16. **Mycielski J.** Analysis without actual infinity // J. Symbol Log.— 1981.— V. 46.— P. 625—633.
17. **Драгалин А. Г.** Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств.— М.: Наука, 1979. (Серия: Математическая логика и основания математики).
18. **Трулстра А. С.** Аспекты конструктивной математики: Пер. с англ. // Справочная книга по математической логике.— М.: Наука, 1983.— Ч. 4.— С. 160—240.
19. **Гёдель К.** Об одном еще не использованном расширении финитной точки зрения: Пер. с англ. // Математическая теория логического вывода.— М.: Наука, 1967.— С. 499—510.
20. **Howard W. A.** The formulae-as-types notion of construction // To H. B. Curry: essays on combinatory logic, lambda calculus and formalizm.— London: Acad. Press, 1980.— P. 479—490.
21. **Berman P.** Review on [2] // Math. Reviews 83j : 68055.
22. **Сазонов В. Ю.** Принцип коллекции и квантор существования // Логико-математические проблемы МОЗ.— Вып. 107: Вычислительные системы.— Новосибирск, 1985.— С. 30—39.
23. **Parikh R.** Existence and feasibility in arithmetic // J. Symbol. Log.— 1971.— Vol. 36.— P. 494—508.
24. **Левин Л. А.** Универсальные задачи перебора // Проблемы передачи информации.— 1973.— Т. 9, вып. 3.— С. 115—116.
25. **Такеути Г.** Теория доказательств: Пер. с англ.— М.: Мир, 1978.
26. **Сазонов В. Ю.** Автореферат на [22] // Zbl. Math. 605, 03022.
27. **Звонкин А. К., Левин Л. А.** Сложность конечных объектов и обоснование понятий информации и случайности с помощью теории алгоритмов // Успехи мат. наук.— 1970.— Т. 25, вып. 6.— С. 85—127.

В. Л. СЕЛИВАНОВ

ТОНКИЕ ИЕРАРХИИ АРИФМЕТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ И ОПРЕДЕЛИМЫЕ ИНДЕКСНЫЕ МНОЖЕСТВА

Теоретико-рекурсивные иерархии позволяют измерять алгоритмическую сложность множеств ординалами. Этим их роль в теории алгоритмов аналогична роли чисел для измерения геометрических величин. Давно замечено [1], что индексные множества с «естественными» определениями оказываются универсальными в некотором уровне подходящей иерархии. Возникает общая проблема классификации индексных множеств, определимых в естественном языке. Например, если $(A;\ \Sigma,\ \alpha)$ — нумерованная система конечной сигнатуры, можно классифицировать индексные множества формульных предикатов. Очевидна связь этой задачи со сложностью элементарной теории $\mathrm{Th}(A;\ \Sigma)$ и некоторыми вопросами теории моделей. Так, если существует формульный предикат $X \subseteq A^k$ к которому m-сводится любое рекурсивно-перечислимое относительно диаграммы $(A;\ \Sigma)$ множество, то $\mathrm{Th}(A;\ \Sigma)$ не является модельно полной. Первые результаты по этой проблеме получены в [2, 3].

Данная работа посвящена классификации индексных множеств предикатов, формульно определимых на решетке рекурсивно-перечислимых множеств $(\mathscr{E};\ \cup,\ \cap)$. Результаты были объявлены в [4, 5]. Неожиданно оказалось, что для классификации даже очень простых индексных множеств недостаточно иерархий, известных до появления работы [6], аналогично тому, что рациональных чисел недостаточно для измерения даже простых геометрических величин. Это послужило одним из стимулов для поиска естественного класса иерархий, дающих в определенном смысле полную иерархическую классификацию арифметических множеств. Такой класс иерархий найден в [6]. В этом же году появилась работа [7], посвященная классификации борелевских множеств. Сопоставление этих работ показывает, что иерархии из [6] имеют много общих черт со степенями Уэджа борелевских множеств. Эта связь подтверждается полученным в § 1 описанием иерархий из [6] с помощью теоретико-множественных операций из [7]. В § 2 и 3 эти результаты применяются для доказательства весьма сложной теоремы, полностью классифицирующей индексные множества булевых комбинаций A-предикатов, введенных А. Лахланом [8]. В § 4 эта теорема применяется для описания некоторого начального сегмента m-степеней индексных множеств формульных предикатов. В качестве следствия решен один вопрос Р. Соара [9].

§ 1. ТОНКИЕ ИЕРАРХИИ

Пусть $\{\Sigma_k^0\}_{k<\omega}$ — арифметическая иерархия, $\{\Sigma_k^{-1}\}$ — иерархия Ершова [2], $\{\Sigma_{k,m}\}_{m<\omega}$ — иерархия Ершова, построенная исходя из Σ_k^0, $k>0$. В [6] был указан класс иерархий, включающий эти и другие иерархии. Конечные уровни всех построенных иерархий можно расположить в последовательность $\{\Sigma_\alpha\}_{\alpha<\varepsilon_0}$ такую, что $\Sigma_\alpha \subset \Sigma_\beta \cap \Pi_\beta$ при $\alpha<\beta<\varepsilon_0$. В [6] доказано, что $\Sigma_k^{-1}=\Sigma_k$, $\Sigma_{2,k}=\Sigma_{\omega^k}$, $\Sigma_k^0=\Sigma_{\alpha_k}$ для всех $k>0$, где $\alpha_1=1, \alpha_{k+1}=\omega^{\alpha_k}$. Иерархии в [6] определены через универсальные множества с помощью операции типа операции скачка. Дадим описание классов Σ_α с помощью теоретико-множественных операций из [7]. Для последующих приложений определим эти операции в абстрактной форме. Пусть $B=(B;\ \cup,\ \cap,\ ^-,\ 0,\ 1)$ — булева алгебра. Элементы B обозначаем строчными, а подмножества B — прописными буквами. Вместо $x\cap y$ иногда пишем xy, пусть $X\cdot Y=\{x\cap y \mid x\in X,\ y\in Y\}$, $X+Y=\{x\cup y \mid x\in X,\ y\in Y\}$, $\bar X=\{\bar x \mid x\in X\}$.

Определение 1. $\mathrm{Sep}(x,\ y,\ z)=xy\cup \bar x z$,

$\mathrm{Bisep}(x_0,\ x_1,\ y_0,\ y_1,\ z)=x_0y_0\cup x_1y_1\cup \bar x_0\bar x_1 z$,

$\mathrm{Sep}(X,\ Y,\ Z)=\{\mathrm{Sep}(x,\ y,\ z) \mid x\in X,\ y\in Y,\ z\in Z\}$,

$\mathrm{Bisep}(X,\ Y_0,\ Y_1,\ Z)=\{\mathrm{Bisep}(x_0,\ x_1,\ y_0,\ y_1,\ z) \mid x_i\in X,\ y_i\in Y_i,\ z\in Z,\ x_0x_1y_0=x_0x_1y_1\}$.

Замечание. В [7] $\mathrm{Bisep}(X,\ Y_0,\ Y_1,\ Z)=\{\mathrm{Bisep}(x_0,\ x_1,\ y_0,\ y_1,\ z) \mid x_i\in X,\ y_i\in Y_i,\ z\in Z,\ x_0x_1=0\}$. Это отличается от нашего определения. Когда X — подрешетка B со свойством редукции $\forall x_0,\ x_1\in X\ \ \exists x_i^*\in X\,(x_i^*\subseteq x_i,\ x_0^*\cap x_1^*=0,\ x_0^*\cup x_1^*=x_0\cup x_1)$, который только и существен для [7], эти два определения, как легко видеть, совпадают.

Последовательность $\{L_i\}_{i<\omega}$ подрешеток $(B;\ \cup,\ \cap,\ 0,\ 1)$ называем *допустимой*, если $L_i\subseteq L_{i+1}\cap \breve L_{i+1}$. Сопоставим допустимой последовательности $\{L_i\}$ классы $S_\alpha^n(n<\omega,\ \alpha<\varepsilon_0)$. Пусть $\beta|\alpha \leftrightarrow \exists\gamma\ (\alpha=\beta\gamma)$.

Определение 2. *При* $k<\omega$ *пусть* $S_0^n=\{0\}$, $S_{k+1}^n=\mathrm{Sep}(L_n,\ \breve S_k^n,\ S_0^n)$. *При* $1\leqslant\eta<\varepsilon_0$, $0<m<\omega$ *пусть* $S_{\omega^\eta}^n=S_\eta^{n+1}$, $S_{\omega^{\eta}(m+1)}^n=\mathrm{Sep}(L_n,\ \breve S_{\omega^\eta m}^n,\ S_{\omega^\eta}^n)$. *При* $\alpha>0$, $\eta>0$, $\omega^{\eta+1}|\alpha$, $0<m<\omega$ *пусть* $S_{\alpha+\omega^\eta}^n=\mathrm{Bisep}(L_n,\ S_\alpha^n,\ \breve S_\alpha^n, S_{\omega^\eta}^n)$, $S_{\alpha+\omega^{\eta}(m+1)}^n=\mathrm{Sep}\ (L_n,\ \breve S_{\alpha+\omega^\eta m}^n,\ S_{\omega^\eta}^n)$. *Для предельного* α *и* $0<m<\omega$ *пусть* $S_{\alpha+1}^n=\mathrm{Bisep}(L_n,\ S_\alpha^n,\ \breve S_\alpha^n,\ S_0^n)$, $S_{\alpha+m+1}^n=\mathrm{Sep}(L_n,\ \breve S_{\alpha+m}^n,\ S_0^n)$.

Это корректное индуктивное определение. Пусть $\alpha_1=\omega$, $\alpha_{k+1}=\omega^{\alpha_k}$. При $\alpha<\alpha_1$ S_α^n определено. Допустим, что S_α^n определено при $\alpha<\alpha_k$. Любое $\alpha<\alpha_{k+1}$ можно представить в виде $\alpha=\omega^{\eta_1}k_1+\omega^{\eta_2}k_2+\ldots$, где $\alpha_k>\eta_1>\eta_2>\ldots$, $k_i<\omega$ (см. [10]). Из определения видно, что S_α^n определено. Поскольку $\lim\alpha_k=\varepsilon_0$, то S_α^n определено при любом $\alpha<\varepsilon_0$.

Лемма 1. 1) $\mathrm{Sep}(x,\ y,\ z)\cdot u=\mathrm{Sep}(x,\ yu,\ zu)$, $\mathrm{Sep}(x,\ y,\ 0)\cdot u=\mathrm{Sep}(xu,\ y,\ 0)$, $\mathrm{Sep}(x,\ y,\ z)\cup u=\mathrm{Sep}(x,\ y\cup u,\ z\cup u)$, $\mathrm{Sep}(x,\ y,\ 0)\cup u=\mathrm{Sep}(x\cup u,\ y\cup u,\ 0)$ *и аналогично для* Bisep.

2) *Если* $X\cdot Y\subseteq Y$ *и* $\breve X\cdot Z\subseteq Z$, *то* $\mathrm{Sep}(X,\ Y,\ Z)=\{u \mid \exists x\in X\,(ux\in Y \wedge u\bar x\in Z)\}$.

3) *Если* $X\cdot Y_i\subseteq Y_i$ *и* $\breve X\cdot\breve X\cdot Z\subseteq Z$, *то* $\mathrm{Bisep}(X,\ Y_0,\ Y_1,\ Z)=\{u \mid \exists x_0,\ x_1\in X\,(ux_0\in Y_0,\ ux_1\in Y_1,\ u\bar x_0\bar x_1\in Z)\}$.

4) *Если* $\varphi\colon B\to B'$ — *гомоморфизм булевых алгебр, то* $\varphi(\mathrm{Sep}(x, y, z))=\mathrm{Sep}(\varphi(x), \varphi(y), \varphi(z))$ *и* $\varphi(\mathrm{Bisep}(x_0, x_1, y_0, y_1, z))=\mathrm{Bisep}(\varphi(x_0), \varphi(x_1), \varphi(y_0), \varphi(y_1), \varphi(z))$.

5) *Если* $\{L_i\}$ *и* $\{L_i'\}$ — *допустимые последовательности в* B *и* B' *и* $\varphi\colon B\to B'$ — *гомоморфизм, для которого* $\varphi(L_i)\subseteq L_i'$, *то* $\varphi(S_\alpha^n)\subseteq S_\alpha^{n'}$ *для всех* $n<\omega$, $\alpha<\varepsilon_0$.

Свойства 1 и 4 очевидны, 5 следует из 4 по индукции. Проверим 3 (свойство 2 проверяется аналогично). Пусть

$$u=x_0y_0\cup x_1y_1\cup\bar{x}_0\bar{x}_1z\in\mathrm{Bisep}(X, Y_0, Y_1, Z),$$

$$x_i\in X,\quad y_i\in Y_i,\quad z\in Z,\quad x_0x_1y_0=x_0x_1y_1.$$

Из последнего условия $ux_i=y_ix_i\in X\cdot Y_i\subseteq Y_i$, $u\bar{x}_0\bar{x}_1=\bar{x}_0\bar{x}_1z\in\breve{X}\cdot\breve{X}\cdot Z\subseteq Z$, т. е. u лежит в правом множестве. Обратно, пусть $ux_i\in Y_i$, $u\bar{x}_0\bar{x}_1\in Z$, $x_i\in X$. Положим $y_i=ux_i$, $z=u\bar{x}_0\bar{x}_1$, тогда $u=x_0y_0\cup x_1y_1\cup\bar{x}_0\bar{x}_1z$, $x_0x_1y_0=ux_0x_1=x_0x_1y_1$, откуда $u\in\mathrm{Bisep}(X, Y_0, Y_1, Z)$.

Положим $S_\alpha=S_\alpha^0$. Из [2] следует, что при $k<\omega$ класс S_k^n совпадает с классом всех Σ_k^{-1} -комбинаций элементов L_n, т. е.

$$S_k^n=\Big\{x\,|\,\exists y_i\in L_n\Big(y_0\supseteq y_1\supseteq\ldots\wedge y_k=0\wedge x=\bigcup_i(y_{2i}\setminus y_{2i+1})\Big)\Big\}.$$

В случае, когда $B=\mathscr{P}(\omega)$ — класс всех подмножеств ω, $L_n=\Sigma_{n+1}^0$, определение 2 порождает классы S_α^n подмножеств ω.

Теорема 1. *При любом* $\alpha<\varepsilon_0$ *справедливо равенство* $\mathbf{\Sigma}_\alpha=\mathbf{S}_\alpha$.

Доказательство. Определим $\sigma_\alpha^n\subseteq\omega$ так. При $k<\omega$ пусть $\sigma^n=\varnothing$, $\sigma_{k+1}^n=G(\bar{\sigma}_k^n, \varnothing, \varnothing^{(n)})$. При $\eta>0$, $0<m<\omega$ пусть $\sigma_{\omega^\eta}^n=\sigma_\eta^{n+1}$, $\sigma_{\omega^\eta(m+1)}^n=G(\bar{\sigma}_{\omega^\eta m}^n, \sigma_{\omega^\eta}^n, \varnothing^{(n)})$. При $\omega^{\eta+1}|\alpha$, $\alpha\neq0$ пусть $\sigma_{\alpha+\omega^\eta}^n=G(\sigma_\alpha^n\oplus\bar{\sigma}_\alpha^n, \sigma_{\omega^\eta}^n, \varnothing^{(n)})$, $\sigma_{\alpha+\omega^\eta(m+1)}^n=G(\bar{\sigma}_{\alpha+\omega^\eta m}^n, \sigma_{\omega^\eta}^n, \varnothing^{(n)})$. При предельном λ пусть $\sigma_{\lambda+1}^n=G(\sigma_\lambda^n\oplus\bar{\sigma}_\lambda^n, \varnothing, \varnothing^{(n)})$, $\sigma_{\lambda+m+1}^n=G(\bar{\sigma}_{\lambda+m}^n, \varnothing, \varnothing^{(n)})$. Здесь G — операция из [6]. Из результатов [6, § 2] легко следует, что σ_α универсально в Σ_α и σ_λ^n является $\varnothing^{(n)}$-полной нумерацией с особыми объектами 0, 1. Поэтому достаточно проверить, что σ_α^n универсально в S_α^n. Это также проверяется индукцией. Рассмотрим лишь типичный случай $\alpha=\beta+\omega^\eta$, $\omega^{\eta+1}|\beta$. По индукции считаем, что $\sigma_{\omega^\eta}^n$ универсально в $S_{\omega^\eta}^n$, σ_β^n — в S_β^n и $\bar{\sigma}_\beta^n$ — в $\breve{S}_\beta^n$. Имеем $\sigma_\alpha^n=G(\sigma_\beta^n\oplus\bar{\sigma}_\beta^n, \sigma_{\omega^\eta}^n, \varnothing^{(n)})$. Пусть $\rho_i=\{\langle x, y\rangle|u^n(y)\in\omega_i\}$, $\xi_0=\{\langle x, y\rangle\,|\,u^n(y)\simeq2z\wedge z\in\sigma_\beta^n\}$, $\xi_1=\{\langle x, y\rangle\,|\,u^n(y)\simeq2z+1\wedge z\in\bar{\sigma}_\beta^n\}$, $\zeta=\{\langle x, y\rangle\,|\,x\in\sigma_{\omega^\eta}^n\}$. Здесь ω_0 — множество всех четных, ω_1 — всех нечетных чисел, u^n — универсальная частично рекурсивная относительно $\varnothing^{(n)}$ функция. Тогда $\rho_i\in L_n=\Sigma_{n+1}^0$ и $\zeta\leqslant_m\sigma_{\omega^\eta}^n$. Из упомянутой $\varnothing^{(n)}$-полноты σ_β^n следуют $\xi_0\leqslant_m\sigma_\beta^n$ и $\xi_1\leqslant_m\bar{\sigma}_\beta^n$. По лемме 1 (5) $\zeta\in S_{\omega^\eta}^n$, $\xi_0\in S_\beta^n$, $\xi_1\in\breve{S}_\beta^n$. По определению G, $\sigma_\alpha^n=\{\langle x, y\rangle\,|\,(u^n(y)\uparrow\wedge x\in\sigma_{\omega^\eta}^n)\vee(u^n(y)\downarrow\wedge u^n(y)\in\sigma_\beta^n\oplus\bar{\sigma}_\beta^n)\}$, откуда $\sigma_\alpha^n=\mathrm{Bisep}(\rho_0, \rho_1, \xi_0, \xi_1, \zeta)$. Поскольку $\rho_0\cap\rho_1=\varnothing$, то $\sigma_\alpha^n\in S_\alpha^n$. Обратно, пусть $\theta\in S_\alpha^n$, $\theta=\mathrm{Bisep}(\rho_0, \rho_1, \xi_0, \xi_1, \zeta)$, где $\rho_i\in L_n$, $\rho_0\cap\rho_1=\varnothing$, $\xi_0\in S_\beta^n$, $\xi_1\in\breve{S}_\beta^n$, $\zeta\in S_{\omega^\eta}^n$. По индукции $\xi_0\leqslant_m\sigma_\beta^n$, $\xi_1\leqslant_m\bar{\sigma}_\beta^n$, $\zeta\leqslant_m\sigma_{\omega^\eta}^n$. Поэтому $G(\xi_0\oplus\xi_1, \zeta, \varnothing^{(n)})\leqslant_m G(\sigma_\beta^n\oplus\bar{\sigma}_\beta^n, \sigma_{\omega^\eta}^n, \varnothing^{(n)})$ и достаточно проверить, что $\theta\leqslant_m G(\xi_0\oplus\xi_1, \zeta, \varnothing^{(n)})$. Пусть f общерекурсивная функция, удовлетворяющая условию $u^nf(x)\uparrow$ при $x\notin\rho_0\cup\rho_1$, $u^nf(x)\simeq2x$ при $x\in\rho_0$, $u^nf(x)\simeq2x+1$ при $x\in\rho_1$. Из определения G следует, что общерекурсивная функция $x\mapsto\langle x, f(x)\rangle$ m-сводит θ к $G(\xi_0\oplus\xi_1, \zeta, \varnothing^{(n)})$.

