10. **Виноградова Т. Р.** О точности нормальной аппроксимации на множествах, определяемых гладкими функциями. II // Там же.— 1985.— Т. 30, № 3.— С. 554—557.
11. **Юринский В. В.** О точности нормального приближения вероятности попадания в шар // Там же.— 1982.— Т. 27, № 2.— С. 270—278.
12. **Пинелис И. Ф., Саханенко А. И.** Замечания о неравенствах для вероятностей больших уклонений // Там же.— 1985.— Т. 30, № 1.— С. 127—131.
13. **Пинелис И. Ф.** О распределении сумм независимых случайных величин со значениями в банаховом пространстве // Там же.— 1978.— Т. 23, № 3.— С. 630—637.
14. **Tortra A.** Lois indéfinment divisibles ($\mu \in I$) dans un group topologique abelian metrisable. Cas des espaces vectoriels // C. r. Acad. Sci. Ser. A.— 1965.— V. 261, N 23.— P. 4973—4975.
15. **Rosinski J., Suchanecki Z.** On the space of vector-valued functions integrable with respect to the white noise // Colloq. Math.— 1980.— V. 43, N 1.— P. 183—201.
16. **Götze F.** On Edgeworth expansions in Banach spaces // Ann. Probab.— 1981.— V. 9, N 5.— P. 852—859.
17. **Петров В. В.** Суммы независимых случайных величин.— М.: Наука, 1972.— 414 с.
18. **Борисов И. С.** О скорости сходимости в «условном» принципе инвариантности // Теория вероятностей и ее применения.— 1978.— Т. 23, № 1.— С. 67—79.
19. **Скороход А. В.** Теория случайных процессов. Т. 1.— М.: Наука, 1971.— 664 с.
20. **Булдыгин В. В.** Сходимость случайных элементов в топологических пространствах.— Киев: Наук. думка, 1980.— 240 с.

О ТОЧНОСТИ НОРМАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

А. И. САХАНЕНКО

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\forall j \quad \mathbf{M}\xi_j = 0, \ \mathbf{D}\xi_j < \infty. \tag{1}$$

Введем в рассмотрение случайную ломаную $S = S(t)$, полагая

$$S(t_n) = \sum_{j\leqslant n} \xi_j \quad \text{при} \quad t_n = \sum_{j\leqslant n} \mathbf{D}\xi_j \tag{2}$$

и доопределяя $S(t)$ монотонно на каждом из интервалов $[t_{n-1}, t_n]$. Другими словами,

$$S(t) = S(t_{k-1}) + \xi_k h_k(t) \quad \text{при} \ t \in [t_{k-1}, t_k], \tag{3}$$

где в качестве $\{h_k(\cdot)\}$ можно брать любые монотонные функции, для которых верны неравенства

$$0 \leqslant h_k(t) \leqslant 1 \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k] \quad \forall k. \tag{4}$$

Тем самым S может быть как случайной ступенчатой функцией, когда $h_k(t) \equiv 0$, так и непрерывной случайной ломаной, если $h_k(t) = (t - t_{k-1})/\mathbf{D}\xi_k$ при $\mathbf{D}\xi_k > 0$.

Мы будем рассматривать $S = S(t)$ как случайный процесс, определенный при $t \leqslant T$, где

$$T = [0, \infty) \cap [0, B^2] \quad \text{при} \quad B^2 \equiv \sum \mathbf{D}\xi_j. \tag{5}$$

Нетрудно понять, что ввиду (2)—(4) траектории процесса S с вероятностью 1 принадлежат некоторому сепарабельному подпространству $\mathscr{R}(T)$ пространства всех функций, не имеющих разрывов второго рода. Здесь $\mathscr{R}(T)$ рассматривается как нормированное пространство с равномерной нормой

$$\|u\| = \sup_{t\in T} |u(t)| \quad \text{при} \quad u \in \mathscr{R}(T) \tag{6}$$

и соответствующей борелевской σ-алгеброй. Причем мы предполагаем, что $\mathcal{R}(T)$ содержит все непрерывные функции, так что с вероятностью 1 пространству $\mathcal{R}(t)$ принадлежат траектории стандартного винеровского процесса $W=W(t)$, определенного при $t\in T$.

В дальнейшем не исключается случай, когда $\xi_j\equiv 0$ при $j>n$, т. е. когда ломаная S построена по конечному числу случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$. В частности, условимся полагать $S=S_n$ в простейшем случае, когда $\xi_j\equiv 0$ при $j>n$ и $\xi_j=\zeta_j/n^{1/2}$ при $j=1, \ldots, n$, где $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{M}\zeta=0,\quad \mathbf{D}\zeta=1 \quad \text{при} \quad \zeta=\zeta_1. \tag{7}$$

В частности, $T=[0, 1]$, если $S=S_n$.

Хорошо известно, что при естественных предположениях распределение в пространстве $\mathcal{R}(T)$ случайного процесса S близко к соответствующему распределению стандартного винеровского процесса W. Этот факт носит название принципа инвариантности Донскера — Прохорова или функциональной центральной предельной теоремы. (Точную формулировку можно найти, например, в [1, 2 или 3].)

Естественным образом возникает вопрос о точности в названном выше приближении, т. е. вопрос о скорости сходимости в принципе инвариантности. Этой проблеме посвящено большое количество статей, среди которых надо в первую очередь отметить работы Ю. В. Прохорова [1], А. В. Скорохода [4], А. А. Боровкова [5], Дж. Комлоша, П. Майора, Г. Тушнади [6].

Просматривая доказательства всех перечисленных выше результатов, можно заметить, что общим и самым трудным местом в этих доказательствах является решение следующей задачи: *требуется таким образом построить процессы S и W на одном вероятностном пространстве, чтобы вероятности вида*

$$\mathbf{P}(\|S-W\|\geqslant\varepsilon) \tag{8}$$

были бы как можно меньше при всех ε или при некотором специально выбранном $\varepsilon>0$. Другими словами, задача состоит в построении процесса W, близкого к S потраекторно, причем (см. [7]) всегда можно считать, что W является функцией лишь от S и некоторой случайной величины с равномерным распределением.

В таком виде поставленная задача систематически исследовалась в [6] при $S=S_n$ и в работах [8, 9] в общем случае. В § 2 и 3 настоящей статьи уточняются оценки для вероятностей вида (8), установленные в работах [8, 9]. Целью остальных параграфов работы является получение следствий из этих оценок в целом ряде направлений. Часть результатов работы впервые получена в [10].

Во всех доказываемых оценках для вероятностей вида (8) используются условия типа

$$\mathcal{L}(H)\equiv\sum \mathbf{M}H(\xi_j)<\infty, \tag{9}$$

причем рассматриваются только такие функции $H(\cdot)$, что

$$0<H(-x)/x^2=H(x)/x^2\uparrow \quad \text{при} \quad x>0. \tag{10}$$

При $\alpha\geqslant 2$ полагаем

$$\mathcal{L}_\alpha=\mathcal{L}(H)=\sum \mathbf{M}|\xi_j|^\alpha \quad \text{при} \quad H(x)=x^\alpha. \tag{11}$$

В части результатов дополнительно требуется, что $B<\infty$ и вводятся ограничения на величину

$$\sup_j \mathbf{M}H(\xi_j)/\mathbf{D}\xi_j.$$

Условимся, что всюду в работе считаются выполненными предположения, введенные в (1)—(7) и (9), (10), даже если это не оговорено специально. Подчеркнем, что все утверждения работы имеют сплошную нумерацию и что в каждом параграфе сначала приводятся основные результаты, а затем их доказательства. Формулы в каждом параграфе имеют свою нумерацию. Ссылки на формулы из других параграфов не допускаются. Отметим, что в (5), (9)—(11) и далее символы $\sum$ и max употребляются лишь вместо $\sum\limits_{j\geqslant 1}$ и $\max\limits_{j\geqslant 1}$, а знаки $\uparrow$ и $\downarrow$ означают соответствующую монотонность функций. Будем считать, что умножение выполняется вперед деления, т. е. будем писать $ab/2cd$ вместо $ab/(2cd)$. Всюду ниже знак □ означает конец доказательства, символы $C<\infty$ и $c>0$ могут заменять любые положительные абсолютные постоянные, а $C(\alpha)$ и $c(\alpha)$ обозначают постоянные, зависящие только от α.

§ 2. КЛЮЧЕВЫЕ ТЕОРЕМЫ

В данном параграфе будут доказаны два утверждения, которые усиливают основные результаты работ [8, 9] (см. теорему 1 в [8] и теорему 2 в [9]).

Теорема 1. *Пусть существует такое число $\lambda>0$, что*

$$\forall j \quad \mathbf{M}\xi_j^2 e^{\lambda|\xi_j|}\leqslant 3\mathbf{D}\xi_j. \tag{1}$$

Тогда для некоторого винеровского процесса W справедливо неравенство

$$c\mathbf{M}\,\|S-W\|^2\,e^{c\lambda\|S-W\|}\leqslant\sum\mathbf{D}\xi_j. \tag{2}$$

Замечание 1. Как отмечено в [11] условие (1) эквивалентно классическому условию Бернштейна.

Предположим теперь, что случайные величины $\{\xi_j\}$ ограничены, т. е.

$$\forall j \quad \mathbf{P}(|\xi_j|\leqslant r)=1,\quad 0<r<\infty. \tag{3}$$

В этом случае условие (1), очевидно, выполнено при $\lambda=1/r$ и, значит, можно при указанном λ воспользоваться утверждением теоремы 1. Однако для ограниченных случайных величин приводимая ниже теорема 2 содержит более сильный результат.

Обозначим через $\mathscr{H}$ множество всех четных функций $H(\cdot)$, удовлетворяющих следующим двум ограничениям

$$0<H(x)/x^2\leqslant H(y)/y^2\leqslant 1=H(1)\quad \forall 0<x\leqslant y\leqslant 1, \tag{4}$$

$$\mathscr{K}(H)\equiv-\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}\ln H(2^{-m})<\infty. \tag{5}$$

К классу $\mathscr{H}$ принадлежат, например, функции $H(x)=x^\alpha$ при $\alpha\geqslant 2$ и $H(x)=x^2\exp(c-c|x|^{-\beta})$ при $0\leqslant\beta<1$ и $c\geqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (3), *а функция $H\in\mathscr{H}$. Тогда существует такой винеровский процесс W, что*

$$\mathbf{M}e^{c\|S-W\|/r}\leqslant e^{\mathscr{K}(H)}\left(1+\sum\mathbf{M}H(\xi_j/r)\right). \tag{6}$$

Приступим к доказательству сформулированных теорем. Положим

$$\Delta\equiv\sup_n|S(t_n)-W(t_n)|,\quad \eta_n=W(t_n)-W(t_{n-1}),$$
$$w_n=\max\{|W(t)-W(t_{n-1})|,\ t\in[t_{n-1},t_n]\}. \tag{7}$$

Лемма 1.

$$\Delta\leqslant\|S-W\|\leqslant\Delta+2\sup_j w_j.$$

Доказательство следует из определения процесса S, поскольку функция $S(t)$ монотонна при $t\in[t_{n-1},t_n]$. Далее, из (7) и свойств максимума винеровского процесса [12, с. 371] вытекает

Лемма 2.

$$\mathbf{P}(w_j\geqslant x)\leqslant 4\mathbf{P}(\eta_j\geqslant x)\leqslant 4\exp(-x^2/2\mathbf{D}\xi_j).$$

В основе доказательства теоремы 1 лежит следующее утверждение, являющееся основным результатом работы [8].

Лемма 3. *Пусть существует такое число* $\tau > 0$, *что*

$$\forall j \quad \tau \mathbf{M} |\xi_j|^3 e^{\tau|\xi_j|} \leqslant \mathbf{D}\xi_j. \tag{8}$$

Тогда для некоторого винеровского процесса W *справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}e^{8c\tau\Delta} \leqslant 1 + \tau\left(\sum \mathbf{D}\xi_j\right)^{1/2}. \tag{9}$$

Далее, в леммах 4—8 будем предполагать, что выполнены все условия теоремы 1 и что символ c обозначает постоянную из (9), причем, не уменьшая общности, считаем, что $c \leqslant 1/64$.

Лемма 4. *Условие* (8) *справедливо при* $\tau = \lambda/2$. *Кроме того, при всех* j *и* $|h| \leqslant 1$

$$\lambda^2 \mathbf{D}\xi_j \leqslant 4, \quad \mathbf{M}e^{h\lambda\xi_j/2} \leqslant 1 + h^2\lambda^2 \mathbf{D}\xi_j/6. \tag{10}$$

Доказательство. При $\xi = \xi_j$ и $\tau = \lambda/2 > 0$ воспользуемся соотношениями

$$\tau|\xi|^3 e^{\tau|\xi|} \leqslant \xi^2(e^{2\tau|\xi|} - 1)/2, \tag{11}$$

$$e^{h\tau\xi} \leqslant 1 + h\tau\xi + h^2\tau^2\xi^2/2 + h^2\tau^3|\xi|^3 e^{\tau|\xi|}/6. \tag{12}$$

Из (1) и (11) вытекает (8). Далее, в силу неравенства Гёльдера

$$\tau \mathbf{M}|\xi|^3 e^{\tau|\xi|} \geqslant \tau \mathbf{M}|\xi|^3 \geqslant \tau(\mathbf{D}\xi)^{3/2}. \tag{13}$$

Подставляя (8) в (12) и (13) при $\tau = \lambda/2$, находим (10). □

Ввиду леммы 4 считаем далее, что процессы S и W удовлетворяют утверждению (9) леммы 3 при $\tau = \lambda/2$.

Лемма 5.

$$\mathbf{P}(\max w_j \geqslant x) \leqslant 6 \exp(-\lambda^2 x^2/16) \sum \mathbf{D}\xi_j/x^2.$$

Доказательство. Из леммы 2 и неравенства $ye^{-2y} \leqslant e^{-y-1}$ имеем

$$\mathbf{P}(\max w_j \geqslant x) \leqslant 4 \sum \exp(-2y_j) \leqslant 4e^{-1} \sum \exp(-y_j)/y_j,$$

где $y_j \equiv x^2/4\mathbf{D}\xi_j \geqslant \lambda^2 x^2/16 \equiv y$ в силу (14). □

Положим

$$B \equiv \left(\sum \mathbf{D}\xi_j\right)^{1/2}, \quad \Psi(x) = x^2 e^{c\lambda|x|}. \tag{14}$$

Выведем основную часть теоремы 1, когда

$$0 < c \leqslant 1/64, \quad \lambda B \geqslant 1. \tag{15}$$

Лемма 6. *Если выполнено дополнительное предположение* (15), *то справедливо утверждение теоремы* 1.

