = 1 \Rightarrow B = 1$. Следовательно, $\mathfrak{A} \notin Q(\mathcal{F}_\omega(\mathrm{Int}))$. Лемма доказана.

Пусть $\mathfrak{A}$ — конечная псевдобулева алгебра и $\mathfrak{A} \in Q(\mathcal{F}_\omega(\mathrm{Int}))$, тогда $S(\mathfrak{A}) \in Q(\mathcal{F}_\omega(\mathrm{Grz}))$ и по аналогу для Grz теоремы 19 $S(\mathfrak{A}) \models \varphi_2$, т. е. ширина $S(\mathfrak{A})^+$ не выше 2. Тогда и представляющее множество псевдобулевой алгебры $\mathfrak{A}$ имеет ширину не выше 2, и на $\mathfrak{A}$ истинна формула A_2, выражающая это свойство. Но $A_2 \notin \mathrm{Int}$ и правило $p \supset p/A_2$ недопустимо в Int, а является истинным на $\mathfrak{A}$. Следовательно, Int неаппроксимируема финитно по допустимости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Segerberg K.** An essay in classical modal logic. Vol. 1—3.— Uppsala, 1971.
2. **Solovay R. M.** Provability interpretation of modal logic // Isr. J. math.— 1976.— Vol. 25.— P. 287—304.
3. **Friedman H.** One hundred and two problems in mathematical logic // J. symb. log.— 1975.— Vol. 40, N 3.— P. 113—130.
4. **Артемов С. Н.** Приложения модальной логики в теории доказательств // Вопросы кибернетики. Неклассические логики и их применение.— М., 1982.— С. 3—22.
5. **Boolos G.** Fridman's 35-th problem has an affirmative solution // Not. Amer. Math. Soc.— 1975.— Vol. 22.— P. 646.
6. **Циткин А. И.** О допустимых правилах интуиционистской логики высказываний // Мат. сб.— 1977.— Т. 102, № 2.— С. 314—323.
7. **Рыбаков В. В.** Критерий допустимости правил вывода в модальной логике S4 и интуиционистской логике // Алгебра и логика— 1984.— Т. 23, № 5.— С. 546—572.
8. **Рыбаков В. В.** Базисы допустимых правил модальной системы и интуиционистской логики // Мат. сб.— 1985.— Т. 170, № 11.— С. 321—339.
9. **Рыбаков В. В.** Базисы допустимых правил логик S4 и Grz // Алгебра и логика.— 1985.— Т. 24, № 1.— С. 87—107.
10. **Рыбаков В. В.** Допустимые правила предтабличных модельных логик // Там же.— 1981.— Т. 20, № 4.— С. 440—464.
11. **Рыбаков В. В.** Разрешимость проблемы допустимости в конечно-слойных модельных логиках // Там же.— 1984.— Т. 23, № 1.— С. 100—116.
12. **Рыбаков В. В.** Допустимые правила для логик, включающих S4.3 // Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 25, № 5.— С. 141—145.
13. **Port J.** The deducibilities S5 // J. phil. log.— 1981.— Vol. 10.— P. 409—422.
14. **Кузнецов А. В., Муравицкий А. Ю.** Доказуемость как модальность // Актуальные проблемы логики и методологии науки.— Киев: Наук. думка, 1980.— С. 193—229.
15. **Мальцев А. И.** Алгебраические системы.— М.: Наука, 1970.

В. Ю. САЗОНОВ

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ КОНСТРУКТИВНОСТИ ПРИНЦИПА МАРКОВА РАВЕНСТВУ P = NP

Настоящая статья является полным и подробным вариантом [1] и развитием [2, 3]. Ее название и основной результат можно было бы сформулировать даже в виде следующего на первый взгляд сомнительного, но при соответствующем необходимом уточнении верного утверждения: *конструктивность принципа Маркова равносильна равенству* P = NP.