Вернемся к общему случаю и докажем нужные далее свойства S_α^n.

Лемма 2. 1) $S^n_\alpha \cdot L_n = S^n_\alpha$ *при* $\alpha < \varepsilon_0$, $S^n_\alpha + (L_n \cap \breve{L}_n) = S^n_\alpha$ *при* $\alpha > 0$, $S^n \cdot S^n_k = S^n_\lambda + S^n_k = S^n_\lambda$ *для* $k < \omega$ *и предельного* $\lambda < \varepsilon_0$.

2) $S^n_{\alpha+\omega^\eta} = \{u \mid \exists x_i \in L_n (ux_0 \in S^n_\alpha, ux_1 \in \breve{S}^n_\alpha, u\bar{x}_0\bar{x}_1 \in S^n_{\omega\eta})\}$ *для* $\omega^{\eta+1} | \alpha$, $S^n_{\alpha+\omega^\eta} = \{u \mid \exists x \in L_n (ux \in \breve{S}^n_\alpha, u\bar{x} \in S^n_{\omega^\eta})\}$ *для* $\omega^\eta \nmid \alpha$, $\omega^{\eta+1} \alpha$, *и аналогично с заменой* S *на* $\breve{S}$ *и обратно.*

Доказательство. Пункт 1 проверяется индукцией. При $\alpha < \omega$ оно следует из результатов [2] и того, что S^n_α — совокупность всех Σ^{-1}_α -комбинаций элементов L_n. При $\alpha = \omega^\eta$ имеем $S^n_{\omega^\eta} \cdot S^n_k \subseteq S^{n+1}_\eta \cdot (L_{n+1} \cap \breve{L}_{n+1}) \subseteq S^{n+1}_\eta = S^n_{\omega^\eta}$ и аналогично для $+$. При $\alpha = \beta + \omega^\eta$, $\omega^{\eta+1} | \beta$, используем лемму 1 (1): $S^n_\alpha \cdot S^n_k = \mathrm{Bisep}\ (L_n, S^n_\beta, \breve{S}^n_\beta, S^n_{\omega^\eta}) \cdot S^n_k = \mathrm{Bisep}\ (L_n, S^n_\beta \cdot S^n_k, \breve{S}^n_\beta \cdot S^n_k, S^n_{\omega^\eta} \cdot S^n_k) = \mathrm{Bisep}(L_n, S^n_\beta, \breve{S}^n_\beta, S^n_{\omega^\eta}) = S^n_\alpha$. Аналогично рассматриваются и остальные случаи. Пункт 2 сразу следует из 1 и леммы 1 (2), (3).

Лемма 3. 1) *При всех* $u \in B$, $x, y \in L_n$ *и* λ *предельном из* ux, $uy \in S^n_\lambda$ *следует* $u(x \cup y) \in S^n_\lambda$ *и аналогично для* $\breve{S}^n_\lambda$.

2) $\mathrm{Sep}(L_n, S^n_{\alpha+\omega^\eta}, S^n_{\omega^\eta}) = \breve{S}^n_{\alpha+\omega^\eta}$ *при* $\omega^\eta | \alpha$ *и аналогично для* $\breve{S}$.

3) *Для всех* α, $\eta < \varepsilon_0$, $\alpha > 0$, $\omega^{\eta+1} | \alpha$, $0 < m < \omega$, $u \in B$, $x_0, x_1 \in L_n$, *из* $ux_0 \in S^n_\alpha$, $ux_1 \in \breve{S}^n_\alpha$, $u\bar{x}_0\bar{x}_1 \in S_{\omega^\eta m}$, *следует* $u \in S^n_{\alpha+\omega^\eta m}$ *и аналогично с заменой* S *на* $\breve{S}$.

Доказательство. 1. Сначала проверяем, что из ux, $uy \in S^n_k$, $k < \omega$, $x, y \in L_n \cap \breve{L}_n$, следует $u(x \cup y) \in S^n_k$. Для $\lambda \in \omega^\eta$ проверка как в лемме 2, учитывая $L_n \subseteq L_{n+1} \cap \breve{L}_{n+1}$. Пусть $\lambda = \alpha + \omega^\eta$, $\omega^{\eta+1} | \alpha$, $\alpha > 0$. Ясно, что достаточно доказать утверждение в случае $u \subseteq x \cup y$. Итак, пусть ux, $uy \in S^n_\lambda$. Тогда $uxx_0 \in S^n_\alpha$, $uxx_1 \in \breve{S}^n_\alpha$, $ux\bar{x}_0\bar{x}_1 \in S^n_{\omega^\eta}$, $uyy_0 \in S_\alpha$, $uyy_1 \in \breve{S}^n_\alpha$, $uy\bar{y}_0\bar{y}_1 \in S^n_{\omega^\eta}$ для некоторых x_i, $y_i \in L_n$. Пусть $x'_i = xx_i$, $y'_i = yy_i$. Тогда по индукции

$$u(x'_0 \cup x'_1) \in S^n_\alpha, \; u(y'_0 \cup y'_1) \in \breve{S}^n_\alpha. \tag{1}$$

Далее, $ux\bar{x}'_0$, $\bar{x}'_1 = ux\bar{x}_0\bar{x}_1 \in S^n_{\omega^\eta}$, поэтому $ux\bar{x}'_0\bar{x}'_1\bar{y}'_0\bar{y}'_1 \in S^n_{\omega^\eta}$ по лемме 2(1). Аналогично $uy\bar{x}'_0\bar{x}'_1\bar{y}'_0\bar{y}'_1 \in S^n_{\omega^\eta}$, откуда по индукции с учетом $u \subseteq x \cup y$ получаем $u\bar{x}'_0\bar{x}'_1\bar{y}'_0\bar{y}'_1 \in S^n_{\omega^\eta}$. Это вместе с (1) дает $u \in S^n_\alpha$. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Докажем 2. При $\alpha = 0$ утверждение следует из п. 1, так как если $ux, u\bar{x} \in S^n_{\omega^\eta} = S^{n+1}_\eta$, то x, $\bar{x} \in L_{n+1} \cap \breve{L}_{n+1}$ и потому $u = u(x \cup \bar{x}) \in S^{n+1}_\eta$. Рассмотрим случай $\omega^{\eta+1} | \alpha$. Пусть $u = \mathrm{Sep}(L_n, S^n_{\alpha+\omega^\eta}, S^n_{\omega_\eta})$, $x \in L_n$, $ux \in S^n_{\alpha+\omega^\eta}$, $u\bar{x} \in S^n_{\omega^\eta}$. Пусть $y_i \in L_n$ таковы, что $uxy_0 \in S^n_\alpha$, $uxy_1 \in \breve{S}^n_\alpha$, $ux\bar{y}_0\bar{y}_1 \in S^n_{\omega^\eta}$. Как и выше $u(\bar{x} \cup x\bar{y}_0\bar{y}_1) \in S^n_{\omega^\eta}$, т. е. $u(\bar{x} \cup \bar{y}_0)(\bar{x} \cup \bar{y}_1) \in S^n_{\omega^\eta}$. Отсюда $u \in S^n_{\alpha+\omega^\eta}$.

П. 3 проверяется индукцией по m.

Предложение 1. *Из* $\alpha < \beta$ *следует* $S^n_\alpha \cup \breve{S}^n_\alpha \subseteq S^n_\beta$.

Доказательство проведем лишь в нужном для этой работы случае $\alpha < \beta < \omega^\omega$. Тогда $\alpha = \omega^{k_0} \cdot l_0 + \omega^{k_1} \cdot l_1 + \ldots$, $\beta = \omega^{m_0} \cdot n_0 + \omega^{m_1} \cdot n_1 + \ldots$ для подходящих k_i, l_i, m_i, $n_i < \omega$, l_i, $n_i > 0$, $k_0 > k_1 > \ldots$, $m_0 > m_1 > \ldots$. Согласно [10], $\alpha < \beta$, если представление для α есть собственное начало представления для β или найдется такое i, что $\forall j < i\ (k_j = m_j \wedge l_j = n_j)$ и $k_i < m_i \vee (k_i = m_i \wedge l_i < n_i)$. В первом случае $\beta = \alpha + \omega^{p_0} \cdot q_0 + \ldots$, где $\omega^{p_0+1} | \alpha$. Ясно, что включение $S_\alpha \cup \breve{S}_\alpha \subseteq S_\beta$ достаточно проверить для $\beta = \alpha + \omega^{p_0} \cdot q_0$. В свою очередь, для этого достаточно доказать $S_\alpha \cup \breve{S} \subseteq$

$\subseteq S_{\alpha+\omega^{p_0}}$ и $\breve{S}_{\alpha+\omega^{p_0}q_0} \subseteq S_{\alpha+\omega^{p_0}(q_0+1)}$ для $q_0>0$. Для $u\in S_\alpha$ возьмем $x_0=1$, $x_1=0$, а для $u\in\breve{S}_\alpha$ — $x_i=i$. Тогда $ux_0\in S_\alpha$, $ux_1\in\breve{S}_\alpha$, $u\bar{x}_0\bar{x}_1\in$ $\in S_{\omega^{p_0}}$, откуда $u\in S_{\alpha+\omega^{p_0}}$. Это доказывает $S_\alpha\cup\breve{S}_\alpha\subseteq S_{\alpha+\omega^{p_0}}$. Так же проверяется второе включение.

Осталось рассмотреть случай $\alpha=\gamma+\omega^{k_i}l_i+\ldots$, $\beta=\gamma+\omega^{m_i}n_i+\ldots$, $k_i<m_i$ или $k_i=m_i$, $l_i<n_i$ и $\omega^{m_i+1}|\gamma$. В этом случае достаточно доказать утверждение:

$$\text{если}\qquad S_\delta\cup\breve{S}_\delta\subseteq S_{\eta+\omega^m},\ k<m,\ \omega^m\,|\,\eta,\ \omega^{k+1}\,|\,\delta,$$

$$\text{то}\qquad S_{\delta+\omega^k l}\cup\breve{S}_{\delta+\omega^k l}\subseteq S_{\eta+\omega^m}. \tag{2}$$

Действительно, тогда при $k_i<m_i$ возьмем $\delta=\eta=\gamma$ и, последовательно применяя (2), получим $S_\alpha\cup\breve{S}\subseteq S_{\gamma+\omega^{m_i}}\subseteq S_\beta$. При $k_i=m_i$, $l_i<n_i$, возьмем $\delta=\gamma+\omega^{k_i}l_i$, $\eta=\gamma+\omega^{k_i}(n_i-1)$, и, последовательно применяя (2), получим $S_\alpha\cup\breve{S}_\alpha\subseteq S_{\gamma+\omega^{m_i}n_i}\subseteq S_\beta$; (2) проверяется индукцией по l. Пусть $l=1$, $u\in S_{\delta+\omega^k}$. Тогда $ux_0\in S_\delta$, $ux_1\in\breve{S}_\delta$, $u\bar{x}_0\bar{x}_1\in S_{\omega^k}$ для некоторых x_0, $x_1\in L_n$. Отсюда $ux_i\in S_{\eta+\omega^m}$, $u\bar{x}_0\bar{x}_1\in S_{\omega^m}$. По лемме 3(1) $u(x_0\cup x_1)\in S_{\eta+\omega^m}$. По лемме 3 (2) $u\in S_{\eta+\omega^m}$. Для $u\in\breve{S}_{\delta+\omega_k}$ и для индукционного шага доказательство аналогично.

Введем одно понятие, связанное с отделимостью. Элемент a назовем *X-отделимым от b*, если $a\subseteq x$ и $b\subseteq\bar{x}$ для некоторого $x\in X$. Пусть X^* — булева алгебра, порожденная множеством X.

Лемма 4. 1) *Если a_i L_n-отделим от b_j для всех $i\leqslant k$, $j\leqslant l$, то $a_0\cup\ldots\cup a_k$ L_n-отделим от $b_0\cup\ldots\cup b_l$.*

2) *Если $a_0,\ldots,a_k$ попарно L_n^*-отделимы и лежат в $S^n_{\omega\eta}\cup\breve{S}^n_{\omega\eta}$, то $a_0\cup\ldots\cup a_k\in S^n_{\omega\eta_m}$ для некоторого $m<\omega$.*

Доказательство. Утверждение п. 1 очевидно, докажем п. 2. Из попарной отделимости и того, что L_n^* — булева алгебра, следует, что существуют попарно непересекающиеся $x_i\in L_n^*$, $a_i\subseteq x_i$. Пусть $a=$ $=a_0\cup\ldots\cup a_k$, $x=x_0\cup\ldots\cup x_k$. Согласно [11, с. 215, предложение 4] найдутся $l<\omega$ и $r^i_j\in L_n$ такие, что $r^i_l=\varnothing$, $r^i_0\supseteq r^i_1\supseteq\ldots$, $x_i=\bigcup\limits_j(r^i_{2j}\setminus r^i_{2j+1})$. Применяя это же рассуждение, легко доказать, что множество $\{r^i_j\,|\,i\leqslant k,$ $j\leqslant l\}$ можно считать линейно упорядоченным по включению. Пусть $s_0\supseteq\ldots\supseteq s_{m-1}$ — линейное упорядочение этого множества и $t_0=\bar{s}_0$, $t_{j+1}=$ $=s_j\setminus s_{j+1}$, $t_m=s_{m-1}$. Тогда t_j либо содержится в одном из x_i, либо не пересекается с x (первое имеет место, если $t_j\subseteq r^i_{2p}\setminus r^i_{2p-1}$ для некоторого p, а второе — в противном случае). Поэтому $t_j\cap a$ либо содержится в одном из a_i, либо равно 0. По лемме 2(1) $t_ja\in S^n_{\omega\eta}\cup\breve{S}^n_{\omega\eta}$ при любом $j\leqslant m$. Если t_ja, $t_{j+1}a\in S^n_{\omega\eta}$ или $t_ja, t_{j+1}a\in\breve{S}^n_{\omega\eta}$, то $(t_j\cup t_{j+1})a\in S^n_{\omega\eta}\cup\breve{S}^n_{\omega\eta}$ по лемме 3 (1). Объединяя такие t_j, t_{j+1}, получим новую последовательность $t_0,\ldots,t_m$, для которой t_j обладают свойством $t_ja\in S^n_{\omega\eta}\leftrightarrow t_{j+1}a\in$ $\in\breve{S}^\eta_{\omega_\eta}$. По определению $S^n_{\omega\eta_m}$ тогда $a=t_0a\cup\ldots\cup t_ma$ лежит в $S^n_{\omega\eta_m}\cup\breve{S}^n_{\omega\eta_m}$.

В заключение параграфа приведем характеризацию непредельных уровней. Она доказывается индукцией по k.

Лемма 5. *Для любых $k<\omega$ и предельного $\lambda<\varepsilon_0$ имеем*

$$S^n_{\lambda+k+1}=\{u\,|\,\exists x_0,\,x_1\in L_n\exists a\in S^n_k\,(ux_0\in S_\lambda,\ ux_1\in\breve{S}_\lambda,\ u\bar{x}_0\bar{x}_1=a\bar{x}_0\bar{x}_1)\}$$

и аналогично для $\breve{S}^n_{\lambda+k+1}$.

Докажем сначала один общий результат об индексных множествах. Пусть $(S;\ \leqslant)$ — частичный порядок и $X \subseteq S$. *Цепью* для $(X;\ \leqslant)$ будем называть такую последовательность $(x_0, \ldots, x_k)$, что $x_0 \leqslant \ldots \leqslant x_k$ и $x_i \in X \leftrightarrow x_{i+1} \notin X$. Число k называем *длиной цепи*. Цепь называем *0-цепью* (*1-цепью*), если $x_0 \notin X$ $(x_0 \in X)$.

Предложение 2. *Пусть* $(\mathbf{A};\ \mathbf{A}_0,\ \leqslant)$ — *полное над аппроксимацией нумерованное множество с наименьшим элементом. Если* $X \subseteq A$ *таково, что* $\alpha^{-1}(X) \in \bigcup\limits_{k>\omega} \Sigma_k^{-1}$ *и* $\alpha_0^{-1}(X)$ *рекурсивно, то* $\alpha^{-1}(X)$ *универсально в одном из классов* Σ_k^{-1}, Π_k^{-1}.

Доказательство. Из $\alpha^{-1}(X) \in \bigcup\limits_{k<\omega} \Sigma_k^{-1}$ и [12, лемма 3] следует, что длины цепей для $(X;\ \leqslant)$ ограничены в совокупности. Пусть k — наибольшая длина цепей для $(X;\ \leqslant)$. Цепь $(X;\ \leqslant)$ не может иметь одновременно 0-цепь $(x_0, \ldots, x_k)$ и 1-цепь $(y_0, \ldots, y_k)$, так как в противном случае одна из последовательностей $(a, x_0, \ldots, x_k)$, $(a, y_0, \ldots, y_k)$ была бы цепью длины $k+1$, где a — наименьший элемент в $(A;\ \leqslant)$. Пусть $(X;\ \leqslant)$ имеет 0-цепь длины k. Тогда $\Sigma_k^{-1} \leqslant \alpha^{-1}(X)$, т. е. любое Σ_k^{-1}-множество m-сводится к $\alpha^{-1}(X)$ в силу леммы 3 из [12]. Поскольку $(X;\ \leqslant)$ не имеет 1-цепей длины k, то X есть Σ_k^{-1}-комбинация вполне перечислимых множеств (см. доказательство теоремы 3 в [12]). Отсюда $\alpha^{-1}(X) \in \Sigma_k^{-1}$, $\alpha^{-1}(X) \approx \Sigma_k^{-1}$ (последняя запись означает, что $\alpha^{-1}(X)$ универсально в Σ_k^{-1}). В случае, когда $(X;\ \leqslant)$ имеет 1-цепь длины k, аналогично доказывается $\alpha^{-1}(X) \approx \Pi_k^{-1}$.