Доказательство. Из лемм 1, 3 и 5 при $\tau = \lambda/2$ и $\lambda x \geqslant 1$ находим

$$\mathbf{P}(\|S - W\| \geqslant 2x) \leqslant \mathbf{P}(\Delta \geqslant x) + \mathbf{P}(2\max w_j \geqslant x) \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \tau B)e^{-8c\tau x} + 6\lambda^2 B^2 e^{-\lambda x/16} \leqslant 8\lambda^2 B^2 e^{-4c\lambda x}. \tag{16}$$

Если же $\lambda x \leqslant 1$, то неравенство (16) выполняется очевидным образом, так как правая часть в нем больше единицы ввиду (15). Из (16) имеем

$$\mathbf{M}\Psi(\|S - W\|) = \int_0^\infty \mathbf{P}(\|S - W\| \geqslant x)\, d\Psi(x) \leqslant$$

$$\leqslant 8\lambda^2 B^2 \int_0^\infty e^{-2c\lambda x}(2x + \lambda x^2) e^{c\lambda x} dx = 32c^{-2}B^2. \tag{17}$$

Требуемая оценка (2) вытекает из (17) при соответствующем выборе абсолютных постоянных. □

Рассмотрим теперь дополнительный случай в теореме 1, когда

$$0 < c \leqslant 1/64, \quad 16c\lambda B \leqslant 1. \tag{18}$$

Положим

$$Y = \sup_{n\geqslant 1} \left| \sum_{j<n} \xi_j \right|, \quad X = \sum \xi_j. \tag{19}$$

Лемма 7. *При дополнительном предположении* (18) *верно неравенство*

$$\mathbf{M}\Psi(Y) \leqslant 2^7 B^2. \tag{20}$$

Доказательство. Воспользуемся соотношением

$$\mathbf{M}\Psi(Y) \leqslant \mathbf{M}\left(|X| \int_0^Y x^{-1} d\Psi(x)\right) \equiv \mathrm{M}_0, \tag{21}$$

доказанным в [13, с. 285—286] для класса функций Ψ, включающего функцию из (14). Правую часть в (21) легко привести к виду

$$M_0 = \mathbf{M}|X| Y e^{c\lambda Y} + \mathbf{M}|X| (e^{c\lambda Y} - 1)/c\lambda. \tag{22}$$

Рассматривая отдельно случаи $|X| \leqslant Y/4$ и $Y < 4|X|$, получаем

$$M_0 \leqslant \mathbf{M}\Psi(Y)/2 + 8\mathbf{M}X^2 e^{4c\lambda|X|}. \tag{23}$$

Суммируя (21)—(23), находим

$$\mathbf{M}\Psi(Y) \leqslant 16\mathbf{M}X^2 e^{4c\lambda|X|}. \tag{24}$$

Далее, сравнивая производные, нетрудно установить, что

$$x^2 e^{|x|} \leqslant e^{2x} + e^{-2x} - 2 \quad \text{для } \forall x. \tag{25}$$

Полагая $x = 4c\lambda X$ в (25), имеем

$$\mathbf{M}X^2 e^{4c\lambda|X|} \leqslant (\mathbf{M}e^{8c\lambda X} + \mathbf{M}e^{-8c\lambda X} - 2)/(4c\lambda)^2. \tag{26}$$

Из леммы 4 при $h = \pm 16c$ следует, что

$$\mathbf{M}e^{\pm 8c\lambda X} \leqslant \exp\left(\sum h^2\lambda^2 \mathbf{D}\xi_j/6\right) = \exp\{(16c\lambda B)^2/6\} \leqslant 1 + (16c\lambda B)^2/4. \tag{27}$$

При выводе последнего неравенства в (27) использовано (18). Из (24), (26) и (27) вытекает (20). □

Лемма 8. *Если выполнено дополнительное предположение* (18), *то верно утверждение теоремы* 1.

Доказательство. Не уменьшая общности, будем считать, что $B < \infty$. Положим $Y^* = \max\{|W(t)|: t \in T\}$. Поскольку винеровский процесс W можно рассматривать как предел соответствующих сумм независимых случайных величин, имеющих одинаковое нормальное распределение, по аналогии с леммой 7 имеет место оценка

$$\mathbf{M}\Psi(Y^*) \leqslant 2^7 B^2. \tag{28}$$

Из выпуклости функции $\Psi(\cdot)$ и неравенств (20) и (28) находим, что

$$\mathbf{M}\Psi(\|S - W\|/2) \leqslant \mathbf{M}\Psi((Y + Y^*)/2) \leqslant \mathbf{M}\Psi(Y)/2 + \mathbf{M}\Psi(Y^*)/2 \leqslant 2^7 B^2. \tag{29}$$

Сравнивая (14) и (29), получаем, что

$$\mathbf{M}\|S - W\|^2 e^{c\|S-W\|/2} \leqslant 2^9 B^2, \tag{30}$$

где постоянная $c > 0$ определена в лемме 3. Из (30) вытекает (2) при соответствующем выборе абсолютной постоянной. □

Таким образом, теорема 1 доказана полностью в леммах 6 и 8. Перейдем теперь к выводу теоремы 2. В основе этого вывода лежит следующее утверждение, вытекающее из теоремы 2 в [9] при $a = 1$ и $H(\cdot)$, удовлетворяющих (4) и (5), если эту теорему применить к случайным величинам $\{\xi_j/2r\}$.

Лемма 9. *Если выполнены условия теоремы 2, то существует такой винеровский процесс W, что при всех $x>0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(\Delta\geqslant C(x+r\mathscr{K}(H)))\leqslant e^{-x/r}\left(1+\sum \mathbf{M}H(\xi_j/2r)+\sum H\left(\mathbf{D}^{1/2}\xi_j/2r\right)\right). \tag{31}$$

Далее, в этом пункте предполагается, что выполнены все предположения теоремы 2 и что процессы S и W удовлетворяют (31).

Лемма 10. *Если $H(\cdot)\in\mathscr{H}$, то*

$$4H(x/2)\leqslant H(x)\leqslant x^2 \quad \forall x\in[0,\ 1], \tag{32}$$

$$H(x)\geqslant e^{-2\mathscr{K}(H)/x} \quad \forall x\in(0,\ 1], \tag{33}$$

$$\mathscr{K}(H)\geqslant-\sum_{m=1}^{\infty}2^{-m}\ln 2^{-2m}>2. \tag{34}$$

Доказательство. Соотношение (32) вытекает из (4), а (34) следует из (5) и (32). Далее, функция $H(x)$ монотонна ввиду (5). Поэтому

$$\mathscr{K}(H)\geqslant-2^{-N}\ln H(x)\geqslant-(x/2)\ln H(x) \tag{35}$$

при $2^{-N+1}>x\geqslant 2^N$. Из (35) находим (33). □

Лемма 11. *При всех j*

$$\mathbf{M}H(\xi_j/2r)\leqslant\mathbf{M}H(\xi_j/r)/4, \tag{36}$$

$$H(\mathbf{D}^{1/2}\xi_j/2r)\leqslant\mathbf{M}H(\xi_j/r)/3. \tag{37}$$

Доказательство. Неравенство (36) вытекает из (32) при $x=\xi_j/r$. Чтобы доказать (37), положим

$$\xi=\xi_j/r,\quad \sigma=\mathbf{D}^{1/2}\xi,\quad h(x)=H(x)/x^2 \tag{38}$$

и заметим, что функция $h(x)$ монотонно не убывает, как функция от $|x|$ ввиду (4). Следовательно,

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}H(\xi)+H(\sigma/2)=\mathbf{M}\xi^2h(\xi)+(\sigma/2)^2h(\sigma/2)\geqslant\\ &\geqslant\mathbf{M}\{\xi^2h(\sigma/2);\ |\xi|\geqslant\sigma/2\}+\mathbf{M}\{\xi^2h(\sigma/2);\ |\xi|<\sigma/2\}=\mathbf{M}\xi^2h(\sigma/2)=\\ &=4(\sigma/2)^2h(\sigma/2)=4H(\sigma/2).\end{aligned} \tag{39}$$

Подставив (38) в (39), найдем (37). □

Положим

$$K=\mathscr{K}(H),\quad L=\sum\mathbf{M}H(\xi_j/r) \tag{40}$$

Лемма 12.

$$\mathrm{P}(\max w_j>2(x+rK))\leqslant 2e^{-x/r}L \quad \forall x\geqslant 0.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством

$$-2^2(x+rK)^2/2\mathbf{D}\xi_j\leqslant -x/r-4Kr/\mathbf{D}^{1/2}\xi_j \quad \forall x\geqslant 0, \tag{41}$$

которое справедливо, поскольку $\mathbf{D}\xi_j\leqslant r^2$ и $K\geqslant 2$ в силу (3) и (34). Подставляя (41) в утверждение леммы 2, получаем, что

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\max w_j\geqslant 2(x+rK))&\leqslant 4\sum\exp\left(-x/r-4rK/\mathbf{D}^{1/2}\xi_j\right)\leqslant\\ &\leqslant 4e^{-x/r}\sum H\left(\mathbf{D}^{1/2}\xi_j/2r\right).\end{aligned} \tag{42}$$

При выводе последнего неравенства в (42) использовано (33). Из (42) и (37) находим требуемое утверждение леммы 12. □

Лемма 13. *При всех $y\geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(\|S-W\|/r\geqslant y)\leqslant e^{K-4cy}(1+3L). \tag{43}$$

Доказательство. Подставляя оценки (36) и (37) в (31), получаем

$$\mathbf{P}(\Delta\geqslant C(x+rK))\leqslant e^{-x/r}(1+L) \quad \forall x\geqslant 0. \tag{44}$$

Из лемм 1 и 12 и неравенства (44) имеем

$$\mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant (C+4)(x+rK)) \leqslant \mathbf{P}(\Delta \geqslant C(x+rK)) + \\ + \mathbf{P}(2\max w_j \geqslant 4(x+rK)) \leqslant \mathrm{e}^{-x/r}(1+3L) \quad \forall x \geqslant 0. \tag{45}$$

Положим

$$y=(C+4)(x/r+K), \quad 4c=1/(C+4). \tag{46}$$

Из (45) и (46) вытекает (43) при $4cy \geqslant K$. Если же $4cy < K$, то неравенство (43) справедливо подавно, так как правая часть в нем больше единицы. □

Завершим вывод теоремы 2. Из леммы 13 имеем

$$\mathbf{M}\mathrm{e}^{c\|S-W\|/r} = 1 + \int_0^\infty \mathbf{P}(\|S-W\|/r > y)\, d\mathrm{e}^{cy} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \mathrm{e}^K(1+3L)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-3cy}\, c dy = 1 + \mathrm{e}^K(1+3L)/3. \tag{47}$$

Из (47) с учетом (34) и (40) вытекает требуемое неравенство (6).

§ 3. ОСНОВНЫЕ ОЦЕНКИ

Цель настоящего параграфа — распространить результаты § 2 на более широкий класс случайных величин $\{\xi_j\}$, отказавшись от требования их ограниченности или существования у них экспоненциальных моментов.

Пусть $H(\cdot)$ — некоторая четная функция, удовлетворяющая условию

$$0 < h(x) = H(x)/x^2 \uparrow \text{ при } x > 0, \tag{1}$$

$$\mathscr{L}(H) \equiv \sum \mathbf{M}H(\xi_j) < \infty. \tag{2}$$

Предположим, что при некоторых фиксированных $v>0$ и $b \geqslant 1$

$$\lambda_0(x) \equiv x^{-1}\ln(bH(x)/\mathscr{L}(H)) \downarrow \text{ при } x \geqslant v, \tag{3}$$

и что

$$H_v(x) \equiv H(vx)/H(v) \in \mathscr{H}. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть функция $H(\cdot)$ и число $v>0$ удовлетворяют условиям (1)—(4). Тогда существует такой винеровский процесс W, что неравенство*

$$\mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant C(v\mathscr{K}(H_v)+x)+8bz) \leqslant (1+b)\mathrm{e}^{-x/v} + \\ + (\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b + \mathbf{P}(\max|\xi_j| > z) \tag{5}$$

справедливо при всех $x>0$, $z \geqslant v$ и $b \geqslant 1$.

Замечание 2. Подчеркнем, что в теоремах 3—7 и следствиях 1—3 способ построения винеровского процесса W зависит от числа v и вида функции $H(\cdot)$, но не зависит от чисел b, x и z. Независимость от x и z сохраняется и в остальных результатах работы.

Положим

$$\lambda(v) = \min_{0<x\leqslant v} x^{-1}\ln(2+H(x)/x^2) \tag{6}$$

и введем ограничения

$$\forall j \quad \mathbf{M}H(\xi_j) \leqslant \mathbf{D}\xi_j, \quad B^2 \equiv \sum \mathbf{D}\xi_j < \infty. \tag{7}$$

Теорема 4. *Пусть функция $H(\cdot)$ и число $v>0$ удовлетворяют условиям (1)—(3) и (6). Тогда существует такой винеровский процесс W, что неравенство*

$$\mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant Cx+8bz) \leqslant x^{-2}B^2\mathrm{e}^{-\lambda(v)x} + \\ + (\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b + \mathbf{P}(\max|\xi_j| > z) \tag{8}$$

справедливо при всех $x>0$, $z \geqslant v$ и $b \geqslant 1$.

Неулучшаемость в определенном смысле утверждений теорем 3 и 4 в случае $H(x)=x^\alpha$ будет показана в § 5.