Перейдем к основной задаче статьи — изучению предикатов на $\mathscr{E}$. Фиксируем до конца статьи $n \geqslant 1$ и будем рассматривать n-местные предикаты, т. е. подмножества $\mathscr{E}^n$. Последовательность рекурсивно-перечислимых множеств $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathscr{E}^n$ будем обозначать одной буквой α. Пусть $\mathscr{P}[n]$ — совокупность всех подмножеств множества $[n] = \{0, \ldots, n-1\}$, элементы $\mathscr{P}[n]$ будем обозначать буквами σ, τ. Следуя А. Лахлану [8], сопоставим каждому $\alpha \in \mathscr{E}^n$ отображение $\tilde{\alpha}$: $\mathscr{P}[n] \to \mathscr{P}(\omega)$ по правилу $\tilde{\alpha}(\sigma) = \left(\bigcap\limits_{i \in \sigma} \alpha_i\right) \cap \left(\bigcap\limits_{i \notin \sigma} \bar{\alpha}_i\right)$. Сформулируем простую лемму.

Лемма 6. 1) $\tilde{\alpha}(\sigma) \cap \tilde{\alpha}(\tau) = \varnothing$ *при* $\sigma \neq \tau$, $\bigcup\limits_{\sigma \subseteq [n]} \tilde{\alpha}(\sigma) = \omega$, *множество* $\bigcup\limits_{\tau \supseteq \sigma} \tilde{\alpha}(\tau)$ *рекурсивно-перечислимо*;

2) $\bigcup\limits_{\tau \supseteq \sigma} \tilde{\alpha}(\tau) = \bigcap\limits_{i \in \sigma} \alpha_i$;

3) $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}$ *есть взаимно однозначное соответствие между* $\mathscr{E}^n$ *и множеством всех* $\tilde{\alpha}$, *удовлетворяющих* (1);

4) $\alpha \subseteq \beta \leftrightarrow \forall \sigma \left(\tilde{\alpha}(\sigma) \subseteq \bigcup\limits_{\tau \supseteq \sigma} \tilde{\beta}(\tau)\right)$;

5) α *конечно тогда и только тогда, когда* $\tilde{\alpha}(\sigma)$ *конечно при всех* $\sigma \neq \varnothing$.

Пусть $A_a^\sigma = \{\alpha : |\tilde{\alpha}(\sigma)| = a\}$, $A_{\geqslant a}^\sigma = \{\alpha : |\tilde{\alpha}(\sigma)| \geqslant a\}$ и $A_\gamma^\sigma = \{\alpha : |\tilde{\alpha}(\sigma)| \in \gamma\}$ для $\gamma \subseteq \omega + 1$. Сопоставим любым $I \subseteq \mathscr{P}[n]$ и f: $\mathscr{P}[n] \to \omega$ предикат $A_f^I = \left(\bigcap\limits_{\sigma \in I} A_{\geqslant f(\sigma)}^\sigma\right) \cap \left(\bigcap\limits_{\sigma \notin I} A_{f(\sigma)}^\sigma\right)$. Предикаты вида A_f^I называются *А-предикатами*. Через $\mathscr{A}^*$ обозначим совокупность всех булевых комбинаций A-предикатов. В [8] замечено, что каждый $X \in \mathscr{A}^*$ представим в виде $X = \cup \mathscr{X}$, где $\mathscr{X}$ — конечное (возможно, пустое) множество A-предикатов. Такое представление называем *А-представлением* для X.

Дадим другое описание $\mathscr{A}^*$-предикатов.

Лемма 7. *Класс $\mathscr{A}^*$ совпадает с классом предикатов вида* $\{\alpha\in\mathscr{E}^n\,|\,(\omega;\ \alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_{n-1})\vDash\varphi\}$, *где φ — предложение сигнатуры $\{P_0,\ldots,P_{n-1}\}$ с одноместными предикатами.*

Из определения A_f^I видно, что он определим предложением языка $\{P_0,\ \ldots,\ P_{n-1}\}$, поэтому и всякий $\mathscr{A}^*$-предикат также определим. В обратную сторону утверждение следует из [13, с. 276, предложение 1].

Еще несколько обозначений. Пусть $\mathbf{\Phi}$ — множество всех отображений φ: $\mathscr{P}[n]\to\omega+1$, удовлетворяющих условию $\exists\sigma(\varphi(\sigma)=\omega)$, $\mathbf{\Phi}_0$ — множество всех $\varphi\in\mathbf{\Phi}$, для которых $\varphi(\sigma)<\omega$ при $\sigma\neq\varnothing$. Каждому $\alpha\in\mathscr{E}^n$ сопоставим $\approx{\alpha}\in\Phi$: $\approx{\alpha}(\sigma)=|\tilde{\alpha}(\sigma)|$. Предикат X назовем *инвариантным*, если из $\alpha\in X$ и $\approx{\alpha}=\approx{\beta}$ следует $\beta\in X$. Предикат X назовем *формульным*, если он определим в $(\mathscr{E};\ \cup,\ \cap)$ формулой логики предикатов без параметров. Предикат X назовем *решеточным*, если $(\Phi(\alpha_0),\ \ldots,\ \Phi(\alpha_{n-1}))\in X$ для любого $(\alpha_0,\ \ldots,\ \alpha_{n-1})\in X$ и любого автоморфизма Φ решетки $(\mathscr{E};\ \cup,\ \cap)$.

Лемма 8. *Всякий $\mathscr{A}^*$-предикат является инвариантным и формульным, а всякий формульный предикат является решеточным.*

Инвариантность $\mathscr{A}^*$-предикатов ясна из определения, формульность $\mathscr{A}^*$-предикатов следует из [8], последнее утверждение очевидно.

Введем и изучим некоторые отношения на $\mathbf{\Phi}$. Непустые замкнутые вверх по отношению $\subseteq$ подмножества $\mathscr{P}[n]$ будем обозначать буквами K, K_0, $\ldots$, а замкнутые вниз — буквами J, J_0, $\ldots$. Положим $\varphi\sqsubseteq\psi$, если $\sum\limits_{\sigma\in K}\varphi(\sigma)\leqslant\sum\limits_{\sigma\in K}\psi(\sigma)$ для любого замкнутого вверх K, где сумма берется в смысле кардиналов, т. е. $\omega+\alpha=\omega$. Для любого замкнутого J введем отношение $\leqslant_J$ так: $\varphi\leqslant_J\psi$, если $J_\varphi=J_\psi=J$, $\varphi[\bar{J}]=\psi[J]$ и $\varphi[J]\leqslant\psi[J]$. Здесь $J_\varphi=\{\sigma\,|\,\exists\tau\supseteq\sigma(\varphi(\tau)=\omega)\}$, $\varphi[J]\leqslant\psi[J]$ означает $\forall\sigma\in J(\varphi(\sigma)\leqslant\psi(\sigma))$. Если X — подмножество частичного порядка $(S;\ \leqslant)$, то $\min X$ и $\max X$ обозначают множества всех минимальных и максимальных элементов X соответственно. Для данных J и θ: $\bar{J}\to\omega$ пусть $\mathbf{\Phi}_{J,\theta}$ — множество всех $\varphi\in\mathbf{\Phi}$, $J_\varphi=J$, $\varphi[\bar{J}]=\theta$.

Лемма 9. 1) *Отношение $\sqsubseteq$ — предпорядок на $\mathbf{\Phi}$ и частичный порядок на $\mathbf{\Phi}_0$, а $\leqslant_J$ — частичный порядок на $\mathbf{\Phi}$;*

2) *если $\varphi\sqsubseteq\psi$, то $J_\varphi\subseteq J_\psi$;*

3) $\varphi\sqsubseteq\psi\leftrightarrow\forall K\subseteq\bar{J}_\psi\Big(\sum\limits_{\sigma\in K}\varphi(\sigma)\leqslant\sum\limits_{\sigma\in K}\psi(\sigma)\Big)$;

4) *если $\varphi\leqslant_J\psi$, то $\varphi\sqsubseteq\psi$ и $\psi\sqsubseteq\varphi$;*

5) *порядки $(\mathbf{\Phi}_0;\ \sqsubseteq)$ и $(\mathbf{\Phi}_{J,\theta};\ \leqslant_J)$ обладают свойством: для любого непустого подмножества X множество $\min X$ непусто и конечно;*

6) *для любых $\varphi\in\mathbf{\Phi}_0$, $\psi\in\mathbf{\Phi}$ равносильны условия: $\varphi\sqsubseteq\psi$; существуют α, $\beta\in\mathscr{E}^n$ такие, что $\approx{\alpha}=\varphi$, $\approx{\beta}=\psi$, $\alpha\subseteq\beta$; для любого α, $\approx{\alpha}=\varphi$, найдется такое β, что $\approx{\beta}=\psi$, $\alpha\subseteq\beta$.*

Доказательство. Утверждения 1—4 проверяются очевидным образом. Для доказательства п. 5 достаточно проверить, что для любой последовательности $\{\varphi_i\}_{i<\omega}$ найдутся $i<j$ такие, что $\varphi_i\leqslant\varphi_j$ (здесь $\leqslant$ — одно из отношений $\sqsubseteq$, $\leqslant_J$). Действительно, отсюда сразу следует фундированность этих порядков. Конечность $\min X$ следует из того, что $(\min X;\ \leqslant)$ является антицепью и, следовательно, по сформулированному утверждению не может быть бесконечным. Рассмотрим сначала $\mathbf{\Phi}_{J,\theta}$.

Пусть $J=\{\sigma_0,\ \ldots,\ \sigma_m\}$. Докажем вспомогательное утверждение: если $\{\psi_i\}_{i<\omega}$ — последовательность элементов $\mathbf{\Phi}_{J,\theta}$, удовлетворяющая при некотором $k\leqslant m$ условию $\forall i\forall j<k(\psi_i(\sigma_j)\leqslant\psi_{i+1}(\sigma_j))$, то найдется возрастающая функция f такая, что $\forall i\forall j\leqslant k(\psi_{f(i)}(\sigma_j)\leqslant\psi_{f(i+1)}(\sigma_j))$. Действительно, достаточно взять $f(0)=\mu i(\forall i_1\geqslant i(\psi_i(\sigma_k)\leqslant\psi_{i_1}(\sigma_k)))$, $f(e+1)=\mu i\big(i>f(e)\wedge\forall i_1\geqslant i\,(\psi_i(\sigma_k)\leqslant\psi_{i_1}(\sigma_k))\big)$. Если теперь $\{\varphi_i\}$ — произвольная последовательность элементов $\mathbf{\Phi}_{J,\theta}$, то, применяя к ней $m+1$

раз это утверждение, найдем возрастающую функцию g, для которой $\forall i \forall j \leqslant m(\varphi_{g(i)}(\sigma_j) \leqslant \varphi_{g(i+1)}(\sigma_i))$, т. е. $\forall i(\varphi_{g(i)} \leqslant_J \varphi_{g(i+1)})$.

Рассмотрим $(\Phi_0; \subseteq)$. Пусть $\{K_0 < \ldots < K_m\}$ — линейное упорядочение всех непустых замкнутых вверх подмножеств $\mathscr{P}[n]$, продолжающее отношение $\subseteq$. Пусть $k \leqslant m$ и $\{\psi_i\}$ — последовательность элементов Φ_0, для которой $\forall i \forall j < k \left(\sum_{\sigma\in K_j} \psi_i(\sigma) \leqslant \sum_{\sigma\in K_j} \psi_{i+1}(\sigma)\right)$. Пусть $\sigma \in \min K_k$, $K_l = K_k \setminus \{\sigma\}$. Тогда $K_l < K_k, \forall i \left(\sum_{\sigma\in K_l} \psi_i(\sigma) \leqslant \sum_{\sigma\in K_l} \psi_{i+1}(\sigma)\right)$ (или $K_l = \varnothing$). Положим $f(0) = \mu i(\forall i_1 \geqslant i(\psi_i(\sigma) \leqslant \psi_{i_1}(\sigma)))$, $f(e+1) = \mu i(i > f(e) \wedge \forall i_1 \geqslant i(\psi_i(\sigma) \leqslant \psi_{i_1}(\sigma)))$. Тогда f возрастает и $\forall i \forall j \leqslant k \left(\sum_{\sigma\in K_j} \psi_{f(i)}(\sigma) \leqslant \sum_{\sigma\in K_j} \psi_{f(i+1)}(\sigma)\right)$. Далее доказательство как в случае $\Phi_{J,\theta}$.

Докажем п. 6. Проверим, что второе условие влечет третье. Пусть $\approx\alpha = \varphi$, $\approx\beta = \psi$, $\alpha \subseteq \beta$, и пусть дано α_1, $\approx\alpha_1 = \varphi$. Тогда $\approx\alpha_1 = \approx\alpha$. Пусть Φ — автоморфизм $(\mathscr{E}; \cup, \cap)$, для которого $\Phi(\alpha) = \alpha_1$. Поскольку $\alpha \subseteq \beta$, то $\Phi(\alpha) \subseteq \Phi(\beta) = \beta_1$. Легко видеть, что $\approx\beta_1 = \approx\beta$. Поэтому $\approx\beta_1 = \psi$, т. е. мы нашли $\beta_1 \supseteq \alpha_1$, $\approx\beta_1 = \psi$. Второе условие следует из третьего очевидным образом. Проверим, что второе условие влечет первое. Пусть $\approx\alpha = \varphi$, $\approx\beta = \psi$, $\alpha \subseteq \beta$. Тогда $\bigcap_{i\in\sigma} \alpha_i \subseteq \bigcap_{i\in\sigma} \beta_i$, $\bigcup_{\sigma\in K}\left(\bigcap_{i\in\sigma} \alpha_i\right) \subseteq \bigcup_{\sigma\in K}\left(\bigcap_{i\in\sigma} \beta_i\right)$ для всех $\sigma \subseteq [n]$ и K. По лемме 1

$$\sum_{\sigma\in K} \approx\alpha(\sigma) = \left|\bigcup_{\sigma\in K} \tilde{\alpha}(\sigma)\right| = \left|\bigcup_{\sigma\in K}\left(\bigcup_{\tau\supseteq\sigma} \tilde{\alpha}(\tau)\right)\right| = \left|\bigcup_{\sigma\in K}\left(\bigcap_{i\in\sigma} \alpha_i\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\bigcup_{\sigma\in K}\left(\bigcap_{i\in\sigma} \beta_i\right)\right| = \sum_{\sigma\in K} \approx\beta(\sigma),$$

т. е. $\varphi = \approx\alpha \subseteq \approx\beta = \psi$. Остается проверить, что первое условие влечет второе. Докажем более точное утверждение: если $\varphi \subseteq \approx\beta$, то найдется $\alpha \subseteq \beta$, $\approx\alpha = \varphi$. Доказательство индукцией по $k = \sum_{\sigma\neq\varnothing} \varphi(\sigma)$. При $k = 0$ берем $\alpha = \varnothing$. Пусть $k > 0$.

Случай 1. Для всякого K из $\varnothing \notin K$ и $\sum_{\sigma\in K} \varphi(\sigma) \neq 0$ следует $\sum_{\sigma\in K} \varphi(\sigma) < \sum_{\sigma\in K} \approx\beta(\sigma)$.

Возьмем σ, для которого $\varphi(\sigma) \neq 0$. Пусть b и τ таковы, что $\sigma \subseteq \tau$, $b \in \tilde{\beta}(\tau)$. Пусть $\varphi'(\sigma) = \varphi(\sigma) - 1$, $\varphi'(\rho) = \varphi(\rho)$ для $\rho \neq \sigma$, а $\tilde{\beta}'$ получается из $\tilde{\beta}$ перекладыванием b из $\tilde{\beta}(\tau)$ в $\tilde{\beta}'(\varnothing)$. Тогда $\varphi' \subseteq \approx\beta'$. По индукции найдется $\alpha' \subseteq \beta'$, $\approx\alpha' = \varphi'$. Пусть $\tilde{\alpha}$ получается из $\tilde{\alpha}'$ перекладыванием b из $\tilde{\alpha}'(\varnothing)$ в $\tilde{\alpha}(\sigma)$. Тогда $\alpha \subseteq \beta$, $\approx\alpha = \varphi$.

Случай 2. Для некоторого K $\varnothing \notin K, 0 \neq \sum_{\sigma\in K} \varphi(\sigma) = \sum_{\sigma\in K} \approx\beta(\sigma)$. Выберем такое K наименьшей мощности и найдем $\sigma \in K$, $\varphi(\sigma) \neq 0$. Построим φ' и β' так же, как в первом случае. Утверждаем $\varphi' \subseteq \approx\beta'$. Пусть K_1 — любое замкнутое вверх множество. Если $\sigma, \tau \notin K_1$, то $\sum_{\rho\in K_1} \varphi'(\rho) = \sum_{\rho\in K_1} \varphi(\rho) \leqslant \sum_{\rho\in K_1} \approx\beta(\rho) = \sum_{\rho\in K_1} \approx\beta'(\rho)$. Если $\sigma, \tau \in K_1$, то $\sum_{\rho\in K_1} \varphi'(\rho) = \sum_{\rho\in K_1} \varphi(\rho) - 1 \leqslant \sum_{\rho\in K_1} \approx\beta(\rho) - 1 = \sum_{\rho\in K_1} \approx\beta'(\rho)$. Пусть $\sigma \notin K_1$, $\tau \in K_1$. Тогда $K \cap K_1 \subset K$ и $\sum_{\rho\in K\cap K_1} \varphi(\rho) < \sum_{\rho\in K\cap K_1} \approx\beta(\rho)$ по выбору k. Поскольку

$\sum_{\rho\in K\cup K_1}\varphi(\rho)=\sum_{\rho\in K}\varphi(\rho)+\sum_{\rho\in K_1\setminus K}\varphi(\rho)$ и аналогично для $\tilde{\tilde{\beta}}$, то из $\sum_{\rho\in K}\varphi(\rho)=\sum_{\rho\in K}\tilde{\tilde{\beta}}(\rho)$ следует $\sum_{\rho\in K\setminus K_1}\varphi(\rho)\leqslant\sum_{\rho\in K\setminus K_1}\tilde{\tilde{\beta}}(\rho)$. Отсюда $\sum_{\rho\in K_1}\varphi(\rho)=$ $=\sum_{\rho\in K\cap K_1}\varphi(\rho)+\sum_{\rho\in K_1\setminus K}\varphi(\rho)<\sum_{\rho\in K\cap K_1}\tilde{\tilde{\beta}}(\rho)+\sum_{\rho\in K_1\setminus K}\tilde{\tilde{\beta}}(\rho)=\sum_{\rho\in K_1}\tilde{\tilde{\beta}}(\rho)$ и поэтому $\sum_{\rho\in K_1}\varphi'(\rho)=\sum_{\rho\in K_1}\varphi(\rho)\leqslant\sum_{\rho\in K_1}\tilde{\tilde{\beta}}(\rho)-1=\sum_{\rho\in K_1}\tilde{\tilde{\beta}}'(\rho)$. Проверили $\varphi'\subseteq$ $\subseteq\tilde{\tilde{\beta}}'$. Далее доказательство как в случае 1. Лемма доказана.

Для конечного множества $\Phi\subseteq\mathbf{\Phi}_0$ положим $\mathcal{O}_\Phi=\{\alpha|\exists\varphi\in\Phi(\varphi\subseteq\tilde{\tilde{\alpha}})\}$. Пусть $\mathcal{L}_0$ — класс всех предикатов вида $\mathcal{O}_\Phi$.

Лемма 10. *Класс $\mathcal{L}_0$ является подрешеткой решетки $\mathcal{A}^*$-предикатов. Любой $\mathcal{L}_0$-предикат вполне перечислим.*

Имеем $\alpha\in\mathcal{O}_\Phi\leftrightarrow\exists\varphi\in\Phi\forall K\left(\sum_{\sigma\in K}\varphi(\sigma)\leqslant\sum_{\sigma\in K}\tilde{\tilde{\alpha}}(\sigma)\right)$. Учитывая доказательство леммы 9(6), получим $\alpha\in\mathcal{O}_\Phi\leftrightarrow\exists\varphi\in\Phi\forall K\Big(\sum_{\sigma\in K}\varphi(\sigma)\leqslant$ $\leqslant\Big|\bigcup_{\sigma\in K}\Big(\bigcap_{i\in\sigma}\alpha_i\Big)\Big|\Big)$. Отсюда видно, что $\mathcal{O}_\Phi$ вполне перечислим. Это же соотношение дает определение для $\mathcal{O}_\Phi$ в смысле леммы 7. Поэтому $\mathcal{O}_\Phi\in$ $\in\mathcal{A}^*$. Осталось доказать замкнутость $\mathcal{L}_0$ относительно $\cup$, $\cap$. Имеем $\mathcal{O}_{\Phi_1}\cup\mathcal{O}_{\Phi_2}=\mathcal{O}_{\Phi_1\cup\Phi_2}$, $\mathcal{O}_{\Phi_1}\cap\mathcal{O}_{\Phi_2}=\mathcal{O}_{\Phi_3}$, где $\Phi_3=\min\{\psi\in\mathbf{\Phi}_0|\forall\varphi\in\Phi_1\cup$ $\cup\Phi_2(\varphi\subseteq\psi)\}$. Второе равенство следует из леммы 9(5).

Важность $\mathcal{L}_0$-предикатов видна из следующего предложения.

Предложение 3. *Пусть $X\subseteq\mathcal{E}^n$ — решеточный предикат и $\pi^{-1}(X)\in$ $\in\bigcup_{k<\omega}\Sigma_k^{-1}$. Тогда X есть булева комбинация $\mathcal{L}_0$-предикатов и $\pi^{-1}(X)$ универсально в одном из Σ_k^{-1}, Π_k^{-1}.*

Доказательство. Положим $\Phi_i=\min\{\varphi\in\mathbf{\Phi}_0|\exists\varphi_0,\ldots,\varphi_i(\varphi_i=$ $=\varphi\wedge(\varphi_0,\ldots,\varphi_i)$ — 1-цепь для $(\tilde{\tilde{X}};\subseteq))\}$, $Z_i=\mathcal{O}_{\Phi_i}$. Тогда ясно, что $Z_0\supseteq Z_1\supseteq\ldots$ Найдется k, для которого $Z_k=\varnothing$, так как в противном случае $(\tilde{\tilde{X}};\subseteq)$ имело бы цепь сколь угодно большой длины. По лемме 9(6) $(X;\subseteq)$ также имело бы цепь сколь угодно большой длины (здесь используется решеточность X). Но это противоречит тому, что $\pi^{-1}(X)\in\bigcup_{k<\omega}\Sigma_k^{-1}$, см. [12, лемма 3]. Утверждаем, что $X=\bigcup_i(Z_{2i}\diagdown Z_{2i+1})$. При проверке будем пользоваться свойством: для любых $\alpha\in X$ и конечного $\beta\subseteq\alpha$ найдется конечный $\gamma\in X$, $\beta\subseteq\gamma\subseteq\alpha$, и аналогичным свойством для $\bar{X}$. Справедливость этого свойства следует из $\pi^{-1}(X)\in\bigcup_{k<\omega}\Sigma_k^{-1}$, см. [12, § 4]. Пусть $\alpha\in X$, $\beta\subseteq\alpha$, $\beta\in X$, β конечно. Тогда $(\tilde{\tilde{\beta}})$ есть 1-цепь для $(\tilde{\tilde{X}};\subseteq)$ и потому $\alpha\in Z_0$. Для доказательства $X\subseteq\bigcup_i(Z_{2i}\diagdown Z_{2i+1})$ достаточно теперь проверить, что из $\alpha\in Z_{2i+1}$ следует $\alpha\in Z_{2i+2}$. Пусть $(\varphi_0,\ldots,\varphi_{2i+1})$ — 1-цепь для $(\tilde{\tilde{X}};\subseteq)$, $\varphi_{2i+1}\subseteq\tilde{\tilde{\alpha}}$. По доказательству леммы 9(6) найдется $\beta\subseteq\alpha$, $\tilde{\tilde{\beta}}=\varphi_{2i+1}$. Найдем конечное $\gamma\in X$, $\beta\subseteq\gamma\subseteq\alpha$. Тогда $(\varphi_0,\ldots,\varphi_{2i+1},\tilde{\tilde{\gamma}})$ есть 1-цепь для $(\tilde{\tilde{X}};\subseteq)$, откуда $\alpha\in Z_{2i+2}$. Аналогично проверяется, что из $\alpha\notin X$ следует $\alpha\notin\bigcup_i(Z_{2i}\diagdown Z_{2i+1})$. Универсальность $\pi^{-1}(X)$ в одном из Σ_k^{-1}, Π_k^{-1} следует из $X=\bigcup_i(Z_{2i}\diagdown Z_{2i+1})$ и предложения 2.

Следующее предложение показывает, что отношение $\leqslant_J$ играет для иерархии $\{\Sigma_{2,k}\}$ такую же роль, как отношение $\subseteq$ для иерархии $\{\Sigma^{-1}\}$.

Предложение 4. 1) *Если предикат X инвариантен и $(\tilde{\tilde{X}};\subseteq)$ имеет 0-цепь (1-цепь) длины k с элементами из $\mathbf{\Phi}_0$, то $\Sigma^{-1}\leqslant\pi^{-1}(X)\left(\Pi_k^{-1}\leqslant\right.$ $\left.\leqslant\pi^{-1}(X)\right)$;*

2) *Если предикат X инвариантен и* $(\tilde{\tilde{X}}; \leqslant_J)$ *имеет* 0-*цепь* (1-*цепь*) *длины* k, *то* $\Sigma_{2,k} \leqslant \pi^{-1}(X)$ $(\Pi_{2,k} \leqslant \pi^{-1}(X))$.

Доказательство. 1. Пусть $(\varphi_0, \ldots, \varphi_k)$ — 0-цепь для $(\tilde{\tilde{X}}; \subseteq)$. По лемме 9(6) найдутся $\alpha_0 \subseteq \ldots \subseteq \alpha_k$, $\tilde{\alpha}_i = \varphi_i$. Тогда $(\alpha_0, \ldots, \alpha_k)$ есть 0-цепь для $(X; \subseteq)$. По лемме 3 из [12] $\Sigma_l^{-1} \leqslant \pi^{-1}(X)$.

Докажем п. 2. Пусть $(\varphi_0, \ldots, \varphi_k)$ — 0-цепь для $(\tilde{\tilde{X}}; \leqslant_J)$, $S \in \Sigma_{2,k}$, $k > 0$, $S = \bigcup_i (S_{2i} \setminus S_{2i+1})$, $S_i \in \Sigma_2^0$, $S_0 \supseteq S_1 \supseteq \ldots$, $S_k = \varnothing$. Достаточно построить вычислимую последовательность $\{\alpha_x\}_{x<\omega}$ элементов $\mathscr{E}^n$ такую, что $x \in S \leftrightarrow \alpha_x \in X$. Пусть g — общерекурсивная функция (ОРФ), для которой $x \in S_i \leftrightarrow \pi_{g(x,i)}$ конечно. Элемент α_x строится по шагам в виде $\alpha_x = \bigcup_s \alpha_x^s$, где $\alpha_x^0 \subseteq \alpha_x^1 \subseteq \ldots$, α_x^s конечны. Допустим еще, что задано конечное $\bar{\theta} \in \mathscr{E}^n$, $\tilde{\tilde{\theta}} \subseteq \varphi_0$, это нужно для § 3. Пусть α_x^0 конечно, $\theta \subseteq \subseteq \alpha_x^0$, $\tilde{\tilde{\alpha}}_x^0[\bar{J}] = \varphi_0[\bar{J}]$.

Шаг $s = 2t$ типа 0. Для любого $\sigma \in J$ перекладываем один элемент из $\tilde{\alpha}_x^{s-1}(\varnothing)$ в $\tilde{\alpha}_x^s(\sigma)$.

Шаг $s = 2t+1$ типа 1. Для каждой пары (x, i), $i \leqslant k$, должно быть бесконечно много шагов такого типа. Пусть $s' < s$ — наибольший из шагов типа 1 для (x, i), и $s' = 0$, если такого не существует. Если $\pi_{g(x,i)}^s \setminus \pi_{g(x,i)}^{s'} \neq \varnothing$, то для каждого $\sigma \in J/\max J$ перекладываем $\varphi_i(\sigma)$-й по величине элемент множества $\tilde{\alpha}_x^{s-1}(\sigma)$ (если он есть) в $\tilde{\alpha}_x^s(\tau)$, где $\tau \supseteq \sigma$, $\tau \in \max J$. В противном случае ничего не делаем.

Построение закончено. Пусть для всякого x $i \leqslant k$ есть наименьшее число, для которого $x \notin S_i$. Такое существует из-за $S_k = \varnothing$. Тогда $\forall j < < i (x \in S_j)$, т. е. $\pi_{g(x,j)}$ конечно для $j < i$. Пусть s_0 — шаг, начиная с которого множества $\pi_{g(x,j)}$, $j < i$, не изменяются. Поскольку $\pi_{g(x,i)}$ бесконечно, на бесконечно многих шагах типа 1 для (x, i) $\varphi_i(\sigma)$-й по величине элемент из $\tilde{\alpha}_x(\sigma)$ переложим в $\tilde{\alpha}_x(\tau)$, $\tau \supseteq \sigma$, $\tau \in \max J$. Отсюда и из описания шагов типа 0 следует, что $\tilde{\tilde{\alpha}}_x = \varphi_i$. Поэтому $x \in S \leftrightarrow i$ нечетно $\leftrightarrow \tilde{\tilde{\alpha}}_x \in \tilde{\tilde{X}} \leftrightarrow \alpha_x \in X$.

Лемма 11. *Если I замкнуто вниз, то* $\pi^{-1}(A^I) \in \Sigma_2^0$. *Если к тому же* $f[I \setminus \max I] = 0$, *то* $\pi^{-1}(A_f^I) \in \Sigma_2^{-1}$.

Доказательство. Учитывая лемму 1, получим

$$\alpha \in A_f^I \leftrightarrow \forall \sigma \in I\, (\tilde{\tilde{\alpha}}(\sigma) \geqslant f(\sigma)) \wedge \forall \sigma \in \bar{I}\, (\tilde{\tilde{\alpha}}(\sigma) = f(\sigma)) \leftrightarrow \forall \sigma \in I\, (|\tilde{\alpha}(\sigma)| \geqslant$$
$$\geqslant f(\sigma)) \wedge \forall \sigma \in \bar{I} \left(\left| \bigcap_{i \in \sigma} \alpha_i \right| = \sum_{\tau \supseteq \sigma} f(\tau) \right).$$

Первый член конъюнкции есть Σ_2^0-предикат, а второй — Σ_2^{-1}-предикат. Поэтому $\pi^{-1}(A_f^I) \in \Sigma_2^0$. Если еще $f[I \setminus \max I] = 0$, то

$$\alpha \in A_f^I \leftrightarrow \forall \sigma \in \max I\, (\tilde{\tilde{\alpha}}(\sigma) \geqslant f(\sigma)) \wedge \forall \sigma \in \bar{I}\, (\tilde{\tilde{\alpha}}(\sigma) = f(\sigma)) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \forall \sigma \in \max I \left(\left| \bigcap_{i \in \sigma} \alpha_i \right| \geqslant \sum_{\tau \supseteq \sigma} f(\tau) \right) \wedge \forall \sigma \in \bar{I} \left(\left| \bigcap_{i \in \sigma} \alpha_i \right| = \sum_{\tau \supseteq \sigma} f(\tau) \right).$$

Первый член есть рекурсивно-перечислимый предикат, а второй — Σ_2^{-1}-предикат. Поэтому $\pi^{-1}(A_f^I) \in \Sigma_2^{-1}$.

Введем еще один важный для дальнейшего класс предикатов. Пусть $J \subseteq \mathscr{P}[n]$ замкнут вниз, θ: $\bar{J} \to \omega$ и $a \in \omega$. Предикат X назовем (J, θ, a)-*предикатом*, если он имеет *A-представление* $X = \bigcup \mathscr{X}$, все компоненты которого $A_f^I \in \mathscr{X}$ обладают свойством $\hat{I} = \{\sigma \mid \exists \tau \supseteq \sigma (\tau \in I)\} = J$, $f[\bar{J}] = \theta$, $f[\max J] = a$. Предикат X назовем нормальным, если он является (J, θ, a)-

предикатом для некоторых J, θ, a. Пусть $\mathscr{B}$ — класс всех (J, θ, a)-предикатов, а $\mathscr{L}$ — класс всех предикатов, имеющих A — представление с компонентами A_f^J, $f[\bar{J}]=\theta$, $f[\max J]=a$.

Лемма 12. 1) *($\mathscr{B}$; $\cup$, $\cap$) есть булева алгебра, а $\mathscr{L}$ — ее подрешетка;*

2) *для любого $X\in\mathscr{B}$ найдется $X^*\in\mathscr{L}$ такой, что $X\subseteq X^*$ и если $X\subseteq Y$, $Y\in\mathscr{L}$, то $X^*\subseteq Y$;*

3) *для любого $X\in\mathscr{B}$ найдется $X_*\in\mathscr{L}$ такой, что $X_*\subseteq X$ и если $Y\subseteq X$, $Y\in\mathscr{L}$, то $Y\subseteq X_*$*

Доказательство. 1. Замкнутость $\mathscr{B}$ и $\mathscr{L}$ относительно объединения и пересечения очевидна. Наименьшими элементами в $\mathscr{B}$ и $\mathscr{L}$ будет $\varnothing$, а наибольшими — предикат $E=A_g^J$, $g[\bar{J}]=\theta$, $g[\max J]=a$, $g[J\setminus\max J]=0$. Заметим, что по лемме 11 $\pi^{-1}(E)\in\Sigma_2^{-1}$. Остается проверить, что из $X\in\mathscr{B}$ следует $E\setminus X\in\mathscr{B}$. Ясно, что достаточно проверить это для $X=A^I{}_f\in\mathscr{B}$. Имеем

$$A_f^I=\Big(\bigcap_{\sigma\in\bar{J}}A^\sigma_{\theta(\sigma)}\Big)\cap\Big(\bigcap_{\sigma\in\max J}A^\sigma_{\geqslant a}\Big)\cap\Big(\bigcap_{\sigma\in I\setminus\max J}A^\sigma_{\geqslant f(\sigma)}\Big)\cap\Big(\bigcap_{\sigma\in J\setminus I}A^\sigma_{f(\sigma)}\Big).$$

Поэтому достаточно доказать, что $E\cap A^\sigma_{\neq\theta(\sigma)}(\sigma\in\bar{J})$, $E\cap A^\sigma_{<a}(\sigma\in\max J)$, $E\cap A^\sigma_{\geqslant b}$, $E\cap A^\sigma_b(\sigma\in J\setminus\max J)$ лежат в $\mathscr{B}$. Первые два предиката пусты, для остальных это очевидно.

2. Пусть $X=\cup\mathscr{X}$ — A-представление, $X\in\mathscr{B}$. Положим $\mathscr{X}^*=\{A_f^J\,|\,A_f^I\in\mathscr{X}\}$, $X^*=\cup\mathscr{X}^*$, тогда $X\subseteq X^*$ и $X^*\in\mathscr{L}$. Пусть $X\subseteq Y\in\mathscr{L}$, $Y=\cup\mathscr{Y}$ — $\mathscr{L}$-представление. Проверим $X^*\subseteq Y$. Пусть $\alpha\in X^*,\alpha\in A_f^J$, $A_f^J\in\mathscr{X}^*$, и σ таково, что $\tilde{\tilde{\alpha}}(\sigma)=\omega$. Пусть β таково, что $\tilde{\tilde{\beta}}(\sigma)=\omega$ и $\tilde{\tilde{\beta}}(\tau)=f(\tau)$ при $\tau\neq\sigma$. Тогда $\beta\in X$ и потому $\beta\in Y$. Пусть $\beta\in A_g^J\in\mathscr{Y}$. Тогда $\alpha\in A_g^J\subseteq Y$ в силу $\tilde{\tilde{\beta}}[J]\leqslant\tilde{\tilde{\alpha}}[J]$.

3. Пусть $H=\{g\,|\,g[\bar{J}]=\theta\wedge A_g^J\subseteq X\}$, $G=\min H$, $\mathscr{X}_*=\{A_g^J\,|\,g\in G\}$, $X_*=\cup\mathscr{X}_*$ (рассматривается порядок $g_1\leqslant g_2\leftrightarrow g_1[\bar{J}]=g_2[\bar{J}]\wedge g_1[J]\leqslant g_2[J]$, для него справедлив аналог леммы 9(5)). Для проверки $X_*\in\mathscr{L}$ достаточно доказать $\forall g\in G(g[\max J]=a)$. Пусть $g\in G$ и $\sigma\in\max J$. Надо доказать $g(\sigma)=a$. Имеем $g\in H, A_g^J\subseteq X$. Выберем $\alpha\in A_g^J$ такое, что $\tilde{\tilde{\alpha}}(\sigma)=g(\sigma)$. Тогда $\alpha\in X$. Из $X\in\mathscr{B}$ следует $\tilde{\tilde{\alpha}}(\sigma)\geqslant a$ и $g(\sigma)\geqslant a$. Положим теперь $g_0(\sigma)=a$, $g_0(\tau)=g(\tau)$ при $\tau\neq\sigma$. Утверждаем, что $A^J_{g_0}\subseteq X$. Пусть $\alpha\in A^J_{g_0}$, $\tilde{\tilde{\alpha}}^*(\sigma)=\omega$, $\tilde{\tilde{\alpha}}^*(\tau)=\tilde{\tilde{\alpha}}(\tau)$ при $\tau\neq\sigma$. Тогда $\alpha^*\in A_g^J$, откуда $\alpha^*\in X$. Пусть $A_f^I\in\mathscr{X},\alpha^*\in A_f^I$. Из $\tilde{\tilde{\alpha}}(\sigma)\geqslant a$ следует $\alpha\in A_f^I$. Доказали, что $A^J_{g_0}\subseteq X$, поэтому $g_0\in H$. Поскольку $g_0\leqslant g$ и $G=\min H$, то $g_0=g$, $g_0(\sigma)=a=g(\sigma)$. Это завершает проверку того, что $X_*\in\mathscr{L}$. Включение $X_*\subseteq X$ очевидно. Пусть теперь $Y\subseteq X$, $Y\in\mathscr{L}$, $Y=\cup\mathscr{Y}$ — $\mathscr{L}$-представление. Достаточно доказать, что $A_h^J\subseteq X_*$ при $A_h^J\in\mathscr{Y}$. Мы имеем $A_h^J\subseteq X$, $h[\bar{J}]=\theta$, поэтому $h\in H$. Пусть $g\in G$, $g\leqslant h$. Тогда $A_h^J\subseteq A_g^J\subseteq X_*$. Лемма доказана.