Перейдем к доказательству теорем 3 и 4. Будем повторять вывод теоремы 4 из работы [9]. Условимся через $\xi_j^{[v]}$ обозначать срезку случайной величины ξ_j на уровне $v>0$, т. е. $\xi_j^{[v]}$ равно ξ_j или 0 в зависимости от того $|\xi_j|\leqslant v$ или $|\xi_j|>v$. Положим

$$\xi_j^{(v)}=\xi_j-\xi_j^{[v]},\quad \xi_j'=\xi_j^{[v]}-\mathbf{M}\xi_j^{[v]}. \tag{9}$$

В [9] доказана элементарная

Лемма 14. *Если* $\xi=\xi_j$, *то*

$$\mathbf{P}(|\xi'|\leqslant 2v)=1, \tag{10}$$

$$|\mathbf{M}\xi^{[v]}|=|\mathbf{M}\xi^{(v)}|\leqslant \mathbf{M}|\xi^{(v)}|, \tag{11}$$

$$2\mathbf{M}(\xi^{(v)})^2\geqslant \mathbf{D}\xi-\mathbf{D}\xi'\geqslant \mathbf{M}(\xi^{(v)})^2\geqslant 0. \tag{12}$$

Обозначим через S' случайную ломаную, которая получится, если в определении ломаной S заменить все величины ξ_j на ξ_j'. В силу (9), (11) имеет место

Лемма 15.

$$|S-S'|=\max_{k\geqslant 1}\Big|\sum_{j\leqslant k}(\xi_j-\xi_j^{[v]}-\mathbf{M}\xi_j^{[v]})\Big|\leqslant \sum|\xi_j^{(v)}|+\sum\mathbf{M}|\xi_j^{(v)}|.$$

Пусть

$$\sigma_j=(\mathbf{D}\xi_j'/\mathbf{D}\xi_j)^{1/2},\quad \sigma^2(v)=\sum(1-\sigma_j^2)\,\mathbf{D}\xi_j. \tag{13}$$

Введем в рассмотрение непрерывный гауссовский процесс W' с независимыми приращениями, полагая

$$W'(t)=W'(t_j)+\sigma_j(W(t)-W(t_j)) \tag{14}$$

при $t\in[t_j,\ t_{j+1}]$, где W — некоторый стандартный винеровский процесс.

Лемма 16.

$$\mathbf{P}(\|W-W'\|\geqslant x)\leqslant 4\exp(-x^2/2\sigma^2(v))\quad\forall x>0.$$

Доказательство. Обозначим $W^{(v)}(t)=W(t)-W'(t)$ и заметим, что ввиду (14)

$$W^{(v)}(t)=W^{(v)}(t_j)+(1-\sigma_j)(W(t)-W(t_j)) \tag{15}$$

при $t\in[t_j,\ t_{j+1}]$. Из (15) вытекает, что $W^{(v)}(t)$ — непрерывный гауссовский процесс с независимыми приращениями. Следовательно, в силу неравенства Леви

$$\mathbf{P}(\|W^{(v)}\|\geqslant x)\leqslant 2\mathbf{P}(|W^{(v)}(t_\infty)|>x). \tag{16}$$

Кроме того, ввиду (13) и (15)

$$\mathbf{D}W^{(v)}(t_\infty)=\sum(1-\sigma_j)^2\,\mathbf{D}(W(t_{j+1})-W(t_j))=\sigma^2(v). \tag{17}$$

Из (16) и (17) вытекает требуемое утверждение, поскольку величина $W^{(v)}(t_\infty)$ имеет нормальное распределение. □

Лемма 17.

$$\sigma^2(v)\leqslant 4\sum(\mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2)^2/\mathbf{D}\xi_j.$$

Эти неравенства следуют из (12) и (13), поскольку

$$0\leqslant 1-\sigma_j\leqslant 1-\sigma_j^2\leqslant 2\mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2/\mathbf{D}\xi_j.$$

Приступим теперь к основной задаче — оцениванию разности $\|S'-W'\|$.

Лемма 18. *Если выполнено условие* (4), *то процессы* S' *и* W' *можно так задать на одном вероятностном пространстве, что*

$$\mathbf{P}(\|S'-W'\|\geqslant C(x-v\mathcal{K}(H_v)))\leqslant(1+\mathcal{L}(H)/H(v))\,e^{-v/x}\quad\forall x>0. \tag{18}$$

Доказательство. Определим непрерывную монотонно возрастающую функцию $\tau(t)$ как решение уравнения

$$\mathbf{D}W'(\tau(t))=t \text{ для } \forall t. \tag{19}$$

В этом случае, в силу (13), (14) и (19)

$$S'(\tau(t'_k))=\sum_{j<k}\xi'_j \text{ при } t'_k=\sum_{j<k}\mathbf{D}\xi'_j. \tag{20}$$

Кроме того,

$$\Delta'\equiv\|S'-W'\|=\sup_t|S'(\tau(t))-W'(\tau(t))|. \tag{21}$$

Учитывая (4), (10) и (19)—(21), получаем, что $W'(\tau(t))$ — стандартный винеровский процесс, а процесс $S'(\tau(t))$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 при $r=4v$ и $H(\cdot)=H_v(\cdot)$. Таким образом, из теоремы 2 при $C=4/c$ и всех $x'>0$ имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\Delta'\geqslant Cx')&\leqslant\exp(-cCx'/4v)\,\mathbf{M}\exp(c\Delta'/4v)\leqslant\\&\leqslant\exp(-x'/v+\mathscr{K}(H_v))\left(1+\sum\mathbf{M}H_v(\xi'_j/4v)\right),\end{aligned} \tag{22}$$

если только мы выберем винеровский процесс $W'(\tau(\cdot))$ соответствующим образом.

Используя (9) и определение срезки $\xi_j^{[v]}$ при $\xi=\xi_j$, находим

$$H_v(\xi'/4v)\leqslant H_v\left(\max\{2|\xi_j^{[v]}|,2|\mathbf{M}\xi_j^{[v]}|\}/4v\right)\leqslant H_v(|\xi|/2v)+H_v\left(\mathbf{D}^{1/2}\xi/2v\right). \tag{23}$$

Из (4), (23) и леммы 11 вытекает, что

$$\mathbf{M}H_v(\xi'_j/4v)\leqslant\mathbf{M}H_v(\xi_j/v)=\mathbf{M}H(\xi_j)/H(v). \tag{24}$$

Подставляя (24) в (22) при $x'=x+v\mathscr{K}(H_v)$, получаем (18). □

Применяя к процессам $S'(\tau(\cdot))$ и $W'(\tau(\cdot))$ теорему 1 вместо теоремы 2, находим, что верна

Лемма 19. *Если число $\lambda>0$ удовлетворяет условию*

$$\forall_j\quad \mathbf{M}(\xi'_j)^2\exp(\lambda|\xi'_j|)\leqslant 3\mathbf{D}\xi_j, \tag{25}$$

то процесс W' можно построить таким образом, что

$$\mathbf{P}(\|S'-W'\|\geqslant Cx)\leqslant x^{-2}B^2e^{-\lambda x}\quad\forall x>0. \tag{26}$$

Лемма 20. *Если $h(v)=H(v)/v^2\geqslant 2$ и выполнены условия* (1) *и* (7), *то*

$$\forall j\quad \mathbf{M}H(\xi'_j/4)\leqslant\mathbf{D}\xi'_j. \tag{27}$$

Доказательство. При сделанном предположении, в силу (1)

$$2\mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2\leqslant 2\mathbf{M}H(\xi_j^{(v)})/h(v)\leqslant\mathbf{M}H(\xi_j^{(v)}). \tag{28}$$

Повторяя вывод соотношения (23) и леммы 11, находим

$$\begin{aligned}\mathbf{M}H(\xi'_j/4)&\leqslant\mathbf{M}H(\xi_j^{[v]}/2)+H\left(\mathbf{M}^{1/2}(\xi_j^{[v]})^2/2\right)\leqslant\\&\leqslant\mathbf{M}H(\xi_j^{[v]})=\mathbf{M}H(\xi_j)-\mathbf{M}H(\xi_j^{(v)}).\end{aligned} \tag{29}$$

Далее, сравнивая (12) и (28), имеем

$$\mathbf{D}\xi'_j\geqslant\mathbf{D}\xi_j-\mathbf{M}H(\xi_j^{(v)}). \tag{30}$$

Из (29) и (30) вытекает (27). □

Лемма 21. *Если выполнены условия* (1) *и* (7), *то неравенство* (26) *верно при $\lambda=\lambda(v)/8$, где функция $\lambda(v)$ определена в* (6).

Доказательство. Ввиду (6) и (10)

$$(\xi'_j)^2\exp(\lambda(v)|\xi'_j|/8)\leqslant(\xi'_j)^2(2+h(\xi'_j/8))^{1/2}\leqslant 2(\xi'_j)^2+H(\xi'_j/4). \tag{31}$$

Таким образом, если $h(v) \geqslant 2$, то (25) следует из (31) и леммы 20. Если же $h(v) = H(v)/v^2 < 2$, то

$$\lambda(v)/8 \leqslant (8v)^{-1} \max_{0<x\leqslant v} \ln(2 + H(x)/x^2) = (8v)^{-1} \ln(2 + h(v)) < 1/2v. \quad (32)$$

При выводе (32) использовалось также (1) и (6). Но при $\lambda \leqslant 1/2v$ неравенства (25) верны очевидным образом в силу (10). Из справедливости условия (25) и леммы 19 вытекает требуемое утверждение (26) при соответствующем выборе процесса W'. □

Лемма 22. *Если при некоторых* $v > 0$ *и* $b \geqslant 1$ *выполнены предположения* (1)—(3), *то*

$$\mathbf{P}(\|S - S'\| \geqslant 2bz) \leqslant (\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b + \mathbf{P}(\max|\xi_j| > z) \quad \forall z \geqslant v. \quad (33)$$

Доказательство. Фиксируем число $z > v$ и положим $\tau_j = |\xi_j| = |\xi_j^{(v)}|$, при $v < |\xi_j| \leqslant z$ и $\tau_j = 0$ в противном случае. Используя (3), при $\lambda = \lambda_0(z)$ и $\xi = \xi_j$ получаем

$$m_j \equiv \mathbf{M}(\exp(\lambda\tau_j) - 1) = \mathbf{M}\{\mathrm{e}^{\lambda|\xi|} - 1;\ v < |\xi| \leqslant z\} \leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{M}\{\exp(\lambda_0(\xi)|\xi|;\ |\xi| \leqslant z\} \leqslant b\mathbf{M}H(\xi_j)/\mathscr{L}(H). \quad (34)$$

Суммируя (34), находим

$$\mathbf{M}\exp\left(\lambda \sum \tau_j\right) \leqslant \exp\left(\sum m_j\right) \leqslant \mathrm{e}^b. \quad (35)$$

Из (3) и (35) имеем

$$\mathbf{P}\left(\sum \tau_j \geqslant bz\right) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda bz}\mathbf{M}\exp\left(\lambda\sum\tau_j\right) \leqslant \mathrm{e}^{b-\lambda bz} =$$
$$= (\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b \text{ при } \lambda = \lambda_0(z). \quad (36)$$

Определение величин $\{\tau_j\}$ и лемма 15 дают нам неравенство

$$\mathbf{P}\left(\|S - S'\| \geqslant bz + \sum \mathbf{M}|\xi_j^{(v)}|\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\sum\tau_j > bz\right) + \mathbf{P}(\max|\xi_j| > z). \quad (37)$$

Далее, будем считать, что

$$\mathscr{L}(H)/H(v) = b\exp(-v\lambda_0(v)) \leqslant b. \quad (38)$$

Действительно, в противном случае, $\lambda_0(z) \leqslant \lambda_0(v) < 0$, и правые части в (36) и (33) больше единицы. Применяя (1) и неравенство Чебышева, имеем

$$\sum \mathbf{M}|\xi_j^{(v)}| \leqslant v\mathscr{L}(H)/H(v) \leqslant bv. \quad (39)$$

Подставляя (36) и (39) в (37), находим требуемое соотношение (33). □

Лемма 23. *При выполнении условий леммы* 22

$$\mathbf{P}(\|W - W'\| \geqslant 4bz) \leqslant 4(\mathscr{L}(H)/bH(z))^{2b} \quad \forall z \geqslant v. \quad (40)$$

Доказательство. Применяя лемму 17 и неравенство Чебышева, легко вывести, что

$$\sigma^2(v) \leqslant 4v^2\mathscr{L}(H)/H(v) = 4v^2b\exp(-v\lambda_0(v)). \quad (41)$$

Следовательно,

$$4v^2b/\sigma^2(v) \geqslant \exp(v\lambda_0(v)) \geqslant v\lambda_0(v) \geqslant v\lambda_0(z). \quad (42)$$

Поэтому, в силу леммы 16 при $z \geqslant v$

$$\mathbf{P}(\|W - W'\| \geqslant 4bz) \leqslant 4\exp(-8b^2zv/\sigma^2(v)) \leqslant$$
$$\leqslant 4\exp(-2bz\lambda_0(z)) = 4(\mathscr{L}(H)/bH(z))^{2b}, \quad (43)$$

что доказывает (40). При выводе соотношений (41)—(43) использовались также условия (1) и (3). □

Лемма 24. *Если при некоторых $v>0$ и $b\geqslant 1$ выполнены предположения* (1) *и* (3), *то*

$$\mathbf{P}(\|S-W\|\geqslant x_0+8bz)\leqslant \mathbf{P}(\|S'-W'\|\geqslant x_0)+\mathbf{P}(\|S-S'\|\geqslant 4bz)+$$
$$+\mathbf{P}(\|W-W'\|\geqslant 4bz)\leqslant \mathbf{P}(\|S'-W'\|\geqslant x_0)+\mathbf{P}(\max|\xi_j|>z)+$$
$$+(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b \qquad (44)$$

при всех $x_0>0$ и $z\geqslant v$.

Доказательство. Из лемм 22 и 23 вытекает неравенство (44), если только в (44) заменить последнее слагаемое на

$$(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/2bH(z))^{2b}+4(\mathscr{L}(H)/bH(z))^{2b}. \qquad (45)$$

Далее, мы можем считать справедливым предположение

$$\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z)\leqslant 1, \qquad (46)$$

так как в противном случае правая часть в (44) больше единицы. Но при выполнении (46) и $b\geqslant 1$ выражение (45) не превосходит последнего слагаемого в (44), что и требовалось. □

Теорема 3 вытекает теперь из лемм 18 и 24 и неравенства (38), а теорема 4 следует из лемм 21 и 24.