Пусть теперь $\{\mathscr{S}_k\}_{k<\omega}$ — иерархия Ершова, построенная на $\mathscr{L}$ внутри $\mathscr{B}$. Следующее предложение показывает, что иерархия $\{\Sigma_{2,k}\}$ играет такую же роль для класса $\mathscr{B}$, какую иерархия $\{\Sigma_k^{-1}\}$ для $\mathscr{L}_0^*$.

Предложение 5. 1) *При любом k класс $\mathscr{S}_k$ ($\breve{\mathscr{S}}_k$) совпадает с классом всех $X\in\mathscr{B}$, для которых ($\tilde{\tilde{X}}$; $\leqslant_J$) не имеет 1-цепей (0-цепей) длины k.*

2) *Для любого $X\in\mathscr{B}$ множество $\pi^{-1}(X)$ универсально в одном из классов $\Sigma_{2,k}$, $\Pi_{2,k}$, Σ_i^{-1}, Π_i^{-1} ($k<\omega$, $i\leqslant 1$).*

Доказательство. 1. В силу леммы 12 из $X\in\mathscr{S}_1=\mathscr{L}$ следует $^{-}(X)\in\Sigma_2^0$. Поэтому $\pi^{-1}(X)\in\Sigma_{2,k}$ для $X\in\mathscr{S}_k$ и $\pi^{-1}(X)\in\Pi_{2,k}$ для $X\in\breve{\mathscr{S}}_k$. Если бы ($\tilde{\tilde{X}}$; $\leqslant_J$) имело 1-цепь длины k, то $\Pi_{2,k}\leqslant\pi^{-1}(X)$ по предложению 4 и потому $\pi^{-1}(X)\notin\Sigma_{2,k}$, $X\notin\mathscr{S}_k$. Остается показать, что если X не имеет 1-цепей длины k, то $X \in \mathscr{S}_k$. Это проверяется индукцией по k. Если X не имеет 1-цепей длины 0, то $X = \varnothing \in \mathscr{S}_0$. Далее рассмотрим типичный частный случай $k = 3$. Пусть X не имеет 1-цепей длины 3. Утверждаем, что тогда $X \setminus X_*$ не имеет 1-цепей длины 2. Предположим противное: $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ — 1-цепь для $X \setminus X_*$. Легко видеть, что без ограничения общности можем считать, что $\varphi_2[J \setminus \max J] < \omega$. Имеем $\varphi_1 \notin \tilde{\tilde{X}}$, так как в противном случае из $\varphi_1 \notin \tilde{\tilde{X}} \setminus \tilde{\tilde{X}}_*$ следует $\varphi_1 \in \tilde{\tilde{X}}_*$ и $\varphi_2 \in \tilde{\tilde{X}}_*$, $\varphi_2 \notin \tilde{\tilde{X}} \setminus \tilde{\tilde{X}}_*$, что противоречит определению цепи. Получилось, что $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ — 1-цепь для X. Поскольку X не имеет 1-цепей длины 3, то $\forall \varphi_3\, {}_J \geqslant \varphi_2 (\varphi_3 \in X)$. Положим $h[\bar{J}] = \theta$, $h[\max J] = a$, $h[J \setminus \max J] = \varphi_2[J \setminus \max J]$. Тогда $\varphi_2 \in A_h^J$. Проверим $A_h^J \subseteq X$. Пусть $\alpha \in A_h^J$, положим $\varphi_3(\sigma) = \omega$ при $\sigma \in \max J$ и $\varphi_3(\sigma) = \tilde{\tilde{\alpha}}(\sigma)$ в противном случае. Тогда $\varphi_2 \leqslant_J \varphi_3$ и $\varphi_3 \in \tilde{\tilde{X}}$ согласно установленному выше. Но тогда и $\alpha \in X$, что доказывает $A_h^J \subseteq X$. По лемме 12(3) $A_h^J \subseteq X_*$, откуда $\varphi_2 \in X_*$, что противоречит соотношению $\varphi_2 \in X \setminus X_*$. Итак, $X \setminus X_*$ не имеет 1-цепей длины 2. По индукционному предположению $X \setminus X_* \in \mathscr{S}_2$. Но тогда $X = (X \setminus X_*) \cup X_* \in \mathscr{S}_3$. 1) доказано. Отметим, что для четных k получим $X \setminus X_* \in \check{\mathscr{S}}_{k-1}$.

2. В силу п. 1 длины цепей для $(\tilde{X}; \leqslant_J)$ ограничены в совокупности. Пусть k — наибольшая из таких длин. Если бы X имело 0-цепь $(\varphi_0, \ldots, \varphi_k)$ и 1-цепь $(\psi_0, \ldots, \psi_k)$, то одна из $(\chi, \varphi_0, \ldots, \varphi_k)$, $(\chi, \psi_0, \ldots, \psi_k)$, где $\chi[\bar{J}] = \theta$, $\chi[\max J] = a$, $\chi[J \setminus \max J] = 0$, была бы цепью для $(\tilde{\tilde{X}}; \leqslant_J)$ длины $k+1$, что противоречит выбору k. Поэтому возможны лишь два случая: $(\tilde{\tilde{X}}; \leqslant_J)$ имеет 0-цепь, но не имеет 1-цепей длины k, и наоборот. В первом случае при $k = 0$ мы имеем $X = \varnothing$, а при $k > 0$ — $\Sigma_{2,k} \leqslant \pi^{-1}(X)$ по предложению 4 и $X \in \mathscr{S}_k$, $\pi^{-1}(X) \in \Sigma_{2,k}$ по п. 1, поэтому $\pi^{-1}(X) \approx \Sigma_{2,k}$. Во втором случае при $k = 0$ имеем $X = E, \pi^{-1}(X) \in \Sigma_2^{-1}$ по лемме 11 и $\pi^{-1}(X)$ универсально в одном из Σ_2^{-1}, Σ_i^{-1}, Π_i^{-1} $(i \leqslant 1)$ по предложению 3. При $k > 0$ получим $\pi^{-1}(X) \approx \Pi_{2,k}$.

В заключение параграфа покажем, что любой $\mathscr{A}^*$-предикат можно специальным образом выразить через нормальные. Если X — нормальный предикат, соответствующую ему тройку будем обозначать (J_X, θ_X, a_X). *Нормальным представлением для* $X \in \mathscr{A}^*$ назовем конечное множество нормальных предикатов $\mathscr{Z}$ такое, что $X = \cup \mathscr{Z}$, элементы $\mathscr{Z}$ попарно $\mathscr{L}_0^*$ -отделимы (см. § 1), при любом $Z \in \mathscr{Z}$ любая цепь для $\left(\tilde{\tilde{Z}}; \leqslant_{J_Z}\right)$ является цепью и для $\left(\tilde{\tilde{X}}; \leqslant_{J_X}\right)$. Если еще дано A-представление $Y = \cup \mathscr{Y}$, то нормальное представление $X = \cup \mathscr{Z}$ называем *представлением с параметром* $\mathscr{Y}$, если для всех $Z \in \mathscr{Z}$, $A_f^I \in \mathscr{Y}$, из $J_Z \not\subseteq \hat{I}$ следует, что Z $\mathscr{L}_0$-отделимо от A_f^I.

Лемма 13. *По любым A-представлениям $X = \cup \mathscr{X}$ и $Y = \cup \mathscr{Y}$ можно эффективно найти нормальное представление для X с параметром $\mathscr{Y}$.*

Доказательство. Пусть $\leqslant$ — линейное упорядочение всех подмножеств $\mathscr{P}[n]$, продолжающее $\subseteq$; $J = J(X)$ — наибольший элемент множества $\{\hat{I} \mid A_f^I \in \mathscr{X}\}$ (легко видеть, что J не зависит от $\mathscr{X}$); a — наименьшее число, превосходящее все $\sum_{\sigma \subseteq [n]} f(\sigma)$ для $A_f^I \in \mathscr{X} \cup \mathscr{Y}$, $B_a = \bigcap_{\sigma \in \max I} A_{\geqslant a}^{\sigma}$. Положим $F_{\mathscr{Y}}(\mathscr{X}) = \{A_f^I B_a \mid A_f^I \in \mathscr{X},\ \hat{I} = J\}$, $G_{\mathscr{Y}}(\mathscr{X}) = \{A_f^I \bar{B}_a \mid A_f^I \in \mathscr{X}\}$. Тогда $J(A_f^I \bar{B}_a) < J$ и X есть объединение всех элементов множества $F_{\mathscr{Y}}(\mathscr{X}) \cup G_{\mathscr{Y}}(\mathscr{X})$. Все элементы $F_{\mathscr{Y}}(\mathscr{X})$ будут нормальными. *Нормальной компонентой* будем называть объединение всех $Z \in F_{\mathscr{Y}}(\mathscr{X})$ с общим θ_Z. Отметим, что любая нормальная компонента T в $F_{\mathscr{Y}}(\mathscr{X})$

$\mathcal{L}_0^*$-отделима от других нормальных компонент и от всех $S \in G_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$. Пусть E — наибольший элемент в $\mathcal{B}_{J_T,\theta_T,a_T}$. Тогда $T \subseteq E$, E не пересекается с другими нормальными компонентами и с S (поскольку $E \subseteq B_a$) и $E \in \mathcal{L}_0^*$ по лемме 11 и предложению 3. Проверим теперь, что для любых $T \in F_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$, $A_f^I \in \mathcal{Y}$, из $J \not\subseteq \widehat{I}$ следует, что T $\mathcal{L}_0$-отделима от A_f^I.

Пусть $\sigma \in J \setminus \widehat{I}$, $U = \left\{\alpha \,\middle|\, \sum_{\tau \supseteq \sigma} \tilde{\tilde{\alpha}}(\tau) \geqslant a\right\}$. Тогда $U \in \mathcal{L}_0$, $Z \subseteq U$ и $U \cap A_f^I = \varnothing$ по выбору a. Ясно, что для любой нормальной компоненты T в $F_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$ любая цепь для $(\tilde{\tilde{T}}; \leqslant_{J_T})$ будет цепью и для $(\tilde{\tilde{\tilde{X}}}; \leqslant_{J_T})$. Проверим теперь, что любая цепь $(\varphi_0, \ldots, \varphi_k)$, $k \geqslant 1$, для $(\bigcup G_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}); \leqslant_{J_1})$, J_1 произвольно, будет цепью и для $(X; \leqslant_{J_1})$. Достаточно доказать, что $\varphi_i \notin \bigcup F_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$. Если существует $\sigma \in \max J_1 \setminus J$, то $\varphi_i(\sigma) = \omega$ и потому $\varphi_i \notin \bigcup F_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$. Пусть $J_1 \subseteq J$ и $\varphi \in \bigcup G_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) \subseteq \overline{B}_a$. Пусть $\sigma \in \max J$, $\varphi_l(\sigma) < a$. Если бы $\sigma \in J_1$, то $\sigma \in \max J_1$ и $\varphi_i(\sigma) = \omega$; противоречие. Поэтому $\sigma \notin J_1$. Но тогда по определению цепи $\varphi_i(\sigma) = \varphi_l(\sigma) < a$, $\varphi_i \notin B_a$, $\varphi_i \notin \bigcup F_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X})$.

Рассмотрим объединение $F_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) \cup F_{\mathcal{Y}} G_{\mathcal{Y}}(\mathcal{X}) \cup F_{\mathcal{Y}} G_{\mathcal{Y}}^2(\mathcal{X}) \cup \ldots$ Эта последовательность конечна, так как $J(X_0) > J(X_1) > \ldots$ (X_i — члены этой последовательности). Пусть $\mathcal{Z}$ состоит из всех нормальных компонент всех членов объединения. Из доказанных выше свойств следует, что $\mathcal{Z}$ есть нормальное представление для X с параметром $\mathcal{Y}$. Лемма доказана.

Лемма 14. *Любой $\mathcal{A}^*$-предикат имеет A-представление с попарно непересекающимися компонентами.*

По лемме 13 всякий $\mathcal{A}^*$-предикат является объединением попарно непересекающихся нормальных предикатов, поэтому достаточно доказать лемму для случая, когда $X \in \mathcal{A}^*$ есть (J, θ, a) — предикат. Пусть $X = \bigcup \mathcal{X}$ — представление, компоненты $A_f^I \in \mathcal{X}$ которого обладают свойствами $\widehat{I} = J$, $f[\bar{J}] = \theta$, $f[\max J] = a$. Пусть $\mathcal{Y}$ состоит из всех $A_f^I \in \mathcal{X}$, у которых I максимально по отношению $\leqslant$ из доказательства леммы 13. Пусть $I(\mathcal{X})$ обозначает максимальное такое I. Назовем $A_{f_1}^{I_1}$ и $A_{f_2}^{I_2}$ *эквивалентными*, если $f_1[J \setminus I] = f_2[J \setminus I]$. Заметим, что если $A_{f_1}^{I_1}$ и $A_{f_2}^{I_2}$ не эквивалентны, то они не пересекаются. Пусть $\mathcal{U}$ — подмножество $\mathcal{Y}$, содержащее в точности по одному элементу из каждого класса эквивалентности, $\mathcal{V} = \mathcal{Y} \setminus \mathcal{U}$, $\mathcal{W} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$. Тогда $\mathcal{X} = \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ и элементы $\mathcal{U}$ попарно не пересекаются. Имеем $X = U \cup (V\overline{U}) \cup (W\overline{U})$, где $U = \bigcup \mathcal{U}$, $V = \bigcup \mathcal{V}$, $W = \bigcup \mathcal{W}$. Предикаты $V\overline{U}$, $W\overline{U}$ имеют индуцированные A-представления $\mathcal{V}'$ и $\mathcal{W}'$. Далее повторяем рассуждение, взяв вместо $\mathcal{X}$ множество $\mathcal{V}' \cup \mathcal{W}'$. Поскольку, как легко видеть, $I(\mathcal{V}' \cup \mathcal{W}') < I(\mathcal{X})$, через конечное число шагов получим нужное представление.

§ 3. БУЛЕВЫ КОМБИНАЦИИ A-ПРЕДИКАТОВ

Целью параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2. *Индексное множество любого $\mathcal{A}^*$-предиката универсально в одном из классов Σ_α, Π_α $(\alpha < \omega^\omega)$, причем все возможности реализуются.*

Пусть $\mathcal{L}_0$ — класс всех предикатов вида $\mathcal{O}_\Phi$ из § 2, $\mathcal{L}_1$ — класс всех предикатов, имеющих A-представление $X = \bigcup \mathcal{X}$ такое, что I замкнуто вниз для всех $A_f^I \in \mathcal{X}$. Тогда $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}_1$ — решетки относительно $\cup$ и $\cap$, содержащие $\varnothing$ и $\mathcal{E}^n$. Утверждаем, что $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1 \cap \breve{\mathcal{L}}_1$. Для этого достаточно проверить, что из $X\in\mathscr{A}^*$, $\pi^{-1}(X)\in\bigcup\limits_{k<\omega}\Sigma_k^{-1}$, следует $X\in\mathscr{L}_1$. Пусть $X=\bigcup\mathscr{Z}$ — нормальное представление, см. лемму 13. Если T — нормальная компонента из $\mathscr{Z}$, то $\left(\tilde{\tilde{T}};\leqslant_{J_T}\right)$ не имеет цепей длины 1, так как в противном случае $\left(\tilde{\tilde{X}};\leqslant_{J_T}\right)$ также имело бы цепь длины 1 и тогда $\Sigma_2^0\leqslant\pi^{-1}(X)$ или $\Pi_2^0\leqslant\pi^{-1}(X)$ по предложению 4. Но тогда каждая компонента T по доказательству предложения 5 совпадает с E — наибольшим элементом в $\mathscr{B}_{J_T,\theta_T,a_T}$. Поэтому $T\in\mathscr{L}_1$ и $X\in\mathscr{L}_1$. Полагая $\mathscr{L}_i=\mathscr{A}^*$ для $i\geqslant 2$, получим допустимую последовательность подрешеток $\{\mathscr{L}_i\}$. Определение 2 порождает последовательность $\{\mathscr{S}_\alpha\}_{\alpha<\varepsilon_0}$ подмножеств $\mathscr{A}^*$, которая играет важную роль в доказательстве теоремы 2. Интересны лишь классы $\mathscr{S}_\alpha$ при $\alpha<\omega^\omega$, так как при $\alpha\geqslant\omega^\omega$ имеем $\mathscr{S}_\alpha=\mathscr{A}^*$. Согласно § 1 имеем: $\mathscr{C}_k\left(\mathscr{S}_{\omega^k}\right)$ при $0<k<\omega$ есть последовательность всех Σ_k^{-1}-комбинаций $\mathscr{L}_0$-предикатов ($\mathscr{L}_1$-предикатов); $\mathscr{S}_{\omega^k(m+1)}=\operatorname{Sep}\left(\mathscr{L}_0,\ \breve{\mathscr{S}}_{\omega^k m},\mathscr{S}_{\omega^k}\right)$; при $\alpha\neq 0$, $\omega^{k+1}|\alpha$

$$\mathscr{S}_{\alpha+\omega^k}=\operatorname{Bisep}\left(\mathscr{L}_0,\mathscr{S}_\alpha,\breve{\mathscr{S}}_\alpha,\mathscr{S}_{\omega^k}\right),\quad \mathscr{S}_{\alpha+\omega^k(m+1)}=\operatorname{Sep}\left(\mathscr{L}_0,\breve{\mathscr{S}}_{\alpha+\omega^k m},\mathscr{S}_{\omega^k}\right)$$

и для предельного $\lambda<\omega^\omega$

$$\mathscr{S}_{\lambda+1}=\operatorname{Bisep}(\mathscr{L}_0,\ \mathscr{S}_\lambda,\ \breve{\mathscr{S}}_\lambda,\ \mathscr{S}_0),\quad \mathscr{S}_{\lambda+k+1}=\operatorname{Sep}(\mathscr{L}_0,\ \breve{\mathscr{S}}_{\lambda+k},\ \mathscr{S}_0).$$

Заметим, что $\bigcup\{\mathscr{S}_\alpha|\alpha<\omega^\omega\}=\mathscr{A}^*$. Для этого достаточно проверить, что любой $\mathscr{A}^*$-предикат является булевой комбинацией $\mathscr{L}_1$-предикатов. Ясно, что это достаточно проверить для A-предикатов A_f^I. Имеем $A_f^I=A_f^{\hat{I}}\setminus\bigcup\{A^\sigma_{\geqslant f(\sigma)+1}|\sigma\in\hat{I}\setminus I\}$, т. е. A_f^I является разностью двух $\mathscr{L}_1$-предикатов (здесь $\hat{I}=\{\sigma|\exists\tau\in I\ (\sigma\subseteq\tau)\}$). Проверим, что $\pi^{-1}(X)\in\Sigma_\alpha$ для $X\in\mathscr{S}_\alpha$. Пусть $L_i=\Sigma_{i+1}^0$, тогда по теореме 1 $\{\Sigma_\alpha\}$ совпадает с последовательностью, получаемой по определению 2 из $\{L_i\}$. Поскольку π^{-1} — гомоморфизм булевой алгебры $\mathscr{A}^*$ в $\mathscr{P}(\omega)$ и $\pi^{-1}(\mathscr{L}_i)\subseteq L_i$ по леммам 10 и 11, то $\pi^{-1}(\mathscr{S}_\alpha)\subseteq\Sigma_\alpha$ по лемме 1(5).

Теорема будет следовать из трех предложений. Сопоставим каждому $\alpha<\omega^\omega$ множество C_α и отображения Φ_α, Ψ_α^i $(i\leqslant 1)$. Множество C_α конструируется из элементов $\mathbf{\Phi}$, элементы C_α являются обобщениями цепей из § 2. Φ_α сопоставляет каждому элементу из C_α конечную последовательность элементов $\mathbf{\Phi}$, а Ψ_α^i сопоставляет элементам из C_α конечные подмножества $\mathbf{\Phi}$.

Определение 3. При $k<\omega$ C_k *состоит из всех* $(\varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_k)$ таких, что $\varphi_i\in\mathbf{\Phi}_0$, $\varphi_0\subseteq\ldots\subseteq\varphi_k$; Φ_k тождественно на C_k, $\Psi_k^i(\varphi_0,\ \ldots,\varphi_k)=\{\varphi_{2l+i}\,|\,2l+i\leqslant k\}$.

При $0<k<\omega$ C_{ω^k} *состоит из всех* $(\varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_k)$ таких, что $\varphi_i\in\mathbf{\Phi}$, $\varphi_0\leqslant_J\ldots\leqslant_J\varphi_k$ для некоторого J; Φ_k и Ψ_k^i как выше.

$C_{\omega^k(m+1)}$ *состоит из всех* $(\varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_k,\ c)$ таких, что $\varphi_0\leqslant_J\ldots\leqslant_J\varphi_k$ для некоторого J, $c\in C_{\omega^k m}$, $\varphi_k\subseteq\psi_0$, где $(\psi_0,\ \ldots,\psi_k)=\Phi_{\omega^k m}(c)$; $\Phi_{\omega^k(m+1)}(\varphi_0,\ \ldots,\varphi_k,c)=(\varphi_0,\ \ldots,\varphi_k)$, $\Psi^i_{\omega^k(m+1)}(\varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_k,\ c)=\{\varphi_{2l+i}\ |\,2l+i\leqslant k\}\cup\bigcup\Psi^{\bar{i}}_{\omega^k m}(c)$, где $\bar{i}\leqslant 1$, $\bar{i}\neq i$.

При $\alpha\neq 0$, $\omega^{k+1}|\alpha$ $C_{\alpha+\omega^k}$ *состоит из всех* $(\varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_k,\ c_0,\ c_1)$ таких, что $\varphi_0\leqslant_J\ldots\leqslant_J\varphi_k$, c_0, $c_1\in C_\alpha$ и $\varphi_k\subseteq\psi_0^i$, где $\left(\psi_0^i,\ \ldots,\psi_l^i\right)=\Phi_\alpha(c_i)$; $\Phi_{\alpha+\omega^k}(\varphi_0,\ \ldots,\varphi_k,c_0,c_1)=(\varphi_0,\ \ldots,\varphi_k)$, $\Psi^i_{\alpha+\omega^k}(\varphi_0,\ldots,\varphi_k,c_0,c_1)=\{\varphi_{2l+i}|\,2l+i\leqslant k\}\cup\Psi_\alpha^i(c_0)\cup\Psi_\alpha^{\bar{i}}(c_1)$; случай $\alpha+\omega^k(m+1)$ аналогичен случаю $\omega^k(m+1)$.

Для предельного λ $C_{\lambda+k+1}$ *состоит из всех* $(\varphi_0,\ \ldots,\ \varphi_k,\ c_0,\ c_1)$ таких, что $\varphi_i\in\mathbf{\Phi}_0$, $\varphi_0\subseteq\ldots\subseteq\varphi_k\subseteq\psi_0^i$, $\left(\psi_0^i,\ \ldots,\psi_l^i\right)=\Phi_\lambda(c_i)$; $\Phi_{\lambda+k+1}$, $\Psi^i_{\lambda+k+1}$ определяются как в случае $\alpha+\omega^k$.

Для $X \subseteq \mathscr{E}^n$ и $c \in C_\alpha$ запись $X \vDash c$ означает, что $\Psi^0_\alpha(c) \subseteq \overline{X}$ и $\Psi^1_\alpha(c) \subseteq$ $\subseteq X$.

Предложение 6. *Для любых инвариантного* $X \subseteq \mathscr{E}^n$ *и* $c \in C_\alpha$ *из* $X \vDash c$ *следует* $\Sigma_\alpha \leqslant \pi^{-1}(X)$.

Доказательство. Система $(\mathbf{\Phi}; \mathbf{\Phi}_0, \leqslant_J, \subseteq)_{J \subseteq \mathscr{P}[n]}$ конструктивна, поэтому множество C_α при любом $\alpha < \omega^\omega$ также конструктивно. Определим эффективную процедуру, строящую по данным $\alpha < \omega^\omega$, $S \in \Sigma_\alpha$ (точнее, по Σ_α-номеру S), $c \in C_\alpha$, конечному $\theta \in \mathscr{E}^n$, $\overset{\approx}{\theta} \subseteq \varphi_0$, $x \in \omega$, где $(\varphi_0, \ldots, \varphi_k) = \Phi_\alpha(c)$, элемент $\eta = \eta(\alpha, S, c, \theta, x) \in \mathscr{E}^n$ такой, что $\theta \subseteq \eta$, $x \notin S \to \overset{\approx}{\eta} \in \Psi^0_\alpha(c)$, $x \in S \to \overset{\approx}{\eta} \in \Psi^1_\alpha(c)$.

Построение индукцией по α. Пусть $\alpha < \omega$, $c = (\varphi_0, \ldots, \varphi_k)$. Пусть η строится как в предложении 4(1). При $\alpha = \omega^k$ построение такое же, как в предложении 4(2). Пусть $\alpha = \omega^k(m+1)$, $c = (\varphi_0, \ldots, \varphi_k, d)$, $d \in C_{\omega^k m}$. Согласно § 1 по S эффективно находится рекурсивно-перечислимое множество (РПМ) R такое, что $SR \in \Pi_{\omega^k m}$, $S\overline{R} \in \Sigma_{\omega^k}$. Пока x не перечисляется в R, строим η в виде $\eta(\omega^k, S\overline{R}, (\varphi_0, \ldots, \varphi_k), \theta, x)$. Если x перечислился в R на шаге s, пусть $\theta_1 = \eta^s$. По построению $\theta \subseteq \theta_1$, $\overset{\approx}{\theta}_1 \subseteq \varphi_k$. Полагаем $\eta = \eta(\omega^k m, \overline{SR}, d, \theta_1, x)$. Пусть $\alpha = \beta + \omega^k$, $\omega^{k+1} | \beta$, $\beta \neq 0$, $c = (\varphi_0, \ldots, \varphi_k, d_0, d_1)$, $d_i \in C_\beta$. По S найдем РПМ R_0, R_1 такие, что $SR_0 \in \Sigma_\beta$, $SR_1 \in \Pi_\beta$, $S\overline{R}_0\overline{R}_1 \in \Sigma_{\omega^k}$. Пока $x \notin R_0 \cup R_1$, строим η в виде $\eta(\omega^k, S\overline{R}_0\overline{R}_1, (\varphi_0, \ldots, \varphi_k), \theta, x)$. Пусть $x \in R^s_0 \cup R^s_1$, $\theta_1 = \eta^s$. Если $x \in R^s_0$, полагаем $\eta = \eta(\beta, SR_0, d_0, \theta_1, x)$, в противном случае $\eta = \eta(\beta, \overline{SR}_1, d_1, \theta_1, x)$. В случае $\alpha = \beta + \omega^k(m+1)$ действуем аналогично случаю $\alpha =$ $= \omega^k(m+1)$. Пусть $\alpha = \lambda + k + 1$, λ предельно, $c = (\varphi_0, \ldots, \varphi_k, d_0, d_1)$, $d_i \in C_\lambda$. По лемме 5 найдутся РПМ R_0, R_1 и $A \in \Sigma_k$ такие, что $SR_0 \in \Sigma_\lambda$, $SR_1 \in \Pi_\lambda$, $S\overline{R}_0\overline{R}_1 = A\overline{R}_0\overline{R}_1$. Пока x не перечисляется в $R_0 \cup R_1$, строим $\eta = \eta(k, A, (\varphi_0, \ldots, \varphi_k), \theta, x)$. Если $x \in R^s_0$, полагаем $\eta = \eta(\lambda, SR_0, d_0, \theta_1, x)$, в противном случае $\eta = \eta(\lambda, \overline{SR}_1, d_1, \theta_1, x)$. Построение закончено.

Проверим нужное свойство η. В первых двух случаях оно доказано в предложении 4. Пусть $\alpha = \omega^k(m+1)$. При $x \notin R$ из $x \notin S$ следуют $x \notin S\overline{R}$, $\overset{\approx}{\eta} \in \{\varphi_{2l} | 2l \leqslant k\}$, $\overset{\approx}{\eta} \in \Psi^0_\alpha(c)$, а из $x \in S$ следуют $x \in S\overline{R}$, $\overset{\approx}{\eta} \in$ $\in \{\varphi_{2l+1} | 2l+1 \leqslant k\}$, $\overset{\approx}{\eta} \in \Psi^1_\alpha(c)$. При $x \in R$ из $x \notin S$ получаем $x \notin SR$, $x \in \overline{SR}$, $\overset{\approx}{\eta} \in \Psi^1_{\omega^k m}(d)$ в силу индукции по α, $\overset{\approx}{\eta} \in \Psi^0_\alpha(c)$, а из $x \in S$ получаем $x \in SR$, $x \notin \overline{SR}$, $\overset{\approx}{\eta} \in \Psi^0_{\omega^k m}(d)$, $\overset{\approx}{\eta} \in \Psi^1_\alpha(c)$. В остальных случаях проверка аналогична.

Завершим доказательство предложения. Пусть $X \vDash c$, $c \in C_\alpha$, S — Σ_α-универсальное множество. Тогда из $x \notin S$ следует $\overset{\approx}{\eta} = \overset{\approx}{\eta}(\alpha, S, c, \varnothing, x) \in \Psi^0_\alpha(c) \subseteq \overline{X}$ и из $x \in S$ следует $\overset{\approx}{\eta} = \overset{\approx}{\eta}(\alpha, S, c, \varnothing, x) \in \Psi^1_\alpha(c) \subseteq X$. Эти соотношения означают $S \leqslant \pi^{-1}(X)$.

Для дальнейшего необходима естественная нумерация классов $\mathscr{S}_\alpha$. Класс $\mathscr{L}_0$ имеет нумерацию, порождаемую предикатами $\mathscr{O}_\Phi$ и нумерацией конечных подмножеств $\Phi \subseteq \mathbf{\Phi}_0$. Класс $\mathscr{L}_1$ также имеет естественную нумерацию. Нумерации для $\mathscr{S}_k$ и $\mathscr{S}_{\omega^k}$ получаются нумерацией соответствующих булевых термов. При $\alpha \neq 0$, $\omega^{k+1} | \alpha$ класс $\mathscr{S}_{\alpha+\omega^k}$ состоит из $R_0Y_0 \cup R_1Y_1 \cup R_0\overline{R}_1Z$, где $R_i \in \mathscr{L}_0$, $Y_0 \in \breve{\widetilde{\mathscr{S}}}_\alpha$, $Y_1 \in \breve{\mathscr{S}}_\alpha$, $Z \in \mathscr{S}_{\omega^k}$, $R_0R_1Y_0 =$ $= R_0R_1Y_1$. Поскольку последнее равенство эффективно проверяется по A-представлениям для R_i, Y_i, нумерации классов $\mathscr{S}_\alpha$, $\breve{\mathscr{S}}_\alpha$, $\mathscr{S}_{\omega^k}$ порождают естественную нумерацию класса $\mathscr{S}_{\alpha+\omega^k}$. Согласно результатам § 1 по $\mathscr{S}_{\alpha+\omega^k}$-номеру предиката X эффективно находятся $\mathscr{L}_0$-номера для R_0, R_1,

$\mathscr{P}_\alpha$-номер предиката XR_0, $\breve{\mathscr{P}}_\alpha$-номер предиката XR_1 и $\mathscr{P}^k_\omega$ -номер предиката $X\overline{R}_0\overline{R}_1$. Аналогично нумеруются и другие классы.

Для нормальных предикатов U, V запись $U \leqslant V$ будет означать $J_U \subseteq J_V$ и $\forall K \subseteq \overline{J}_V \left(\sum\limits_{\sigma\in K} \theta_U(\sigma) \leqslant \sum\limits_{\sigma\in K} \theta_V(\sigma)\right)$. Сопоставим каждому предельному $\lambda < \omega^\omega$ и $X \in \mathscr{P}_\lambda$ (точнее, $\mathscr{P}_\lambda$-номеру X) конечные множества нормальных предикатов $P_\lambda(X)$ и $Q_\lambda(X)$ следующим образом (параллельно аналогичным образом определяются $\breve{P}_\lambda(X)$, $\breve{Q}_\lambda(X)$ для $X \in \breve{\mathscr{P}}_\lambda$). При $\lambda = \omega^k$ пусть $P_\lambda(X)$ — нормальное представление для X, $Q_\lambda(X)$ состоит из нормальных компонент $T \in P_\lambda(X)$, $\pi^{-1}(T) \approx \Sigma_{2,k}$. При $\lambda = \omega^k(m+1)$ пусть $R \in \mathscr{L}_0$, $XR \in \breve{\mathscr{P}}_{\omega^k m}$, $X\overline{R} \in \mathscr{P}_{\omega^k}$, $P_\lambda(X) = \breve{P}_{\omega^k m}(XR) \cup \mathscr{Z}$, где $\mathscr{Z}$ — нормальное представление для $X\overline{R}$ с параметром $\breve{P}_{\omega^k m}(XR)$, $Q_\lambda(X)$ состоит из таких нормальных компонент $T \in \mathscr{Z}$, что $\pi^{-1}(T) \approx \Sigma_{2,k}$ и $T \leqslant S$ для некоторой нормальной компоненты S из $\breve{Q}_{\omega^k m}(XR)$. При $\lambda = \alpha + \omega^k$, $\alpha \neq 0$, $\omega^{k+1}|\alpha$, пусть $R_i \in \mathscr{L}_0$, $XR_0 \in \mathscr{P}_\alpha$, $XR_1 \in \breve{\mathscr{P}}_\alpha$, $X\overline{R}_0\overline{R}_1 \in \mathscr{P}_{\omega^k}$, $P_\lambda(X) = P_\alpha(XR_0) \cup \breve{P}_\alpha(XR_1) \cup \mathscr{Z}$, где $\mathscr{Z}$ — нормальное представление для $X\overline{R}_0\overline{R}_1$ с параметром $P_\alpha(XR_0) \cup \breve{P}_\alpha(XR_1)$, $Q_\lambda(X)$ состоит из таких нормальных компонент T из $\mathscr{Z}$, что $\pi^{-1}(T) \approx \Sigma_{2,k}$ и найдутся нормальные компоненты $S_0 \in Q_\alpha(XR_0)$, $S_1 \in \breve{Q}_\alpha(XR_1)$, $T \leqslant S_0$, $T \leqslant S_1$. При $\lambda = \alpha + \omega^k(m+1)$ определение аналогично случаю $\lambda = \omega^k(m+1)$.

Предложение 7. *При любых* λ *и* $X \in \mathscr{P}_\lambda$ *имеем* $\cup P_\lambda(X) = X$, $\cup(P_\lambda(X) \setminus Q_\lambda(X)) \in \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} \mathscr{P}_\alpha$ *и аналогично для* $\breve{\mathscr{P}}$.