§ 4. УТОЧНЕНИЕ ОЦЕНОК ЗА СЧЕТ ВЫДЕЛЕНИЯ БОЛЬШИХ СКАЧКОВ

Если выполнены условия теоремы 3 или теоремы 4, то

$$\forall x>0 \quad \sum \mathbf{P}(|\xi_j|>x)\leqslant \mathscr{L}(H)/H(x)<\infty, \qquad (1)$$

т. е. с вероятностью 1 лишь конечное число величин ξ_j превосходит по модулю любой положительный уровень. Поэтому с вероятностью 1 можно определить случайную величину $\xi_{\nu(k)}$, как k-ю по модулю среди величин $\{\xi_j\}$, $k=1,\ldots,m$. Другими словами,

$$|\xi_{\nu(1)}|\geqslant|\xi_{\nu(2)}|\geqslant\ldots\geqslant|\xi_{\nu(k)}|\geqslant\xi_j \quad \forall j\neq\nu(1),\ \ldots,\ \nu(k). \qquad (2)$$

Обозначим теперь через $Z^{[m]}$ случайный процесс, который получится, если в определении процесса S заменить нулями случайные величины $\xi_{\nu(1)},\ldots,\xi_{\nu(m-1)}$, так что $Z^{[1]}=S$.

Теорема 5. *Утверждения теорем 3 и 4 при $b\geqslant m$ останутся справедливыми, если в них процесс S заменить на $Z^{[m]}$, а вероятность* $\mathbf{P}(\max|\xi_j|>z)$ *на* $\mathbf{P}(|\xi_{\nu(m)}|>z)$.

Следствие 1. *Пусть справедливы все условия теоремы 3 при $b=m$. Тогда существует такой винеровский процесс W, что*

$$\mathbf{P}(\|Z^{[m]}-W\|\geqslant C(v\mathscr{K}(H_v)+x)+12mz)\leqslant$$
$$\leqslant(1+\mathscr{L}(H)/H(v))\mathrm{e}^{-x/v}+(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/mH(z))^m \qquad (3)$$

при всех $x>0$ и $z\geqslant v$.

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 4 при $b=m$. Тогда существует такой винеровский процесс W, что*

$$\mathbf{P}(\|Z^{[m]}-W\|\geqslant Cx+12mz)\leqslant x^{-2}B^2\mathrm{e}^{-\lambda(v)x}+(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/mH(z))^m$$
$$\forall x>0,\ \forall z\geqslant v, \qquad (4)$$

где $\lambda(v)$ по-прежнему определяется из равенства

$$\lambda(v)=\min_{0<x\leqslant v} x^{-1}\ln(2+H(x)/x^2). \qquad (5)$$

Обозначим через $S^{(v)}$ случайный процесс, который получится, если в определении процесса S все величины ξ_j заменить на $\xi_j^{(v)}-\mathbf{M}\xi_j^{(v)}$. В частности

$$S=S'+S^{(v)}. \qquad (6)$$

Подчеркнем, что в следующих двух утверждениях процессы $S^{(v)}$ и W выбираются независимо, а процесс W' связан с винеровским процессом W, как было описано перед леммой 16. Положим

$$\sigma_0^2(v)=\sum \mathbf{D}\xi_j\mathbf{P}(|\xi_j|>v). \qquad (7)$$

Теорема 6. *Пусть функция $H(\cdot)$ такова, что*

$$H_v(x)\equiv H(vx)/H(v)\in\mathscr{H}. \qquad (8)$$

Тогда существует такой винеровский процесс W, что W и $S^{(v)}$ — независимы и при всех $x>0$ и $z>0$ справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\left(\|S-W'-S^{(v)}\|\geqslant C\left(v\mathscr{K}(H_v)+x+z\right)\right)\leqslant$$
$$\leqslant\left(1+\mathscr{L}(H)/H(v)\right)\mathrm{e}^{-x/v}+4\left(\sigma_0^2(v)/zv\right)^{z/v}. \qquad (9)$$

Теорема 7. *Пусть функция $H(\cdot)$ такова, что*

$$\forall j\quad \mathbf{M}H(\xi_j)\leqslant\mathbf{D}\xi_j. \qquad (10)$$

Тогда найдется такой винеровский процесс W, что W и $S^{(v)}$ независимы и верно неравенство

$$\mathbf{P}\left(\|S-W'-S^{(v)}\|\geqslant C(x+z)\right)\leqslant x^{-2}B^2\mathrm{e}^{-\lambda(v)x}+$$
$$+4\exp\left(\lambda^2(v)\sigma_0^2(v)-\lambda(v)z\right)\quad \forall x>0,\quad \forall z\geqslant 0, \qquad (11)$$

где $\lambda(v)$ определено в (5).

Следствие 5. *Утверждения теорем* 6 *и* 7 *останутся справедливыми, если в них процесс W' заменить на W, а к правой части неравенств* (9) *и* (11) *добавить слагаемое* $4\exp(-z^2/\sigma^2(v))$.

Замечание 3. Идея выбирать винеровский процесс W независимым от $S^{(v)}$ впервые использовалась автором в [14], где применялся метод одного вероятностного пространства Скорохода. В приложении к рассматриваемому методу аналогичная идея впервые систематически изучалась в [15]. Отметим, что в [15] при задании на одном вероятностном пространстве вместо вводимого ниже тождества (25) использовалось более простое представление

$$\xi_j=\xi_j^{(v)}+\zeta_j-\zeta_j\mu_j, \qquad (12)$$

где величины $\{\zeta_j\mu_j\}$ оказываются достаточно малыми, а $\{\zeta_j\}$ выбираются независимыми от $\{\xi_j^{(v)}\}$. Однако более сложно определяемое равенство (25) имеет по сравнению с (12) то преимущество, что в нем случайные величины $\xi_j^{[*]}$ имеют более простое распределение, чем условное распределение (21) аналогичных им величин ζ_j из (12).

Приступим к выводу сформулированных теорем и следствий.

Лемма 25. *Если выполнены предположения леммы* 22, *то*

$$\mathbf{P}\left(\Delta\equiv\|Z^{[m]}-S'\|\geqslant 2bz\right)\leqslant\mathbf{P}\left(|\xi_{\nu(m)}|>z\right)+\left(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z)\right)^b$$
$$\forall z\geqslant v,\ \forall b\geqslant m. \qquad (13)$$

Доказательство. Нетрудно понять, что

$$\Delta\leqslant\sum_{k\leqslant m}|\mathbf{M}\xi_{\nu(k)}|+\sum_{k\leqslant m}|\xi_{\nu(k)}|\leqslant 2mv \text{ при } |\xi_{\nu(m)}|\leqslant v. \qquad (14)$$

Если же $|\xi_{\nu(m)}|>v$, то по аналогии с леммой 15

$$\|Z^{[m]}-S'\|\leqslant\sum_{j\neq\nu(1),\ldots,\nu(m-1)}|\xi_j^{(v)}|\sum_j\mathbf{M}|\xi_j^{(v)}|. \qquad (15)$$

Повторяя вывод леммы 22 и применяя формулу (15) вместо леммы 15, получим, что $\mathbf{P}(\Delta\geqslant 2bz,\ |\xi_{\nu(m)}|>v)$ не превосходит правой части в (13). Из этого факта и (14) вытекает требуемое утверждение. □

Если теперь в доказательстве леммы 24 заменить S на $Z^{[m]}$ и использовать лемму 25 вместо леммы 22, то легко получается

Лемма 26. *При справедливости условий леммы* 22

$$\mathbf{P}(\|Z^{[m]}-W\|\geqslant x_0+8bz)\leqslant \mathbf{P}(\|S'-W\|\geqslant x_0)+ \\ +\mathbf{P}(|\xi_{\nu(m)}|>z)+(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b \tag{16}$$

при всех $x_0>0$, $z\geqslant v$ *и* $b\geqslant m$.

Теорема 5, очевидно, следует из лемм 18, 21 и 26.

Лемма 27.

$$\mathbf{P}(|\xi_{\nu(m)}|>z)\leqslant(\sum\mathbf{P}(|\xi_j|>z))^m/m!.$$

Это известное утверждение легко доказывается индукцией по m.

Доказательство следствий 1 и 2. Не уменьшая общности, будем предполагать, что

$$\mathscr{L}(H)/mH(z)\leqslant 1, \tag{17}$$

так как в противном случае правые части в неравенствах (3) и (4) больше 1. Далее, из леммы 27 и неравенства Чебышева (1) вытекает, что

$$\mathbf{P}(|\xi_{\nu(m)}|>z)\leqslant \mathrm{e}^{-1}(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/mH(z))^m, \tag{18}$$

если учтем еще, что $m!>\mathrm{e}^{-1}m^m/\mathrm{e}^m$. Из (17) и (18) следует

$$(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b+\mathbf{P}(|\xi_{\nu(m)}|>z)\leqslant(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/mH(z))^m \text{ при } b=2m. \tag{19}$$

Неравенство (19) и теорема 5 дают требуемые утверждения. □

Приступим к выводу теорем 6—8. Обозначим через μ_j — индикатор события $\{|\xi_j|>v\}$, т. е.

$$\{\mu_j=1\}=\{\mu_j\neq 0\}=\{|\xi_j|>v\}=\{\xi_j^{(v)}\neq 0\}. \tag{20}$$

Введем в рассмотрение независимые последовательности $\{\xi_j\}$, $\{\mu_j^*\}$ и $\{\zeta_j\}$, каждая из которых состоит из независимых случайных величин. Причем будем предполагать, что при каждом j величина μ_j^* одинаково распределена с μ_j, а

$$\mathbf{P}(\zeta_j<x)=\mathbf{P}(\xi_j<x|\mu_j=0)\quad \forall x. \tag{21}$$

Положим

$$\zeta_j^*=\xi_j^{[v]}+\zeta_j\mu_j=\xi_j-\xi_j^{(v)}+\zeta_j\mu_j, \tag{22}$$

$$\xi_j^{[*]}=\zeta_j^*(1-\mu_j^*),\ \xi_j^*=\xi_j^{[*]}-\mathbf{M}\xi_j^{[*]}, \tag{23}$$

$$\zeta_j^{(*)}=\xi_j^{[v]}\mu_j^*-\zeta_j(1-\mu_j^*)\mu_j, \tag{24}$$

и будем пользоваться тождеством

$$\xi_j=\xi_j^{(v)}+\xi_j^{[*]}+\zeta_j^{(*)}, \tag{25}$$

которое вытекает из (22)—(24).

Лемма 28. *При каждом j случайные величины $\xi_j^{[*]}$ одинаково распределены с $\xi_j^{[v]}$. Кроме того, последовательность $\{\xi^{(v)}\}$ не зависит от последовательности $\{\xi_j^{[*]}\}$, состоящей из независимых случайных величин.*

Доказательство. В силу (20)—(23) возможны два взаимно дополняющих варианта. Если $\mu_j=1$, то $\xi_j^{(v)}\neq 0$, $\xi_j^{[v]}=0$ и $\zeta_j^*=\zeta_j$ не зависит от $\xi_j^{(v)}$. Если же $\mu_j=0$, то $\xi_j^{(v)}=0$, $\zeta_j^*=\xi_j^{[v]}$, а следовательно, ζ_j^* одинаково распределена с ζ_j и не зависит от неслучайной $\xi_j^{(v)}=0$. Таким образом, ζ_j^* имеет то же распределение, что и ζ_j и не зависит от $\xi_j^{(v)}$. Далее, величина $\zeta_j^*(1-\mu_j^*)$ одинаково распределена с $\zeta_j(1-\mu_j)$, а последняя по построению имеет то же распределение, что и $\xi_j^{[v]}$. □

Обозначим через S^* и $Z^{(*)}$ случайные процессы, которые получатся, если в определении процесса S случайные величины ξ_j заменить на ξ_j^* и $\zeta_j^{(*)}$ соответственно.

Лемма 29. *Случайный процесс S^* не зависит от процесса $S^{(v)}$ и одинаково распределен с процессом S'. При этом*

$$S = S^{(v)} + S^* + Z^{(*)}. \tag{26}$$

Доказательство. Требуемая независимость вытекает из леммы 28. Равенство (26) следует из тождеств (6) и (25). □

Лемма 30. *Если выполнено условие* (8), *то существует не зависящий от $S^{(v)}$ процесс W такой, что*

$$\mathbf{P}(\|S^* - W'\| > C(x + v\mathscr{H}(H_v))) \leqslant (1 + \mathscr{L}(H)/H(v))\,\mathrm{e}^{-x/v} \quad \forall x > 0. \tag{27}$$

Существование процесса W, удовлетворяющего (27), вытекает из леммы 18. Независящим от $S^{(v)}$ этот процесс можно сделать ввиду леммы 29. Аналогично из лемм 21 и 29 следует

Лемма 31. *При выполнении условий теоремы 7 существует независящий от $S^{(v)}$ процесс W такой, что*

$$\mathbf{P}(\|S^* - W'\| \geqslant Cx) \leqslant x^{-2}B^2\mathrm{e}^{-\lambda x} \quad \forall x > 0. \tag{28}$$

Лемма 32. *При всех $\lambda > 0$ и $x > 0$*

$$\mathbf{P}(\|Z^{(*)}\| \geqslant 2x) \leqslant 4\exp\left(-\lambda x + \lambda^2 \sum b_j(\lambda)\, p_j\right), \tag{29}$$

где

$$b_j(\lambda) = \mathbf{M}\left(\xi_j^{[v]}\right)^2 \exp\left(\lambda \left|\xi_j^{[v]}\right|\right), \quad p_j = P(|\xi_j| > v). \tag{30}$$

Доказательство. Ввиду определения процесса $Z^{(*)}$

$$\mathbf{P}(\|Z^{(*)}\| \geqslant 2x) = \mathbf{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}\left|\sum_{j<k}\zeta_j^{(*)}\right| \geqslant 2x\right) \leqslant P_1 + P_2, \tag{31}$$

где

$$P_1 \equiv P\left(\sup_{k\geqslant 1}\left|\sum_{j<k}\left(\xi_j^{[v]}\mu_j - \mathbf{M}\xi_j^{[v]}\mu_j^*\right)\right| \geqslant x\right), \tag{32}$$

$$P_2 \equiv P\left(\sup_{k\geqslant 1}\left|\sum_{j<k}\left(\zeta_j(1-\mu_j^*)\,\mu_j - \mathbf{M}\xi_j^{[v]}\mu_j^*\right)\right| \geqslant x\right) = P_1. \tag{33}$$