Доказательство. Пусть $Z = \cup(P_\lambda(X) \setminus Q_\lambda(X))$. При $\lambda = \omega^k$ любое $Y \in P_\lambda(X)$ лежит в $\tilde{\mathscr{P}}_k$ (здесь $\tilde{\mathscr{P}}_k$ — это $\mathscr{P}_k$ из предложения 5). В противном случае по предложениям 5 и 4 $\Pi_{\omega^k} \leqslant \pi^{-1}(X)$, но это противоречит соотношениям $X \in \mathscr{P}_{\omega^k}$, $\pi^{-1}(X) \in \Sigma_{\omega^k}$. По построению, в $P_\lambda(X) \setminus Q_\lambda(X)$ останутся лишь те компоненты $Y \in P_\lambda(X)$, которые лежат в $\tilde{\mathscr{P}}_{k-1} \cup \breve{\tilde{\mathscr{P}}}_{k-1}$. Тогда при $k=1$ все $\pi^{-1}(Y)$ лежат в $\bigcup\limits_{m<\omega} \Sigma_m^{-1}$ по предложению 5 и $Z \in \bigcup\limits_{n<\omega} \mathscr{P}_m$ по предложению 3. Пусть $k > 1$. Все компоненты в $P_\lambda(X) \setminus Q_\lambda(X)$ попарно $\mathscr{L}_0^*$ -отделимы, поэтому $Z \in \bigcup\limits_{t<\omega} \mathscr{P}_{\omega^{k-1}\cdot t}$ по лемме 4. Пусть $\lambda = \omega^k(m+1)$. Имеем $P_\lambda(X) \setminus Q_\lambda(X) = [\breve{P}_{\omega^k m}(XR)/\breve{Q}_{\omega^k m}(XR)] \cup \breve{Q}_{\omega^k m}XR) \cup \cup [\mathscr{Z}/Q_\lambda(X)]$. Пусть $U = \cup [\breve{P}_{\omega^k m}(XR) \setminus \breve{Q}_{\omega^k m}(XR)]$, $V = \cup \breve{Q}_{\omega^k m}(XR)$, W — объединение всех нормальных компонент $Y \in \mathscr{Z} \setminus Q_\lambda(X)$, $\pi^{-1}(Y) \approx \approx \Sigma_{2,k}$, T — объединение всех остальных компонент $\mathscr{Z} \setminus Q_\lambda(X)$. Тогда $Z = U \cup V \cup W \cup T$, $ZR = XR = U \cup V$, $Z\overline{R} = W \cup T \subseteq X\overline{R}$. По определению $Q_\lambda(X)$, для всех $Y_0 \in \mathscr{Z} \setminus Q_\lambda(X)$, $\pi^{-1}(Y_0) \approx \Sigma_{2,k}$, $Y_1 \in \breve{Q}_{\omega^k m}(XR)$, имеем $Y_0 \not\leqslant Y_1$, т. е. $J_{Y_0} \not\subseteq J_{Y_1}$ или $J_{Y_0} \subseteq J_{Y_1}$ и $\exists K \subseteq \overline{J}_{Y_1} \left(\sum\limits_{\sigma\in K} \theta_{Y_0}(\sigma) \not\leqslant \not\leqslant \sum\limits_{\sigma\in K} \theta_{Y_1}(\sigma)\right)$. В первом случае Y_0 $\mathscr{L}_0$-отделимо от Y_1 по свойствам нормального представления, во втором Y_0 отделяется от Y_1 предикатом $\left\{\alpha \,\middle|\, \sum\limits_{\sigma\in K} \tilde{\tilde{\alpha}}(\sigma) \geqslant \sum\limits_{\sigma\in K} \theta_{Y_0}(\sigma)\right\} \in \mathscr{L}_0$. Итак, в любом случае Y_0 $\mathscr{L}_0$-отделим от Y_1. По лемме 4(1) W отделим от V, пусть $S \in \mathscr{L}_0$, $W \subseteq \ddot{S}$, $V \subseteq \overline{S}$. Случай $\alpha = \omega^k$ показывает, что $T \in \bigcup\limits_{t<\omega} \mathscr{P}_{\omega^{k-1}\cdot t}$. Отсюда $Z\overline{R}\overline{S} = (W \cup T)\overline{S} = = T\overline{S} \in \bigcup\limits_{t<\omega} \mathscr{P}_{\omega^{k-1}\cdot t}$ по лемме 2. Далее, $U \in \bigcup\limits_{\beta<\omega^k\cdot m} \mathscr{P}_\beta$ по индукции, поэтому $ZSR = (U \cup V)S = US \in \bigcup\limits_{\beta<\omega^k\cdot m} \mathscr{P}_\beta \subseteq \mathscr{P}_{\omega^k m}$, $ZS\overline{R} = (W \cup T)\overline{R} \in \mathscr{P}_{\omega^k}$ по лемме 2. Из последних двух соотношений и леммы 3(2) получаем $ZS \in \mathscr{P}_{\omega^k m}$. Итак, мы доказали $ZS \in \mathscr{P}_{\omega^k, m}$, $ZR = XR \in \breve{\mathscr{P}}_{\omega^k m}$, $Z\overline{S}\,\overline{R} \in$

$\in \bigcup\limits_{t<\omega} \mathcal{S}_{\omega^{k-1}\cdot t}$. Отсюда $Z\in \bigcup\limits_{t<\omega}\mathcal{S}_{\omega^k m+\omega^{k-1}t}$ по лемме 3(3). Рассмотрим случай $\lambda=\alpha+\omega^k$, $\omega^{k+1}|\alpha$. Имеем $R_i\in\mathcal{L}_0, XR_0\in\mathcal{S}_\alpha,\ XR_1\in\breve{\mathcal{S}}_\alpha,\ X\bar R_0\bar R_1\in \mathcal{S}_{\omega^k}, P_\lambda(X)\setminus Q_\lambda(X)=[P_\alpha(XR_0)\setminus Q_\alpha(XR_0)]\cup Q_\alpha(XR_0)\cup[\breve P_\alpha(XR_1)\setminus\breve Q_\alpha(XR_1)]\cup \breve Q_\alpha(XR_1)\cup[\mathcal{Z}\setminus Q_\lambda(X)]$. Пусть $U_0=\bigcup[P_\alpha(XR_0)\setminus Q_\alpha(XR_0)]$, $V_0=\bigcup Q_\alpha(XR_0)$, $U_1=\bigcup[\breve P_\alpha(XR_1)\setminus\breve Q_\alpha(XR_1)]$, $V_1=\bigcup\breve Q_\alpha(XR_1)$, W и T определены как выше. Рассуждая как в предыдущем случае, получим, что любое $Y\in\mathcal{Z}\setminus Q_\lambda(X)$, $\pi^{-1}(Y)\approx\Sigma_{2,k}$, $\mathcal{L}_0$-отделимо от V_0 или от V_1. Пусть W_0 — объединение тех Y, которые отделимы от V_0, W_1 — объединение всех остальных $Y\in\mathcal{Z}\setminus Q_\lambda(X)$, $\pi^{-1}(Y)\approx\Sigma_{2,k}$. Тогда $W_0\cup W_1=W$ и найдутся $S_i\in\mathcal{L}_0$ такие, что $W_i\subseteq S_i$, $V_i\subseteq\bar S_i$. Имеем $Z\bar R_0\bar R_1\,\bar S_0\bar S_1=(W_0\cup W_1\cup T)\bar S_0\bar S_1=T\bar S_0\bar S_1\in\bigcup\limits_{t<\omega}\mathcal{S}_{\omega^{k-1}t}$. Далее, $ZR_0S_0=(U_0\cup V_0)S_0=U_0S_0\in\bigcup\limits_{\beta<\alpha}\mathcal{S}_\beta\subseteq\breve{\mathcal{S}}_\alpha$ по индукции, $ZS_0=ZR_0S_0\cup ZR_1S_0\cup Z\bar R_0\bar R_1S_0$, где $ZR_0S_0\in\breve{\mathcal{S}}_\alpha$, $ZR_1S_0=XR_1S_0\in\breve{\mathcal{S}}_\alpha$, $Z\bar R_0\bar R_1S_0\in\mathcal{S}_{\omega^k}\subseteq\breve{\mathcal{S}}_{\omega^{k+1}}$. По лемме 3(1), (2) отсюда следует $ZS_0\in\breve{\mathcal{S}}_\alpha$. Аналогично доказывается $ZS_1\in\mathcal{S}_\alpha$. Поскольку $ZR_0=XR_0\in\mathcal{S}_\alpha$, $ZR_1=XR_1\in\breve{\mathcal{S}}_\alpha$, из леммы 3(1) получаем $Z(R_0\cup S_1)\in\mathcal{S}_\alpha$, $Z(R_1\cup S_0)\in\breve{\mathcal{S}}_\alpha$. Поскольку $Z\overline{(R_0\cup S_1)}\,\overline{(R_1\cup S_0)}$ по доказанному лежит в $\bigcup\limits_{t<\omega}\mathcal{S}_{\omega^{k-1}\cdot t}$, то $Z\in\bigcup\limits_{t<\omega}\mathcal{S}_{\alpha+\omega^{k-1}\cdot t}$ по лемме 3(3). Случай $\lambda=\alpha+\omega^k(m+1)$ рассматривается аналогично случаю $\alpha=\omega^k(m+1)$. Предложение доказано.

Предложение 8. *Для всех α, $\omega\leqslant\alpha<\omega^\omega$ и $X\in\mathcal{S}_\alpha$ либо $\pi^{-1}(X)$ универсально в Σ_α, либо $X\in\mathcal{S}_\beta\cup\breve{\mathcal{S}}_\beta$ для некоторого $\beta<\alpha$.*

Доказательство. Построим отображения R_α и $\breve R_\alpha$ из $\mathcal{S}_\alpha$ и $\breve{\mathcal{S}}_\alpha$ в конечные множества последовательностей элементов Φ. Пусть дано $X\in\mathcal{S}_\alpha$ (точнее, дан $\mathcal{S}_\alpha$-номер X). Отображение $\breve R_\alpha$ явно не выписываем, оно определяется аналогично. Фиксируем отображение, сопоставляющее любому нормальному предикату Y цепь для $(\tilde{\tilde{Y}};\leqslant_{J_Y})$ наибольшей длины. В случае предельного α пусть $R_\alpha(X)$ — совокупность таких цепей для каждого $Y\in Q_\alpha(X)$. Для $\alpha=\lambda+k+1$ найдем R_0, $R_1\in\mathcal{L}_0$ и $A\in\mathcal{S}_k$ такие, что $XR_0\in\mathcal{S}_\lambda$, $XR_1\in\breve{\mathcal{S}}_\lambda$, $X\bar R_0\bar R_1=A\bar R_0\bar R_1$. Пусть $F(A)=\min\{\varphi\in\Phi_0|$существует 0-цепь для A $(\varphi_0,\ldots,\varphi_k)$, $\varphi_k=\varphi\}$. Для $\varphi\in F(A)$ выберем одну 0-цепь $(\varphi_0,\ldots,\varphi_k)$ с $\varphi_k=\varphi$. Пусть $R_\alpha(X)$ состоит из всех выбранных цепей $(\varphi_0,\ldots,\varphi_k)$ для $(\tilde{\tilde{A}};\subseteq)$ таких, что $\varphi_k\notin\tilde{\tilde{R}}_0\cup\tilde{\tilde{R}}_1$ и существуют $(\psi_0,\ldots,\psi_l)\in R_\lambda(XR_0)$, $(\psi_0',\ldots,\psi_l')\in\breve R_\lambda(XR_1)$ с условием $\varphi_k\subseteq\psi_0$, $\varphi_k\subseteq\psi_0'$.

Для доказательства предложения достаточно проверить, что (а) если $R_\alpha(X)\neq\varnothing$, то $\Sigma_\alpha\leqslant\pi^{-1}(X)$, и (б) если $R_\alpha(X)=\varnothing$, то $X\in\mathcal{S}_\beta\cup\breve{\mathcal{S}}_\beta$ для некоторого $\beta<\alpha$. Для доказательства (а) достаточно в силу предложения 6 проверить, что для всякого $(\varphi_0,\ldots,\varphi_k)\in R_\alpha(X)$ найдется $c\in C_\alpha$ такое, что $(\varphi_0,\ldots,\varphi_k)=\Phi_\alpha(c)$ и $X\models c$. Проверка индукцией по α. Пусть $\alpha=\omega^k$, $(\varphi_0,\ldots,\psi_k)\in R_\alpha(X)$. Тогда $(\varphi_0,\ldots,\varphi_k)$ — 0-цепь для $(\tilde{\tilde{X}},\leqslant_{J_Y})$ (см. доказательство предложения 7), т. е. $(\varphi_0,\ldots,\varphi_k)=c\in C_{\omega^k}$, $X\models c$. Пусть $\alpha=\omega^k(m+1)$, $R\in\mathcal{L}_0$ таково, что $XR\in\breve{\mathcal{S}}_{\omega^k m}$, $X\bar R\in\mathcal{S}_{\omega^k}$. Опять $(\varphi_0,\ldots,\varphi_k)\in R_\alpha(X)$ будет 0-цепью для $(X\bar R;\leqslant_{J_Y})$. Имеем $\varphi_1\in X\bar R$, $\varphi_1\in\bar R$. Поскольку $\varphi_1\subseteq\varphi_i$ и $\varphi_i\subseteq\varphi_1$ по лемме 9, то $\varphi_i\in\bar R$ для $i\leqslant k$. Поэтому $(\varphi_0,\ldots,\varphi_k)$ будет 0-цепью и для $(X;\leqslant_{J_Y})$. Пусть цепь $(\varphi_0,\ldots,\varphi_k)$ соответствует $Y\in Q_\alpha(X)$. По определению $Q_\alpha(X)$ найдется нормальная компонента $Z\in\breve Q_{\omega^k m}(XR)$, $Y\leqslant Z$. Пусть $(\psi_0,\ldots,\psi_l)$ — цепь, соответствующая Z, $(\psi_0,\ldots,\psi_l)\in\breve R_{\omega^k m}(XR)$. Из определения

$Y \leqslant Z$ и леммы 9(3) следует $\varphi_k \subseteq \psi_0$. По индукции найдется $d \in C_{\omega^k m}$ такое, что $\Phi_{\omega^k m}(d) = (\psi_0, \ldots, \psi_l)$ и $\overline{XR} \vDash d$ (надо параллельно проводить рассуждение и для $\breve{R}_\alpha$). Так же, как выше для $X\overline{R}$, доказывается, что тогда $\overline{X} \vDash d$. Отсюда следует $c = (\varphi_0, \ldots, \varphi_k, d) \in C_\alpha$, $X \vDash c$. Оставшиеся случаи рассматриваются аналогично.

Докажем (б). Пусть сначала α предельно. Из $R_\alpha(X) = \varnothing$ следует $Q_\alpha(X) = \varnothing$. По предложению 7 тогда $X = \cup P_\alpha(X) = \cup [P_\alpha(X) \setminus Q_\alpha(X)] \in \mathscr{P}_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha$. Пусть $\alpha = \lambda + k + 1$. Утверждаем, что $\forall \varphi \in F(A)$ $(\varphi \in R_0 \cup R_1 \vee \mathscr{O}_\varphi \cap V_0 = \varnothing \vee \mathscr{O}_\varphi \cap V_1 = \varnothing)$, где $V_0 = \cup Q_\lambda(XR_0)$, $V_1 = \cup \breve{Q}_\lambda(XR_1)$. Предположим противное: пусть $\varphi \in F(A)$, $\varphi \notin R_0 \cup R_1$, $\mathscr{O}_\varphi \cap V_i \neq \varnothing$. Пусть $Z_0 \in Q_\lambda(XR_0)$ и $Z_1 \in \breve{Q}_\lambda(XR_1)$ таковы, что $\mathscr{O}_\varphi \cap Z_i \neq \varnothing$. Пусть $(\psi_0^i, \ldots, \psi_l^i)$ — элементы из $R_\lambda(XR_0)$ и $\breve{R}_\lambda(XR_1)$, соответствующие Z_0 и Z_1. Тогда $\varphi \subseteq \psi_0^i$, поскольку ψ_0^i — наибольший элемент в $(\widetilde{Z}_i; \subseteq)$. Это противоречит пустоте $R_\alpha(X)$. Полагаем $\Phi_i = \{\varphi \in F(A) \mid \mathscr{O}_\varphi \cap V_i = \varnothing\}$ и $S_i = \mathscr{O}_{\Phi_i}$. Тогда $\mathscr{O}_{F(A)} \subseteq R_0 \cup R_1 \cup S_0 \cup S_1$, $S_i \cap V_i = \varnothing$. Так же, как в случае $\lambda = \alpha + \omega^k$ предложения 7, выводим $X(R_0 \cup S_1) \in \mathscr{P}_\lambda$, $X(R_1 \cup S_0) \in \breve{\mathscr{P}}_\lambda$. Рассмотрим типичный частный случай $k = 2$, тогда $A = A_0 \setminus A_1$ для некоторых $A_0 \supseteq A_1$ из $\mathscr{L}_0$. По доказательству предложения 3 $A_1 = \mathscr{O}_{F(A)} \subseteq R_0 \cup R_1 \cup S_0 \cup S_1$, поэтому

$$X(\overline{R_0 \cup S_1})(\overline{R_1 \cup S_0}) = A\overline{R}_0\overline{R}_1\overline{S}_0\overline{S}_1 = A_0\overline{A}_1\overline{R}_0\overline{R}_1\overline{S}_0\overline{S}_1 = A_0\overline{R}_0\overline{R}_1\overline{S}_0\overline{S}_1.$$

Поскольку $A_0 \in \mathscr{P}_1$, из полученных соотношений и леммы 5 следует $X \in \mathscr{P}_{\lambda+2} = \mathscr{P}_{\lambda+k}$. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 2. Пусть $X \in \mathscr{A}^*$, тогда $X \in \mathscr{P}_\alpha \cup \breve{\mathscr{P}}_\alpha$ для некоторого $\alpha < \omega^\omega$. Выберем наименьшее такое α. Предположим $X \in \mathscr{P}_\alpha$. Утверждаем, что тогда $\pi^{-1}(X) \approx \Sigma_\alpha$. В противном случае по предложению 8 $X \in \mathscr{P}_\beta \cup \breve{\mathscr{P}}_\beta$ для некоторого $\beta < \alpha$, что противоречит выбору α. В случае $X \in \breve{\mathscr{P}}_\alpha$ получим $\pi^{-1}(X) \approx \Pi_\alpha$.

Осталось для любого $\alpha < \omega^\omega$ построить $X \in \mathscr{A}^*$, $\pi^{-1}(X) \approx \Sigma_\alpha$. Построим такие примеры лишь для частных случаев $\alpha = \omega^3$, $\omega^3 \cdot 2$, $\omega^3 \cdot 2 + 1$, идея построения годится для всех α. Выберем $\gamma \subseteq \omega + 1$ так, чтобы $(\gamma; \leqslant)$ имело 0-цепь, но не имело 1-цепей длины 3. Рассмотрим случай $n = 2$, т. е. двухместные предикаты $X \subseteq \mathscr{E}^2$. Возьмем сначала $X = A_0^{\{0,1\}} A_0^{\{0\}} A_{\geqslant 1}^{\{1\}} A_\gamma^{\varnothing}$. Это нормальный предикат. По выбору γ $(\widetilde{\widetilde{X}}; \leqslant_{J_X})$ имеет 0-цепь, но не имеет 1-цепей длины 3. По предложениям 4, 5 $\pi^{-1}(X) \approx \Sigma_{\omega^3}$. Положим теперь $X = Y \cup Z$; $Y = A_1^{\{0,1\}} A_0^{\{0\}} A_{\geqslant 1}^{\{1\}} A_{\bar{\gamma}}^{\varnothing}$, $Z = A_0^{\{0,1\}} A_0^{\{0\}} A_{\geqslant 1}^{\{1\}} A_\gamma^{\varnothing}$, $R = A_{\geqslant 1}^{\{0,1\}}$. Тогда $R \in \mathscr{L}_0$, $XR = Y \in \breve{\mathscr{P}}_{\omega^3}$, $X\overline{R} = Z \in \mathscr{P}_{\omega^3}$, поэтому $X \in \mathscr{P}_{\omega^3 \cdot 2}$. Поскольку $Z \in Q_{\omega^3 \cdot 2}(X)$, то $R_{\omega^3 \cdot 2}(X) \neq \varnothing$ и по предложению 7 $\pi^{-1}(X) \approx \Sigma_{\omega^3 \cdot 2}$. Наконец, положим $X = Y \cup Z$, $Y = A_1^{\{0,1\}} A_0^{\{1\}} A_{\geqslant 2}^{\{0\}} A_{\bar{\gamma}}^{\varnothing} \cup A_0^{\{0,1\}} A_0^{\{1\}} A_{\geqslant 2}^{\{0\}} A_\gamma^{\varnothing}$, $Z = A_1^{\{0,1\}} A_0^{\{0\}} A_{\geqslant 2}^{\{1\}} A_\gamma^{\varnothing} \cup A_0^{\{0,1\}} A_0^{\{0\}} A_{\geqslant 2}^{\{1\}} A_{\bar{\gamma}}^{\varnothing}$, $R_i = \{(\beta_0, \beta_1) \in \mathscr{E}^2 \colon |\beta_i| \geqslant 2\}$. Тогда $R_i \in \mathscr{L}_0$, $XR_0 = Y \in \mathscr{P}_{\omega^3 \cdot 2}$, $XR_1 = Z \in \breve{\mathscr{P}}_{\omega^3 \cdot 2}$, $X\overline{R}_0\overline{R}_1 = \varnothing$. Поэтому $X \in \mathscr{P}_{\omega^3 \cdot 2 + 1}$. Легко видеть, что $R_{\omega^3 \cdot 2 + 1}(X) \neq \varnothing$, а именно последовательность $(\varnothing)$ лежит в $R_{\omega^3 \cdot 2 + 1}(X)$. Поэтому $\pi^{-1}(X) \approx \Sigma_{\omega^3 \cdot 2 + 1}$ по предложению 7. Теорема доказана.

Замечания. 1. Легко видеть, что по A-представлению $\mathscr{A}^*$-предиката можно эффективно найти тот из уровней Σ_α, Π_α, в котором универсально его индексное множество.

2. Остался открытым вопрос о том, в каких уровнях универсальны n-местные $\mathscr{A}^*$-предикаты для фиксированного n. При $n = 1$ такими уровнями будут в точности Σ_k^{-1}, Π_k^{-1}, $\Sigma_{2,k}$, $\Pi_{2,k}$ $(k < \omega)$. Можно показать, что булева алгебра n-местных $\mathscr{A}^*$-предикатов является суператомной и со-

ответствующий ординал [13] есть $\omega^{2^n-1}+1$. Кажется правдоподобным, что уровни Σ_α, в которых универсальны n-местные $\mathscr{A}^*$-предикаты, упорядочены по типу $\omega+\omega^{2^n-1}$. При $n=1$ это действительно так.

Из полученных результатов легко вытекает

Следствие. *Для любого* $X\in\mathscr{A}^*$ *условия* $\pi^{-1}(X)\in\Sigma_\alpha$ *и* $X\in\mathscr{S}_\alpha$ *равносильны.*

Справа налево это установлено выше. Пусть $\pi^{-1}(X)\in\Sigma_\alpha$. Допустим, что $X\notin\mathscr{S}_\alpha$. Пусть β — наименьший ординал, для которого $X\in\mathscr{S}_\beta\cup\breve{\mathscr{S}}_\beta$. Тогда $\beta\geqslant\alpha$. Из этих условий и доказательства теоремы вытекает $\Pi_\alpha\leqslant\leqslant\pi^{-1}(X)$. Но $\pi^{-1}(X)\in\Sigma_\alpha$, откуда $\Pi_\alpha\subseteq\Sigma_\alpha$. Полученное противоречие доказывает следствие.

§ 4. ФОРМУЛЬНЫЕ ПРЕДИКАТЫ

Теорема 3. *Для любого формульного предиката* $X\subseteq\mathscr{E}^n$ *выполняется хотя бы одно из условий* $\Sigma_2^0\leqslant\pi^{-1}(X)$, $\Pi_2^0\leqslant\pi^{-1}(X)$, $\pi^{-1}(X)$ *универсально в одном из уровней* Σ_k^{-1}, Π_k^{-1} $(k<\omega)$.

Доказательство. Формульный предикат $Z\subseteq\mathscr{E}^n$ называется *B-предикатом* [8], если из $\alpha\in Z$ и $\alpha_i=^*\beta_i$ для $i<n$ следует $\beta\in Z$ ($=^*$ — равенство по модулю конечных множеств). В [8] доказано, что любой формульный предикат $X\subseteq\mathscr{E}^n$ представим в виде

$$X=(Y_0\cap Z_0)\cup\ldots\cup(Y_m\cap Z_m), \tag{3}$$

где Y_i — A-предикаты, а Z_i — B-предикаты. Покажем, что в этом представлении Y_i можно считать попарно непересекающимися. Для каждого i найдем конечное множество $\mathscr{A}^*$-предикатов $\mathscr{Y}_i$ такое, что $Y_i=\cup\mathscr{Y}_i$ и элементы $\mathscr{Y}_i$ попарно не пересекаются (за $\mathscr{Y}_i$ можно взять множество атомов булевой алгебры, порожденной элементами $Y_0,\ldots,Y_m$, содержащихся в Y_i). Подставляя $Y_i=\cup\mathscr{Y}_i$ в (3) и раскрывая скобки, получим представление

$$X=(U_0\cap V_0)\cup\ldots\cup(U_p\cap V_p), \tag{4}$$

где $U_k\in\mathscr{Y}_0\cup\ldots\cup\mathscr{Y}_m$ и $V_k\in\{Z_0,\ldots,Z_m\}$. Поскольку класс B-предикатов является булевой алгеброй, U_k в (4) можно считать попарно непересекающимися (в противном случае нужно сгруппировать все $U_k\cap V_k$ с одинаковым U_k и вынести U_k за скобку). Так как $U_k\in\mathscr{A}^*$, по лемме 14 найдется A-представление $U_k=\cup\mathscr{U}_k$ с попарно непересекающимися компонентами. Подставляя это в (4) и раскрывая скобки, получим представление вида (3), в котором Y_i попарно не пересекаются. Будем считать, что в (3) все слагаемые непусты (пустые слагаемые можно вычеркнуть).

Возможны два случая: $Y_i\subseteq Z_i$ для всех $i\leqslant m$ и его отрицание. В первом случае $X=Y_0\cup\ldots\cup Y_m$ является $\mathscr{A}^*$-предикатом и нужное утверждение следует сразу из теоремы 2. Во втором случае без ограничения общности можем считать $Y_0\not\subseteq Z_0$. Пусть $Y_0=A_f^I$, тогда $I\neq\varnothing$ и $I\neq\{\varnothing\}$ (при $I=\varnothing$ имеем $A_f^I\cap Z_0=\varnothing$, а при $I=\{\varnothing\}$ предикат A_f^I был бы атомом булевой алгебры формульных предикатов и потому $A_f^I\subseteq Z_0$ или $A_f^I\cap Z_0=\varnothing$; противоречие). Пусть ρ — рекурсивный элемент из $\mathscr{E}^n$ такой, что $\tilde{\tilde{\rho}}(\sigma)=\omega$ при $\sigma\in\max I$ и $\tilde{\tilde{\rho}}(\sigma)=f(\sigma)$ при $\sigma\notin\notin\max I$. Тогда $\rho\in A_f^I$. Для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\Sigma_2^0\leqslant\pi^{-1}(X)$ при $\rho\notin Z_0$ и $\Pi_2^0\leqslant\pi^{-1}(X)$ при $\rho\in Z_0$.

Пусть сначала $\rho\notin Z_0$. Выберем $\beta\in Y_0\cap Z_0$, для любого $\sigma\subseteq[n]$ пусть F_σ — подмножество множества $\tilde{\beta}(\sigma)$ можности $f(\sigma)$ (F_σ существует из-за $\beta\in A_f^I$), $F=\bigcup_{\sigma\subseteq[n]}F_\sigma$. Для доказательства $\Sigma_2^0\leqslant\pi^{-1}(X)$ достаточно построить вычислимую последовательность $\{\alpha_x\}$ элементов $\mathscr{E}^n$ такую, что π_x конечно $\leftrightarrow\alpha_x\in X$. Для фиксированного x построим α_x по шагам в виде $\alpha_x = \bigcup\limits_s \alpha_x^s$, где $\alpha_x^0 \subseteq \alpha_x^1 \subseteq \ldots$ — вычислимая последовательность конечных элементов. Положим $\tilde{\alpha}_x^0(\sigma) = F_\sigma$ для всех $\sigma \neq \varnothing$. В конструкции не будут меняться $\tilde{\alpha}_x^s(\sigma)$ для $\sigma \notin \hat{I}$.

Шаг $s > 0$.

Случай 1. $\pi_x^s \setminus \pi_x^{s-1} \neq \varnothing$. (а) Кладем в каждое $\tilde{\alpha}_x^s(\sigma)$, $\sigma \in \max I$, по одному элементу из $\tilde{\alpha}_x^{s-1}(\varnothing) \setminus F_\varnothing$, причем наименьшие элементы последнего множества. (б) Для любого $\tau \in \hat{I} \setminus \max I$, $\tau \neq \varnothing$, перекладываем все элементы множества $\tilde{\alpha}_x^{s-1}(\tau) \setminus F_\tau$ в $\tilde{\alpha}_x^s(\sigma)$, где $\sigma \supseteq \tau$, $\sigma \in \max I$.

Случай 2. $\pi_x^s \setminus \pi_x^{s-1} = \varnothing$. Для любого $\tau \in \hat{I}$ и любого $x \in \tilde{\beta}^s(\tau) \setminus \tilde{\beta}^{s-1}(\tau)$, $x \notin F, x \notin \bigcup\limits_{\sigma \in \max I} \tilde{\alpha}^{s-1}(\sigma)$, находим $\tau_1 \subseteq \tau$, $x \in \tilde{\beta}^{s-1}(\tau_1)$. По индукции x лежит в $\alpha_x^{s-1}(\tau_1)$. Перекладываем x из $\tilde{\alpha}_x^{s-1}(\tau_1)$ в $\tilde{\alpha}_x^s(\tau)$. Построение закончено.

Если π_x бесконечно, то на бесконечно многих шагах выполняется случай 1. По (а) все $\tilde{\alpha}_x(\sigma)$, $\sigma \in \max I$, будут бесконечными и $\tilde{\alpha}_x(\varnothing) = F_\varnothing$. По (б) получим $\tilde{\alpha}_x(\tau) = F_\tau$ при всех $\tau \notin \max I$. Поэтому α_x будет рекурсивным элементом $\mathscr{E}^n$, причем $\tilde{\tilde{\alpha}}_x(\tau) = f(\tau)$ при $\tau \notin \max I$. По выбору ρ найдется автоморфизм Φ решетки $(\mathscr{E};\ \cup,\ \cap)$, переводящий ρ в α_x. Поскольку $\rho \notin Z_0$ и Z_0 формульный, то $\alpha_x \notin Z_0$. Из условий на α_x следует $\alpha_x \in Y_0$, поэтому $\alpha_x \notin Y_i$ при $i > 0$. Это показывает $\alpha_x \notin X$. Итак, в этом случае π_x бесконечно и $\alpha_x \notin X$. Пусть теперь π_x конечно. Тогда, начиная с некоторого шага, постоянно выполняется случай 2. По построению в этом случае $\alpha_x =^* \beta$ и $\alpha_x \in Y_0$. Поскольку $\beta \in Z_0$ и Z_0 устойчиво относительно $=^*$, то $\alpha_x \in Z_0$. Итак, в этом случае π_x конечно, $\alpha_x \in X$ и утверждение доказано.

В случае $\rho \in Z_0$ возьмем $\beta \in Y_0 \setminus Z_0$ и повторим конструкцию. Тогда π_x бесконечно $\leftrightarrow$ $\alpha_x \in X$. Теорема доказана.

Покажем теперь, что теорема 3 не переносится на решеточные и даже на инвариантные предикаты.

Предложение 9. *Существует инвариантный предикат $X \subseteq \mathscr{E}$ такой, что $\pi^{-1}(X) \in \Delta_2^0$ и $\Sigma_k^{-1} \leqslant \pi^{-1}(X)$ для любого $k < \omega$.*

Доказательство. Пусть $v(n) = \mu x(|\pi_x| = |\pi_n|)$. Тогда $v(n) \leqslant n$, $|\pi_{v(n)}| = |\pi_n|$, $|\pi_m| = |\pi_n| \leftrightarrow v(m) = v(n)$, $vv(n) = v(n)$. Положим $X = \{\pi_n\colon |\pi_n| \geqslant v(n)\}$, т. е. $n \in \pi^{-1}(X) \leftrightarrow |\pi_n| \geqslant v(n)$. Ясно, что из $|\pi_m| = |\pi_n|$ следует $m \in \pi^{-1}(X) \leftrightarrow n \in \pi^{-1}(X)$, т. е. X инвариантен. Для доказательства $\pi^{-1}(X) \in \Delta_2^0$ достаточно проверить, что $\pi^{-1}(X)$ рекурсивно относительно $\varnothing'$. Пусть дано n. Узнаем, верно ли $|\pi_n| \geqslant n$. Если да, то $|\pi_n| \geqslant v(n)$ и $n \in \pi^{-1}(X)$. Пусть $|\pi_n| < n$. Вычислим множество $\{x \leqslant n\colon |\pi_x| = |\pi_n|\}$. Ясно, что $v(n)$ равно наименьшему элементу этого множества. Поскольку $n \in \pi^{-1}(X) \leftrightarrow |\pi_n| \geqslant v(n)$, утверждение доказано.

Остается проверить, что $\Sigma_k^{-1} \leqslant \pi^{-1}(X)$ для любого k. Для этого достаточно доказать, что бесконечно много членов последовательности $\varnothing$, $\{0\}$, $\{0, 1\}$, $\ldots$ не принадлежат X. Действительно, пусть это доказано. Пусть F_0 — первый элемент этой последовательности, не принадлежащий X. Поскольку $\omega \in X$ и $\pi^{-1}(X) \in \Delta_2^0$, по лемме 2 из [14] найдется F_1 из этой последовательности такой, что $F_0 \subseteq F_1$, $F_1 \in X$. Пусть F_2 — первый элемент последовательности такой, что $F_1 \subseteq F_2$, $F_2 \notin X$. Продолжая рассуждение, получим бесконечную последовательность $F_0 \subseteq F_1 \subseteq \ldots$ такую, что $F_{2i} \notin X$, $F_{2i+1} \in X$. По лемме 3 из [12] $\Sigma_k^{-1} \leqslant \pi^{-1}(X)$ при любом k.

Итак, осталось проверить, что бесконечное число множеств вида $\{0, \ldots, x-1\}$ не лежит в X. Пусть g — такая общерекурсивная функция, что $\pi_{g(x)} = \{0, \ldots, x-1\}$. Предположим, что $g(x) \in \pi^{-1}(X)$ для почти всех x. Тогда $x = |\pi_{g(x)}| \geqslant vg(x)$ для почти всех x. Мы имеем

$$x \neq y \to |\pi_{g(x)}| = x \neq y = |\pi_{g(y)}| \to vg(x) \neq vg(y).$$

Поэтому функция $f(x) = vg(x)$ взаимно однозначна и $f(x) \leqslant x$ для почти всех x. Пусть m таково, что $(\forall x \geqslant m)(f(x) \leqslant x)$. Утверждаем, что $\mathrm{rng}\, f = \omega$. Пусть $a \in \omega$, надо доказать $a \in \mathrm{rng}\, f$. Достаточно проверить, что множество $\{a, f(a), f^2(a), \ldots\}$ конечно. Действительно, тогда мы получили бы $f^k(a) = f^l(a)$ для некоторых $k > l$. Но тогда из взаимной однозначности f следует $f^{k-l}(a) = a$, $a \in \mathrm{rng}\, f$. Допустим, что множество $\{a, f(a), f^2(a), \ldots\}$ бесконечно. Тогда $f^k(a) \neq f^l(a)$ при $k \neq l$ и существует такое k, что $\forall l \geqslant k\ (f^l(a) \geqslant m)$. По выбору m получаем $f^k(a) > f^{k+1}(a) > \ldots$; противоречие.

Мы доказали, что если почти все множества вида $\{0, \ldots, x-1\}$ лежат в X, то $\mathrm{rng}(v \circ g) = \omega$. Тогда $\mathscr{E} = \{\pi_n | n < \omega\} = \{\pi_{vg(x)} | n < \omega\}$. Поскольку $|\pi_{vg(x)}| = |\pi_{g(n)}| = n$, это означает, что все РПМ конечны. Полученное противоречие доказывает предложение.

Из теоремы 3 и предложения 9 сразу вытекает утверждение, дающее ответ на вопрос Р. Соара [4]: существует ли решеточное не формульное $X \subseteq \mathscr{E}$, у которого $\pi^{-1}(X)$ лежит в арифметической иерархии?

Следствие. *Существует решеточное не формульное семейство $X \subseteq \mathscr{E}$, у которого $\pi^{-1}(X) \in \Delta_2^0$.*

Замечания. 1. Из предложения 3 следует, что не существует решеточного не формульного предиката $X \subseteq \mathscr{E}^n$, у которого $\pi^{-1}(X) \in \in \bigcup_{k<\omega} \Sigma_k^{-1}$. Поэтому построенный в предложении 9 пример является простейшим в смысле арифметической иерархии.

2. Нетрудно дать более точную верхнюю оценку для $\pi^{-1}(X)$, построенного в предложении 9, и доказать, что $\pi^{-1}(X) \in \Delta_\omega^{-1}$. Это показывает, что построенный пример является простейшим решеточным не формульным семейством и в смысле иерархии Ершова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Роджерс X.** Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость.— М.: Мир, 1972.
2. **Ершов Ю. Л.** Об одной иерархии множеств // Алгебра и логика.— 1968.— Т. 7, № 1.— С. 47—73.
3. **Hay L.** Index sets of finite classes of recursively enumerable sets // Proc. Amer. Math. Soc.— 1969.— Vol. 17, N 1.— P. 106—110.
4. **Селиванов В. Л.** Индексные множества в гиперарифметической иерархии // Матер. 6-й Всесоюз. конф. по мат. логике.— Тбилиси, 1982.— С. 164.
5. **Селиванов В. Л.** Об m-степенях индексных множеств // Матер. 8-й Всесоюз. конф. по мат. логике.— М., 1986.— С. 172.
6. **Селиванов В. Л.** Иерархии гиперарифметических множеств и функций // Алгебра и логика.— 1983.— Т. 22, № 6.— С. 666—692.
7. **Louveau A.** Some results in the Wadge hierarchy of Borel sets // Lect. Not. in Math.— 1983.— N 1019.— P. 28—55.
8. **Lachlan A. H.** On the lattice of recursively enumerable sets // Trans. Amer. Math. Soc.— 1968.— Vol. 130, N 1.— P. 1—37.
9. **Soare R. I.** Recursively enumerable sets and degrees.— Berlin: Springer-Verlag, 1987.
10. **Куратовский К., Мостовский А.** Теория множеств.— М.: Мир, 1970.
11. **Ершов Ю. Л.** Теория нумераций.— М.: Наука, 1977.
12. **Селиванов В. Л.** Индексные множества в гиперарифметической иерархии // Сиб. мат. журн.— 1984.— Т. 25, № 5.— С. 164—181.
13. **Ершов Ю. Л.** Проблемы разрешимости и конструктивные модели.— М.: Наука, 1980.
14. **Селиванов В. Л.** Несколько замечаний о классах рекурсивно-перечислимых множеств // Сиб. мат. журн.— 1978.— Т. 19, № 1.— С. 153—160.