Последнее равенство следует из того факта, что случайные величины $\zeta_j(1-\mu_j^*)$, $\zeta_j^*(1-\mu_j^*)$ и $\xi_j^{[v]}$ одинаково распределены в силу леммы 28. Далее

$$P_1 \leqslant P_+ + P_-, \tag{34}$$

где

$$P_\pm = \mathbf{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}\left(\pm\sum_{j<k}\left(\xi_j^{[v]}\mu_j^* - \mathbf{M}\xi_j^{[v]}\mu_j^*\right)\right) > x\right). \tag{35}$$

Повторяя стандартный вывод экспоненциальных неравенств, получаем

$$\mathbf{P}_\pm \leqslant \prod_{j\geqslant 1}\mathbf{M}_j, \tag{36}$$

где

$$\mathbf{M}_j = \exp\left(\mp\lambda\mathbf{M}\xi_j^{[v]}\mu_j^*\right)\mathbf{M}\exp\left(\pm\lambda\xi_j^{[v]}\mu_j^*\right). \tag{37}$$

Полагая $\xi = \pm\xi_j^{[v]}$ и $p = p_j = \mathbf{P}(\mu_j^* = 1)$, находим

$$\mathbf{M}_j = \mathrm{e}^{-p\lambda\mathbf{M}\xi}\left(1 - p + p\mathbf{M}\mathrm{e}^{\lambda\xi}\right) \leqslant \mathrm{e}^{p\lambda\mathbf{M}\xi}\left(1 - p + p + p\lambda\mathbf{M}\xi + {}\right.$$
$$\left. {} + p\lambda^2\mathbf{M}\xi^2\mathrm{e}^{\lambda|\xi|}\right) \leqslant \exp\left(p\lambda^2\mathbf{M}\xi^2\mathrm{e}^{\lambda|\xi|}\right) = \exp\left(\lambda^2 b_j(\lambda)\,p_j\right). \tag{38}$$

Суммируя (31)—(38), получаем (29). □

Лемма 33.

$$\mathbf{P}(\|Z^{(*)}\| \geqslant 6z) \leqslant 4\left(\sigma_0^2(v)/zv\right)^{z/v} \quad \forall z > 0. \tag{39}$$

Доказательство. Поскольку $|\xi_j^{[v]}|\leqslant v$, то $b_j(\lambda)\leqslant \mathbf{M}\xi_j^2 e^{\lambda v}$ и из (7) и (29) имеем

$$\mathbf{P}(\|Z^{(*)}\|\geqslant 6z)\leqslant 4\exp(-3\lambda z+\lambda^2 e^{\lambda v}\sigma_0^2(v)). \tag{40}$$

Поскольку $\lambda^2 e^{\lambda v}\leqslant \lambda e^{2\lambda v}/v$, полагая в (40)

$$\lambda=(2v)^{-1}\ln(zv/\sigma_0^2(v)), \tag{41}$$

найдем (39), если только $\lambda>0$. Если же $\lambda\leqslant 0$, то из (41) вытекает (39), так как в этом случае правая часть в (39) больше единицы. □

Лемма 34. *Если выполнены условия теоремы* 7, *то*

$$\mathbf{P}(\|Z^{(*)}\|\geqslant 4z)\leqslant 4\exp(\lambda^2(v)\sigma_0^2(v)-\lambda(v)z)\quad \forall z>0. \tag{42}$$

Доказательство. Из (5) и (30) при $\lambda\leqslant\lambda(v)$ имеем

$$b_j(\lambda)\leqslant \mathbf{M}(\xi_j^{[v]})^2\exp(\ln(2+H(\xi_j^{[v]})/(\xi_j^{[v]})^2)=$$
$$+2\mathbf{M}(\xi_j^{[v]})^2+\mathbf{M}H(\xi_j^{[v]})\leqslant 3\mathbf{D}\xi_j. \tag{43}$$

Последнее неравенство в (43) вытекает из (10). Подставляя (43) в (29) при $x=2z$ и $\lambda=\lambda(v)/2$, получаем (42). □

Теорема 6 следует теперь из лемм 30, 33 и неравенства

$$\mathbf{P}(\|S-W'-S^{(v)}\|\geqslant x_0+Cz)=\mathbf{P}(\|S^*-W'+Z^{(*)}\|\geqslant$$
$$\geqslant x_0+Cz)\leqslant \mathbf{P}(\|S^*-W'\|\geqslant x_0)+\mathbf{P}(\|Z^{(*)}\|\geqslant Cz),$$

справедливого в силу леммы 29. Аналогично теорема 7 вытекает из (44) и лемм 31 и 34. Для доказательства следствия 3 надо воспользоваться леммой 16 при $x=2z$ и увеличить постоянную C в (9) и (11).

§ 5. ОЦЕНКИ В ТЕРМИНАХ СТЕПЕННЫХ МОМЕНТОВ

В данном параграфе рассматривается случай, когда $H(x)=x^\alpha$ и

$$L_\alpha\equiv\sum\mathbf{M}|\xi_j|^\alpha<\infty,\quad 2\leqslant\alpha<\infty. \tag{1}$$

Следствие 4. *Для любых чисел $\alpha\geqslant 2$ и $b\geqslant 1$ существует такой винеровский процесс W, что неравенство*

$$\mathbf{P}(|S-W|\geqslant C\alpha bx)\leqslant(L_\alpha/bx^\alpha)^b+\mathbf{P}(\max|\xi_i|>x) \tag{2}$$

справедливо при всех $x>0$.

Следствие 5. *В условиях следствия* 4

$$\mathbf{M}\|S-W\|^\alpha\leqslant(C\alpha)^\alpha L_\alpha. \tag{3}$$

Ранее неравенства, аналогичные (2) и (3), были получены в [9, теорема 5], но с худшей зависимостью от параметров α и b. Отметим, что в следствиях 4 и 5 не исключается случай, когда

$$t_\infty\equiv B^2\equiv\sum\mathbf{D}\xi_j=\infty. \tag{4}$$

Замечание 4. Воспользуемся соотношением

$$\mathbf{P}(\|S\|>(1+C\alpha)bx)\leqslant\mathbf{P}(\|W\|>bx)+\mathbf{P}(\|S-W\|>C\alpha bx). \tag{5}$$

Из (2) и (5) получаем, что

$$\mathbf{P}\left(\sup_{n\geqslant 1}\Big|\sum_{j\leqslant n}\xi_j\Big|>(1+C\alpha)bx\right)\leqslant 2\exp(-b^2x^2/2B^2)+$$
$$+(L_\alpha/bx^\alpha)^b+\sum\mathbf{P}(|\xi_j|>x)\quad\forall x=0. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что с точностью до постоянной C оценка (6) совпадает с соответствующим неравенством С. В. Нагаева — Д. Х. Фука (см. [16, следствие 3]). Таким образом, оценку (2) можно рассматривать как усиление неравенства (5), причем в (2) отсутствует («сокращается») слагаемое, зависящее от B, т. е. соответствующее «нормальной компоненте». В частности, неравенство (2) имеет смысл и при выполнении (4), в то время как соотношения (5) и (6) становятся тривиальными.

Если из процесса S «выбросить» $m-1$ наибольших скачков, то неравенство (2) можно усилить.

Следствие 6. *В условиях следствия 4 при всех натуральных m*

$$\mathbf{P}(\|Z^{[m]}-W\| \geqslant C\alpha m x) \leqslant (L_\alpha/mx^\alpha)^m \quad \forall x>0. \tag{7}$$

Выделим теперь из процесса S «ступенчатую составляющую» $S^{(v)}$.

Следствие 7. *Для любого $v>0$ существует независящий от $S^{(v)}$ винеровский процесс W, удовлетворяющий неравенству*

$$\mathrm{P}(\|S-W-S^{(v)}\| \geqslant C(\alpha v+x)) \leqslant 9e^{-x/v} \tag{8}$$

при всех таких x, что

$$x \geqslant L_\alpha/v^{\alpha-1} \quad \text{или} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2v. \tag{9}$$

Рассмотрим теперь более частный случай, когда

$$B^2 = \sum \mathbf{D}\xi_j = 1, \tag{10}$$

$$\forall j \quad \mathbf{M}|\xi_j|^\alpha \leqslant l^{\alpha-2}\mathbf{D}\xi_j. \tag{11}$$

Следствие 8. *Пусть выполнены условия* (10), (11) *и*

$$v^{\alpha-2} \geqslant l^\alpha \ln(2+v/l). \tag{12}$$

Тогда существует независящий от $S^{(v)}$ винеровский процесс W такой, что при всех $b \geqslant 0$

$$\mathbf{P}(\|S-W'-S^{(v)}\| \geqslant C(\alpha)(1+b)v) \leqslant (l/v)^b. \tag{13}$$

Следствие 9. *Пусть верны предположения* (10)—(12) *и дополнительно*

$$v^{2\alpha-2} \geqslant l^{2\alpha-4}\ln(2+v/l). \tag{14}$$

Тогда утверждение следствия 8 остается справедливым при замене в нем процесса W' на винеровский процесс W.

При некотором фиксированном n рассмотрим более простой процесс $S=S_n$, определенный во введении. Предположим дополнительно, что

$$\mathbf{M}|\zeta|^\alpha < \infty, \quad \alpha > 2. \tag{15}$$

В этом случае условие (11) справедливо при

$$l = l_{\alpha,n} = (\mathbf{M}|\zeta|^\alpha)^{1/(\alpha-2)}/n^{1/2} \geqslant n^{1/2}. \tag{16}$$

Обозначим

$$v_0(n) = ((\mathbf{M}|\zeta|^\alpha)^{\alpha/(\alpha-2)} \ln(n+1)/n^{\alpha/2})^{1/(\alpha+2)}, \tag{17}$$

$$v(n) = (\mathbf{M}|\zeta|^\alpha \ln^{1/2}(n+1)/n^{(\alpha-2)/2})^{1/(\alpha-1)} \ \text{при}\ \alpha \leqslant 4, \tag{18}$$

$$v(n) = v_0(n) \ \text{при}\ \alpha \geqslant 4. \tag{19}$$

Подставляя $v=v_0(n)$ в следствие 8 и $v=v(n)$ в следствие 9 и учитывая предположения (15)—(19), нетрудно понять, что при соответствующем выборе чисел b справедливо

Следствие 10. *Если $S=S_n$ и $v=v_0(n)$, то найдется независящий от $S^{(v)}$ винеровский процесс W такой, что*

$$\mathbf{P}(\|S-W'-S^{(v)}\| > C(\alpha)v) \leqslant 2(\mathbf{M}|\zeta|^\alpha)^{1/(\alpha-2)}/n^{1/2}. \tag{20}$$

Если же $v=v(n)$, то в (20) *процесс W' можно заменить на винеровский процесс W.*

З а м е ч а н и е 5. Неравенства вида (8), (13), (20) впервые изучались в [15]. Отметим, что при $\alpha<4$ оценка (20) точнее, чем соответствующие утверждения из следствий 3 и 4 работы [15]. Это усиление точности объясняется тем, что в [15] вместо $S^{(v)}$ использовался процесс более сложного вида.

Доказательство следствия 4. В силу определения класса $\mathscr{H}$ см. § 2 в рассматриваемом случае $H_v(x)=H(x)=x^\alpha$ и

$$\mathscr{K}(H_v)=\sum_{m\geqslant 1}2^{-m}\ln 2^{\alpha m}=C\alpha. \tag{21}$$

Пусть

$$x=4\alpha by,\quad z=4y,\quad v=\mathrm{e}(L_\alpha/b)^{1/\alpha}. \tag{22}$$

Заметим, что в этом случае

$$(1+b)e^{-4\alpha by/v}\leqslant(L_\alpha/by^\alpha)^b/2^\alpha, \tag{23}$$

$$(\mathrm{e}\mathscr{L}(H)/bH(z))^b\leqslant(L_\alpha/by^\alpha)^b/2^\alpha. \tag{24}$$

Подставляя (21)—(24) в утверждение теоремы 3, находим, что

$$\mathbf{P}(\|S-W\|\geqslant C\alpha(v+by))\leqslant(L_\alpha/by^\alpha)^b+\mathbf{P}(\max|\xi_j|>y). \tag{25}$$

Если $x=y\geqslant v/\mathrm{e}$, то (2) следует из (25). Если же $x<v/\mathrm{e}$, то неравенство (2) выполняется очевидным образом, так как правая часть в нем больше единицы ввиду (22). □

Совершенно аналогично из (21)—(24) и следствия 1 вытекает следствие 6.

Доказательство следствия 5. Из (2) при $b=2$ имеем

$$\mathbf{P}(\|S-W\|\geqslant C\alpha x)\leqslant(L_\alpha/x^\alpha)^2+\sum\mathbf{P}(|\xi_j|>x). \tag{26}$$

Воспользуемся теперь неравенством

$$\mathbf{M}|\zeta|^\alpha=\int_0^\infty\mathbf{P}(|\zeta|>x)\,dx^\alpha. \tag{27}$$

При $\zeta=\|S-W\|/C\alpha$ из (26) и (27) находим, что

$$\mathbf{M}\|S-W\|^\alpha/(C\alpha)^\alpha\leqslant A^\alpha+\int_A^\infty(L_\alpha/x^\alpha)^2\,dx^\alpha+$$
$$+\sum\int_0^\infty\mathbf{P}(|\xi_j|>x)\,dx^\alpha=A^\alpha+L_\alpha^2/A^\alpha+L_\alpha. \tag{28}$$

Последнее равенство в (28) вытекает из (27) при $\zeta=\xi_j$. Полагая $A^\alpha=$ $=L_\alpha$ в (28), получаем (3). □

Доказательство следствия 7. Если $x\leqslant 2v$, то неравенство (8) выполнено очевидным образом, так как правая часть в нем в этом случае больше единицы. Поэтому далее предполагаем справедливым левое неравенство в (9). Из этого факта и леммы 17 имеем

$$\sigma^2(v)\leqslant 4\sum\mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2\leqslant 4L_\alpha/v^{\alpha-2}\leqslant 4vx. \tag{29}$$

Далее, ввиду неравенств Гёльдера и Чебышева

$$\sigma_0^2(v)\leqslant\sum(\mathbf{M}|\xi_j|^\alpha)^{2/\alpha}\mathbf{M}|\xi_j|^{\alpha-2}/v^{\alpha-2}\leqslant\sum\mathbf{M}|\xi_j|^\alpha/v^{\alpha-2}=L_\alpha/v^{\alpha-2}\leqslant vx. \tag{30}$$

Воспользуемся теперь теоремой 6 и следствием 3, заменив в них x и z на $2x$ и $\mathrm{e}x$ соответственно. Учитывая (21), получаем

$$\mathbf{P}(\|S-W-S^{(v)}\|\geqslant C(\alpha v+x))\leqslant(1+L_\alpha/v^\alpha)\,\mathrm{e}^{-2x/v}+$$
$$+4(\sigma_0^2(v)/\mathrm{e}xv)^{x/v}+4\exp(-4x^2/\sigma^2(v)). \tag{31}$$

Подставляя (29) и (30) в (31), находим (8). □

Лемма 35. *Если выполнено* (11), *то утверждение теоремы* 7 *справедливо при*

$$\lambda(v)=c(\alpha)v^{-1}\ln(2+v/l). \tag{32}$$

Доказательство. Условие (11) совпадает с основным предположением теоремы 7 при $H(x)=x^{\alpha}/l^{\alpha-2}$. Следовательно, нам осталось доказать лишь, что

$$g(x)\equiv x^{-1}\ln(2+(x/l)^{\alpha-2})\geqslant c(\alpha)g(v)\quad \forall x\in(0,\ v]. \tag{33}$$

Но (33) легко проверить непосредственно, если разобрать два варианта: $x\geqslant 2l$ и $x\leqslant 2l$. □

Лемма 36. *Если справедливы предположения* (10) *и* (11), *то*

$$\sigma_0^2(v)\leqslant l^{\alpha}/v^{\alpha}\qquad \forall v>0, \tag{34}$$

$$\sigma^2(v)\leqslant 4l^{2(\alpha-2)}/v^{2(\alpha-2)}\quad \forall v>0. \tag{35}$$

Доказательство. Используя (11) и неравенство Чебышева, находим

$$\mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2=\mathbf{M}\{|\xi_j|^2;\ |\xi_j|>v\}\leqslant\mathbf{M}|\xi_j|^{\alpha}/v^{\alpha-2}\leqslant\mathbf{D}\xi_j(l/v)^{\alpha-2}. \tag{36}$$

Из (36) и леммы 17 немедленно следует, что

$$\sigma^2(v)\leqslant 4\sum(\mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2)^2/\mathbf{D}\xi_j\leqslant 4(l/v)^{2(\alpha-2)}\sum\mathbf{D}\xi_j. \tag{37}$$

Далее, опять воспользуемся неравенствами Гёльдера, Чебышева и (11). При всех j имеем

$$\mathbf{D}^{\alpha/2}\xi_j\leqslant\mathbf{M}|\xi_j|^{\alpha}\leqslant l^{\alpha-2}\mathbf{D}\xi_j, \tag{38}$$

$$\mathbf{P}(|\xi_j|>v)\leqslant\mathbf{M}|\xi_j|^{\alpha}/v^{\alpha}\leqslant l^{\alpha-2}\mathbf{D}\xi_j/v^{\alpha}. \tag{39}$$

Из (38) и (39) немедленно получаем

$$\forall j\quad \mathbf{D}\xi_j\leqslant l^2,\quad \mathbf{P}(|\xi_j|>v)\leqslant l^{\alpha}/v^{\alpha}. \tag{40}$$

Неравенство (40) показывает, что

$$\sigma_0^2(v)\equiv\sum\mathbf{D}\xi_j\mathbf{P}(|\xi_j|>v)\leqslant(l^{\alpha}/v^{\alpha})\sum\mathbf{D}\xi_j. \tag{41}$$

Подставляя равенство (10) в (41) и (37), находим (34) и (35) соответственно.

Доказательство следствия 8. Пусть до конца параграфа $c(\alpha)$ обозначает постоянную, введенную в (32) и (33). Положим

$$x=(\alpha/c(\alpha)+b/c(\alpha)+2)v,\quad z=(4c(\alpha)+b/c(\alpha)+4/c(\alpha))v. \tag{42}$$

Таким образом, ввиду (32) и (42)

$$(2+v/l)^{\alpha}e^{-\lambda(v)x}=(2+v/l)^{-b-2c(\alpha)}\leqslant(l/v)^b, \tag{43}$$

$$e^{(4c(\alpha)-z)\lambda(v)}=(2+v/l)^{-b-4}\leqslant(l/v)^b/16. \tag{44}$$

Применяя (12) и (42), находим

$$x^{-2}\leqslant v^{-2}/4\leqslant(v/l)^{\alpha}/4\ln(2+v/l)\leqslant(2+v/l)^{\alpha}/2. \tag{45}$$

Из (10), (43) и (45) получаем

$$x^{-2}B^2e^{-(\lambda v)x}\leqslant(l/v)^b/2. \tag{46}$$

Далее, используя (12), (32) и (34), нетрудно установить, что

$$2\lambda(v)\sigma_0^2(v)\leqslant 2c(\alpha)(l^{\alpha}/v^{\alpha+1})\ln(2+v/l)\leqslant 2c(\alpha)v. \tag{47}$$

Но из (44) и (47) немедленно вытекает

$$4\exp(2\lambda^2(v)\sigma_0^2(v)-\lambda(v)z)\leqslant(l/v)^b/4. \tag{48}$$

Подставив неравенства (46) и (48) в теорему 7, найдем требуемую оценку (13). □

Доказательство следствия 9. Ввиду (32), (35) и (14)

$$\sigma^2(v)\lambda(v)\leqslant 4(l/v)^{2(\alpha-2)}c(\alpha)v^{-1}\ln(2+v/l)\leqslant 4c(\alpha)v\leqslant z. \tag{49}$$

Из (44) и (49) имеем

$$4\exp(-z^2/\sigma^2(v))\leqslant 4e^{-z\lambda(v)}\leqslant(l/v)^b/4. \tag{50}$$

Воспользуемся теперь следствием 3, заменяя в нем теорему 7 более частным следствием 8. Находим, что требуемая оценка является суммой неравенств (46), (48) и (50) при x и z, определенных в (42).

§ 6. ОЦЕНКИ В ТЕРМИНАХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ

Пусть четная функция $H(\cdot)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4, т. е.

$$\forall j \quad \mathbf{M}H(\xi_j) \leqslant \mathbf{D}\xi_j, \tag{1}$$

$$0 \leqslant h(x) \equiv H(x)/x^2 \uparrow \text{ при } x \geqslant 0. \tag{2}$$

Предположим дополнительно, что

$$h_0(x) \equiv x^{-1}\ln(2+h(x)) \geqslant h_0(y)/K \quad \forall 0 \leqslant x \leqslant y, \tag{3}$$

где $K \geqslant 1$ — некоторая постоянная.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* (1)—(3), *а число* v *удовлетворяет неравенству*

$$B^2 \equiv \sum \mathbf{D}\xi_j \leqslant K^2 H(v). \tag{4}$$

Тогда существует такой винеровский процесс W, *что*

$$\mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant CKbv) \leqslant B^2/bH(v)h^b(v) + \mathbf{P}(\max|\xi_j| > v) \quad \forall b \geqslant 1. \tag{5}$$

Следствие 11. *Пусть выполнено условие*

$$\forall_j \quad \mathbf{M}\xi_j^2 \exp(|\lambda\xi_j|^\beta) \leqslant 3D\xi_j \tag{6}$$

где

$$0 \leqslant \beta \leqslant 1, \quad \lambda > 0. \tag{7}$$

Тогда при любом фиксированном $v > 0$ *найдется такой винеровский процесс* W, *что*

$$\mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant Cv) \leqslant 4B^2v^{-2}\exp(-(\lambda v)^\beta). \tag{8}$$

Следствие 12. *Пусть четная функция* $H_0(\cdot)$ *и положительные числа* K_0, x_0 *и* γ *удовлетворяют следующим условиям*:

$$\forall j \quad \mathbf{M}H_0(\xi_j) \leqslant K_0\mathbf{D}\xi_j, \tag{9}$$

$$0 \leqslant H_0(x)/x^{2+\gamma} \uparrow \textit{ при } x \geqslant 0, \textit{ где } \gamma > 0, \tag{10}$$

$$x^{-1}\ln H_0(x) \downarrow \textit{ при } x \geqslant x_0 \geqslant 0. \tag{11}$$

Тогда для любого v *такого, что* $H_0(v) \geqslant K_0v^2$, *можно построить так винеровский процесс* W, *что будет верно неравенство*

$$\mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant CKv) \leqslant 2B^2/H(v), \tag{12}$$

где постоянная K *зависит только от чисел* K_0, x_0 *и* γ.

Таким образом, следствие 12 содержит в качестве частного случая утверждение теоремы 4 из [6], где рассматривался простейший процесс $S = S_n$. Отметим еще, что в теореме 8 и следствиях 11 и 12 способ построения процесса W существенно зависит от числа $v > 0$.

При доказательстве теоремы 8 будем следовать схеме вывода теоремы 4 и будем использовать очевидное соотношение

$$\mathbf{P}(\|S-S'\| \neq 0) = \mathbf{P}(\max|\xi_j| > v) \tag{13}$$

вместо более точной, но и более сложной, оценки из леммы 22.

Лемма 37. *Если выполнены условия теоремы* 8, *то при всех* $b \geqslant 1$

$$\mathbf{P}(\|S'-W'\| \geqslant CKbv) \leqslant B^2/2bH(v)h^b(v). \tag{14}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что в силу (3)

$$\lambda(v) \equiv \min_{0<x\leqslant v} h_0(x) \geqslant h_0(v)/K. \tag{15}$$

Требуемое утверждение (14) вытекает из (15) и леммы 21 при $x = 4Kbv$, так как в этом случае

$$x^{-2}B^2e^{-\lambda(v)x/4} \leqslant (4bv)^{-2}B^2(2+h(v))^{-b}. \ \square$$

Лемма 38. *Если выполнены условия теоремы 8, то*

$$\mathbf{P}(\|W-W'\| \geqslant 8bv) \leqslant B^2/2bH(v)h^b(v). \tag{16}$$

Доказательство. Применяя неравенство Чебышева и учитывая (1) и (2), получаем

$$\mathbf{M}(\xi_j^{(v)})^2 = \mathbf{M}\{|\xi_j|^2; |\xi_j| > v\} \leqslant \mathbf{M}H(\xi_j)/h(v) \leqslant D\xi_j/h(v). \tag{17}$$

Из (17) и леммы 17 имеем

$$\sigma^2(v) \leqslant 4\sum(\mathbf{D}\xi_j/h(v))^2\,\mathbf{D}\xi_j = 4B^2/h^2(v). \tag{18}$$

Используя (18) и лемму 16, находим

$$\mathbf{P}(\|W-W'\| \geqslant 4Kbv) \leqslant 4\exp(-8b^2K^2v^2h(v)/B^2) \leqslant$$
$$\leqslant 4(B^2/8bK^2H(v)h(v))^b \quad \forall b \geqslant 1. \tag{19}$$

Из (4) и (19) вытекает (16). $\square$

Подставляя теперь неравенства (13), (14) и (16) в лемму 24, немедленно получаем требуемое утверждение (5).

Доказательство следствия 11. Из (6)—(7) вытекает справедливость всех условий теоремы 8 при

$$H(x) = x^2\exp(|\lambda x|^\beta)/3 \text{ и } K = C \geqslant 2. \tag{20}$$

Кроме того, будем считать, что выполнено условие (4) и

$$4B^2 \leqslant v^2\exp((\lambda v)^\beta) = 3H(v), \tag{21}$$

поскольку в противном случае правая часть в (8) больше единицы. Далее, используя (1) и неравенство Чебышева, имеем

$$\mathbf{P}(\max|\xi_j| > v) \leqslant \sum \mathbf{M}H(\xi_j)/H(v) \leqslant B^2/H(v). \tag{22}$$

Учитывая (20)—(22), из теоремы 8 при $b=3$ находим (8). $\square$

Доказательство следствия 12. Нам достаточно убедиться, что предположения (9)—(11) влекут справедливость условий (1)—(3) теоремы 8 при

$$H(x) = H_0(x)/K_0 \text{ и } h(x) = H_0(x)/K_0x^2. \tag{23}$$

При этом нужно лишь проверить, что из (10) и (11) вытекает (3) при некотором K, зависящем от K_0, x_0 и $\gamma > 0$.

Заметим, что в силу (10) существует такое x_*, что

$$h(x_*) \geqslant 2, \quad K_0x_*^2 \geqslant 2, \tag{24}$$

$$(H_0(x_*)/x_*^{2+\gamma/2})^{1-\rho} \geqslant K_0 \text{ при } \rho = \gamma/(4+\gamma) > 0. \tag{25}$$

Ввиду (24)

$$H_0(x) = K_0x^2h(x) \geqslant 2 + h(x) \quad \forall x \geqslant x_*, \tag{26}$$

а из (25) при тех же x вытекает

$$h(x) = H_0^\rho(x)(H_0(x)/x^{2+\gamma/2})^{1-\rho}/K_0 \geqslant H^\rho(x). \tag{27}$$

Из (26) и (27) имеем

$$h_0(x) \geqslant x^{-1}\ln h(x) \geqslant \rho x^{-1}\ln H_0(x) \geqslant \rho h_0(x) \quad \forall x \geqslant x_*. \tag{28}$$

Поскольку $h(x)$ монотонно возрастает в силу (10), очевидно

$$x^{-1}\ln 2 \leqslant h_0(x) \leqslant x^{-1}\ln(2+h(x_*)) \quad \forall x \in (0, x_*]. \tag{29}$$

Так как функции x^{-1} и $x^{-1}\ln H_0(x)$ монотонны ввиду (11), то из (28) и (29) нетрудно извлечь (3) при $K = \ln(2+h(x_*))/\rho\ln 2$.

Таким образом, следствие 12 вытекает из теоремы 8 при $b=1$ и $H(x)$, определенной в (23), поскольку мы можем всегда предполагать, что $2B^2 \leqslant H(v)$, так как в противном случае правая часть в (12) больше единицы. □

§ 7. ОЦЕНКИ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ПОПАДАНИЯ В МНОЖЕСТВА

Целью настоящего параграфа является получение оценок для вероятностей вида $\mathbf{P}(S \in A)$, где A — некоторое множество из σ-алгебры $\mathscr{B}$ борелевских множеств пространства $\mathscr{R}(T)$, которому принадлежат траектории процессов S и W. Ключевую роль при этом будет играть следующее известное

Предложение 1. *Если процессы S и W заданы на одном вероятностном пространстве, то для всех борелевских $A \in \mathscr{R}(T)$*

$$\mathbf{P}(S \in A) \leqslant \mathbf{P}(W \in A^{(\varepsilon)}) + \mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{1}$$

где символ $A^{(\varepsilon)}$ обозначает ε-окрестность множества A.

Введем в рассмотрение функцию

$$\Lambda(\varepsilon) = \sup_{A \in \mathscr{B}} \{\mathbf{P}(S \in A) - \mathbf{P}(W \in A^{(\varepsilon)})\}, \tag{2}$$

которая, как отмечено в [17], является удобной характеристикой близости между распределениями процессов S и W. В частности [1], величина

$$\Lambda = \min\{\varepsilon\colon\ \Lambda(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\}, \tag{3}$$

называется *расстоянием Прохорова* между распределениями процессов S и W. Из (1) и (2) легко выводится известное

Предложение 2. *Если процессы S и W заданы на одном вероятностном пространстве, то*

$$\Lambda(\varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant \varepsilon) \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{4}$$

Таким образом, подставив в (1) или (4) любую из полученных выше оценок для $\mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant \varepsilon)$, мы автоматически получим оценки для вероятностей $\mathbf{P}(S \in A)$ и расстояний $\Lambda(\varepsilon)$ и Λ. Мы не будем перечислять результаты, которые при этом получатся. Отметим лишь один частный случай следствия 5 и соотношений (2) и (3).

Следствие 13. *Для всех $\alpha \geqslant 2$*

$$\Lambda(\varepsilon) \leqslant (C\alpha)^\alpha L_\alpha/\varepsilon^\alpha \quad \forall \varepsilon > 0, \tag{5}$$

$$\Lambda \leqslant C\alpha L_\alpha^{1/(\alpha+1)}. \tag{6}$$

В [9] оценки (5) и (6) были получены с α^2 вместо α.

Остановимся теперь на оценках снизу. По аналогии с теоремой 1 в [14] далее доказывается простая

Теорема 9. *Для всех $x \geqslant 2\varepsilon \geqslant 0$*

$$\Lambda(\varepsilon) \geqslant \mathbf{P}(\max|\xi_j| \geqslant x) - \mathbf{P}(\max|\eta_j| \geqslant x - 2\varepsilon), \tag{7}$$

где $\eta_j = W(t_j) - W(t_{j-1})$.

З а м е ч а н и е 6. Из (7) вытекает, что

$$\Lambda(\varepsilon) \geqslant (1/2)\mathbf{P}(\max|\xi_j| \geqslant 4\varepsilon), \tag{8}$$

если только

$$\mathbf{P}(\max|\eta_j| \leqslant 2\varepsilon) \leqslant (1/2)\mathbf{P}(\max|\xi_j| \geqslant 4\varepsilon). \tag{9}$$

Поскольку величины $\{\eta_j\}$ имеют нормальные распределения, неравенства (8) и (9) имеют место достаточно часто. В частности, все полученные в работе оценки будут неулучшаемыми каждый раз, когда правая часть в них лишь на константу отличается от $\mathbf{P}(\max|\xi_j| \geqslant z)$.

Отметим еще, что теорема 9 содержит в явном виде неравенство, которое фактически использовалось рядом авторов при доказательстве неулучшаемости неравенства (6).

Обозначим через $\Lambda^{[m]}(\varepsilon)$ величину, которая получится, если в определении (4) заменить S на $Z^{[m]}$, т. е. если у процесса S «выбросить» $m-1$ наибольших скачков. Нетрудно понять, что в этом случае сохранятся все проведенные выше в этом параграфе рассуждения, если в них использовать $Z^{[m]}$ и $|\xi_{\nu(m)}|$ вместо S и $|\xi_{\nu(1)}|=\max|\xi_j|$. В частности, из следствия 6 вытекает

Следствие 14. *Для всех* $\alpha\geqslant 2$, $m\geqslant 1$ *и* $\varepsilon>0$

$$\Lambda^{[m]}(\varepsilon)\leqslant((C\alpha m)^{\alpha}L_{\alpha}/\varepsilon^{\alpha})^{m}. \tag{10}$$

Как и следовало ожидать, оценка (10) при $m>1$ точнее, чем (5).

Приступим к изучению оценок для разности

$$\Delta(A)=|\mathbf{P}(S\in A)-\mathbf{P}(W\in A)|. \tag{11}$$

Мы будем использовать известное

Предложение 3. *Для любого борелевского* A

$$\Delta(A)\leqslant\mathbf{P}(W\in A'^{(\varepsilon)})+\Lambda(\varepsilon)\quad\forall\varepsilon>0, \tag{12}$$

где через $A'^{(\varepsilon)}$ *обозначена* ε*-окрестность границы множества* A.

Предположим теперь, что множество A имеет липшицеву границу [5], т. е.

$$\mathbf{P}(W\in A'^{(\varepsilon)})\leqslant\mathscr{K}_A\varepsilon\quad\forall\varepsilon>0. \tag{13}$$

Из (4), (12) и (13), очевидно, вытекает

Предложение 4. *Если выполнено условие* (13), *то*

$$\Delta(A)\leqslant\mathscr{K}_A\varepsilon+\mathbf{P}(\|S-W\|\geqslant\varepsilon)\quad\forall\varepsilon>0. \tag{14}$$

Неравенство (14) лежит в основе получения большинства оценок для $\Delta(A)$ в принципе инвариантности. В частности, из (5) и (14) при $\varepsilon=\alpha(L_\alpha/\mathscr{K}_A)^{1/(\alpha+1)}$ вытекает

Следствие 15. *Если выполнено условие* (13), *то*

$$\Delta(A)\leqslant C\alpha(\mathscr{K}_A^{\alpha}L_{\alpha})^{1/(\alpha+1)}\quad\forall\alpha\geqslant 2. \tag{15}$$

Поскольку неравенство (5) неулучшаемо, естественно было ожидать неулучшаемости и оценки (15). Но на самом деле справедливо более точное утверждение.

Теорема 10. *Если выполнено условие* (13) *и* $L_\alpha<\infty$ *при некотором* $\alpha\geqslant 2$, *то*

$$\Delta(A)\leqslant C\alpha\mathscr{K}_A L_\alpha^{1/\alpha}(\ln(2+1/\mathscr{K}_A L_\alpha^{1/\alpha}))^{1-1/\alpha}. \tag{16}$$

При $\alpha\leqslant 4$ это утверждение было доказано в [14].

Замечание 7. В [5] приведен принадлежащий С. В. Нагаеву пример, который показывает, что оценка (16) неулучшаема с точностью до логарифмического множителя.

Избавимся теперь от логарифма в (16). Для этого нам потребуется более жесткое ограничение, чем $L_\alpha<\infty$.

Теорема 11. *Пусть выполнено условие* (13) *и*

$$\forall j\quad \mathbf{M}|\xi_j|^{\alpha}\leqslant l^{\alpha-2}\mathbf{D}\xi_j, \tag{17}$$

причем

$$l\leqslant 1,\quad \alpha\geqslant 2,\quad B^2=\sum\mathbf{D}\xi_j=1. \tag{18}$$

Тогда

$$\Delta(A)\leqslant C(\alpha)\mathscr{K}_A\ln(1+1/\mathscr{K}_A)\,l^{(\alpha-2)/\alpha}. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь простейший случай из § 1.

Следствие 16. *Если* $S=S_n$ *и справедливо* (13), *то*

$$\Delta(A)\leqslant C(\alpha)\mathscr{K}_A\ln(1+1/\mathscr{K}_A)\,(\mathbf{M}|\zeta|^{\alpha})^{1/\alpha}/n^{(\alpha-2)/2\alpha}. \tag{20}$$

Отметим, что в теоремах 10 и 11 удалось усилить неравенство (15) благодаря тому, что вместо предложения 4 использовалось

Предложение 5. *Пусть случайные процессы S и W заданы на одном вероятностном пространстве таким образом, что процесс W не зависит от некоторой случайной величины $\varepsilon_0 \geqslant 0$. Тогда при выполнении* (13)

$$\Delta(A) \leqslant \mathscr{K}_A \mathbf{M}\varepsilon_0 + \mathbf{P}(\|S-W\| \geqslant \varepsilon_0). \tag{21}$$

Для доказательства достаточно воспользоваться неравенством (14) при каждом фиксированном $\varepsilon = \varepsilon_0$, что можно сделать благодаря независимости ε_0 и W. Таким образом, оценка (21) оказывается математическим ожиданием от (14) при $\varepsilon = \varepsilon_0$.

Впервые предложение 5 применялось в [14, 18] в дополнение к методу одного вероятностного пространства Скорохода. В данной работе будет использован следующий частный случай этого утверждения при $\varepsilon_0 = \varepsilon + \|S^{(v)}\|$.

Предложение 6. *Пусть случайный процесс W не зависит от $S^{(v)}$ при некотором $v > 0$. Тогда при выполнении* (13)

$$\Delta(A) \leqslant \mathscr{K}_A(\varepsilon + \mathbf{M}\|S^{(v)}\|) + \mathbf{P}(\|S-W-S^{(v)}\| > \varepsilon) \tag{22}$$

для любого неслучайного $\varepsilon > 0$.

Чтобы вывести (22) из (21), надо положить $\varepsilon_0 = \varepsilon + \|S^{(v)}\|$ и воспользоваться неравенством $\|S-W\| \leqslant \|S-W-S^{(v)}\| + \|S^{(v)}\|$.

Приступим к доказательству теорем 9—11.

Доказательство теоремы 9. Обозначим

$$A(x) = \{u \in \mathscr{R}(T):\ \max|u(t_j)-u(t_{j-1})| \geqslant x\} \tag{23}$$

и воспользуемся неравенством

$$|u_0(t_k)-u_0(t_{k-1})| \geqslant |u(t_k)-u(t_{k-1})| - 2\|u_0-u\|, \tag{24}$$

справедливым для всех траекторий $u_0, u \in \mathscr{R}(T)$. Из (23) и (24) вытекает включение

$$A^{(\varepsilon)}(x) \subset A(x-2\varepsilon). \tag{25}$$

Таким образом, используя определение (2) величины $\Lambda(\varepsilon)$ и учитывая (25), находим

$$\begin{aligned}\Lambda(\varepsilon) &\geqslant \mathbf{P}(S\in A(x)) - \mathbf{P}(W \in A^{(\varepsilon)}(x)) \geqslant \\ &\geqslant \mathbf{P}(S \in A(x)) - \mathbf{P}(W\in A(x-2\varepsilon)).\end{aligned} \tag{26}$$

Осталось заметить, что (26) совпадает с (7). □

Доказательство теоремы 10. Прежде всего заметим, что из леммы 15 и неравенства Чебышева вытекает оценка

$$\mathbf{M}\|S^{(v)}\| \leqslant 2\sum \mathbf{M}|\xi_j^{(v)}| \leqslant 2L_\alpha/v^{\alpha-1}. \tag{27}$$

Положим

$$\begin{aligned}&E = 2 + 1/\mathscr{K}_A L_\alpha^{1/\alpha}, \quad v = (L_\alpha/\ln E)^{1/\alpha},\\ &x = v\ln E = L_\alpha/v^{\alpha-1}, \quad \varepsilon = \alpha v + x\end{aligned} \tag{28}$$

и воспользуемся следствием 7 при x и v из (28). Получаем

$$\mathbf{P}(\|S-W-S^{(v)}\| \geqslant C(\alpha v + x)) \leqslant 9e^{-x/v} = 9/E \leqslant 9\mathscr{K}_A L_\alpha^{1/\alpha}. \tag{29}$$

Поскольку в следствии 7 винеровский процесс W не зависит от $S^{(v)}$, мы можем применить предложение 6 при $\varepsilon = C(\alpha v + x)$. Подставляя соотношения (27)—(29) в (22), находим (16).

Доказательство теоремы 11. Положим

$$b = (\alpha-2)/2 + \ln(1+1/\mathscr{K}_A), \quad v = el^{1-2/\alpha} = xl. \tag{30}$$

Можно проверить, что при указанных l и v выполнены все условия следствия 9, поскольку в этом случае

$$v^{-(\alpha+2)}l^{\alpha}\ln(2+v/l)=e^{-(\alpha+2)}x^{2}\ln(2+x)\leqslant 1,$$
$$v^{-(2\alpha-2)}l^{2\alpha-4}\ln(2+v/l)=e^{-(2\alpha-2)}x^{-(\alpha-1)}\ln(2+x)\leqslant 1,$$

так как $l\leqslant 1$ в силу (18). Применяя следствие 9 при b и v из (30), находим

$$\mathbf{P}(\|S-W-S^{(v)}\|\geqslant C(\alpha)(1+b)v)\leqslant e^{-b}l^{2b\alpha}\leqslant \mathcal{K}_{A}v. \tag{31}$$

Кроме того, в этом случае

$$L_{\alpha}\leqslant l^{\alpha-2}\leqslant v^{\alpha},\quad \mathbf{M}\|S^{(v)}\|\leqslant 2v, \tag{32}$$

ввиду (17), (18) и (30). При выводе второго неравенства в (32) использовано также (27). Поскольку процесс W в следствии 9 не зависит от $S^{(v)}$, мы можем применить предложение 6. Подставляя (31) и (32) в (22) при $\varepsilon=C(\alpha)(b+1)v$, находим требуемую оценку (19).

Неравенство (20) вытекает из (19), если вспомнить, что при $S=S_n$ мы должны положить

$$l=l_{\alpha,n}=(\mathbf{M}|\zeta|^{\alpha})^{1/(\alpha-2)}/n^{1/2}.$$

Этот факт отмечался перед следствием 10.

§ 8. ОЦЕНКИ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ С УЧЕТОМ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ

Рассмотрим теперь вопрос об оценивании относительной погрешности

$$\delta_S(A)=|\mathbf{P}(S\in A)/\mathbf{P}(W\in A)-1|, \tag{1}$$

где, по-прежнему, A — некоторое множество в пространстве траекторий $\mathcal{R}(T)$. Из предложения 3, очевидно, вытекает полезное

Предложение 7. *Для любого борелевского A и всех $\varepsilon>0$*

$$\delta_S(A)\leqslant[\mathbf{P}(W\in A'^{(\varepsilon)})+\Lambda(\varepsilon)]/\mathbf{P}(W\in A). \tag{2}$$

Напомним, что величина $\Lambda(\varepsilon)$ из (2) оценивается в предложении 2. Можно также изучать более грубую, чем $\delta_S(A)$, характеристику

$$\delta_S^{*}(A)=|\ln\mathbf{P}(S\in A)/\ln\mathbf{P}(W\in A)-1|. \tag{3}$$

Для ее оценивания будем пользоваться следующей простой оценкой, вытекающей из (1) и (3).

Предложение 8.

$$\delta_S^{*}(A)\leqslant\ln(1+\delta_S(A))/\ln\mathbf{P}^{-1}(W\in A). \tag{4}$$

По аналогии с [19] рассмотрим теперь частный случай, когда множество $A=A_y$ зависит от некоторого параметра $y>0$, причем

$$\mathbf{P}(W\in A_y)\geqslant c\exp(-(Ky)^2)\quad \forall y\geqslant y_0, \tag{5}$$
$$\mathbf{P}(W\in A_y'^{(\varepsilon)})\leqslant C\varepsilon(1+Ky)e^{K\varepsilon y}\mathbf{P}(W\in A_y)\quad \forall\varepsilon>0, \tag{6}$$

при некоторых $K>0$ и $y\geqslant y_0\geqslant 0$. Простейшие примеры таких множеств будут разобраны в следствии 17.

Предположим, что

$$0<B^2\equiv\sum\mathbf{D}\xi_j<\infty, \tag{7}$$

и введем в рассмотрение нормированную случайную ломаную

$$Z(t)=S(tB^2)/B,\quad t\in T\equiv[0,\ 1]. \tag{8}$$

Теорема 12. *Пусть выполнены условия* (5)—(7) *и*

$$\forall j\quad \mathbf{M}\xi_j^2\exp(|\lambda\xi_j|^{\beta})\leqslant 3\mathbf{D}\xi_j \tag{9}$$

при некоторых $\beta \in (0, 1]$ *и* $\lambda > 0$. *Тогда при* $y \geqslant y_0$ *и*

$$\varepsilon = (\lambda B)^{-1}\{(Ky)^2 + 3\ln(2+\lambda B)\}^{1/\beta} \tag{10}$$

справедливы неравенства

$$\delta_Z(A_y) \leqslant C\varepsilon(1+Ky)\,e^{\varepsilon K y}, \tag{11}$$

$$\delta_Z^*(A_y) \leqslant C\varepsilon/(1+Ky). \tag{12}$$

Следствие 17. *Условия* (5) *и* (6) *теоремы* 12 *выполнены при* $K = 1$ *и* $y \geqslant 0$ *для следующих двух семейств множеств*:

$$A_y = A_{y,0} \equiv \left\{u \in \mathscr{R}[0, 1]\colon \max_{t\in[0,1]} |u(t)| > y\right\}, \tag{13}$$

$$A_y = A_{y,+} \equiv \left\{u \in \mathscr{R}[0, 1]\colon \max_{t\in[0,1]} u(t) > y\right\}. \tag{14}$$

Рассмотрим определенный во введении простейший процесс $Z = S_n$ и предположим, что

$$\mathbf{M}\exp(h|\zeta|^\beta) < \infty \text{ при } \beta \in (0, 1] \text{ и } h > 0. \tag{15}$$

Следствие 18. *Пусть* $Z = S_n$ *и выполнены условия* (5)—(7) *и* (15). *Тогда при* $B^2 = n$ *и некотором* $\lambda > 0$ *справедливы все утверждения теоремы* 12. *В частности, если* $y = y_n$ *и* $n \to \infty$, *то*

$$\delta_{S_n}(A_{y_n}) = O\left((1+y_n)\,n^{-1/2}(\ln n)^{1/\beta}\right) \quad \text{при} \quad y_n^2 = O(\ln n), \tag{16}$$

$$\delta_{S_n}(A_{y_n}) = O\left(y_n^{1+2/\beta}/n^{1/2}\right) \quad \text{при} \quad \ln n \leqslant y_n^2 = O\left(n^{\beta/(\beta+2)}\right), \tag{17}$$

$$\delta_{S_n}^*(A_{y_n}) = O\left(y_n^{2/\beta-1}/n^{1/2}\right) \quad \text{при} \quad y_n^2 \geqslant \ln n. \tag{18}$$

З а м е ч а н и е 8. Таким образом, если выполнены условия следствия 18 и $y_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то

$$\delta_{S_n}(A_{y_n}) \to 0 \quad \text{при} \quad y_n = o\left(n^{\beta/2(2+\beta)}\right), \tag{19}$$

$$\delta_{S_n}^*(A_{y_n}) \to 0 \quad \text{при} \quad y_n = o\left(n^{\beta/2(2-\beta)}\right). \tag{20}$$

При этом теорема 12 позволяет распространить утверждения (16)—(20) на случай схемы серий с естественной заменой n на B_n^2 (см. [19]).

Из оценок (16) и (17) при $\beta = 1$ вытекает также утверждение теоремы 1 в [20], поскольку в этом случае

$$\delta_{S_n}(A_{y_n}) = O\left((y_n^3 + y_n \ln n)/n^{1/2}\right) = o\left(y_n/n^{1/6}\right)$$

при $1 \leqslant y_n = o(n^{1/6})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 12. Заменяя в предложениях 2 и 7 процесс S на Z, имеем

$$\delta_Z(A) \leqslant [\mathbf{P}(W \in A'^{(\varepsilon)}) + \mathbf{P}(\|Z - W\| \geqslant \varepsilon)]/\mathbf{P}(W \in A). \tag{21}$$

Далее, в силу (8)

$$\mathbf{P}(\|Z - W\| \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(\|S - W_0\| \geqslant \varepsilon B), \tag{22}$$

где $W_0(t) = BW(t/B^2)$ — снова винеровский процесс. Таким образом, условия (9) и (10) позволяют воспользоваться утверждением следствия 11 и получить

$$\mathbf{P}(\|S - W_0\| \geqslant \varepsilon B) \leqslant 4\varepsilon^{-2}\exp(-(\lambda\varepsilon B)^2). \tag{23}$$

Подставляя (5)—(6) и (22)—(23) в (21), находим

$$\delta_Z(A) \leqslant C\varepsilon(1+Ky)\,e^{K\varepsilon y} + \exp\{(Ky)^2 - (\lambda\varepsilon B)^\beta\}/c\varepsilon^2 \tag{24}$$

при всех $\varepsilon > 0$ и $y \geqslant y_0$. Выбирая теперь в (24) число $\varepsilon > 0$ по формуле (10), немедленно приходим к (11), так как в этом случае

$$\exp\{(Ky)^2 - (\lambda\varepsilon B)^\beta\} = (2+\lambda B)^{-3} \leqslant \varepsilon^3.$$

Из (11) и (4) вытекает (12). □

Доказательство следствия 17. Из явного вида распределения $\max_{t \in [01]} W(t)$ (см., например, [12, с. 371] имеем

$$\mathbf{P}(W \in A_{y,+}) = 2\int_y^{\infty} \varphi(x)\,dx \quad \forall y \geqslant 0, \tag{25}$$

$$\mathbf{P}(W \in A'^{(\varepsilon)}_{y,+}) = 2\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} \varphi(x)\,dx, \quad 0 \leqslant y-\varepsilon \leqslant y+\varepsilon < \infty, \tag{26}$$

где $\varphi(x)$ — плотность стандартного нормального распределения. Из (25) и (26) при всех $\varepsilon > 0$ и $y \geqslant 0$ находим

$$\mathbf{P}(W \in A'^{(\varepsilon)}_{y,0}) \leqslant 2\mathbf{P}(W \in A'^{(\varepsilon)}_{y,+}) \leqslant C\varepsilon e^{\varepsilon y}\varphi(y), \tag{27}$$

$$\mathbf{P}(W \in A_{y,0}) \geqslant \mathbf{P}(W \in A_{y,+}) \geqslant c\varphi(y)/(1+y). \tag{28}$$

Неравенства (27) и (28) влекут выполнение условий (5) и (6) для множеств из (13) и (14).

Чтобы доказать следствие 18, достаточно убедиться, что из (15) вытекает справедливость (9) при достаточно малом $\lambda > 0$. Но этот факт следует из теоремы Лебега, поскольку в данном случае

$$\mathbf{M}\zeta^2 \exp(|\lambda\zeta|^{\beta}) \to \mathbf{M}\zeta^2 = \mathbf{D}\zeta \text{ при } \lambda \to 0.$$

Таким образом, соотношения (16)—(18) оказываются частным случаем неравенств (10)—(12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Прохоров Ю. В.** Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей // Теория вероятностей и ее применения.— 1956.— Т. 1, № 2.— С. 177—238.
2. **Боровков А. А.** Сходимость распределений функционалов от случайных процессов // Успехи мат. наук.— 1972.— Т. 27, № 1.— С. 3—41.
3. **Биллингсли П.** Сходимость вероятностных мер.— М.: Наука, 1977.— 352 с.
4. **Скороход А. В.** Исследования по теории случайных процессов.— Киев: Изд-во Киевского ун-та, 1961.— 216 с.
5. **Боровков А. А.** О скорости сходимости в принципе инвариантности // Теория вероятностей и ее применения.— 1973.— Т. 18, № 2.— С. 217—234.
6. **Komlos J., Major P., Tusnady G.** An approximation of partial sums of independent RV's and sample DF. II.— Z. Wahr. verw. Gebiete.— 1976.— Bd 34, H. 1.— S. 33—58.
7. **Скороход А. В.** Об одном представлении случайных величин // Теория вероятностей и ее применения.— 1976.— Т. 21, № 3.— С. 645—648.
8. **Саханенко А. И.** Скорость сходимости в принципе инвариантности для разнораспределенных величин с экспоненциальными моментами // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1984.— Т. 3.— С. 4—49.
9. **Саханенко А. И.** Оценки в принципе инвариантности // Там же.— 1985.— Т. 5.— С. 27—44.
10. **Саханенко А. И.** Оценки погрешностей нормальной аппроксимации траекторий случайных блужданий: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук/АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т математики.— Новосибирск, 1985.— 305 с.
11. **Зайцев А. Ю.** О гауссовской аппроксимации сверток при выполнении многомерных аналогов условий неравенства Бернштейна // Препринт ЛОМИ Р-9-84.— Л., 1984.— 48 с.
12. **Гихман И. И., Скороход А. В.** Введение в теорию случайных процессов.— М.: Наука, 1965.— 656 с.
13. **Дуб Дж. Л.** Вероятностные процессы.— М.: Изд-во Иностр. лит., 1956.— 606 с.
14. **Саханенко А. И.** Об оценках скорости сходимости в принципе инвариантности // Тр. Ин-та/Ин-т математики СО АН СССР.— 1982.— Т. 1.— С. 72—78.
15. **Борисов И. С., Боровков А. А.** Аппроксимация второго порядка случайных ломаных в принципе инвариантности Донскера — Прохорова // Теория вероятностей и ее применения.— 1986.— Т. 31, № 2.— С. 225—245.
16. **Нагаев С. В., Фук Д. Х.** Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин // Там же.— 1971.— Т. 16, № 4.— С. 660—675.
17. **Боровков А. А., Саханенко А. И.** Об оценках скорости сходимости в принципе инвариантности для банаховых пространств // Там же.— 1980.— Т. 25, № 4.— С. 734—744.

18. **Саханенко А. И.** Оценки скорости сходимости в принципе инвариантности // Докл. АН СССР.— 1974.— Т. 219, № 5.— С. 1076—1078.
19. **Боровков А. А.** Граничные задачи, принцип инвариантности, большие уклонения // Успехи мат. наук, 1983.— Т. 83, № 4.— С. 227—254.
20. **Алешкявичене А. К.** Некоторые предельные теоремы для максимума модуля сумм независимых случайных величин. I // Литовск. мат. сб.— 1981.— Т. 21, № 2.— С. 9—36.

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ ТИПА БЕРГСТРЕМА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. В. НАГАЕВ, В. И. ЧЕБОТАРЕВ

В настоящей работе исследуется асимптотическое разложение для распределения нормы суммы независимых одинаково распределенных случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве. В этом разложении вместо традиционных полиномов Чебышева — Эджворта участвуют свертки распределения слагаемых с гауссовским. Соответственно остаточный член зависит только от третьего и четвертого моментов. Это существенно повышает точность аппроксимации, если старшие моменты велики. В конечномерном случае разложение такого типа рассматривалось Бергстремом [1]. Отметим, что полученная нами оценка остаточного члена является новой даже в одномерном случае. Практическое значение разложения типа Бергстрема должным образом еще не оценено.

Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство с нормой $|\cdot|$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины со значениями в H, $\mathbf{E}X_1=0$, T — ковариационный оператор X_1, $F_n(r)=\mathbf{P}\left(\left|n^{-1/2}\sum_1^n X_j\right|^2<r\right)$, Y_1 — гауссовская случайная величина со значениями в H и тем же самым ковариационным оператором, $\mathbf{E}Y_1=0$, $G(r)=\mathbf{P}(|Y_1|^2<r)$, F и Φ — распределения X_1 и Y_1 соответственно, $\beta_\mu=\mathbf{E}|X_1|^\mu$, $m_n=[n/4]+1$, $\bar\beta_\mu=\mathbf{E}(|X_1|^\mu;\ |X_1|\leqslant\sigma\sqrt{m_n})$.

В нашем случае предложенное Бергстремом разложение выглядит следующим образом:

$$F^{*n}=\sum_{\nu=0}^{k-1}C_n^\nu\Phi^{*(n-\nu)}*(F-\Phi)^{*\nu}+r_n^{(k)}, \tag{1}$$

где $r_n^{(k)}=(F-\Phi)^{*k}*\sum_{\nu=0}^{n-k}C_{\nu+k-1}^{k-1}\Phi^{*\nu}*F^{*(n-k-\nu)}$. Для $r_n^{(k)}$ в [1] получена оценка $O(n^{-k/2})$ при условии, что распределение F не сингулярно и $\beta_3<\infty$. Более того, Г. Бергстрем показал, что в одномерном случае из (1) следует разложение Эджворта, причем остаточный член имеет вид $o(n^{-(k-1)/2})$.

В настоящей работе мы получаем аналог разложения Бергстрема в бесконечномерном случае, однако для более узкого класса множеств, а именно, для шаров с центром в нуле.

Введем обозначения: σ^2 — собственные числа оператора T, $\sigma_j^2\geqslant\sigma_{j+}^2$, $j=1,2,\ldots$, $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис, состоящий из